Им приходится этот закон отчасти угадывать, исходя из экспериментальных данных, отчасти конструировать на основе знаний о структуре нуклонов. Тут-то и помогут новые данные о трехмерном устройстве нуклонов.

В-третьих, несколько лет назад физики сумели получить ни много ни мало новое агрегатное состояние вещества – кварк-глюонную плазму. В таком состоянии кварки не сидят внутри отдельных протонов и нейтронов, а свободно гуляют по всему сгустку ядерного вещества. Достичь его можно, например, так: тяжелые ядра разгоняются в ускорителе до скорости, очень близкой к скорости света, и затем сталкиваются лоб в лоб. В этом столкновении на очень короткое время возникает температура в триллионы градусов, которая и расплавляет ядра в кварк-глюонную плазму. Так вот, оказывается, что теоретические расчеты этого ядерного плавления требуют хорошего знания трехмерного устройства нуклонов.

Наконец, эти данные очень нужны для астрофизики. Когда тяжелые звезды взрываются в конце своей жизни, от них часто остаются чрезвычайно компактные объекты – нейтронные и, возможно, кварковые звезды. Сердцевина этих звезд целиком состоит из нейтронов, а может быть даже и из холодной кварк-глюонной плазмы. Такие звезды уже давно обнаружены, но что происходит у них внутри – можно только догадываться. Так что хорошее понимание кварковых распределений может привести к прогрессу и в астрофизике.

НАНОТЕХНОЛОГИИ

Космический нанолифт

К.БОГДАНОВ

Известно, что многие спутники Земли, например спутники связи и метеорологические спутники, находятся на геостационарных орбитах и, таким образом, могут неподвижно висеть над одной и той же точкой ее поверхности.

Оценим высоту H геостационарной орбиты над поверхностью Земли. Пусть $R_З = 6400$ км $= 6{,}4 \cdot 10^6$ м – радиус Земли, $T = 24$ ч $= 86400$ с – период ее обращения вокруг оси. Тогда линейная скорость v геостационарного спутника в инерциальной системе отсчета, связанной с осью Земли, равна

$$v = \frac{2\pi(R_З + H)}{T}.$$

С другой стороны, центростремительное ускорение спутника a должно быть равно ускорению свободного падения g на данной высоте:

$$a = \frac{v^2}{R_З + H},$$

$$g = g_0\left(\frac{R_З}{R_З + H}\right)^2, \text{ где } g_0 = 9{,}8 \text{ м/с}^2,$$

$$a = g.$$

Отсюда после нескольких алгебраических преобразований получаем

$$H = \sqrt[3]{\frac{g_0 R_З^2 T^2}{4\pi^2}} - R_З = 35900 \text{ км}.$$

Еще у К.Э.Циолковского возникла мысль использовать геостационарные спутники, а все необходимое для работы доставлять туда на космическом лифте по тросу, соединяющему спутник с точкой на Земле, над которой он находится. Однако простые расчеты показали, что такой трос, сделанный даже из самых прочных сортов стали, оборвется под силой собственной тяжести.

Найдем, какой может быть максимальная длина L троса из стали, который не разорвется под силой собственной тяжести. Предел прочности стали $\sigma_{пр} = 0{,}8$ ГПа, плотность стали $\rho = 7800$ кг/м^3. Если S – площадь поперечного сечения троса, то вес P троса длиной L и плотностью ρ равен $P = \rho g L S$. Когда трос подвешен за один конец, механическое напряжение σ (отношение силы упругости троса к площади его поперечного сечения) в самой верхней точке троса равно

$$\sigma = \frac{P}{S} = \rho g L.$$

Чтобы трос не разорвался, σ должно быть меньше $\sigma_{пр}$, откуда следует, что

$$L < \frac{\sigma_{пр}}{\rho g} \approx 10 \text{ км}.$$

Полученное значение длины троса действительно гораздо меньше высоты геостационарной орбиты спутника.

Принято считать, что самыми прочными материалами на Земле сегодня являются углеродные нанотрубки. Теоретически их прочность должна составлять около 300 ГПа, однако экспериментальные значения оказываются не более 60 ГПа. Эти различия, по-видимому, вызваны отсутствием технологии производства длинных нанотрубок без дефектов. В настоящее время длина нанотрубок составляет не более нескольких миллиметров. Предположим, что через некоторое время с помощью методов нанотехнологий станет возможным изготовление бездефектных нанотрубок длиной в сотни и тысячи километров. Это сделает возможным вернуться к идее космического лифта, используя вместо троса нанотрубки.

Найдем массу M углеродной нанотрубки длиной $L = 1$ км и диаметром $D = 1{,}4$ нм, считая, что нанотрубка состоит из атомов углерода, образующих правильные шестиугольники с ребром $d = 0{,}14$ нм (см. рисунок). Легко показать, что ширина шестиугольника (расстояние между параллельными ребрами) составляет $a = d\sqrt{3}$. Вдоль периметра нанотрубки укладывается полоска из n таких шестиугольников, причем

$$n = \frac{\pi D}{d\sqrt{3}} = 18.$$

Общее число атомов углерода в этих шестиугольниках равно $4n$. Аналогичные полоски из n атомов повторяются вдоль длины нанотрубки через расстояние, равное $3d$. Поэтому общее число атомов N у такой нанотрубки длиной L составит

$$N = 4n\frac{L}{3d} = \frac{4 \cdot 18 \cdot 10^3 \text{ м}}{3 \cdot 0{,}14 \cdot 10^{-9} \text{ м}} = 1{,}7 \cdot 10^{14}.$$

