Квант журнал© СЕНТЯБРЬ ОКТЯБРЬ 2009 № 5

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

В издании журнала «Квант» финансовое участие принимает ОАО «ТЕХСНАБЭКСПОРТ»

Учредители — Российская академия наук, Фонд поддержки фундаментальной науки и образования (Фонд Осипьяна), ИФТТ РАН
Издатель – ООО НПП ОО «Бюро Квантум»

Прямая Сильвестра

С.ТАБАЧНИКОВ, В.ТИМОРИН

Задача

В 1893 году Сильвестр поставил такую задачу [1]: *верно ли, что среди любого конечного множества точек на плоскости, не лежащих на одной прямой, найдется пара точек такая, что проходящая через них прямая не содержит никаких других точек данного множества?* (Такая прямая, если она существует, называется *прямой Сильвестра.*) Несмотря на элементарную формулировку, задача оставалась нерешенной 40 лет. Возможно, ею просто никто не занимался. В 1933 году известный венгерский математик Эрдеш переоткрыл задачу Сильвестра и, после нескольких неудачных попыток ее решить, сообщил ее своему коллеге Тибору Грюнвальду (позже Грюнвальд сменил свою фамилию на Галлаи; он более известен под этой второй фамилией). Галлаи вскоре решил задачу. Однако широкую известность она получила еще через 10 лет, в 1943 году, когда Эрдеш опубликовал ее в популярном американском математическом журнале American Mathematical Monthly [2]. Одновременно с задачей в редакцию было представлено и решение, полученное Галлаи. Вскоре в редакцию поступило еще несколько решений, полученных Баком, Келли, Штейнбергом и Стинродом.

Ответ на вопрос Сильвестра положительный:

Теорема 1. *Для любого конечного неколлинеарного (т.е. не лежащего на одной прямой) набора точек на плоскости существует прямая Сильвестра.*

Мы будем называть это утверждение *теоремой Сильвестра – Галлаи*. Заметим, что первое опубликованное доказательство этой теоремы (1941) принадлежит Мельхиору. Известно множество доказательств теоремы Сильвестра – Галлаи, использующих идеи из самых разных областей математики. Мы обсудим некоторые из этих идей. Во-первых, мы руководствуемся принципом: полезней знать различные доказательства одной и той же теоремы, чем одинаковые доказательства разных теорем. Во-вторых, различные идеи доказательства теоремы Сильвестра–Галлаи связаны с различными математическими теориями, и мы хотим дать читателю представление об этих теориях.

Немного истории: Сильвестр, Эрдеш и Галлаи

Прежде чем говорить о решениях задачи Сильвестра, скажем несколько слов о самом Сильвестре (1814–1897). Это математик, получивший фундаментальные результаты в теории инвариантов, полилинейной алгебре, теории чисел и комбинаторике. Кстати, Сильвестру принадлежит термин «детерминант». Кэли и Сильвестр – вот два самых знаменитых математика викторианской Англии.

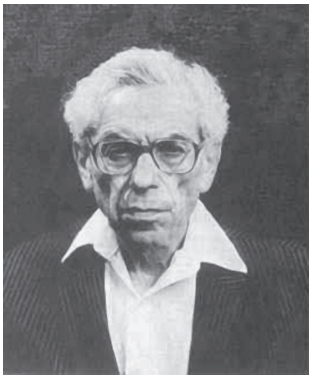
Джеймс Джозеф Сильвестр родился в семье купца Абрахама Джозефа. Фамилию Сильвестр он взял позже. Сильвестр сменил несколько школ и колледжей, а затем учился в Кембриджском университете. Там он занял второе место по результатам очень серьезного выпускного математического экзамена. Экзамен, в принципе, давал право на получение одновременно степеней бакалавра и магистра. Но Сильвестр не получил эти степени, так как отказался от соответствующей формальной процедуры, включавшей признание канонов англиканской церкви. Научные степени Сильвестр получил только через 4 года, уже будучи профессором физики в лондонском университете.

Сразу после этого Сильвестр переехал в США, чтобы преподавать математику в университете Вирджинии. Там он не проработал и пяти месяцев. Причина ухода состояла в том, что коллеги не поддержали его в стремлении выгнать одного студента.

После безуспешного поиска работы в США Сильвестр вернулся в Англию и стал работать специалистом по оценке финансовых рисков страховых компаний. Только в 1855 году (т.е. в возрасте 40 лет) ему удалось получить постоянную академическую позицию в Королевской военной академии в Вулвиче.

Так вышло, что расцвет математической карьеры Сильвестра пришелся на пенсионный возраст. В 1877–1883 годах Сильвестр возглавлял отделение математики в американском Университете Джонса Хопкинса, основал «Американский математичес-

Дж.Сильвестр



П.Эрдеш

Т.Галлаи

кий журнал» (American Journal of Mathematics). С 1883 года до конца жизни Сильвестр руководил кафедрой геометрии в Оксфорде. Задача Сильвестра приходится на этот, последний, период его жизни. Недавно появилась подробная биография Сильвестра [3].

Имя Пала Эрдеша (1913–1996), одного из самых известных и влиятельных математиков 20 века, конечно, знакомо читателям; ему задача Сильвестра обязана своей запоздалой популярностью. За свою жизнь Эрдеш опубликовал 1475 математических статей (это абсолютный рекорд среди математиков всех времен и народов). Большинство статей было написано с соавторами, которых насчитывается 511. В связи с этим было введено «число Эрдеша». Число Эрдеша для математика – это количество соавторов, отделяющих его от Эрдеша. Число Эрдеша для самого Эрдеша равно нулю, у его соавторов это число равно единице, у соавторов соавторов – двойке, и т.д. Большинство активно работающих математиков имеет малые числа Эрдеша (не больше 8). Например, числа Эрдеша авторов этой статьи равны 3 и 5.

