

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 января 2010 года по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №5–2009» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «M2146» или «Ф2153». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений). Решения задач по математике и физике можно присылать также по электронным адресам math@kvant.info и phys@kvant.info соответственно.

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи M2149 и M2150 предлагались на Математической олимпиаде имени Леонарда Эйлера.

Задачи M2146–M2153, Ф2153–Ф2159

M2146. На координатной плоскости нарисовали 2008 графиков квадратных трехчленов. Может ли оказаться, что для каждого из них существует прямая, имеющая общие точки с любым графиком, кроме него?

Н.Агаханов, И.Богданов

M2147. В каждой клетке бесконечной клетчатой плоскости записано действительное число так, что все бесконечные в обе стороны горизонтальные и вертикальные последовательности чисел периодические. Докажите, что найдется бесконечно много горизонтальных последовательностей с различными наименьшими периодами тогда и только тогда, когда найдется бесконечно много вертикальных последовательностей с различными наименьшими периодами.

Е.Знак

M2148. По кругу выписаны числа 1, 2, 3, ..., 100 в некотором порядке. Петя вычислил 100 сумм всех троек соседних чисел и написал на доске наименьшую из этих сумм. Какое наибольшее число могло быть написано на доске?

П.Кожевников

M2149. В треугольнике ABC стороны AB и BC равны. Точка D внутри треугольника такова, что $\angle ADC = 2\angle ABC$. Докажите, что удвоенное расстояние от точки B до внешней биссектрисы угла ADC равно $AD + DC$.

С.Берлов

M2150. В стране Леонардии все дороги – с односторонним движением. Каждая дорога соединяет два города и не проходит через другие города. Департамент статистики вычислил для каждого города суммарное число

жителей в городах, откуда в него ведут дороги, и суммарное число жителей в городах, куда ведут дороги из него. Докажите, что хотя бы для одного города первое число оказалось не меньше второго.

Н.Гравин

M2151. Числовой треугольник

				1				
			1	1	1			
		1	2	3	2	1		
	1	3	6	7	6	3	1	
1	4	10	16	19	16	10	4	1
...								

составлен по следующему правилу. В первой строке одно число, равное 1. В k -й строке ($k = 2, 3, \dots$) записывается $2k - 1$ чисел, каждое из которых равно сумме трех чисел: числа, стоящего над ним, и двух его соседей в предыдущей строке (если некоторых из таких трех чисел нет, то они считаются равными 0). Докажите, что в среднем столбце не встретится чисел, дающих остаток 2 при делении на 3.

К.Каибханов

M2152*. Пара (p, q) различных простых чисел называется *особой*, если существует a , представимое в виде $a = x^p + y^p = z^q + t^q$ для некоторых натуральных x, y, z, t , но не представимое в виде $u^{pq} + v^{pq}$, где u и v – натуральные числа. Докажите, что любое простое число p входит в бесконечное число особых пар.

В.Сендеров

M2153*. Сумма телесных углов при вершинах выпуклого многогранника равна π . Докажите, что существует замкнутый маршрут по его ребрам, проходящий

через каждую его вершину ровно один раз. (Телесный угол измеряется площадью фигуры, отсекаемой соответствующим многогранным углом на единичной сфере. Площадь всей единичной сферы равна 4π .)

И. Богданов

Ф2153. По прямой дороге с постоянной скоростью v_0 бежит кролик. На расстоянии L от дороги находится лиса. В тот момент, когда кролик оказывается ближе всего к лисе, она его замечает и бросается в погоню. Скорость лисы такая же, как у кролика, но лиса бежит с «упреждением» – вектор скорости лисы направлен все время в точку, которая находится впереди кролика на расстоянии d от него. Найдите минимальное расстояние между участниками забега.

З. Рафаилов

Ф2154. На гладком горизонтальном столе покоится монета, другая такая же монета скользит по столу. После абсолютно упругого удара скорости монет оказались одинаковыми по величине. Найдите угол разлета монет.

А. Простов

Ф2155. Моль гелия находится в сосуде под поршнем при нормальных условиях. С газом проводят замкнутый процесс. В первой части процесса газ расширяется, при этом теплоемкость его остается постоянной и равной $C = 100$ Дж/К, затем газ охлаждают до начальной температуры при неизменном объеме и, наконец, изотермически сжимают до начального объема. В первой части процесса газ получил количество теплоты $Q = 1$ Дж. Найдите работу газа в этом процессе.

А. Теплов

Ф2156. Производят расчет «атома водорода», в котором минимальное расстояние между протоном и электроном составляет $d = 1$ мкм, а максимальное расстояние в 3 раза больше. Какой будет максимальная скорость электрона в таком «атоме»?

Р. Александров

Ф2157. Коаксиальный кабель состоит из центральной жилы диаметром $d = 1$ мм и проводящей оплетки диаметром $D = 5$ мм. Пространство между жилой и оплеткой заполнено диэлектриком с диэлектрической проницаемостью $\epsilon = 3$. Найдите емкость и индуктивность в расчете на 1 м такого кабеля, а также величину волнового сопротивления – при подключении резистора такой величины к концу куска кабеля не происходит отражения электромагнитной волны, бегущей вдоль него.

А. Сложнов

Ф2158. Конденсатор емкостью $C = 10$ мкФ, катушка индуктивностью $L = 1$ Гн и резистор сопротивлением $R = 300$ Ом соединены «звездой», а свободные выводы подключены к трем фазам сети напряжением $U = 220$ В и частотой $f = 50$ Гц. Найдите напряжение в общей точке элементов по отношению к «нулевому» проводу.

А. Зильберман

Ф2159. Экран освещен удаленным источником света. На пути светового пучка располагают линзу, склеенную из двух плосковыпуклых стеклянных линз. Диаметр первой линзы $D_1 = 5$ см, ее фокусное расстояние $F_1 = 20$ см, диаметр второй линзы $D_2 = 1$ см, ее фокусное расстояние $F_2 = 10$ см. Линзы склеены плоскими поверхностями, плоскость склейки параллельна плоскости экрана, главные оптические оси линз совпадают. На каком расстоянии от экрана нужно расположить эту линзу, чтобы на экране получилось яркое пятно минимального диаметра? Во сколько раз освещенность в центре этого пятна больше освещенности экрана без линзы?

З. Рафаилов

Решения задач М2124–М2130, Ф2138–Ф2144

М2124. Пусть $n \geq 3$ – натуральное число, а $x_1, x_2, \dots, x_n$ – положительные числа, удовлетворяющие равенствам

$$x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 = x_2^2 - x_2x_3 + x_3^2 = \dots$$

$$\dots = x_{n-1}^2 - x_{n-1}x_n + x_n^2 = x_n^2 - x_nx_1 + x_1^2.$$

При каких n можно утверждать, что числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ равны?

Ответ: в точности при нечетных n .

Если n четно, то набор $x_1 = a, x_2 = b, x_3 = a, x_4 = b, \dots, x_{n-1} = a, x_n = b$ удовлетворяет условию при любых a и b . Заметим, что возможны и другие наборы: например, при $n = 4$ условию удовлетворяет набор $x_1 = b + c, x_2 = b, x_3 = b + c, x_4 = c$, где b и c – любые числа.

Пусть теперь n нечетно. Без ограничения общности можно считать, что x_1 – наибольшее (или одно из наибольших) среди данных чисел. Тогда из равенства

$$x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 = x_2^2 - x_2x_3 + x_3^2$$

следует

$$x_1^2 - x_3^2 - x_1x_2 + x_2x_3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - x_3)(x_1 + x_3) - x_2(x_1 - x_3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - x_3)(x_1 + x_3 - x_2) = 0.$$

В силу выбора числа x_1 имеем $x_1 \geq x_2$; поэтому $x_1 - x_2 \geq 0$, значит, $x_1 + x_3 - x_2 > 0$. Отсюда следует, что $x_1 - x_3 = 0$, т.е. $x_3 = x_1$, и x_3 – также одно из наибольших среди данных чисел. Рассуждая далее таким же образом, получаем $x_5 = x_3, x_7 = x_5, \dots, x_n = x_{n-2}, x_2 = x_n, x_4 = x_2, \dots, x_{n-1} = x_{n-3}$. Таким образом, все данные n чисел равны.