Масса такой нанотрубки будет равна

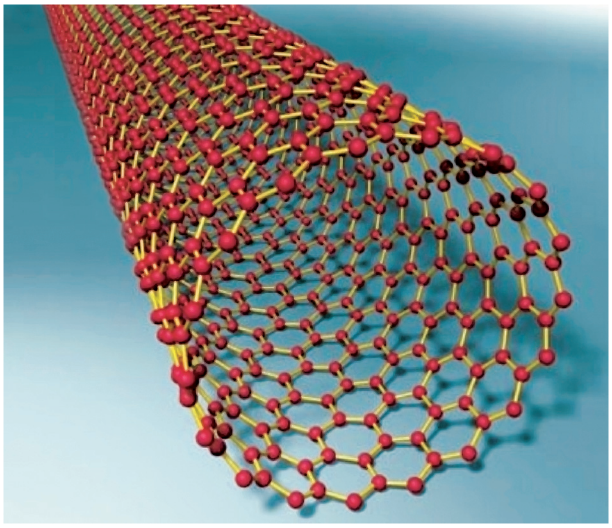
$$M = N \cdot 12 \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27} \text{ кг} = 3{,}4 \cdot 10^{-12} \text{ кг}.$$

Считая прочность троса из нанотрубок равной $\sigma_{\text{пр}} = 300$ ГПа, а его плотность $\rho = 1400$ кг/м^3, определим максимальную длину $L_{\max}$ этого троса, не обрывающегося под силой собственной тяжести. Причем изменением ускорения свободного падения при удалении от Земли сначала будем пренебрегать.

Воспользуемся результатами расчетов для стального троса и найдем напряжение нашего троса из нанотрубок: $\sigma = \rho g L$. Чтобы трос не разорвался, должно выполняться условие

$$\sigma < \sigma_{\text{пр}}, \text{ или } L_{\max} < \frac{\sigma_{\text{пр}}}{\rho g} \approx 22000 \text{ км}.$$

Уже неплохой результат.



А какой может быть максимальная длина $L_{\max}$ этого не обрывающегося под силой собственной тяжести троса, если учесть изменение ускорения свободного падения при удалении от Земли?

Пусть площадь поперечного сечения троса равна S. Тогда вес dP отрезка троса длиной dH и плотностью ρ равен $dP = \rho g S dH$, где $g = g_0\left(\frac{R_З}{R_З + H}\right)^2$. Если трос длиной L подвесить за один конец, то напряжение в самой верхней точке троса будет равно

$$\sigma = \frac{P}{S} = \rho g_0 R_З^2 \int_0^L \frac{dH}{(R_З + H)^2} = \rho g_0 R_З \frac{L}{R_З + L}.$$

Последний сомножитель в правой части полученного выражения при значениях $L > R_З$ монотонно увеличивается, стремясь к единице. Отсюда следует, что напряжение σ не может быть больше $\rho g_0 R_З \approx 0{,}3\sigma_{\text{пр}}$.

Таким образом, трос, сделанный из углеродных нанотрубок, в гравитационном поле Земли может быть любой длины, так как он никогда не разорвется под действием собственной тяжести. Это делает идею космического лифта вполне реальной.

ИНФОРМАЦИЯ

Благотворительный фонд «Новая мысль» (учредитель ЗАО «Финам») объявляет конкурс среди лиц, склонных к критическому анализу различных проблем физики, математики и информатики. Конкурсант должен сам поставить задачу и представить ее решение.

Цель конкурса: выявление и поощрение самостоятельно и конструктивно мыслящих людей.

Конкурс – ежегодный. Условия проведения очередного конкурса объявляются в декабре, итоги подводятся в мае следующего года, причем отдельно для лиц не старше 18 лет и для лиц до 35 лет.

Премиальные фонды формируются в следующих размерах:

для участников возрастной категории до 18 лет – 300000 руб. (главная премия 150000 руб., три поощрительные по 50000 руб.);

для участников возрастной категории до 35 лет – 500000 руб. (главная премия 200000 руб., три поощрительные по 100000 руб.).

Оргкомитет конкурса планирует впоследствии увеличение объемов наградных фондов.

Обращение–декларация Оргкомитета конкурса к участникам, правила оформления заявок, сроки, место и форма представления конкурсных материалов, а также прочая информация – все это будет опубликовано в шестом номере журнала «Квант» за 2009 год и в начале декабря помещено на сайте журнала «Квант».

Задача Эрдеша – Секереша: продолжение истории

В.КОШЕЛЕВ, А.РАЙГОРОДСКИЙ

Снова в путь

В «Кванте» №2 за этот год была опубликована наша статья «Задача Эрдеша – Секереша о выпуклых многоугольниках» [1]. Там мы рассказывали удивительную (а местами даже романтическую) историю одной из самых красивых и популярных проблем комбинаторной геометрии – историю, которая началась 75 лет назад и которая весьма далека от своего завершения. Читателю, желающему как следует понять истоки того, о чем мы поведем речь в нынешней статье, необходимо, конечно, вооружиться вышеупомянутой статьей, ведь здесь мы лишь напомним краткое содержание «предыдущих серий», а после двинемся в принципиально новые для нас, до сих пор неизведанные области.