Тибор Галлаи (1912–1992) был близким другом Эрдеша. Еще задолго до того, как они впервые увидели друг друга, они были знакомы заочно, как самые активные участники конкурса математических задач, проводимого Венгерским математическим журналом для старшей школы (этот журнал был близок по содержанию к журналу «Квант»). Галлаи стал победителем престижной математической олимпиады Этвеша и, как таковой, был принят в университет вне конкурса. Олимпиада Этвеша – самая старая в мире, она проводится с 1894 года по инициативе Венгерского физико-математического общества, которое возглавлял в то время известный физик барон Лоран Этвеш. Многие победители этой олимпиады стали в последствии знаменитыми математиками и физиками.

Келли и Штейнберг

Теперь, после долгого исторического введения, приступим к математике. Пожалуй, самое простое доказательство теоремы Сильвестра–Галлаи принадлежит Келли (оно было опубликовано Кокстером [4]).

Идея доказательства состоит в следующем. Предположим, для некоторого конечного множества M точек на плоскости прямой Сильвестра не существует. Тогда нам нужно доказать, что все точки коллинеарны. Предположим, что это не так. Рассмотрим три неколлинеарные точки A, B и C из множества M, такие, что расстояние от точки A до прямой BC минимально (т.е. среди всех пар «точка множества M» и «прямая, соединяющая две различные точки множества M» выберем такую, в которой расстояние от точки до прямой положительно и минимально). Заметим, что прямая BC содержит по крайней мере три точки множества M, иначе она будет прямой Сильвестра. Тогда две из этих точек, скажем B и C, лежат по одну сторону от основания перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую BC. Противоречие получается из такого факта: расстояние от одной из этих точек до прямой, соединяющей A с другой точкой, будет меньше, чем расстояние от A до прямой BC (рис. 1).

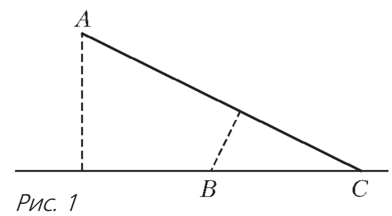


Рис. 1

Упражнение 1. Докажите, что высота тупоугольного треугольника, опущенная из вершины тупого угла, меньше высоты, опущенной из вершины острого угла. Докажите также аналогичное утверждение для прямоугольного треугольника.

Решение Келли очень просто, но обладает таким недостатком (скорее эстетическим и методологическим, чем собственно математическим). В формулировке задачи используются только понятия точки, прямой и отношения принадлежности. Евклидово расстояние в ней никак не фигурирует. На самом деле, есть много способов определить «расстояние» на плоскости. Эти разные «расстояния» отличны от привычного евклидова расстояния, но обладают похожими (или даже идентичными) свойствами. То, как определяется расстояние, не важно для отношения принадлежности между точками и прямыми. Многие из альтернативных «расстояний» могут быть использованы в доказательстве теоремы Сильвестра–Галлаи. Кажется естественным такой вопрос: можно ли обойтись в доказательстве теоремы только рассмотрением взаимного расположения точек и прямых, но не использовать такие понятия, как расстояние, угол, перпендикуляр и т.д. Оказывается, можно доказать теорему, используя только отношение принадлежности между точками и прямыми и отношение порядка между точками на прямой: такое доказательство принадлежит Штейнбергу.

Упражнение 2. Рассмотрим конечное множество точек M. Выберем точку X из M и прямую L, проходящую через точку X и не содержащую других точек множества M. Мы можем считать, что ни одна прямая, проходящая через X, не является прямой Сильвестра (иначе теорема доказана). Назовем *соединительной прямой* прямую, содержащую по меньшей мере 2 точки множества M. Ясно, что существует только конечное число соединительных прямых. Среди точек пересечения прямой L с различными соединительными прямыми найдется такая точка Y, что отрезок XY не содержит других точек пересечения. Докажите, что соединительная прямая, проходящая через точку Y, является прямой Сильвестра.

Указание. Если нет, то соединительная прямая L_Y, проходящая через Y, содержит по меньшей мере три точки множества M. Значит, с какой-то стороны от Y на прямой L_Y лежат две точки множества M. Обозначим через Z ту из точек с этой стороны от Y, которая будет второй по счету от Y (в смысле порядка точек на прямой). Одну из точек множества M, лежащих на прямой XZ, можно соединить с одной из точек множества M, лежащих на прямой L_Y так, что пересечение соответствующей соединительной прямой с прямой L находится строго внутри отрезка XY (здесь нужен небольшой перебор различных вариантов расположения точек). Противоречие с выбором точки Y.

Галлаи

Намеченное выше доказательство Штейнберга является модификацией доказательства Галлаи. Само доказательство Галлаи использует чуть больше, а именно, меру углов и понятие параллельности.

Снова рассмотрим прямую L, проходящую ровно через одну точку X нашего множества. Представим себе плоскость вложенной в трехмерное пространство (чтобы отличать ее от других плоскостей, назовем ее *начальной*), и зафиксируем некоторую точку O, не принадлежащую начальной плоскости (рис.2). Через точку O и прямую L проходит единственная плоскость.

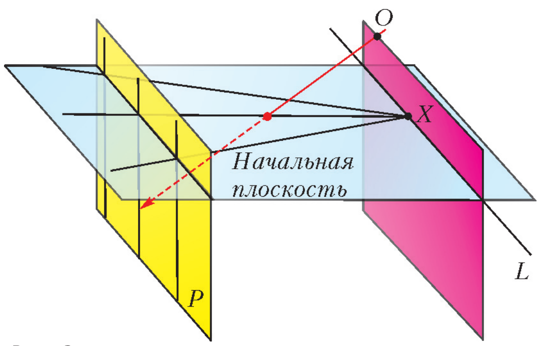


Рис. 2

Рассмотрим параллельную ей плоскость P, и спроецируем начальную плоскость на плоскость P из точки O. Заметим, что прямая L не имеет образа на плоскости P, поскольку никакой луч, начинающийся в O и проходящий через L, не пересечет P. Выражаясь образно, L переходит в «бесконечно удаленную прямую на плоскости P». Четкое утверждение (которое нетрудно проверить) состоит вот в чем: прямые в начальной плоскости, проходящие через одну и ту же точку на прямой L, проецируются в параллельные прямые.