Приведем также другое решение для нечетного n . Запишем исходные равенства в виде

$$\begin{cases} x_1(x_1 - x_2) = -x_3(x_2 - x_3), \\ x_2(x_2 - x_3) = -x_4(x_3 - x_4), \\ \dots \\ x_n(x_n - x_1) = -x_2(x_1 - x_2). \end{cases}$$

Предположим, что $x_1 - x_2 > 0$. Тогда, последовательно используя все равенства, получаем $x_2 - x_3 < 0$,

$x_3 - x_4 > 0$, $x_4 - x_5 < 0$, $x_5 - x_6 > 0$, ..., $x_n - x_1 > 0$, $x_1 - x_2 < 0$, что противоречит предположению. Аналогично приводится к противоречию предположение о том, что $x_1 - x_2 < 0$. Если же $x_1 - x_2 = 0$, то последовательно получаем $x_2 - x_3 = 0$, $x_3 - x_4 = 0$, ..., $x_n - x_1 = 0$, откуда $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

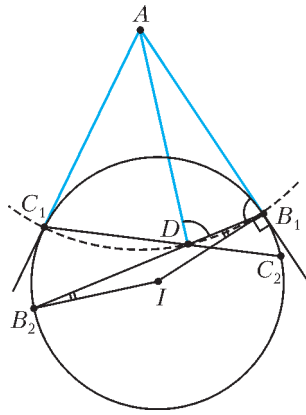
Отметим, что эта задача является обобщением одной из задач регионального этапа Всероссийской олимпиады этого года.

В.Сендеров

M2125. Вписанная в треугольник ABC окружность ω касается сторон CA и AB в точках B_1 и C_1 соответственно. Точка D , отличная от B_1 и C_1 , находится на расстоянии AC_1 от точки A . Прямые DB_1 и DC_1 пересекают второй раз окружность ω в точках B_2 и C_2 . Докажите, что B_2C_2 – диаметр окружности ω , перпендикулярный отрезку DA .

Пусть I – центр окружности ω .

Предположим вначале, что точка D лежит внутри окружности ω (см. рисунок). Так как $IB_1 \perp AB_1$, то $\angle IB_2B_1 + \angle ADB_1 = \angle IB_1B_2 + \angle AB_1D = 90^\circ$, откуда вытекает, что $IB_2 \perp AD$. Так же доказываем, что $IC_2 \perp AD$. Значит (поскольку B_2 и C_2 не совпадают), прямая B_2C_2 проходит через I и перпендикулярна AD , что и требовалось доказать.



Другие случаи расположения точки D можно рассмотреть аналогично.

Замечание. Используя обозначение $\angle(a, b)$ для угла от прямой a до прямой b ,

отсчитываемого против часовой стрелки ($\angle(a, b)$ определен с точностью до прибавления числа вида πk , где k – целое число), можно переписать решение, изложенное выше, так, чтобы оно не зависело от расположения точки D :

$$\begin{aligned} \angle(IB_2, B_1B_2) + \angle(B_1B_2, AD) &= \\ &= \angle(B_1B_2, IB_1) + \angle(AB_1, B_1B_2) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Отметим, что частный случай этой задачи предлагался на региональном этапе Всероссийской олимпиады.

Р.Женодаров, П.Кожевников

M2126. На вечеринке компанию из 20 человек требуется посадить за 4 стола. Рассадка называется удачной, если любые два человека, оказавшиеся за одним столом, являются друзьями. Выяснилось, что удачные рассадки существуют, причем при любой удачной рассадке за каждым столом сидят ровно по 5 человек. Каково наибольшее возможное количество пар друзей в этой компании?

Ответ: 160.

Если два человека не являются друзьями, то будем говорить, что они являются *недрузьями*. Общее число

пар людей в данной компании равно $\frac{20 \cdot 19}{2} = 190$, поэтому достаточно доказать, что минимальное число пар недругов равно 30.

Докажем, что меньше чем 30 пар недругов быть не могло. Пусть это не так. Тогда найдется человек A , у которого не более двух недругов (если у каждого человека не менее трех недругов, то число пар недругов не меньше чем $\frac{3 \cdot 20}{2} = 30$). Пусть A при некоторой

удачной рассадке оказался за столом T . По условию за столом T всего 5 человек. Так как у A не более двух недругов, то за одним из оставшихся трех столов все сидящие являются друзьями A . Значит, если пересадить A за этот стол (а в остальном рассадку не менять), то новая рассадка окажется удачной, но за столом T будут сидеть 4 человека, что противоречит условию.

Приведем пример, удовлетворяющий условию, в котором имеется ровно 30 пар недругов. Разобьем всех людей на 5 четверок, и пусть любая пара людей из одной четверки – недруги, а любая пара из разных четверок – друзья. В таком случае у каждого человека ровно 3 недруга, и всего имеется $\frac{3 \cdot 20}{2} = 30$ пар недругов. В описанной ситуации рассадка является удачной тогда и только тогда, когда люди из одной четверки оказываются за разными столами. Тем самым, удачные рассадки существуют, и при любой удачной рассадке за каждым столом окажется по одному человеку из каждой четверки, т.е. ровно 5 человек.

П.Кожевников

M2127. Внутри ветви гиперболы $x = \sqrt{y^2 + 1}$ расположены окружности $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$ так, что при каждом $n > 1$ окружность ω_n касается гиперболы в двух точках и касается окружности ω_{n-1} , а окружность ω_1 имеет радиус 1 и касается гиперболы в точке $(1; 0)$. Докажите, что для любого n радиус окружности ω_n равен натуральному числу.

Пусть точка $(x_n; 0)$ – центр окружности ω_n , а r_n – ее радиус. Из построения окружностей сразу вытекает, что $r_1 = 1$, $x_1 = 1 + r_1 = 2$ и

$$x_{n+1} - x_n = r_{n+1} + r_n \quad (1)$$

при $n \geq 1$ (рис. 1).

Окружность ω_n ($n \geq 2$) задается уравнением

$$(x - x_n)^2 + y^2 = r_n^2.$$

Подставив в это равенство $y^2 = x^2 - 1$, получим равенство, которому удовлетворяют абсциссы x точек пересечения окружности ω_n и гиперболы:

$$\begin{aligned} (x - x_n)^2 + x^2 - 1 &= r_n^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2x^2 - 2x_n x + x_n^2 - r_n^2 - 1 = 0. \quad (2) \end{aligned}$$

Касание окружности и гиперболы означает совпадение корней в квадратном уравнении (2), значит, его дискриминант обращается в ноль:

$$x_n^2 - 2(x_n^2 - r_n^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x_n^2 = 2r_n^2 + 2. \quad (3)$$

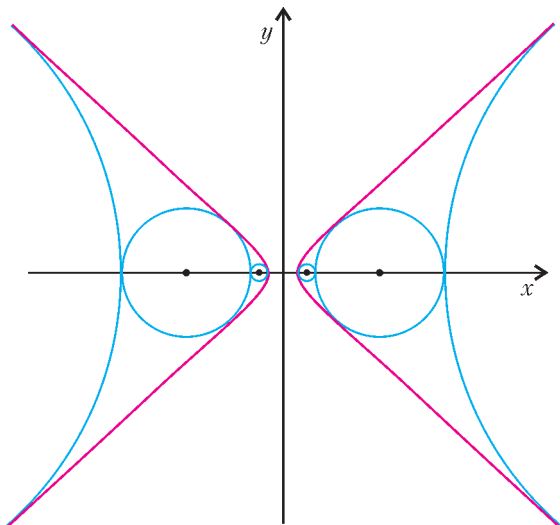


Рис. 1

Равенство (3) для окружности ω_{n+1} выглядит как

$$x_{n+1}^2 = 2r_{n+1}^2 + 2. \quad (3')$$

Вычитая из равенства (3') равенство (3), имеем

$$x_{n+1}^2 - x_n^2 = 2(r_{n+1}^2 - r_n^2) \Leftrightarrow (x_{n+1} - x_n)(x_{n+1} + x_n) = 2(r_{n+1} - r_n)(r_{n+1} + r_n),$$

откуда, с учетом равенства (1), находим $x_{n+1} + x_n = 2(r_{n+1} - r_n)$. Вычитая из полученного равенства (1), имеем

$$2x_n = r_{n+1} - 3r_n. \quad (4)$$

При $n = 1$, в частности, получаем $4 = r_2 - 3$, т.е. $r_2 = 7$. Возведем в квадрат (4), и подставим (3):

$$\begin{aligned} 4x_n^2 &= r_{n+1}^2 - 6r_{n+1}r_n + 9r_n^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 8r_n^2 + 8 = r_{n+1}^2 - 6r_{n+1}r_n + 9r_n^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow r_{n+1}^2 - 6r_{n+1}r_n + r_n^2 = 8. \end{aligned} \quad (5)$$

Итак, получено симметричное соотношение (5), связывающее радиусы r_n и r_{n+1} . Переформулировать (5) можно таким образом: число r_{n+1} является корнем уравнения $x^2 - 6r_nx + r_n^2 = 8$. Если $n \geq 2$, то, рассмотрев соотношение, аналогичное (5), для радиусов r_n и r_{n+1} , получим, что r_{n-1} также является корнем уравнения $x^2 - 6r_nx + r_n^2 = 8$. Тогда по теореме Виета $r_{n-1} + r_{n+1} = 6r_n$, что дает рекуррентное соотношение

$$r_{n+1} = 6r_n - r_{n-1} \quad (*)$$

для вычисления радиусов. Из того что r_1 и r_2 — целые числа по цепочке выводим, что все r_n являются целыми.