Итак, основными объектами нашего исследования были множества точек *общего положения* на плоскости. Напомним, что таковы все множества, никакие три элемента которых не лежат на одной прямой. Нашей целью было отыскание для каждого натурального числа n значения функции $g(n)$, которую мы полагали равной наименьшему g такому, что в любом множестве общего положения на плоскости, имеющем мощность g, обязательно есть n точек, являющихся вершинами выпуклого n-угольника.

Сперва мы обсудили вопрос о поведении функции $g(n)$ при $n \in \{3,4,5,6\}$ и выяснили, что всякий раз $g(n) = 2^{n-2} + 1$. Затем мы убедились в том, что вообще при всех $n \geq 3$ величина $g(n)$ конечна и что, более того, $g(n) \leq 4^n$, точнее $g(n) \leq C_{2n-5}^{n-2} + 1$ при $n \geq 5$. Наконец, мы показали, что опять-таки при любом n $g(n) \geq 2^{n-2} + 1$.

Вот, в сущности, и все. Оказывается, однако, что это лишь начало пути. И дело не только в том, что точный вид функции $g(n)$ по-прежнему неизвестен (мы лишь можем верить вслед за авторами проблемы, что $g(n) = 2^{n-2} + 1$); дело еще и в том, что исходная задача допускает ряд весьма естественных, ничуть не менее красивых обобщений и, как принято говорить в науке, модификаций. Именно о них мы теперь и поговорим.

Выпуклые и пустые многоугольники

Модификация задачи Эрдеша – Секереша

Спустя без малого полвека с момента выхода в свет замечательной статьи [2], а точнее в 1978 году, П.Эрдеш предложил слегка видоизменить условие исходной проблемы, которая к тому времени стала классической. Он задался вопросом: что если мы будем искать в том или ином множестве $\mathcal{X}$ общего положения на плоскости не просто вершины выпуклых многоугольников, но вершины таких выпуклых многоугольников, внутри которых нет других точек множества $\mathcal{X}$? Такие многоугольники естественно называть *пустыми* или *дырами*. На рисунке 1 показан пример дыры и пример не дыры.

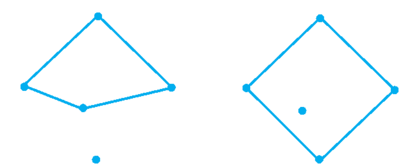


Рис 1. Пример дыры и не дыры

Введем величину $h(n)$, которая послужит аналогом величины $g(n)$ в рамках новой задачи. Что это значит? По идее, все очень просто. Допустим, для данного натурального $n \geq 3$ мы нашли такое число h, что в любом множестве общего положения на плоскости, имеющем мощность h, есть пустой n-угольник и найдется множество общего положения на плоскости, имеющее размер $h - 1$ и дыр на n вершинах не содержащее. Вот и положим тогда $h(n) = h$. Просто? Не совсем. Дело в том, что сходу не вполне понятно, почему наличие пустых многоугольников в произвольном h-точечном множестве гарантирует нам их присутствие в каждом множестве размера $h + 1$. Возникает проблема с соблюдением условия пустоты, которого раньше (т.е. при определении величины $g(n)$) вовсе не было. Иными словами, если прежде мы спокойно говорили о *пограничной* величине $g(n)$, *начиная* с которой всякое множество соответствующего размера содержало выпуклый многоугольник, то отныне такое спокойствие еще нужно заслужить. По счастью, проблема легко устранима.

Утверждение 1. *Пусть при некотором h любое множество общего положения на плоскости, имеющее мощность h, содержит выпуклый и пустой n-угольник. Тогда то же самое верно и для каждого множества общего положения размера $h + 1$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольное множество $\mathcal{X}$ мощности $h + 1$. Пусть $\mathcal{H}$ – многоугольник, являющийся его выпуклой оболочкой (см. [1]). Удалим из $\mathcal{X}$ любую вершину этого многоугольника. Останется множество размера h, в котором, по нашему предположению, есть выпуклый и пустой n-угольник. Очевидно, выкинутая нами вершина находится вне этого n-угольника. Значит, $\mathcal{X}$ содержит выпуклый и *пустой* n-угольник. Утверждение доказано.

Если каждому h, для которого существует множество размера h без выпуклых и пустых n-угольников, ставить в соответствие 0, а каждому h, для которого подобного множества нет, сопоставлять 1, то, ввиду утверждения 1, возникнет одна из трех ситуаций, изображенных графически на рисунке 2. В первой

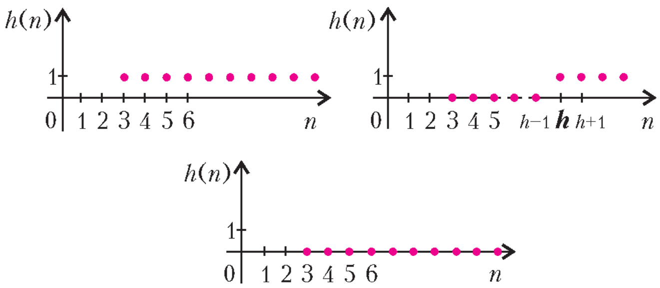


Рис. 2. Ситуации, возникающие при определении $h(n)$

ситуации $h(n) = 3$, во второй – $h(n) = h$, в третьей ситуации можно говорить, что $h(n) = \infty$ или что $h(n)$ не существует.

Попробуем разобраться с малыми n. Очевидно, что $h(3) = 3$. Зная доказательство того, что $g(4) = 5$, нетрудно понять, что и $h(4) = 5$. Иллюстрации к тому прежние (рис. 3, 4).