Напомним, что прямая L проходит через ровно одну точку X множества M. Кроме того, мы можем предполагать, что все прямые, проходящие через X и еще одну точку множества M, обязательно содержат какую-нибудь третью точку множества M. Образы этих прямых при нашей проекции являются параллельными прямыми, содержащими по меньшей мере по две точки множества M' (проекции множества M на плоскость P). Теперь доказательство теоремы Сильвестра–Галлаи получается из следующего утверждения.

Рассмотрим конечное множество M' на плоскости и конечное множество параллельных прямых, такое, что каждая из этих прямых содержит по меньшей мере две точки множества M', и все точки множества M' содержатся в объединении этих прямых. Рассмотрим прямую, соединяющую две точки множества M' и образующую наименьший ненулевой угол с направлением рассматриваемых параллельных прямых. Эта прямая не может содержать никакой третьей точки множества M'.

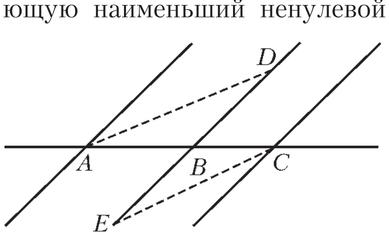


Рис. 3

Действительно, если эта прямая содержит три точки A, B и C, то одна из прямых, соединяющих A или C с точкой E или D множества M', образует еще меньший угол с направлением наших прямых (рис. 3).

Сколько прямых?

Укажем одно интересное следствие теоремы Сильвестра–Галлаи.

Теорема 2. *Предположим, что отмечены n точек на плоскости, не лежащих на одной прямой. Тогда найдется по меньшей мере n прямых, соединяющих пары отмеченных точек.*

Доказательство. Будем вести индукцию по количеству точек. Для трех неколлинеарных точек утверждение очевидно. Предположим, что утверждение доказано для любого набора из n точек плоскости, не лежащих на одной прямой. Рассмотрим теперь набор из $n+1$ выделенной точки. Пусть A – одна из этих точек. Если оставшиеся n выделенных точек лежат на одной прямой, то, соединяя каждую из них с точкой A, получим еще n прямых; утверждение доказано.

Предположим теперь, что оставшиеся n выделенных точек не лежат на одной прямой. Тогда, согласно предположению индукции, они определяют по меньшей мере n прямых (каждая из которых соединяет две из оставшихся выделенных точек). Может так случиться, что все эти прямые проходят через точку A. В этом случае назовем точку A *плохой*. Если все выделенные точки плохие, то прямая, содержащая две выделенные точки, обязательно содержит и третью. Противоречие с теоремой Сильвестра–Галлаи.

Замечание. Естественный вопрос: сколько прямых Сильвестра определяет данное неколлинеарное множество из n точек? Известно [5], что прямых Сильвестра должно быть не меньше, чем $3n/7$. Гансен доказал в своей диссертации (1981), что прямых Сильвестра всегда не меньше, чем $n/2$. К сожалению, доказательство Гансена очень сложно, и его никому не удалось проверить. Унгар доказал [6], что n точек, не лежащих на одной прямой, определяют по меньшей мере $2[n/2]$ разных направлений. Эту оценку нельзя улучшить.

На сфере

Обсудим еще одно доказательство теоремы Сильвестра–Галлаи. Оно было предложено Е.Мельхиором и, независимо, Н.Стинродом – известным американским топологом. И само доказательство топологическое. Начнем с того, что перейдем с плоскости на сферу.

Рассмотрим центральную проекцию сферы на плоскость. Центральная проекция – это такое отображение сферы на плоскость, при котором прямая, соединяющая точку сферы с ее образом на плоскости, всегда проходит через центр сферы. Мы можем проецировать сферу на любую плоскость, не проходящую через центр. При такой проекции в каждую точку плоскости будет отображаться пара диаметрально противоположных точек сферы. Кроме того, на сфере найдется такая большая окружность (т.е. пересечение сферы с плоскостью, проходящей через центр сферы), проекции точек которой не определены. Эта окружность параллельна плоскости, на которую мы проецируем.

Опишем теперь очень полезную конструкцию сферической двойственности. Каждой паре диаметрально противоположных точек на сфере соответствует большая окружность. А именно, проведем соответствующий диаметр сферы, а также плоскость, проходящую через центр и перпендикулярную диаметру. Эта плоскость высечет на сфере некоторую большую окружность. Обратно, каждой большой окружности на сфере соответствуют ровно две диаметрально противоположные точки – концы диаметра, перпендикулярного плоскости данной большой окружности.

Теперь каждой точке на плоскости соответствует пара диаметрально противоположных точек на сфере (это соответствие устанавливается центральной проекцией, как описано выше), а следовательно, и некоторая большая окружность.

Упражнения

3. Сферическая двойственность «уважает» отношение инцидентности: если точка A лежит на большой окружности b, то соответствующая большая окружность a проходит через точку B.

4. Три точки на плоскости тогда и только тогда лежат на одной прямой, когда соответствующие большие окружности на сфере проходят через одну и ту же пару диаметрально противоположных точек.

5. Пусть точкам A и B отвечают большие окружности a и b. Докажите, что угол между a и b равен сферическому расстоянию между A и B (рис. 4).

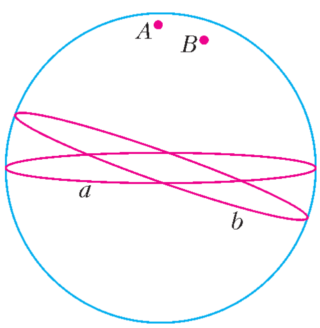


Рис. 4

Итак, мы видим, что теорема Сильвестра–Галлаи эквивалентна следующему утверждению. Пусть дано конечное множество больших окружностей на сфере. Тогда, если не все эти окружности проходят через одну и ту же пару диаметрально противоположных точек, то найдется точка, содержащая ровно две окружности из нашего множества.