Замечания. Если уравнение (2) имеет нулевой дискриминант, то $x = \frac{x_n}{2}$ — единственное решение этого уравнения. Отсюда вытекает, что абсцисса точки касания окружности ω_n и гиперболы равна $\frac{x_n}{2}$. Из геометрических соображений понятно, что $\frac{r_n}{x_n}$ должно стре-

миться к косинусу угла наклона асимптоты гиперболы, т.е. к $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Можно показать, что дроби $\frac{2r_n}{x_n}$ равны некоторым подходящим дробям для разложения $\sqrt{2}$ в цепную дробь (это объясняется известной связью между линейными рекуррентами, цепными дробями и уравнениями Пелля — см., например, статью В. Сендерова и А. Спивака «Уравнения Пелля» в «Кванте» №3, 4 и 6 за 2002 г.).

Выбор радиуса $r_1 = 1$ связан с тем, что радиус кривизны данной гиперболы в точке $(1; 0)$ равен 1. Можно установить, что радиус кривизны гиперболы в точке касания с окружностью ω_n равен r_n^3 .

Самым любопытным в данной задаче, видимо, является наличие линейного соотношения (*) для радиусов трех последовательных окружностей. Вообще, если вписывать цепочку касающихся окружностей в гиперболу $x^2 - \frac{y^2}{B} = 1$, $B > 0$, то радиусы трех последовательных окружностей будут удовлетворять соотношению

$$r_{n+1} = (4B + 2)r_n - r_{n-1}. \quad (*')$$

Окружности можно вписывать и во внешность гиперболы $x^2 - By^2 = 1$ (рис.2), и тогда радиусы трех пос-

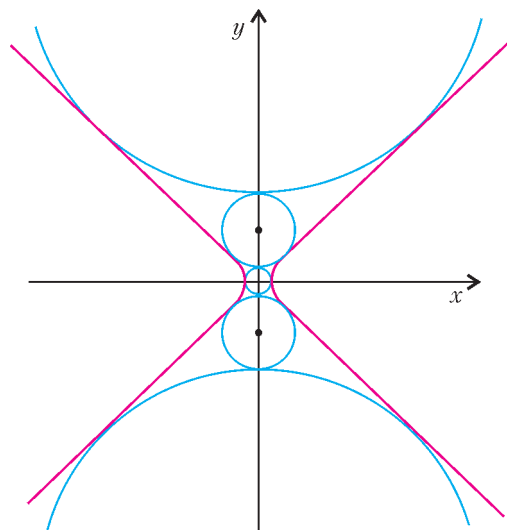


Рис. 2

ледовательных окружностей будут удовлетворять тому же соотношению (*').

Для цепочки окружностей, вписанных в параболу, радиусы образуют арифметическую прогрессию (см. задачу М. Евдокимова с XXXII Всероссийской олимпиады, 1998 г.).

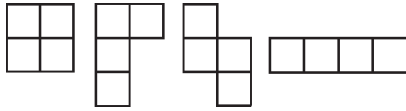
Если же цепочку хотя бы из трех окружностей удастся вписать в эллипс $x^2 + \frac{y^2}{B} = 1$, то соотношение на радиусы будет иметь вид

$$r_{n+1} = (2 - 4B)r_n - r_{n-1}.$$

В.Расторгуев, П.Кожевников

M2128. Вася отметил 10 клеток в клетчатой таблице 10×10 клеток. Всегда ли Петя может вырезать из

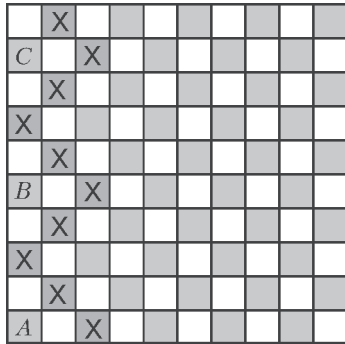
этой таблицы по линиям сетки 19 фигурок вида



так, чтобы фигурки не содержали отмеченные клетки?

Ответ: не всегда.

Предположим, что Вася отметил 10 клеток так, как показано на рисунке (значок «X»). Рассмотрим теперь



шахматную раскраску доски (при которой все отмеченные клетки являются черными). Заметим, что фигурка, не содержащая отмеченных клеток, не может содержать также ни одну из черных клеток A, B, C. Значит, все вырезанные Петей фигурки содержат не более

$50 - 10 - 3 = 37$ черных клеток. Но поскольку каждая фигурка содержит по две черных и по две белых клетки, может быть вырезано не более $\left\lfloor \frac{37}{2} \right\rfloor = 18$ фигурок.

И.Богданов, О.Подлипский

M2129. Найдите все пары натуральных чисел $n > 1$ и k , для которых $1^n + 2^n + \dots + (n-1)^n = n^k$.

Ответ. $n = 3, k = 2$.

Первое решение. Если $n = 3$, то $k = 2$. Пусть n нечетно, $n > 3$. Тогда при четном x сумма $1^n + 2^n + \dots + x^n$ делится на $\frac{x}{2}$. Действительно, поскольку $a^n + b^n$ делится на $a + b$, каждая из сумм $1^n + (x-1)^n$, $2^n + (x-2)^n$, ..., $\left(\frac{x}{2}-1\right)^n + \left(\frac{x}{2}+1\right)^n$ делится на $\frac{x}{2}$.

Остаются слагаемые $\left(\frac{x}{2}\right)^n$ и x^n , которые, очевидно, делятся на $\frac{x}{2}$. Значит, $1^n + 2^n + \dots + (n-1)^n$ делится на $\frac{n-1}{2}$. Но $\text{НОД}\left(\frac{n-1}{2}, n\right) = 1$ и $\frac{n-1}{2} > 1$ при $n > 3$. Следовательно, при $n > 3$ сумма $1^n + 2^n + \dots + (n-1)^n$ имеет простой делитель, на который не делится n . Докажем теперь, что при любом четном n сумма $1^n + 2^n + \dots + (n-1)^n$ не делится на n . Нам понадобится следующая лемма.

Лемма. При нечетном a число $a^{2^s} - 1$ делится на 2^s .

Доказательство. Применим индукцию по s . При $s = 1$ утверждение верно. Пусть при $s = r$ утверждение верно.

Тогда $a^{2^{r+1}} - 1 = \left(a^{2^r}\right)^2 - 1 = \left(a^{2^r} - 1\right)\left(a^{2^r} + 1\right)$ делится на 2^{r+1} , так как первая скобка делится на 2^r , а вторая четна. Переход индукции сделан, и лемма доказана.

Пусть $n = 2^s l$, где $s \geq 1$, l – нечетно. Очевидно, $s < n$, поэтому для любого четного k число k^n делится на 2^s .

Из леммы следует, что для любого нечетного k число

$k^n - 1 = \left(k^{\frac{n}{2^s}}\right)^{2^s} - 1$ делится на 2^s ; тогда k^n дает остаток 1 при делении на 2^s . Итак, в сумме

$1^n + 2^n + \dots + (n-1)^n$ ровно $\frac{n}{2}$ слагаемых дают остаток 1 при делении на 2^s , а остальные слагаемые делятся на 2^s . Имеем: $1^n + 2^n + \dots + (n-1)^n \equiv \frac{n}{2} \pmod{2^s}$,

следовательно, сумма не делится на 2^s и тем более на n .

Замечание 1. Рассуждая как в начале решения, нетрудно доказать, что при любом нечетном n сумма $1^n + 2^n + \dots + (n-1)^n$ делится на n .

Замечание 2. При желании лемму легко усилить: при нечетном a и натуральном s число $a^{2^s} - 1$ делится на 2^{s+2} .

Второе решение. Проверив значения $n = 2, 3$, получаем, что подходит только $n = 3$, при этом $k = 2$. Покажем, что при $n \geq 4$ решений нет.

Лемма. При натуральных $n \geq 4$ выполняются неравенства

$$\frac{1}{n} \leq \left(\frac{n-1}{n}\right)^n < \frac{1}{2}.$$

Доказательство. По неравенству Бернулли,

$$\left(\frac{n}{n-1}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n \geq 1 + \frac{1}{n-1} > 2,$$

откуда следует правое неравенство. Левое неравенство докажем индукцией по n . База при $n = 4$ проверяется непосредственно; переход следует из неравенств

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} > \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \cdot \frac{n}{n+1} > \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

Лемма доказана.