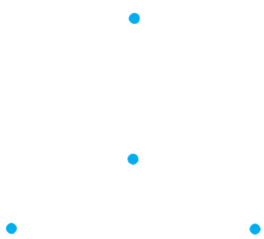


Рис. 3. Четыре точки без выпуклых четырехугольников

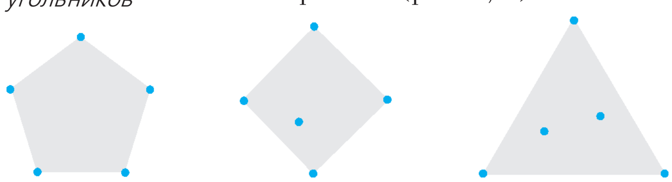


Рис. 4. Варианты взимного расположения пяти точек

Так, может, $h(n) = g(n)$?

...И Эрдеш только зря старался, придумывая модификацию своей старой задачи? Э нет, все куда интереснее. Во-первых, на рисунке 5 изображен пример множества из девяти точек: оно в общем положении, и, как положено, выпуклые пятиугольники на его элементах строятся; однако ни один из этих пятиугольников пустым не является.

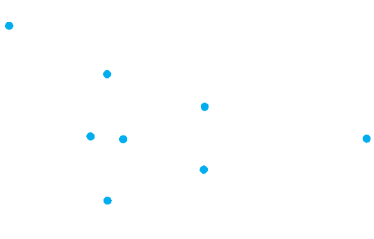


Рис. 5. Пример девяти точек без выпуклых и пустых пятиугольников

Итак, $h(5) \geq 10 > g(5) = 9$. На самом деле $h(5) = 10$. Это показал Х.Харборт в 1978 году. Мы не станем приводить здесь его рассуждение, которое, впрочем, не очень и сложное.

А в 1983 году, можно сказать, грянул гром среди ясного неба: Дж.Хортон доказал несуществование величины $h(7)$ и, стало быть, всех $h(n)$ при $n \geq 7$. Для каждого h он построил пример множества из h точек на плоскости, в котором нет выпуклых и пустых семиугольников. В следующем разделе мы опишем хортоновскую конструкцию.

Множества Хортона

Итак, нам нужно для каждого h построить множество на плоскости, размер которого h и в котором любой выпуклый семиугольник содержит хотя бы одну точку внутри. Ради реализации этого замысла нам потребуется вспомнить определения «чашек» и «крышек».

Чашки и крышки: краткое напоминание. Конечно, определение чашек и крышек мы уже давали в статье [1], и именно к ней нам следует отослать читателя. Соответственно, здесь мы не станем вдаваться в какие-либо подробности. Мы лишь подчеркнем, что и чашки, и крышки определяются в некоторой (любой) системе координат, каковую отныне мы будем считать раз и навсегда зафиксированной на плоскости. В этой системе координат типичная чашка и типичная крышка выглядят так, как это показано на рисунке 6.

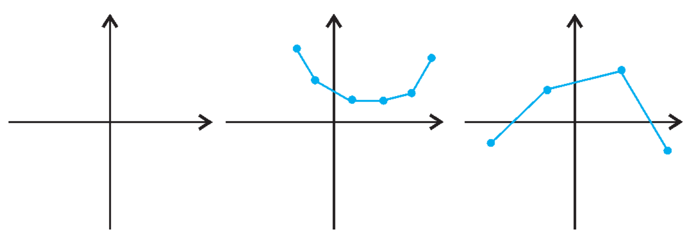


Рис. 6. Система координат и типичные чашка и крышка в ней

Напомним еще, что k-чашка – это чашка с k узлами и, стало быть, $k - 1$ звеньями. Например, чашка на рисунке 6 является 6-чашкой. Аналогично определяются и k-крышки.

И для чего же нам чашки с крышками? А все дело в том, что выполнено следующее простое утверждение.

Утверждение 2. *Любой выпуклый семиугольник на плоскости, у которого в данной системе координат нет сторон, параллельных оси Оу (назовем такие стороны вертикальными), либо содержит 5-чашку, либо содержит 5-крышку.*

Доказательство утверждения мы предоставляем читателю в качестве упражнения. Вывод из утверждения такой: если для данного h мы построили множество размера h на плоскости, в котором никакие две точки не служат концами вертикального отрезка и в котором любая 5-чашка и любая 5-крышка содержат хотя бы одну точку этого множества, то и любой выпуклый семиугольник в этом множестве не пуст. (Мы говорим, что чашка (или крышка) содержит точку, если эту точку содержит выпуклый пятиугольник, полученный из нашей чашки (крышки) добавлением недостающего ребра.)

Небольшое упрощение задачи. Итак, нам нужно для каждого h придумать множество мощности h на плоскости, в котором нет вертикальных отрезков и в котором каждая 5-чашка и каждая 5-крышка в известном смысле содержат точки. А в сущности, зачем нам для *каждого* h? На самом деле, вполне хватит нам и произвольной бесконечной последовательности натуральных чисел h_k, $k = 1, 2, 3, \ldots$ Просто ввиду утвер-

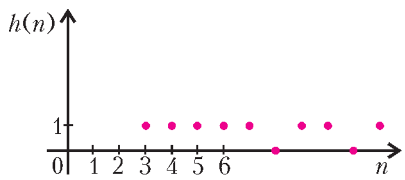


Рис. 7. Невозможная ситуация

ждения 1 не бывает ситуации, изображенной на рисунке 7 (сравните с рисунком 2), ведь если есть на графике ноль, то и слева от него стоят только нули.