Мельхиор, Стинрод и Эйлер

Опишем теперь доказательство Мельхиора и Стинрода.

Нам достаточно доказать утверждение про большие окружности на сфере, и тем самым будет доказана теорема Сильвестра–Галлаи. На самом деле можно доказать более общее утверждение. Рассмотрим конечное число точек на сфере. Будем называть эти точки *вершинами*. Рассмотрим также конечное число простых криволинейных дуг, соединяющих некоторые пары вершин. Допустим, что эти дуги не имеют общих точек, кроме вершин. Назовем эти дуги *ребрами*. Если на сфере нарисовать вершины и ребра, то они разобьют всю сферу на несколько кусков, которые мы будем называть *гранями*. Всю картинку, включающую вершины, ребра и грани, мы назовем *картой* на сфере.

Теорема 3. *Не существует такой карты на сфере, что каждая грань ограничена по меньшей мере тремя ребрами, а из каждой вершины выходит по меньшей мере шесть ребер.*

Из этой чисто топологической теоремы вытекает утверждение про большие окружности на сфере, сформулированное в конце предыдущего параграфа и эквивалентное теореме Сильвестра–Галлаи.

Доказательство. Пусть F_k – число граней, ограниченных k ребрами, а V_k – число вершин, из которых выходит k ребер. Обозначим через F, E и V, соответственно, общее число граней, число ребер и число вершин, принадлежащих рассматриваемой карте. Мы будем пользоваться известной *теоремой Эйлера*:

$$F - E + V = 2.$$

Читатель, скорее всего, знаком с этой теоремой; если это не так, мы рекомендуем доказать ее по индукции.

Посчитаем количество пар (вершина, выходящее из нее ребро). С одной стороны, каждое ребро ограничено ровно двумя вершинами. Значит, таких пар ровно $2E$. С другой стороны, число таких пар равно $6V_6 + 7V_7 + \ldots \ge 6V$. Отсюда получаем неравенство $2E \ge 6V$.

Посчитаем теперь количество пар (грань, ребро на ее границе). С одной стороны, каждое ребро лежит на границе ровно двух граней. Значит, таких пар ровно $2E$. С другой стороны, число таких пар равно $3F_3 + 4F_4 + \ldots \ge 3F$. Отсюда получаем неравенство $2E \ge 3F$.

Комбинируя полученные неравенства, приходим к противоречию:

$$6(E+2) = 6V + 6F \le 2E + 4E = 6E.$$

Упражнения

6. Рассмотрим карту на сфере. Количество ребер, выходящих из данной вершины, назовем *порядком* этой вершины. Докажите, что если каждая грань ограничена по меньшей мере тремя ребрами, то средний порядок вершины не превосходит 6. (Средний порядок вершины – это среднее арифметическое порядков всех вершин, то есть сумма порядков всех вершин, деленная на количество вершин.)

7. Рассмотрим выпуклый многогранник в трехмерном пространстве. Число ребер многогранника, выходящих из данной вершины, назовем порядком вершины. Число ребер многогранника, лежащих на данной грани, назовем порядком грани. Докажите, что средний порядок вершины, а также средний порядок грани не превосходят 6. Приведите пример многогранника, средний порядок грани которого превышает 5,5.

8. Следующее утверждение называется *двойственной теоремой Сильвестра–Галлаи*. Рассмотрим конечное множество прямых на плоскости, никакие две из которых не параллельны. Предположим, что эти прямые не проходят через одну и ту же точку. Тогда найдется точка, содержащая ровно две прямые рассматриваемого множества. Докажите, что двойственная теорема Сильвестра–Галлаи эквивалентна теореме Сильвестра–Галлаи. *Указание*: воспользуйтесь утверждением про большие окружности на сфере, а также центральной проекцией сферы на плоскость, при которой большие окружности переходят в прямые.

9. Покажите, что в утверждении двойственной теоремы Сильвестра–Галлаи можно предполагать без ограничения общности, что среди рассматриваемого конечного множества прямых нет никакой пары параллельных прямых. *Указание*: этого можно добиться, проецируя сферу на подходящую плоскость.

Элкис и Зайденберг

Наконец, еще одно доказательство теоремы Сильвестра–Галлаи, которое было придумано независимо Н.Элкисом и М.Зайденбергом. Начнем с двух упражнений – они достаточно сложные, по уровню как серьезные олимпиадные задачи. Решения и указания к этим задачам можно найти в книге [7] (задача 38, б).

Упражнения

10. Пусть ABC – треугольник на плоскости, а PQR – вписанный в него треугольник (так, что вершины P, Q, R треугольника PQR принадлежат, соответственно, сторонам AB, BC, AC треугольника ABC; рис. 5). Докажите, что площадь одного из трех треугольников, остающихся при выкидывании треугольника PQR из треугольника ABC, не превышает площади треугольника PQR.

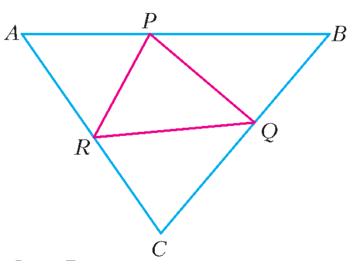


Рис. 5

11. Если в предыдущем упражнении площадь треугольника APR совпадает с площадью треугольника PQR, а площади треугольников PBQ и QCR не меньше, то стороны PQ, QR и RP параллельны, соответственно, сторонам CA, AB, BC.