Предположим, что нашлось решение с $n \geq 4$. Из леммы следует, что $(n-1)^n > \frac{1}{n} \cdot n^n = n^{n-1}$. Тогда $n^k > (n-1)^n > n^{n-1}$, откуда $k \geq n$. Заметим, что при любом $s = 1, \dots, n-1$ выполнено неравенство

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)^s \geq 1 - \frac{s}{n} \quad (\text{это — снова неравенство Бернулли}),$$

поэтому из леммы имеем $\left(\frac{n-s}{n}\right)^n \leq \left(\frac{n-1}{n}\right)^{sn} \leq \frac{1}{2^s}$. Значит,

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{(n-1)^n + \dots + 1^n}{n^k} \leq \frac{(n-1)^n + \dots + 1^n}{n^n} = \\ &= \left(\frac{n-1}{n}\right)^n + \dots + \left(\frac{n-(n-1)}{n}\right)^n \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} < 1. \end{aligned}$$

Противоречие.

Замечание. Уравнение этой задачи возникло из рассмотрения более общих уравнений в натуральных числах: $1^n + 2^n + \dots + x^n = (x+1)^y$. Методом первого решения задачи можно найти все решения этого урав-

нения в предположении нечетности n : $(n, x, y) = (1, 2, 1)$ и $(n, x, y) = (3, 2, 2)$. При фиксированных четных n мы умеем доказывать лишь, что множество решений (x, y) конечно. О близких уравнениях в целых числах см. также в решении задачи M2025 в «Кванте» № 3 за 2007 год.

И.Богданов, В.Сендеров

M2130. Дан плоский (невыпуклый) шестиугольник $ABCDEF$, в котором $AB = DE$, $BC = EF$, $CD = FA$, $\angle FAB = 3\angle CDE$, $\angle BCD = 3\angle EFA$, $\angle DEF = 3\angle ABC$ (здесь имеются в виду внутренние углы многоугольника, некоторые из которых могут быть больше 180°). Известно, что никакие две стороны шестиугольника не параллельны. Докажите, что прямые AD , BE и CF пересекаются в одной точке.

Из равенства углов в условии следует, что сумма углов шестиугольника равна $4(\angle ABC + \angle CDE + \angle EFA)$, а с другой стороны эта сумма равна $4 \cdot 180^\circ$, откуда $\angle ABC + \angle CDE + \angle EFA = 180^\circ$. (Отметим, что так как углы шестиугольника меньше 360° , то каждый из углов ABC , CDE , EFA меньше 120° . Не умаляя общности, будем предполагать, что $\angle EFA < 60^\circ$; тогда в шестиугольнике $ABCDEF$ плоский угол BCD меньше развернутого).

Построим треугольник $A'C'E'$, в котором углы A' , C' , E' равны соответственно углам CDE , EFA , ABC . Пусть точки D' , F' , B' симметричны соответственно точкам A' , C' и E' относительно прямых $C'E'$, $A'E'$ и $A'C'$. Тогда соответствующие углы шестиугольников $ABCDEF$ и $A'B'C'D'E'F'$ равны, и, кроме того, в шестиугольнике $A'B'C'D'E'F'$ равны пары противоположных сторон, а диагонали $A'D'$, $B'E'$ и $C'F'$ пересекаются в одной точке, так как это высоты в треугольнике $A'C'E'$.

Применив подходящее преобразование подобия к шестиугольнику $A'B'C'D'E'F'$, можем получить шестиугольник $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$, в котором $A_1 = A$, $B_1 = B$ и направление обхода контуров $ABCDEF$ и $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ одинаковое (скажем, по часовой стрелке; рис. 1). Для решения задачи достаточно доказать совпадение этих двух шестиугольников.

Из равенства углов шестиугольников следует, что соответствующие векторы $\overrightarrow{BC}$ и

$\overrightarrow{B_1C_1}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{C_1D_1}$ и т.д. сонаправлены, в частности C лежит на луче B_1C_1 , F — на луче A_1F_1 , а в силу равенства сторон $\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{E_1D_1}$ (и, значит, $\overrightarrow{DD_1} = \overrightarrow{EE_1}$). Допустим, что $D \neq D_1$, и пусть точки X и Y таковы, что $\overrightarrow{CX} = \overrightarrow{FY} = \overrightarrow{DD_1}$. Тогда $\overrightarrow{D_1X} = \overrightarrow{DC}$, следовательно, точка X лежит на прямой C_1D_1 , причем $XC_1 = |XD_1 - C_1D_1| = |CD - C_1D_1| = |AF - A_1F_1| = FF_1$.

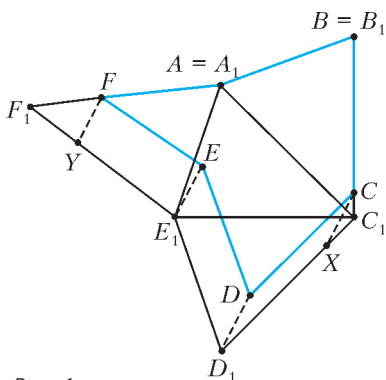


Рис. 1

Кроме того, если X лежит на отрезке C_1D_1 , то F лежит на отрезке A_1F_1 ; если же X лежит на продолжении отрезка C_1D_1 за точку C_1 , то F лежит на продолжении отрезка A_1F_1 за точку F_1 . Аналогично, Y лежит на прямой E_1F_1 и $YF_1 = CC_1$, причем точки Y и C либо одновременно лежат соответственно на отрезках E_1F_1 и B_1C_1 , либо на продолжениях этих отрезков (за точки F_1 и C_1). Мы получаем, что треугольники FF_1Y и XC_1C равны по трем сторонам. Заметим (это существенно! — см. замечание ниже), что эти треугольники невырожденные: $\overrightarrow{CX} \neq \vec{0}$ по предположению, $C \neq C_1$ (иначе $F_1 = Y$ и $CD \parallel CX \parallel FY \parallel AF$), $X \neq C_1$ (иначе $F_1 = F$ и $BC \parallel CX \parallel FY \parallel EF$). Из равенства треугольников имеем $\angle FF_1Y = \angle XC_1C$. Однако $\angle FF_1Y$ равен $\angle AFE$ либо $180^\circ - \angle AFE$, а $\angle XC_1C$ равен $\angle BCD$ либо $180^\circ - \angle BCD$. Причем из предыдущих выводов о расположении точек C , X , F , Y следует, что если $\angle FF_1Y = \angle AFE$, то $\angle XC_1C = \angle BCD$, а если $\angle FF_1Y = 180^\circ - \angle AFE$, то $\angle XC_1C = 180^\circ - \angle BCD$. В любом случае получаем, что $\angle AFE = \angle BCD$ — противоречие.

Следовательно, $D = D_1$, откуда вытекает совпадение шестиугольников $ABCDEF$ и $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$.

Замечание. Приведем пример шестиугольника, показывающий, что в этой задаче условие отсутствия параллельных сторон является существенным. Построим параллелограмм $ACDF$, в котором $\angle ACD = 80^\circ$ и $AF > AC$, E — точка пересечения биссектрис углов AFD и CDF . Построим на стороне AC вне параллелограмма треугольник ACB , равный треугольнику DFE (рис. 2). Тогда по построению в шестиугольнике $ABCDEF$ равны пары противоположных сторон, и $\angle FAB = 3\angle CDE = 150^\circ$, $\angle BCD = 3\angle EFA = 120^\circ$, $\angle DEF = 3\angle ABC = 270^\circ$.

Однако BE не проходит через центр параллелограмма $ACDF$ (точку пересечения AD и CF), так как E лежит на средней линии, параллельной CD , и отлична от центра параллелограмма, а B не лежит на этой средней линии.