В дальнейшем мы рассмотрим k = 4, 5, 6, ... и в качестве h_k возьмем 2^k. Дабы сделать изложение предельно ясным, мы сперва во всех подробностях опишем конструкцию в случае $k = 4$.

Случай k = 4. Нашей целью является построение множества из шестнадцати точек на плоскости. Оно должно быть общего положения, и в нем не должно быть пустых 5-чашек или 5-крышек, а также вертикальных отрезков. Организуем итеративный процесс построения. Идея простая: если уже есть какое-то множество, то его копию, полученную параллельным переносом на «достаточно большое расстояние», объединим с ним и все вместе объявим новым множеством. Понятно сразу, что, стартовав с одноточечного множества, мы за четыре шага как раз и получим шестнадцать точек.

Что ж, положим $S_1 = \{(0;0)\}$, т.е. S_1 – это множество, состоящее только из одной точки – начала координат (рис.8,*а*). Сдвинем это множество на вектор (1; 8), получится множество $S_2 = \{(0;0),(1;8)\}$, которое мы с легкостью изобразим на рисунке 8,*б*. Теперь S_2 мы сдвигаем на вектор (17; 4). Имеем

$$S_3 = S_2 \cup \{(17;4),(18;12)\}.$$

Это своего рода «змейка», показанная в уменьшенном по оси x масштабе на рисунке 8,*в*.

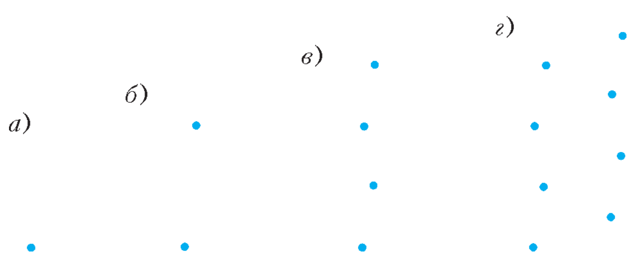


Рис. 8. Итеративное построение множества Хортона для k = = 1, 2, и 3

Далее осуществляем сдвиг всей змейки на вектор $\left(17^2;\ 2\right) = (289;\ 2)$ (совсем далеко от исходной змейки располагаем ее копию). Образуется множество S_4 с правой части рисунка 8,*г*, которую мы надлежащим образом промасштабировали в сравнении с другими частями того же рисунка.

Наконец, из S_4 формируем S_5 при помощи переноса на $\left(17^3;\ 1\right) = (4913;\ 1)$ (рис.9). Очевидна закономерность? Ну конечно: $17 = 2^4 + 1 = 2^k + 1$, $8 = 2^3 = 2^{k-1}$, и очередное множество получается из предыдущего за счет сдвига на $\left(17^i; 2^{3-i}\right)$, i = 0, 1, 2, 3. При этом, разумеется, $|S_5| = 2^k = 16$, что и требовалось. Ясно, что в S_5 вертикальных отрезков нет. Остается убедиться в том, что нет в S_5 и пустых 5-чашек с 5-крышками. Это

Рис. 9. Множество Хортона для k = 4

делается путем сравнительно нехитрого перебора. Мы предлагаем читателю самому разобраться в этом. Будет не очень легко! Возможно, следующие иллюстрации (рис.10 и 11), показывающие типичные 5-чашки (всегда непустые), слегка помогут читателю.

Рис. 10. 5-чашка в множестве S_4

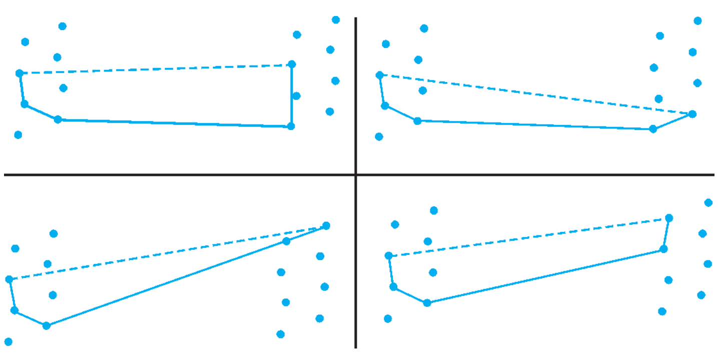


Рис. 11. 5-чашки в множестве S_5

Обратите внимание на ключевую идею: всякая прямая, соединяющая две точки из одной половинки множества Хортон, оставляет другую половинку по одну от себя сторону.

Случай произвольного k. Пусть теперь k – какое угодно, большее четырех. Проделаем абсолютно ту же процедуру, что и в предыдущем случае. А именно, положим $c = 2^k + 1$ (это аналог семнадцати) и стартуем с $S_1 = \{(0;0)\}$. Множество S_2 мы получаем, объединяя S_1 со своей копией, возникающей при сдвиге S_1 на вектор $\left(c^0;\ 2^{k-1}\right) = \left(1;\ 2^{k-1}\right)$ (аналог вектора (1; 8)). Множество S_3 задается вектором $\left(c^1;\ 2^{k-2}\right)$ (аналог вектора (17; 4)). И так далее. Последнее множество имеет номер $k + 1$, так что его мощность в как раз совпадает с $h_k = 2^k$, и образуется оно путем переноса своего предшественника – множества S_k – на вектор $\left(c^{k-1};\ 2^0\right) = \left(c^{k-1};\ 1\right)$ (аналог вектора $\left(17^3;\ 1\right)$). Иными словами, мы снова организуем итеративный процесс, в котором на каждом шаге мы копируем уже имеющееся множество, унося его «достаточно далеко» от исходника.