Докажем теперь двойственную теорему Сильвестра–Галлаи (а тем самым и саму теорему Сильвестра–Галлаи). Рассмотрим конечное число прямых на плоскости. Допустим, что не все эти прямые проходят через одну точку. Мы также можем предполагать без ограничения общности, что в рассматриваемом множестве прямых нет параллельных. Тогда можно рассмотреть треугольники, ограниченные различными тройками прямых. Среди всех таких треугольников выберем треугольник наименьшей площади. Обозначим этот треугольник через PQR. Теперь мы предположим, что через каждую точку пересечения двух прямых нашего множества проходит еще какая-то третья прямая нашего множества (это предположение должно привести нас к противоречию). В частности, есть прямые нашего множества, проходящие через вершины треугольника PQR, но не совпадающие со сторонами этого треугольника. Поскольку треугольник PQR имеет, по определению, минимальную площадь, эти дополнительные прямые не заходят внутрь треугольника. Значит, они ограничивают треугольник ABC, описанный вокруг треугольника PQR. Воспользуемся результатами приведенных выше упражнений. Мы получаем противоречие с минимальностью площади, если только стороны треугольника PQR не параллельны соответствующим сторонам треугольника ABC. Однако мы предположили, что в рассматриваемом множестве прямых нет параллельных.

Комплексные числа: контрпример[1]

К разряду неожиданностей можно отнести тот факт, что «комплексификация» теоремы Сильвестра–Галлаи не верна.

Точки и прямые, про которые мы говорили до сих пор, были действительными точками и действительными прямыми. Если ввести на плоскости систему координат, то действительные точки изобразятся парами действительных чисел. Действительную прямую можно определить как множество действительных точек, удовлетворяющих определенному линейному уравнению с действительными коэффициентами. Однако в качестве координат можно брать и комплексные числа. Соответственно, можно говорить о комплексных точках, комплексных прямых и т.д. Множество всех комплексных точек плоскости сложнее себе представить, поскольку оно естественным образом отождествляется с действительным четырехмерным, а не двумерным, пространством. Рассмотрим такую систему уравнений:

$$z^3 + w^3 + (1 + 2z + 3w)^3 = zw(1 + 2z + 3w) = 0 .$$

Существует ровно 9 комплексных точек (т.е. пар комплексных чисел (z, w)), удовлетворяющих этой системе – по три точки на каждой из трех прямых $z = 0$, $w = 0$, $1 + 2z + 3w = 0$. Например, если подставить $z = 0$ в первое уравнение, то получится кубическое уравнение на w, у которого три комплексных решения – они соответствуют трем точкам на прямой $z = 0$; точно также можно поступить с двумя остальными прямыми. Комплексная прямая, проходящая через любые две из этих девяти точек, содержит и некоторую третью точку. С другой стороны, не существует комплексной прямой, проходящей через все 9 рассматриваемых точек.

Упражнение 12. Докажите эти утверждения.

Итак, мы убедились, что над комплексными числами теорема Сильвестра–Галлаи не имеет места. Заметим, что коэффициенты в выражении $1 + 2z + 3w$ можно выбирать почти произвольным образом (избегая только некоторых вырождений, при которых одна из девяти точек убегает на бесконечность); например, можно с тем же успехом взять $e + \pi z + iw$.

Отметим, кстати, что уравнение $z^3 + w^3 + (1 + 2z + 3w)^3 = 0$ задает на комплексной плоскости кубическую кривую, а уравнение $zw(1 + 2z + 3w) = 0$ описывает точки перегиба этой кривой. Таким образом, наши девять точек – это точки перегиба комплексной кубической кривой. Из этих девяти точек только три могут быть вещественными.

Список литературы

1. J.J.Sylvester. *Mathematical Question 11851.* – Educational Times, 59 (1893), 98.
2. P. Erdos. *Problem 4065.* – Amer. Math. Monthly, 50 (1943), 65.
3. K.Parshall. *James Joseph Sylvester: Jewish mathematician in a Victorian world.* – John Hopkins University Press, Baltimore, 2006.
4. H.S.M.Coxeter. *A problem of collinear points.* – Amer. Math. Monthly, 55 (1948), 26–28.
5. L.Kelly, W.Moser. *On the number of ordinary lines determined by n points.* – Canad. J. Math., 1: (1958), 210–219.
6. P.Ungar. *2N Noncollinear Points Determine at Least 2N Directions.* – Journal of Combinatorial Theory, Series A, 33 (1982), 343–347.
7. Д.О.Шклярский, Н.Н.Ченцов, И.М.Яглом. *Геометрические оценки и задачи из комбинаторной геометрии.* – Библиотека математического кружка, вып. 17. – М.: 1974.

(Окончание следует)

[1] *Читатель, не знакомый с комплексными числами, может пропустить этот раздел без ущерба для понимания дальнейшего текста.*

Многоликий протон

И.ИВАНОВ

Изучая строение вещества, физики узнали, из чего сделаны атомы, добрались до атомного ядра и расщепили его на протоны и нейтроны. Все эти шаги давались довольно легко – надо было лишь разогнать частицы до нужной энергии, столкнуть их друг с другом, и тогда они сами развалились на составные части.

А вот с протонами и нейтронами такой трюк уже не прошел. Хотя они и являются составными частицами, их не удается «разломать на части» ни в каком даже самом сильном столкновении. Поэтому физикам потребовались десятилетия для того, чтобы придумать разные способы заглянуть внутрь протона, увидеть его устройство и форму. В наши дни изучение структуры протона – одна из самых активных областей физики элементарных частиц.

Природа дает намеки

История изучения структуры протонов и нейтронов берет свое начало с 1930-х годов. Когда в дополнение к протонам были открыты нейтроны (1932), то, измерив их массу, физики с удивлением обнаружили, что она очень близка к массе протона. Более того, оказалось, что протоны и нейтроны «чувствуют» ядерное взаимодействие совершенно одинаковым образом. Настолько одинаковым, что, с точки зрения ядерных сил, протон и нейтрон можно считать как бы двумя проявлениями одной и той же частицы – нуклона: протон – это электрически заряженный нуклон, а нейтрон – нейтральный нуклон. Поменяйте протоны на нейтроны – и ядерные силы (почти) ничего не заметят.