Н.Белухов,
П.Кожевников

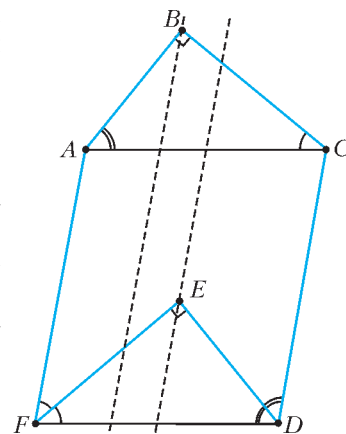


Рис. 2

Ф2138. Подъемный кран медленно поднимает с помощью троса плавающее в воде бревно (рис. 1). Трос прикреплен к одному концу бревна, которое можно считать

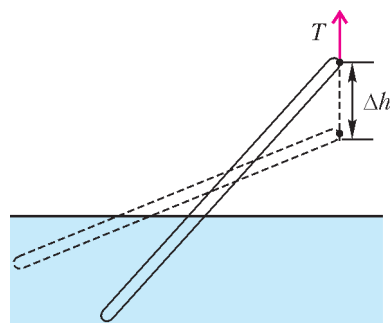


Рис. 1

тонким цилиндром с постоянной плотностью. Масса бревна m , длина L . Отношение плотностей воды и древесины $\gamma = 4/3$. Ускорение свободного падения g . Начальное положение бревна горизонтальное. 1) Какую минимальную работу A нужно совершить крану, чтобы полностью вытащить бревно из воды? 2) Постройте график зависимости силы натяжения T троса от высоты над водой h приподнимаемого конца бревна. Укажите характерные точки графика. 3) Какую работу $A_{\Delta h}$ совершит кран при переводе бревна из одного наклонного положения в другое наклонное положение, в котором верхний конец бревна поднялся на высоту $\Delta h = L/5$?

1) Минимальная работа крана равна изменению потенциальной энергии бревна:

$$A = \frac{mgL}{2}.$$

2) Бревно в процессе подъема будет образовывать некий угол α с поверхностью воды, пока не примет вертикальное положение, оставаясь частично погруженным в воду. Бревно находится в равновесии, если выполняются два условия (рис.2).

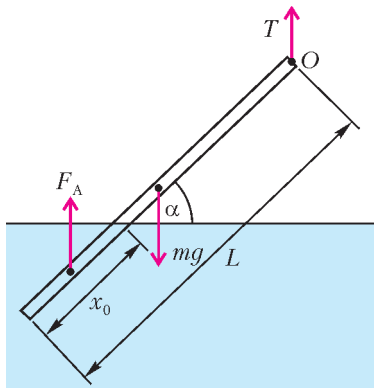


Рис. 2

а) Сумма всех действующих на бревно сил равна нулю, или, в проекциях на вертикальную ось:

$$T + F_A - mg = 0,$$

где $F_A = mg\gamma x_0/L$ – архимедова сила, x_0 – длина части бревна, погруженной в воду.

б) Сумма моментов сил относительно произвольной оси вращения равна нулю, или, выбрав ось, проходящую через верхний конец бревна:

$$mg \frac{L}{2} \cos \alpha - \left(mg\gamma \frac{x_0}{L} \right) \left(L - \frac{x_0}{2} \right) \cos \alpha = 0.$$

Отсюда следует, что сила T натяжения троса не зависит от угла наклона бревна относительно горизонта. Решая последнее уравнение, получим, что в воде будет находиться часть бревна длиной

$$x_0 = L \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma}} \right) = \frac{L}{2}.$$

Пока бревно будет оставаться в наклонном положении, сила натяжения троса будет постоянной и равной $mg/3$. После того как бревно примет вертикальное положение, сила натяжения троса будет линейно возрастать от $mg/3$ до mg :

$$T = mg - F_A = mg \left(1 - \frac{\gamma x}{L} \right).$$

График зависимости силы натяжения троса T от высоты h приведен на рисунке 3.

3) Подъем верхнего конца бревна на высоту Δh происходит при постоянной силе натяжения $mg/3$. Поэтому искомая работа равна

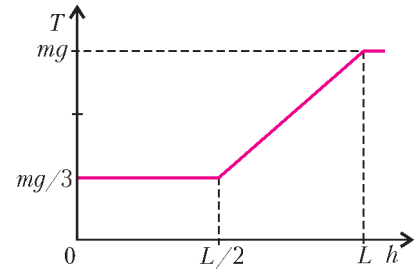
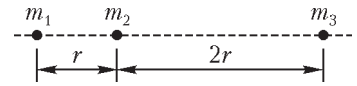


Рис. 3

$$A_{\Delta h} = T \Delta h = \frac{mg}{3} \frac{L}{5} = \frac{mgL}{15}.$$

В. Чивилёв

Ф2139. В открытом космосе три небольших астероида из-за гравитационного притяжения сближаются друг с другом вдоль общей прямой, неподвижной относительно звезд. Отношение расстояний от среднего астероида до крайних остается равным $n = 2$ вплоть до их столкновения (см. рисунок). Масса левого астероида m_1 , центрального m_2 . Найдите массу m_3 правого астероида.



Пусть ускорения астероидов равны a_1, a_2, a_3 , первые два ускорения направлены вправо, а третье – влево. В системе отсчета, связанной с третьим астероидом, ускорения первых двух равны $a_1 + a_3$ и $a_2 + a_3$ соответственно. Чтобы отношение расстояний от m_1 и m_2 до m_3 сохранялось неизменным, оно должно быть равно отношению соответствующих ускорений:

$$(a_1 + a_3) : (a_2 + a_3) = 3r : 2r = 3 : 2.$$

Отсюда получим связь ускорений:

$$a_3 = 2a_1 - 3a_2.$$

Из закона всемирного тяготения найдем ускорения астероидов:

$$a_1 = G \frac{m_2}{r^2} + G \frac{m_3}{9r^2}, \quad a_2 = G \frac{m_3}{4r^2} - G \frac{m_1}{r^2},$$

$$a_3 = G \frac{m_1}{9r^2} + G \frac{m_2}{4r^2}.$$

Подставляя эти значения в выражение для связи ускорений, получим

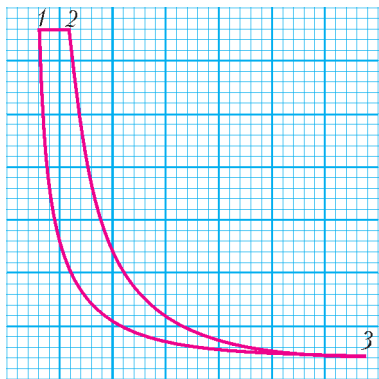
$$\frac{m_1}{9} + \frac{m_2}{4} = 2 \left(m_2 + \frac{m_3}{9} \right) - 3 \left(\frac{m_3}{4} - m_1 \right),$$

откуда найдем

$$m_3 = \frac{104m_1 + 63m_2}{19}.$$

И. Воробьев

Ф2140. Говорят, что в архиве лорда Кельвина нашли pV -диаграмму замкнутого циклического процесса тепловой машины (см. рисунок). Процесс 1–2 –



изобара, процесс 2–3 – адиабата, 3–1 – изотерма. От времени чернила выцвели, и координатные оси на диаграмме исчезли. Известно, что рабочим веществом машины был идеальный газ (гелий) количеством $\nu = 2$ моль. Масштаб по оси давлений: 1 мал. кл. = 1 атм, по оси объемов: 1 мал. кл. = 1 л. 1) Восстановите положение координатных осей и вычислите максимальное давление газа в данном циклическом процессе. 2) Вычислите максимальную и минимальную температуры газа в цикле. 3) Найдите работу A_T газа на изотерме 3–1. 4) Найдите КПД цикла η . Примечание. Универсальная газовая постоянная $R = 0,082$ л.атм/(моль · К).

1) Будем отсчитывать разность давлений $\Delta p = p - p_3$ от точки 3 и разность объемов $\Delta V = V - V_1$ от точки 1. Тогда уравнение изотермы запишется в виде

$$pV = (p_3 + \Delta p)(V_1 + \Delta V) = \text{const}.$$

Рассмотрев три точки на изотерме – например, точки 1, 3 и одну в середине графика, – можно составить систему уравнений и выразить p_3 и V_1 .

А можно p_3 и V_1 найти более точным способом. Заметим, что $p_1 - p_3$ численно, в клетках, равно $V_3 - V_1$, значит, в этом масштабе график изотермы симметричен относительно перестановки $p \leftrightarrow V$ и p_3 численно равно V_1 и равно некоторому числу a . Таким образом, численно справедливо уравнение

$$\Delta p \Delta V + a(\Delta p + \Delta V) + a^2 = \text{const}.$$

Если отметить несколько точек на данном графике и построить график зависимости $y = \Delta p \Delta V$ от $x = \Delta p + \Delta V$, то графиком будет прямая с коэффициентом наклона $k = -a$. Так, найдем $p_3 \approx 1$ атм, $V_1 \approx 1$ л, и, следовательно, максимальное давление $p_{\max} = p_1 \approx 32$ атм. Положение координатных осей становится очевидным.