Понятно, что вертикальных отрезков в S_{k+1} нет. Проверку же того факта, что нет там также ни пустых 5-чашек, ни пустых 5-крышек, мы снова предоставляем читателю. Это еще труднее, чем в предыдущем случае; зато если вы разобрались с $k = 4$, то и прочие значения k вам будут подвластны.

А что же с шестиугольниками?

Между прочим, про случай $n = 6$ мы пока совсем не говорили. Мы сделали это намеренно, поскольку у этого случая весьма интригующая история, которая заслуживает отдельного изложения.

В течение довольно долгого времени с момента постановки новой задачи (т.е., напомним, с 1978 года) о величине $h(6)$ ничего известно не было. Никто не знал даже, конечна ли она. За неимением лучшего стали придумывать нижние оценки, хотя вполне могло статься, что $h(6)$ не существует. Оценка $h(6) \ge g(6) = 17$ тривиальна. В 1985 году Д.Раппопорт с помощью компьютера построил пример из двадцати точек на плоскости, среди которых не было шести вершин выпуклого и пустого шестиугольника. В 1988 году М.Овермарс, Б.Шолтен и И.Винсент привели аналогичный компьютерный пример из двадцати шести точек. В 2001 году вычислительная техника усовершенствовалась, Овермарс вернулся к задаче и предъявил пример уже из двадцати девяти точек. Это текущий рекорд, и он изображен на рисунке 12 (в правой колонке координаты точек).

(1,1260)
(16, 743)
(22, 531)
(37, 0)
(306, 592)
(310, 531)
(366, 552)
(371, 487)
(374, 525)
(392, 575)
(396, 613)
(410, 539)
(416, 550)
(426, 526)
(426, 526)
(434, 552)
(436, 535)
(446, 565)
(449, 518)
(450, 498)
(453, 542)
(458, 526)
(489, 537)
(492, 502)
(496, 579)
(516, 467)
(552, 502)
(754, 697)
(777, 194)
(1259, 320)

Рис. 12. Конструкция Овермарса для 29 точек

Только в 2006 году стало ясно, что усилия Овермарса не были напрасными: Т.Геркен доказал, что $h(6) \le g(9)$. Независимо от него в том же году К.Николас установил неравенство $h(6) \le g(25)$, которое, конечно, намного хуже геркеновского. Основываясь на идеях Геркена, П.Вальтр дал значительно более короткое доказательство оценки $h(6) \le g(15)$. В любом случае получалось, что заведомо

$$h(6) \le g(9) \le C_{2\cdot 9-5}^{9-2} + 1 = 1717 .$$

Спустя год В.Кошелев (один из авторов этой статьи) заинтересовался задачей, и ему удалось еще продвинуться в ней. Сейчас, благодаря Кошелеву и Овермарсу, мы имеем цепочку неравенств

$$30 \le h(6) \le g(8) \le C_{2\cdot 8-5}^{8-2} + 1 = 463 .$$

Техника доказательств, которую используют и Геркен, и Николас, и Вальтр, и Кошелев, очень похожа на ту, которую мы применяли в разделе «А что с пятиугольниками?» статьи [1]. Там речь шла о вложенных друг в друга выпуклых оболочках и перебирались различные случаи их взаимного расположения. На сей раз этих случаев гораздо больше: для примера, у Кошелева их 43, и работа его занимает более пятидесяти журнальных страниц.

Заметим, что если верна гипотеза о равенстве $g(n) = 2^{n-2} + 1$, то $h(6) \le g(8) = 65$. Мы верим в более сильный факт:

Гипотеза. *Имеет место равенство $h(6) = 30$.*

Иными словами, никакие вычислительные мощности уже не помогут, по-видимому, уточнить результат Овермарса.

Различные обобщения задач

Почти пустые многоугольники

Коль скоро мы знаем, что задача о величине $h(n)$ содержательна, осмысленно рассмотреть ее обобщение, при котором ищется не пустой многоугольник, а многоугольник с не более k точками исходного множества внутри. Соответствующую граничную величину принято обозначать $h(n, k)$. Тут имеется громадное поле для исследований, так как про $h(n, k)$ известно довольно мало. Мы перечислим здесь практически все когда-либо полученные результаты.

Во-первых,

$$h(3,k) = 3 ,\ h(4,k) = 5 ,\ h(5,0) = 10 ,\ h(5,\ge 1) = 9 .$$

Во-вторых, понятно, что

$$h(n) = h(n,0) \ge h(n,1) \ge h(n,2) \ge \ldots$$

С другой стороны, в некоторый момент последовательность заведомо перестает убывать, а именно, для всех k, начиная с определенного $k' = k'(n)$, $h(n,k) = g(n)$. Иными словами, если выпуклый n-угольник в множестве есть, то в нем не слишком много точек множества. Очевидно, что $k'(n) \le g(n) - n$, однако точные значения для k' – дело будущего.