Физики это свойство природы выражают как симметрию – ядерное взаимодействие симметрично относительно замены протонов на нейтроны, подобно тому как бабочка симметрична относительно замены левого на правое. Эта симметрия, кроме того что она сыграла важную роль в ядерной физике, была на самом деле первым намеком на то, что у нуклонов имеется интересное внутреннее строение. Правда тогда, в 30-е годы, физики этот намек не осознали.

Понимание пришло позже. Началось с того, что в 1940-50-е годы в реакциях столкновения протонов с ядрами различных элементов ученые с удивлением обнаруживали все новые и новые частицы. Не протоны, не нейтроны, не открытые к тому времени пи-мезоны, которые удерживают нуклоны в ядрах, а какие-то совсем новые частицы. При всем своем разнообразии эти новые частицы обладали двумя общими свойствами. Во-первых, они, так же как и нуклоны, очень охотно участвовали в ядерных взаимодействиях – сейчас такие частицы называют адронами. А во-вторых, они были исключительно нестабильными. Самые неустойчивые из них распадались на другие частицы всего за триллионную долю наносекунды, не успев пролететь даже на размер атомного ядра!

Долгое время «зоопарк» адронов представлял из себя полную мешанину. В конце 1950-х годов физики узнали уже достаточно много разных видов адронов, начали сравнивать их друг с другом и вдруг увидели некую общую симметричность, даже периодичность их свойств. Была высказана догадка, что внутри всех адронов (в том числе и нуклонов) сидят некие простые объекты, которые получили название «кварки». Комбинируя кварки разными способами, можно получать разные адроны, причем именно такого типа и с такими свойствами, которые обнаруживались в эксперименте.

Что делает протон протоном?

После того как физики открыли кварковое устройство адронов и узнали, что кварки бывают нескольких разных сортов, стало понятно, что из кварков можно сконструировать много различных частиц. Так что уже никого не удивляло, когда последующие эксперименты продолжали один за другим находить новые адроны. Но среди всех адронов обнаружилось целое семейство частиц, состоящих, точно так же как и протон, только из двух u-кварков и одного d-кварка. Этакие «собратья» протона. И вот тут физиков подстерегал сюрприз.

Давайте сначала сделаем одно простое наблюдение. Если у нас есть несколько предметов, состоящих из одинаковых «кирпичиков», то более тяжелые предметы содержат больше «кирпичиков», а более легкие – меньше. Это очень естественный принцип, который можно называть принципом комбинирования или принципом надстройки, и он прекрасно выполняется как в повседневной жизни, так и в физике. Он проявляется даже в устройстве атомных ядер – ведь более тяжелые ядра просто состоят из большего числа протонов и нейтронов.

Однако на уровне кварков этот принцип совершенно не работает, и, надо признаться, физики еще не до конца разобрались, почему. Оказывается, тяжелые собратья протона тоже состоят из тех же самых кварков, что и протон, хотя они в полтора, а то и в два раза тяжелее протона. Они отличаются от протона (и различаются между собой) не *составом*, а взаимным *расположением* кварков, тем, в каком состоянии относительно друг друга эти кварки находятся. Достаточно изменить взаимное положение кварков – и мы из протона получим другую, заметно более тяжелую частицу.

А что будет, если все-таки взять и собрать вместе больше трех кварков? Получится ли новая тяжелая частица? Удивительно, но не получится – кварки разобьются по трое и превратятся в несколько разрозненных частиц. Почему-то природа «не любит» объединять много кварков в одно целое! Лишь совсем недавно, буквально в последние годы, стали появляться намеки на то, что некоторые многокварковые частицы все же существуют, но это лишь подчеркивает, насколько природа их не любит.

Из этой комбинаторики следует очень важный и глубокий вывод – масса адронов вовсе не складывается из массы кварков. Но если массу адрона можно увеличить или уменьшить простым перекомбинированием составляющих его кирпичиков, значит, вовсе не сами кварки ответственны за массу адронов. И действительно, в последующих экспериментах удалось узнать, что масса самих кварков составляет лишь около двух процентов от массы протона, а вся остальная тяжесть возникает за счет силового поля (ему отвечают специальные частицы – глюоны), связывающего кварки вместе. Изменяя взаимное расположение кварков, например отодвигая их подальше друг от друга, мы тем самым изменяем глюонное облако, делаем его более массивным, из-за чего и возрастает масса адрона (рис.1).

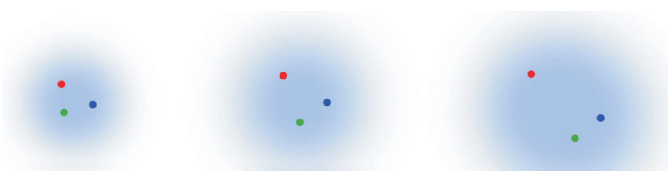


Рис.1. Условное изображение протона и нескольких его «собратьев». Цветные точки – это кварки, которые связаны друг с другом глюонным полем (голубое облачко). Несмотря на то, что все эти частицы составлены из одних и тех же кварков, у них разные массы и разные времена жизни. Массы частиц выражены в энергетических единицах – мегаэлектронвольтах (МэВ)

Что творится внутри быстро летящего протона?

Все описанное выше касается неподвижного протона, на языке физиков – это устройство протона в его системе покоя. Однако в эксперименте структура протона была впервые обнаружена в других условиях – внутри *быстро летящего* протона.

В конце 1960-х годов в экспериментах по столкновению частиц на ускорителях было замечено, что летящие с околосветовой скоростью протоны вели себя так, словно энергия внутри них не распределена равномерно, а сконцентрирована в отдельных компактных объектах. Эти сгустки вещества внутри протонов знаменитый физик Ричард Фейнман предложил называть *партонами* (от английского *part* – часть).

В последующих экспериментах были изучены многие свойства партонов – например, их электрический заряд, их количество и доля энергии протона, которую каждый из них несет. Оказывается, заряженные партоны – это кварки, а нейтральные партоны – это глюоны. Да-да, те самые глюоны, которые в системе покоя протона просто «прислуживали» кваркам, притягивая их друг к другу, теперь являются самостоятельными партонами и наряду с кварками несут «вещество» и энергию быстро летящего протона. Опыты показали, что примерно половина энергии запасена в кварках, а половина – в глюонах.