2) Теперь можно определить максимальную и минимальную температуры в цикле:

$$T_{\min} = T_1 = T_3 = \frac{p_1 V_1}{\nu R} \approx 195 \text{ К},$$

$$T_{\max} = T_2 = \frac{p_2 V_2}{\nu R} \approx 780 \text{ К}.$$

3) Работу газа на изотерме можно определить как площадь под графиком изотермы со знаком минус:

$$A_T \approx -11,2 \text{ кДж}.$$

4) КПД цикла найдем как отношение работы A газа за цикл к подведенному количеству теплоты $Q_+ = Q_{12} = A_{12} + \nu C_V (T_2 - T_1) = 5A_{12}/2$. Работы определим по графику:

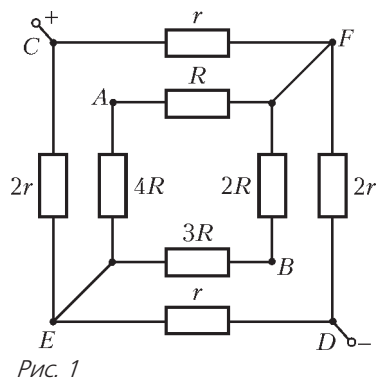
$$A \approx -13,0 \text{ кДж} \text{ и } A_{12} \approx 9,7 \text{ кДж}.$$

Окончательно получим

$$\eta = \frac{A}{Q_+} = \frac{2A}{5A_{12}} \cdot 100\% \approx 54\%.$$

А.Шеронов

Ф2141. В электрической цепи, схема которой приведена на рисунке 1, напряжение между зажимами C и D равно $U_{CD} = 15$ В. Известно, что $R \gg r$. 1) Определите показание идеального вольтметра, подключенного к клеммам A и B. 2) Предположим, что к клеммам A и B подключен идеальный амперметр. Укажите направление тока, текущего через каждый из резисторов и амперметр.



По условию сопротивление «внутреннего» участка цепи много больше r . Это означает, что силу тока, идущего по нему, можно не учитывать при расчете напряжений и сил токов во «внешнем» участке цепи. Силы токов, текущих по ветвям CED и CFD, равны

$$I_0 = \frac{U_{CD}}{r + 2r}.$$

Напряжение между точками F и E составляет

$$U_{FE} = U_{CE} - U_{CF} = I_0 \cdot 2r - I_0 \cdot r = \frac{U_{CD}}{3}.$$

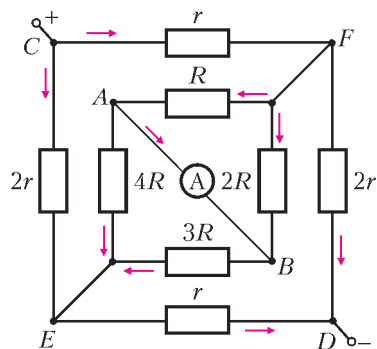
1) При подключении идеального вольтметра ток через него не идет. Силы токов в ветвях FAE и FBE составляют

$$I_{FAE} = \frac{U_{FE}}{R + 4R} \text{ и } I_{FBE} = \frac{U_{FE}}{2R + 3R} = I_{FAE}.$$

Напряжение на участке AB (показание идеального вольтметра) равно

$$U_{AB} = U_{FB} - U_{FA} = I_{FBE} \cdot 2R - I_{FAE} \cdot R = \frac{U_{FE}}{5} = \frac{U_{CD}}{15} = 1 \text{ В}.$$

2) Сопротивление идеального амперметра равно нулю, и это равносильно замыканию клемм A и B. При параллельном соединении больший ток течет через резистор с меньшим сопротивлением. Это означает, что $I_{FA} > I_{FB}$ и $I_{AE} < I_{BE}$. Поэтому ток через амперметр течет в направлении от A к B (так как полный ток, протекающий от F к узлам A и B, равен току, текущему от A и B к E). Направления всех токов указаны на рисунке 2.



М.Проскурин

Рис. 2

Ф2142. $N = 2009$ одинаковых конденсаторов емкостью $C = 10$ мкФ каждый зарядили до одинаковых напряжений $U = 10$ В и соединили последовательно, причем $n = 100$ штук оказались подключенными в одной полярности, а остальные – в другой. Концы получившейся цепочки соединили резистором сопротивлением $R = 1$ кОм. Какой полный заряд протечет по резистору и сколько в нем выделится тепла?

Найдем заряд q , протекший за большое время через резистор. Заряды каждого из n конденсаторов равны теперь $CU + q$, остальные конденсаторы имеют заряды $CU - q$. С учетом различия полярностей конденсаторов напряжение на резисторе должно быть нулевым при условии

$$(CU + q)n - (CU - q)(N - n) = 0.$$

Отсюда получим величину протекшего заряда:

$$q = \frac{CU(N - 2n)}{N} \approx 0,9 \cdot 10^{-4} \text{ Кл}.$$

Теперь найдем выделившееся в резисторе тепло. Начальная разность потенциалов составляет $\Delta\varphi_{\text{нач}} = U(N - 2n)$, конечная разность потенциалов равна нулю. Значит, в резисторе выделится количество теплоты

$$Q = \frac{1}{2} q \Delta\varphi_{\text{нач}} = \frac{CU^2(N - 2n)^2}{2N} \approx 0,8 \text{ Дж}.$$

З.Рафаилов

Ф2143. На кольцевой сердечник с большой магнитной проницаемостью сложенным вдвое изолированным тонким проводом намотана катушка с большим числом витков (получились две одинаковые катушки – одна с выводами А и Б, другая – с выводами В и Г. Индуктивность катушки АВ равна 1 Гн. К точкам В и Г подключили резистор сопротивлением 1000 Ом, к выводам А и Б присоединили источник синусоидального напряжения частоты 1000 Гц с амплитудой 1 В. Какой ток течет через резистор? Как изменится ток, если выводы В и Г поменять местами?

Две катушки и резистор подключены последовательно. Нужно разобрать два случая: магнитные потоки в сердечнике вычитаются или складываются. Эти случаи «меняются местами» при обмене точек В и Г.

Если потоки вычитаются, то суммарный магнитный

поток равен нулю, и резистор оказывается подключенным напрямую к источнику. Ток через него при этом составляет

$$I = \frac{U}{R} = 1 \text{ мА}.$$

В противоположном случае магнитный поток через каждую из катушек удваивается – вторая катушка добавляет поток, равный «своему», если рассеяния магнитных линий нет. Учитывая ЭДС индукции двух катушек, получаем последовательное соединение резистора сопротивлением R и катушки индуктивностью $4L$ и ток определяем по формуле

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + 16\omega^2 L^2}} \approx 0,24 \text{ мА}.$$

Мы подставляли амплитудные значения напряжения, поэтому значения токов тоже получились амплитудными.

А.Зильберман

Ф2144. Зрительная труба имеет объектив с фокусным расстоянием 1 м и окуляр с фокусным расстоянием 5 см. Линзы находятся на расстоянии 106 см друг от друга, на объектив падает широкий пучок лучей, параллельный главной оптической оси. Найдите угол расхождения выходящего пучка. Диаметр окуляра 0,5 см.

Рассмотрим падающий луч, параллельный главной оптической оси. После преломления в первой линзе (объектив) он пересечет эту ось на расстоянии $d = 6$ см от окуляра (это задний фокус объектива). Далее он пройдет через окуляр и пересечет главную ось на расстоянии $f = 30$ см от него (это следует из формулы линзы $1/d + 1/f = 1/F$). За этой точкой пучок расходится, причем угол расхождения определяется крайним из лучей. Если диаметр окуляра D , то угол отклонения Φ этого луча от главной оптической оси определяется соотношением

$$\operatorname{tg} \Phi = \frac{D}{2f} = \frac{1}{120}.$$

Угол расхождения пучка δ вдвое больше. Учитывая малость угла, можно записать

$$\delta \approx 2\Phi \approx \frac{1}{60} \text{ рад} \approx 1^\circ.$$

А.Простов

Вниманию наших читателей!

Мы рады сообщить нашим читателям, что вышел в свет обновленный вариант электронного архива журнала «КВАНТ». На диске выложены все номера журнала с 1970 по 2008 год включительно, а также два приложения к журналу: книга Н.Б.Васильева, А.П.Савина, А.А.Егорова «Избранные олимпиадные задачи. Математика» и книга К.Ю.Богданова «Прогулки с физикой». Имеется хорошая система поиска нужного вам материала.

Диск можно приобрести в редакции журнала «КВАНТ». Наши координаты – на последней странице журнала. Пишите, звоните, мы вас ждем.

Мы также напоминаем нашим читателям, что пришло время подписываться на журнал «КВАНТ» на первое полугодие 2010 года. Журнал «КВАНТ» выходит один раз в два месяца вместе с приложением к журналу и распространяется только по подписке.

Подписаться на «КВАНТ» можно в любом почтовом отделении связи. Наш подписной индекс в каталоге агентства «РОСПЕЧАТЬ» 70465.

Задачи

1. Петя и Вася едут в соседних вагонах поезда. Вагон, в котором едет Петя, — пятый от «головы» поезда, а вагон, в котором едет Вася, — седьмой с «хвоста». Сколько вагонов в поезде?