Далее, если, наоборот, фиксировать k и увеличивать n, то в какой-то момент сработает конструкция типа хортоновской и величина $h(n,k)$ обратится в бесконечность. Опять же, вопрос поиска этого момента – непростая задача для исследователя! Вот $h(7,0) = \infty$, а про $h(7,1)$ мы ничего не знаем; $h(8,1) = \infty$, а что с $h(8,2)$, не ясно; $h(9,2) = \infty$, но конечна ли величина $h(9,3)$ – пока вопрос; и так далее: не существуют

$$h(10,3),\ h(11,6),\ h(12,9),\ h(13,12),\ h(14,15),$$

$$h(15,22),\ h(16,29),\ h(17,36),\ \ldots$$

Заметим, что весь перечень подобных результатов содержится в работе Бл.Сендова [3].

На самом деле, с ростом n величина k, при которой, по Сендову, $h(n,k)$ заведомо не существует, ведет себя примерно так же, как $\left(\sqrt[4]{2}\right)^n$. Совсем недавно Кошелев сумел заменить упомянутую функцию на значительно большую (близкую к 2^n). В результате не существуют

$$h(12,11),\ h(13,19),\ h(14,39),$$

$$h(15,69),\ h(16,139),\ h(17,251),\ \ldots$$

Заметим напоследок, что заведомо $h(6,1) \le g(7)$ и что, по-видимому, $h(6,1) = g(6) = 17$.

Трехмерный аналог $g(n)$

До сих пор мы «жили» на плоскости, и, как видно, такая жизнь уже изобиловала всяческими трудностями. Имея желание еще усложнить себе существование, можно попробовать выйти в пространство.

Тут есть одна важная тонкость: а что теперь мы будем разуметь под общностью положения? Понятно, что никакие три точки по-прежнему не должны попадать на одну прямую. Но обычно замечают большее: любые три точки в пространстве порождают плоскость, так давайте считать, что никакие четыре точки нашего множества не лежат в одной плоскости.

Вместо выпуклых n-угольников будем искать отныне выпуклые многогранники с n вершинами. Соответствующую пограничную величину назовем $g_3(n)$, подчеркивая, тем самым, что теперь у нас три, а не два измерения. Заметим, что в этой связи величину $g(n)$ часто обозначают $g_2(n)$.

Величина $g_3(n)$ конечна всегда, подобно своему «плоскому» аналогу. Более того, $g_3(n) \le g_2(n)$. Покажите это! (*Подсказка*: используйте проекции многогранников на плоскость.) Тут также имеются специфические оценки. Например,

$$g_3(n) \le C_{2n-7}^{n-3} + 3.$$

Кроме того, $g_3(4) = 4,\ g_3(5) = 6,\ g_3(6) = 9$.

Разумеется, и тут непочатый край дальнейшей работы. А ведь бывают же еще многомерные пространства...

Трехмерный аналог $h(n)$

Ну, тут уже все ясно. Правда, отчего бы нам не рассмотреть и $h_3(n)$?

Результатов, конечно, еще меньше – дел на будущее невпроворот. Принципиально известно лишь, что $h_3(n)$ существует при всех $n \le 7$ (например, $h_3(4) = 4$, $h_3(5) = 6$, $h_3(6) = 9$) и не существует при всех $n \ge 22$. А при $n \in \{8, \ldots, 21\}$ – ваша, читатели, вотчина. Каждый новый факт ценен.

О минимальном числе выпуклых многоугольников

Давайте напоследок спустимся с небес на землю (т.е. вернемся на плоскость) и обсудим еще один красивый вопрос, связанный с задачей Эрдеша – Секереша.

Действительно, мы знаем, что в каждом множестве $\mathcal{X}$ из $x \ge g(n)$ точек есть n вершин выпуклого n-угольника. Если само множество $\mathcal{X}$ порождает выпуклый x-угольник, то в нем, конечно, будет масса интересующих нас объектов – C_x^n штук. А каково, спрашивается, *минимальное* количество выпуклых n-угольников в множестве из x точек на плоскости? Это количество мы обозначим $G(n,x)$.

По аналогии введем и величину $H(n,x)$, равную наименьшему количеству выпуклых и пустых n-угольников в множестве из x точек на плоскости.

В некотором смысле величина $H(n,x)$ изучена лучше величины $G(n,x)$. Это связано хотя бы с тем, что уже $h(7)$ не существует, и многообразие потенциальных ситуаций в результате не столь велико. Посему мы лишь обсудим здесь поведение $H(n,x)$. Начнем с $n = 3$.

Сейчас известно, что для некоторого $c > 0$

$$x^2 - cx\ln x \le H(3,x) \le \frac{3771}{2240}x^2.$$

Наиболее любопытна, впрочем, чуть более слабая верхняя оценка $H(3,x) \le 3x^2$, полученная с помощью *вероятностной* конструкции. Рассматривается «расческа», изображенная на рисунке 13. В ней x зубцов длины 1, и расстояния между соседними зубцами равны единице. С каждого зубца берется «случайная» точка. Получается случайное множество $\mathcal{X}$ мощности x. Методами теории вероятностей можно строго показать, что с положительной вероятностью наше множество содержит не больше $3x^2$ пустых треугольников, а стало быть, *существует* множество с не более $3x^2$ пустыми треугольниками. В последнем «стало быть» заключена глубокая философия вероятностного метода в комбинаторике (см., например, [4]).

Рис. 13. Расческа

Упомянутые выше методы теории вероятностей не вполне элементарны, и строгого рассуждения мы тут не приведем. Однако создать представление о вероятностной технологии попытаемся.