Партоны удобнее всего изучать в столкновении протонов с электронами. Дело в том, что, в отличие от протона, электрон не участвует в сильных ядерных взаимодействиях и его столкновение с протоном выглядит весьма просто: электрон на очень короткое время испускает виртуальный фотон, который врезается в заряженный партон и порождает в конце концов большое число частиц (рис.2). Можно сказать, что электрон является отличным скальпелем для «вскрытия» протона и разделения его на отдельные части – правда, лишь на очень короткое время. Зная, как часто происходят такие процессы на ускорителе, можно измерить количество партонов внутри протона и их заряды.

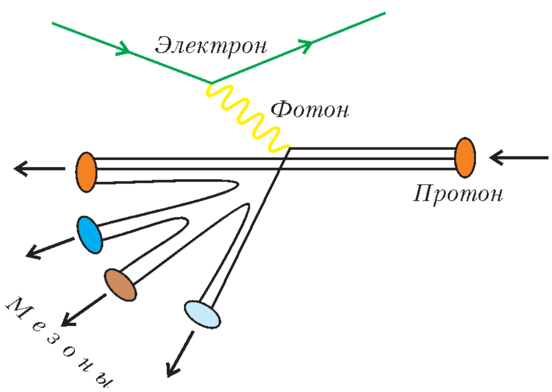


Рис.2. При столкновении протона с электроном между ними «проскакивает» квант электромагнитного поля – фотон. Сталкиваясь с одним из партонов в протоне, он порождает много вторичных адронов, например мезонов

Кто такие партоны на самом деле?

И здесь мы подходим к еще одному поразительному открытию, которое сделали физики, изучая столкновения элементарных частиц при высоких энергиях.

В обычных условиях вопрос о том, из чего состоит тот или иной предмет, имеет универсальный ответ для всех систем отсчета. Например, молекула воды состоит из двух атомов водорода и одного атома кислорода – и не важно, смотрим ли мы на неподвижную или на движущуюся молекулу. Однако это правило – казалось бы, такое естественное! – нарушается, если речь идет об элементарных частицах, движущихся со скоростями, близкими к скорости света. В одной системе отсчета сложная частица может состоять из одного набора субчастиц, а в другой системе отсчета – из другого. Получается, что *состав – понятие относительное*!

Как такое может быть? Ключевым здесь является одно важное свойство: количество частиц в нашем мире не фиксировано – частицы могут рождаться и исчезать. Например, если столкнуть вместе два электрона с достаточно большой энергией, то вдобавок к этим двум электронам может родиться либо фотон, либо электрон-позитронная пара, либо еще какие-нибудь частицы. Все это разрешено квантовыми законами, именно так и происходит в реальных экспериментах.

Но этот «закон несохранения» частиц работает *при столкновениях* частиц. А как же получается, что один и тот же протон с разных точек зрения выглядит состоящим из разного набора частиц? Дело в том, что протон – это не просто три кварка, сложенные вместе. Между кварками существует силовое глюонное поле. Вообще, силовое поле (как, например, гравитационное или электрическое поле) – это некая материальная «сущность», которая пронизывает пространство и позволяет частицам оказывать силовое влияние друг на друга. В квантовой теории поле тоже состоит из частиц, правда из особенных – виртуальных. Количество этих частиц не фиксировано, они постоянно «отпочковываются» от кварков и поглощаются другими кварками.

Покоящийся протон действительно можно представить себе как три кварка, между которыми перескакивают глюоны. Но если взглянуть на тот же протон из другой системы отсчета, словно из окна проезжающего мимо «релятивистского поезда», то мы увидим совсем иную картину. Те виртуальные глюоны, которые склеивали кварки вместе, покажутся уже менее виртуальными, «более настоящими» частицами. Они, конечно, по-прежнему рождаются и поглощаются кварками, но при этом какое-то время живут сами по себе, летят рядом с кварками, словно настоящие частицы. То, что выглядит простым силовым полем в одной системе отсчета, превращается в другой системе в поток частиц! Заметьте, сам протон мы при этом не трогаем, а только смотрим на него из другой системы отсчета.

Дальше – больше. Чем ближе скорость нашего «релятивистского поезда» к скорости света, тем более удивительную картину внутри протона мы увидим. По мере приближения к скорости света мы заметим, что глюонов внутри протона становится все больше и больше. Более того, они иногда расщепляются на кварк-антикварковые пары, которые тоже летят рядом и тоже считаются партонами. В результате ультрарелятивистский протон, т.е. протон, движущийся относительно нас со скоростью, очень близкой к скорости света, предстает в виде взаимопроникающих облачков кварков, антикварков и глюонов, которые летят вместе и как бы поддерживают друг друга (рис.3).

Читатель, знакомый с теорией относительности, может забеспокоиться. Вся физика основана на том принципе, что любой процесс протекает одинаково во всех инерциальных системах отсчета. А тут получается, что состав протона зависит от системы отсчета, из которой мы его наблюдаем?!

Да, именно так, но это никак не нарушает принцип относительности. Результаты физических процессов – например, какие частицы и сколько рождаются в результате столкновения – действительно оказываются инвариантными, хотя состав протона зависит от системы отсчета.