М.Ахмеджанова



2. На рисунке изображена фигура, все углы между ее соседними отрезками прямые. Как с помощью только карандаша и линейки без делений провести прямую, которая отсекала бы от фигуры кусок, по площади равный половине площади фигуры?

В.Крюков



3. Гриб называется плохим, если в нем не менее 10 червяков. Если же в грибе меньше 10 червяков, он считается хорошим. В лукошке 90 плохих и 10 хороших



Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6 — 8 классов.

грибов. Могут ли все грибы стать хорошими после того, как некоторые червяки переползут из плохих грибов в хорошие?

А.Канель

4. Для двух разных шариков легко сделать колечко, которое можно плотно надеть на каждый шарик (чтобы не было щелей).

А если взять две разные картофелины? Всегда ли удастся изготовить проволочное кольцо, возможно изогнутое и не плоское, которое можно будет плотно надеть на каждую из картофелин?

Г.Гальперин



5. По коридору идет толпа. Перед развилкой коридора стоит разделитель. Он направляет одного человека налево, а другого направо, так что поток делится на две одинаковые части. При помощи нескольких таких разделителей можно отделить четверть потока или три восьмых его. А можно ли отделить треть потока?

В.Арнольд



Иллюстрации Д.Гришуковой

Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»

Мы продолжаем очередной конкурс по решению математических задач для учащихся 6–8 классов. Решения задач высылайте в течение месяца после получения этого номера журнала по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64–А, «Квант» или по электронному адресу: math@kvant.info (с пометкой «Конкурс «Математика 6–8»»). Не забудьте указать имя, класс и домашний адрес.

Как и прежде, мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и математических кружков. Руководителей кружков просим указать электронный адрес или контактный телефон. По традиции, кружки-победители заочного конкурса приглашаются на финальный очный турнир.

6. На новом сайте «Разговоры.ru» зарегистрировалось 2000 человек. Каждый из них пригласил к себе в друзья по 1000 человек. Два человека объявляются друзьями тогда и только тогда, когда каждый из них пригласил другого в друзья. Какое наименьшее количество пар друзей могло образоваться?

А.Эвнин

7. Можно ли квадрат разрезать на 9 квадратов и раскрасить их так, чтобы получились 1 белый, 3 серых и 5 черных квадратов, причем одноцветные квадраты были бы равны, а разноцветные квадраты — не равны?

Н.Авилов

8. Двести гирек массой 1 г, 2 г, ..., 200 г разложили на две чаши весов так, что любые две гири с разницей

масс 100 г попали на разные чаши и любые две гири с суммой масс 201 г тоже попали на разные чаши. При этом весы оказались в равновесии. Затем с каждой чаши убрали все гири четной массы. Докажите, что весы снова будут в равновесии.

В.Произволов

9. Найдутся ли такие натуральные числа a, b, c, d , что $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 100^{100}$?

М.Мурашкин

10. На сторонах BC и CD ромба $ABCD$ взяли точки P и Q соответственно так, что $BP = CQ$. Докажите, что центр тяжести (точка пересечения медиан) треугольника APQ лежит на диагонали BD ромба.

В.Произволов

Летний турнир имени А.П.Савина

Каждый год в конце июня увлеченные математикой школьники собираются в красивом месте Костромской области, чтобы соревноваться в решении задач. Турнир носит имя Анатолия Павловича Савина, основателя конкурса «Математика 6–8» журнала «Квант». Благодаря конкурсу в 1993 году и возник этот турнир математических боев. Организаторы турнира — журнал «Квант» и образовательная программа «Большая перемена» (руководитель Г.В. Кондаков).

Этим летом команды съехались на 7 дней (с 26 июня по 2 июля 2009 года) под город Судиславль на живописную базу отдыха «Берендеевы Поляны». Многие ребята приехали сюда гораздо раньше — они учились в летней математической школе, которая началась 11 июня, после которой решили остаться на турнир.

В нынешнем году друг с другом играли команды 6–8 классов: 8 команд 6 классов, 12 команд 7 классов и 8 команд 8 классов. Школьники приехали из Москвы, Санкт-Петербурга, Иванова, Костромы, Тамбова и Черноголовки. Команда Тамбова была приглашена на турнир как победитель конкурса «Математика 6–8» журнала «Квант».

В день заезда (25 июня) сразу была проведена оживленная математическая игра «Магический квадрат». Победителями стали команды «Фрактал» (6 класс, Санкт-Петербург), «Интеллектуал» (7 класс, Москва) и «218-Б» (8 класс, Москва).

На следующий день прошла устная командная олимпиада, по результатам которой команды были разделены на лиги по

классам, при этом 7 класс был разбит на две лиги. Далее в каждой лиге проходили математические бои. Последний день турнира — финальные бои, которые определили победителей в каждой лиге.

В лиге 8 классов первое место заняла команда «Москва-Юг». Ее собрала Т.П. Зорина в июньской летней математической школе 2008 года. За год с небольшим ребята выиграли разные турниры, включая этот турнир в прошлом году. В высшей лиге 7 классов лучшей стала команда кружка МЦНМО под руководством А.В. Спивака. Лучшие шестиклассники — ребята из кружка «Фрактал» Санкт-Петербурга, их преимущество оказалось ощутимым и во время боев, и во время командной олимпиады. Лучшей во второй лиге 7 классов стала команда школы 82 из Черноголовки Московской области. Ниже в таблице приведен список всех команд-призеров турнира.

В один из дней турнира участники отдохнули от боев — прошла личная олимпиада. В каждой параллели проводилось свое состязание со своими задачами.

В 6 классе за решение всех задач «гран-при» получил Андрей Волгин (команда МЦНМО), а диплом I степени выиграл костромич Иван Петренко. Лучшим семиклассником стал Никита Сопенко (команда Тамбова), лучшим восьмиклассником — Михаил Артемьев (гимназия 1543, Москва).

Обладателями дипломов II степени стали: Семен Верченко (8 класс, гимназия 1543), Мария Сандрикова (8 класс, ЦО 218),

Лига	Диплом	Команда	Капитан	Руководитель
Высшая 8	I степени	Москва-Юг	Ф.Лященко	Т.П.Зорина
Высшая 8	II степени	Гимназия 1514, Москва	А.Понфиленко	О.Р.Горская
Высшая 8	II степени	Лицей 14, Тамбов	Н.Сопенко	А.В.Бурмистрова
Высшая 8	III степени	ЦО 218, Москва	М.Сандрикова	А.Д.Блинов
Высшая 8	III степени	Гимназия 1543, Москва	М.Артемьев	А.В.Хачатурян
Высшая 7	I степени	МЦНМО, Москва	Т.Левинсон	А.В.Спивак
Высшая 7	II степени	Сборная Костромы	Р.Цветников	Д.А.Калинин
Высшая 7	II степени	Интеллектуал, Москва	Ю.Гребенникова	Н.М.Нетрусова
Высшая 7	III степени	Гимназия 1543, Москва	Ю.Котельникова	И.В.Раскина
Высшая 7	III степени	Гимназия 1514, Москва	Т.Степанов	Т.В.Житникова
Высшая 6	I степени	Фрактал, Санкт-Петербург	Е.Цейтина	А.П.Погода
Высшая 6	II степени	Воробьевы Горы, Москва	И.Гущенко-Чеверда	Т.П.Зорина
Высшая 6	II степени	ЦО 218, Москва	А.Зерцалов	Ю.А.Блинов
Высшая 6	III степени	Квантик, Москва	В.Волков	И.А.Николаева
Высшая 6	III степени	Горные Воробьи, Москва	А.Мельник	Т.П.Зорина
Первая 7	I степени	Школа 82, Черногоровка	А.Потапов	Л.Н.Головкин
Первая 7	II степени	Школа 179, Москва	И.Пантелеева	А.Ю.Юрков

Юлия Гребенникова (7 класс, «Интеллектуал»), Максим Хабаров (7 класс, школа 30, Санкт-Петербург), Алексей Быстров (6 класс, Кострома), Степан Каргальцев (6 класс, ЦО 218), Никита Уваров (6 класс, гимназия 1543) и Михаил Ягудин (6 класс, команда МММФ).

Дипломами III степени награждены Алексей Виноградов (8 класс, гимназия 1514), Анна Добровольская (8 класс, гимназия 1514), Лев Синяков (8 класс, «Москва-Юг»), Петр Мельниченко (7 класс, ЦО 218), Богдан Славов (7 класс, школа 179), Марина Хачатурян (7 класс, гимназия 1543), Иван Буренев (6 класс, «Фрактал»), Андрей Зерцалов (6 класс, ЦО 218), Дарья Лебедева (6 класс, «Фрактал»), Сергей Полевой (6 класс, «Москва-Юг») и Павел Шевчук (6 класс, «Горные Воробьи»).