Итак, представим себе следующий эксперимент (желающие могут попробовать смоделировать его на компьютере). Положим $x = 1000$ и рассмотрим нашу расческу. Возьмем в руку иголку и станем наугад тыкать ею в последовательные зубцы, каждый раз отмечая точку, в которую воткнулась иголка. Возникнут точки $a_1, \ldots, a_{1000}$. Поглядим на все треугольники, образованные этими точками, и посчитаем, сколько среди них являются пустыми. Обозначим найденную величину через t_1. Проделаем аналогичную процедуру еще 999 раз, так что в итоге у нас будет 1000 чисел $t_1, \ldots, t_{1000}$. Найдем их среднее арифметическое t. Скорее всего, у нас получится $t \le 3 \cdot 10^6$. Почему? Ну, это-то как раз и доказывается с помощью «не вполне элементарных» методов теории вероятностей. Вот проведите эксперимент и увидите! Далее, все то же самое осуществим для $x = 2000, 3000, \ldots, 10000$. Почти наверняка всякий раз будет выходить, что $t \le 3x^2$.

Описанный эксперимент (коль скоро в нем не нарушится обещанная оценка) дает уверенность в том, что «среднее число» пустых треугольников в случайном множестве $\mathcal{X}$ размера x на расческе не превосходит $3x^2$. Если вложить в понятие среднего строгий математический смысл, то уже безо всякого эксперимента можно доказать, что в среднем у случайной конфигурации точек на расческе заведомо не больше $3x^2$ пустых треугольников. Но тогда очевидно, что у некоторой конкретной конфигурации также не больше $3x^2$ пустых треугольников. Вот и все.

Кстати, эксперимент – это отличный способ подбирать наиболее подходящую конструкцию типа расчески, стартуя с которой можно получать оценки для $H(3,x)$ и пр.

Приведем еще несколько результатов о величинах $H(n,x)$:

для некоторого $c_1 > 0$

$$\frac{1}{4}x^2 - c_1 x \le H(4,x) \le \frac{976}{448}x^2;$$

$$\left[\frac{x-4}{6}\right] \le H(5,x) \le \frac{393}{320}x^2;$$

$$0 < H(6,x) \le \frac{666}{2240}x^2.$$

Последняя нижняя оценка такая странная по той простой причине, что, как мы помним, лишь совсем недавно было доказано существование $h(6)$: если бы это было не так, то $H(6,x)$ равнялась бы нулю. Именно это и происходит с $H(n,x)$ при $n \ge 7$.

Список литературы

1. В.Кошелев, А.Райгородский. *Задача Эрдеша – Секереша о выпуклых многоугольниках*. – «Квант», №2, 2009.

2. P.Erdös, G.Szekeres. *A combinatorial problem in geometry*. – Compositio Math., 2 (1935), 463–470.

3. Бл.Сендов. *Обязательные конфигурации точек на плоскости*. – «Фундаментальная и прикладная математика», 1 (1995), 2, 491–516.

4. А.М.Райгородский. *Вероятность и алгебра в комбинаторике*. – М.: МЦНМО, 2008.

5.В.Кошелев. *Задача Эрдеша – Секереша о пустых шестиугольниках на плоскости*. – «Моделирование и анализ информационных систем», т. 16 (2009), №2, 21–73.

КОЛЛЕКЦИЯ ГОЛОВОЛОМОК

БРУСОЧКИ

(Начало см. на 2-й странице обложки)

Принцип устройства таких головоломок очень простой: в прямоугольной коробке лежат деревянные брусочки разной формы, их можно передвигать, но нельзя вынимать и перекладывать. (По-видимому, «клоцки» были своеобразной вариацией знаменитой «Игры в 15».) Задача в том, чтобы из начального положения получить другую (конкретную) расстановку этих брусочков. Иногда требуется, чтобы только один брусочек занял определенную позицию, а иногда – чтобы все. Можно усложнить задачу: добиться цели за минимальное число ходов или за ограниченное время.

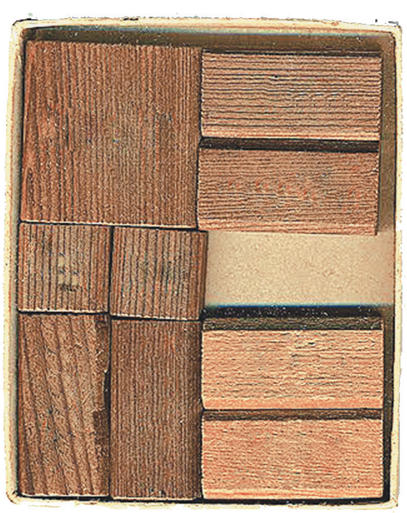


Рис. 1

Как правило, подобные головоломки довольно трудны, и поиск решения может потребовать немалых усилий. Например, известно, что невозможно решить чемпионскую головоломку (рис. 1) менее, чем за 59 ходов.

Игра быстро обрела известность и популярность, стали появляться ее многочисленные модификации. На рисунке 2 показано другое начальное расположение брусочков. Здесь нужно передвинуть большой квадрат на место четырех маленьких квадратиков. Интересно, что впервые кратчайшее решение – за 81 ход – опубликовал Мартин Гарднер в 1964 году.

Рис. 2

Изготовить головоломку с брусочками несложно и в домашних условиях. Склейте коробку с дном в форме прямоугольника размером 4×5, вырежьте из бумаги или фанеры брусочки размером 1×1, 1×2 и 2×2. Рекомендуется делать коробку для брусочков с небольшим припуском, чтобы их было легко передвигать.

Можно сделать и попытаться самостоятельно решить одну из приведенных головоломок, а можно придумать и что-то новое.

Е.Епифанов