Помимо этого, многие ребята были поощрены дипломами за успешное участие и похвальными грамотами.

В часы, свободные от основных соревнований, участники олимпиады слушали лекции по математике, которые читали А.В.Спивак, С.И.Токарев, А.Б.Скопенков, А.В.Шаповалов, А.А.Заславский, С.Г.Волченков. Но развлечения были не только математические. Никогда не пустовали футбольное поле и волейбольная площадка. По вечерам проходили интеллектуальные игры, которые проводили Н.М.Нетрусова и А.В.Хачатурян. Очень интересные путешествия-экскурсии организовывала Т.П.Зорина, которая давно увлекается историей Судиславля и окрестных земель и теперь стала, наверное, самым лучшим экскурсоводом по этому древнему городу.

Более подробную информацию о результатах турнира и фотографии можно посмотреть на сайте

<http://kostroma-open.info/20090626.html>

Отбором задач и составлением вариантов занималась методическая комиссия под руководством Александра Васильевича Шаповалова. В нее вошли А.Д.Блинов, Ю.А.Блинов, Н.Т.Гребенник, Е.С.Горская, С.А.Дориченко, А.А.Заславский, Д.А.Калинин, Т.В.Караева, П.В.Мартынов, К.А.Матвеев, Д.В.Прокопенко, И.В.Раскина, А.Б.Скопенков, К.А.Скопцов, С.И.Токарев, А.В.Шаповалов. Существенный вклад в работу комиссии внесли руководители команд. Книжки и другие призы для победителей представили журнал «Квант», компания «Яндекс» и Фонд математического образования и просвещения (директор С.И.Комаров).

По традиции, идущей еще от первых турниров, в турнире было заявлено много новых авторских задач. Из них мы постарались выбрать такие, где из условий следует чуть-чуть больше, чем можно ожидать, или в решении есть неожиданный поворот и краткость. После номера каждой задачи указано, для каких классов она наиболее подходит.

Избранные задачи турнира

1 (7–8). У трех братьев Антона, Бори и Васи дни рождения совпадают. Оказалось, что когда Антону исполнится 12 лет, сумма возрастов двух других братьев разделится на 12 без остатка. То же самое случится, когда 12 лет исполнится Боре. Докажите, что так же будет, когда 12 лет исполнится Васе.

А.Шаповалов

2 (7). В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = AC$) проведена биссектриса BD . Прямая, проходящая через точку D перпендикулярно BD , пересекает сторону BC в точке K . Докажите, что $BK = 2CD$.

Фольклор

3 (7–8). Три сталкера дошли до Каменной Аномалии. Оттуда к кладу ведет тропа длиной 100 м. Сталкеры знают, что первый пошедший по тропе окаменеет в произвольном месте и что такая же участь ждет и второго. Оба оживут в тот момент, когда третий будет идти по тропе и суммарное расстояние от него до двух окаменевших спутников будет в точности равно 100 м. Могут ли сталкеры добраться до клада без риска окаменеть навсегда?

А.Блинов, И.Раскина

4 (8). Три окружности проходят через точку P и попарно пересекаются в точках A , B и C . Известно, что центр одной окружности лежит на прямой AP , а центр другой – на прямой BP . Докажите, что центр третьей окружности лежит на прямой CP .

Б.Френкин

5 (8). Можно ли разбить все натуральные числа от 1 до 2009 на две группы так, чтобы сумма чисел в одной группе равнялась произведению чисел в другой группе?

А.Шаповалов

6 (8). На клетчатой бумаге нарисован 222-угольник со сторонами по границам клеток. Из какого наименьшего числа клеток может состоять этот многоугольник?

А.Шаповалов

7 (6–8). По кругу стоят лжецы и рыцари, всего 100 человек. В первый раз каждого спросили «Верно ли, что твой сосед справа – лжец?» Двое ответили «да», остальные – «нет». Во второй раз каждого спросили: «Верно ли, что твой сосед слева через одного – лжец?» И снова двое ответили «да», остальные – «нет». В третий раз спросили: «Верно ли, что стоящий напротив тебя – лжец?» Сколько человек на этот раз ответят «да»?

А.Шаповалов

8 (7–8). Найдите наименьшее натуральное число, записываемое одинаковыми цифрами и делящееся на 2009.

С.Токарев

9 (8). Диагонали четырехугольника перпендикулярны. Найдите его углы, если известно, что три из них равны, а все стороны четырехугольника различны.

А.Заславский

10 (7–8). Можно ли разбить квадрат 20×20 на доминошки 1×2 так, чтобы каждая граничила по отрезку с нечетным числом других доминошек?

А.Шаповалов

11 (7–8). На доску выписаны через запятую числа 1, 2, 3, ..., 2009. Двое играющих по очереди заменяют какую-нибудь запятую на + или $\times$ (умножить). Если после замены всех запятых результат будет четным, выигрывает первый, если нечетным – второй. Кто из игроков может выигрывать, как бы ни играл соперник?

А.Шаповалов

12 (7–8). Десять ребят на лужайке играют в пейнтбол. Сначала каждый выстрелил краской в ближайшего к себе. (Если игроков, расположенных ближе всего к стреляющему, несколько, то он стреляет в любого из них.) Затем каждый выстрелил в наиболее удаленного от себя (если таковых несколько – то в любого из них). Какое наибольшее число порций краски могло в итоге попасть в одного игрока?

С.Токарев

13 (7–8). В треугольнике ABC проведена медиана BM . Найдите $\angle ABC$, если $\angle BAC = 30^\circ$, а $\angle BMC = 45^\circ$.

С.Токарев

14 (7–8). Можно ли все натуральные числа от 1 до 200 выписать по кругу так, чтобы для любых двух соседних чисел хотя бы одно отличалось от другого на целое число процентов?

И.Акулич

15 (7–8). Назовем *разносторонностью* треугольника отношение его наибольшей стороны к наименьшей, а *разноугольностью* – отношение его наибольшего угла к наименьшему. Петя уверен, что чем больше разносторонность треугольника, тем больше его разноугольность. Прав ли он?

И.Акулич

16 (7–8). На доске нарисован неравнобедренный треугольник. Имеется угольник той же формы, выпи-

ленный из фанеры. Угольник можно прикладывать к доске (в том числе к уже начерченным прямым и точкам) и чертить линии по его краю. Всегда ли можно построить какую-нибудь из высот нарисованного треугольника?

А.Блинков, Ю.Блинков

17 (8). На столе лежат 10 кусков сыра. Петя съедает самый маленький (по весу) кусок. Затем он режет один из оставшихся на столе кусков на две части, и снова берет себе самый маленький из получившихся 10 кусков. Эти действия – разрезание и взятие куска – Петя повторяет, пока не съест 9 кусков. Докажите, что Петя съест не более половины сыра (по весу).

А.Шаповалов

18 (8). Измерив длины сторон и высот некоторого треугольника, Таня получила 6 различных чисел и записала их на 6 карточках. Перетасовав карточки, она выслала их Боре. Всегда ли сможет Боря выбрать из них три карточки, на которых выписаны длины сторон?

Б.Френкин

19 (6–8). Есть 63 одинаковые с виду монеты, одна из них – фальшивая, она легче настоящей. Есть чашечные весы без гирь, у которых правая чаша вымазана краской. Как за 5 взвешиваний выявить фальшивую монету, если монеты, побывавшие на правой чаше, нельзя после этого класть на левую?

А.Шаповалов

20 (8). В классе 32 человека. Каждый из них назвал два числа: количество его одноклассников с таким же ростом, но другим весом, и количество его одноклассников с таким же весом, но другим ростом. Среди названных чисел встретились все числа от 0 до 10. Докажите, что в этом классе можно выбрать двух человек с одинаковым ростом и одинаковым весом.

К.Матвеев, А.Шаповалов

21 (8). Решите систему

$$\begin{cases} x^5 + y^3 = 2z, \\ y^5 + z^3 = 2x, \\ z^5 + x^3 = 2y. \end{cases}$$

В.Сендеров

22 (8). На доске написаны два выражения: $x + y + z$ и $x^2 + y^2 + z^2$. Игроют двое, они по очереди заменяют x , y и z в выражениях натуральными числами (вначале первый игрок заменяет x , затем второй – y , и наконец первый – z). Первый игрок хочет, чтобы в итоге оба выражения делились на 101, а второй пытается помешать этому. Кто может обеспечить себе победу, как бы ни играл его противник?

В.Сендеров, И.Богданов

*Публикацию подготовили
Д.Калинин, А.Шаповалов*