Эта необычная на первый взгляд, но удовлетворяющая всем законам физики ситуация схематично проиллюстрирована на рисунке 4. Здесь показано, как столкновение двух протонов с большой энергией выглядит

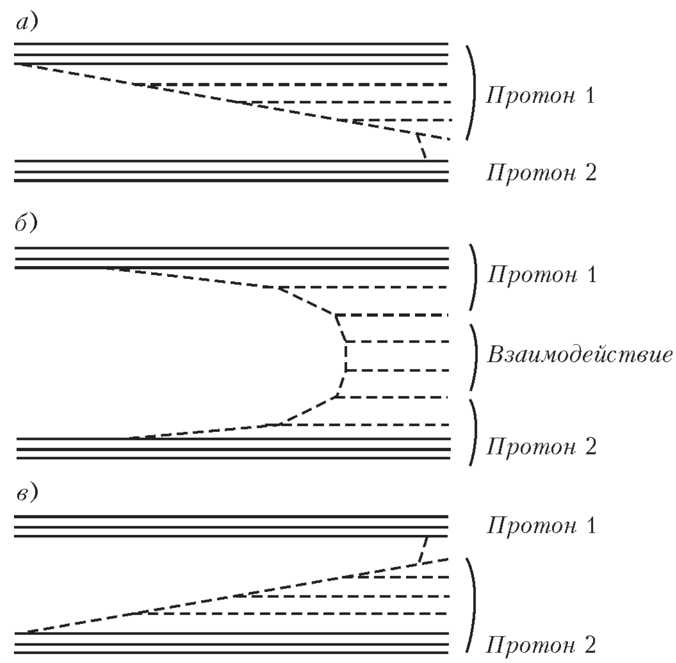


Рис.4 Схематичное изображение столкновения двух протонов при очень большой энергии: в системе покоя второго протона (а), в системе центра масс (б), в системе покоя первого протона (в). Во всех трех случаях взаимодействие протонов осуществляется через обмен «глюонного дерева», но к кому именно его относить (к первому или ко второму протону или же считать отдельным взаимодействием) – зависит от системы отсчета

в разных системах отсчета: в системе покоя одного протона, в системе центра масс, в системе покоя другого протона. Взаимодействие между протонами осуществляется через каскад расщепляющихся глюонов, но только в одном случае этот каскад считается «внутренностью» одного протона, в другом случае –

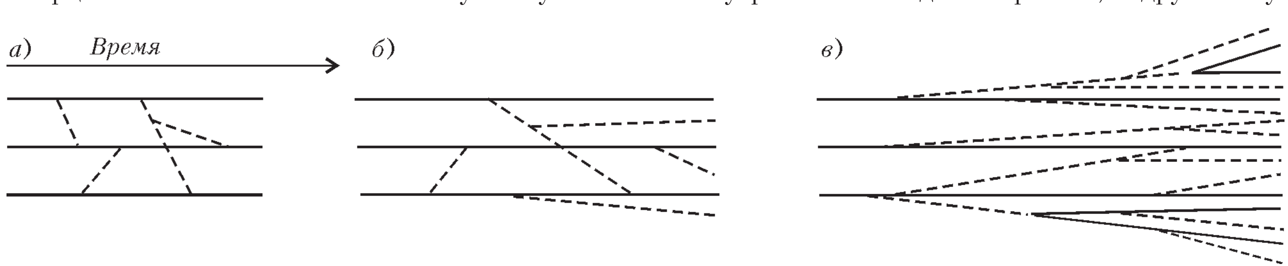


Рис.3. Схематичное изображение протона в разных системах отсчета. Медленно движущийся протон (а) можно представлять в виде трех кварков (сплошные линии), которые связаны друг с другом глюонами (штриховые линии). В быстро движущемся протоне (б) глюоны уже иногда летят рядом с кварками. При скорости протона, очень близкой к скорости света (в), и глюоны, и порожденными ими кварк-антикварковые пары становятся полноправными партонами – составляющими частями протона

частью другого протона, а в третьем – это просто некий объект, которым обмениваются два протона. Этот каскад существует, он реален, но к какой части процесса его надо относить – зависит от системы отсчета.

Трехмерный портрет протона

Все результаты, про которые мы только что рассказали, базировались на экспериментах, выполненных довольно давно – в 60-70-х годах прошлого века. Казалось бы, с тех пор все уже должно быть изучено и все вопросы должны найти свои ответы. Но нет – устройство протона по-прежнему остается одной из самых интересных тем в физике элементарных частиц. Более того, в последние годы интерес к ней снова возрос, потому что физики поняли, как получить «трехмерный» портрет быстро движущегося протона, который оказался гораздо сложнее портрета неподвижного протона.

Классические эксперименты по столкновению протонов рассказывают лишь о количестве партонов и их распределении по энергии. В таких экспериментах партоны участвуют как независимые объекты, а значит, из них нельзя узнать, как партоны расположены друг относительно друга, как именно они складываются в протон. Можно сказать, что долгое время физикам был доступен лишь «одномерный» портрет быстро летящего протона.

Для того чтобы построить настоящий, трехмерный портрет протона и узнать распределение партонов в пространстве, требуются гораздо более тонкие эксперименты, чем те, которые были возможны 40 лет назад. Такие эксперименты физики научились ставить совсем недавно, буквально в последнее десятилетие. Они поняли, что среди огромного количества разных реакций, которые происходят при столкновении электрона с протоном, есть одна особенная реакция – *глубоко-виртуальное комптоновское рассеяние*, – которая и сможет рассказать о трехмерной структуре протона.

Вообще, комптоновским рассеянием, или эффектом Комптона, называют упругое столкновение фотона с какой-нибудь частицей, например с протоном. Выглядит оно так: прилетает фотон, поглощается протоном, который на короткое время переходит в возбужденное состояние, а потом возвращается в исходное состояние, испуская фотон в каком-нибудь направлении.

Комптоновское рассеяние обычных световых фотонов не приводит ни к чему интересному – это простое отражение света от протона. Для того чтобы «вступила в игру» внутренняя структура протона и «почувствовались» распределения кварков, надо использовать фотоны очень большой энергии – в миллиарды раз больше, чем в обычном свете. А как раз такие фотоны – правда, виртуальные – легко порождает налетающий электрон. Если теперь объединить одно с другим, то и получится глубоко-виртуальное комптоновское рассеяние (рис.5).

Главная особенность этой реакции состоит в том, что она не разрушает протон. Налетающий фотон не просто бьет по протону, а как бы тщательно его ощупывает и затем улетает прочь. То, в какую сторону он улетает

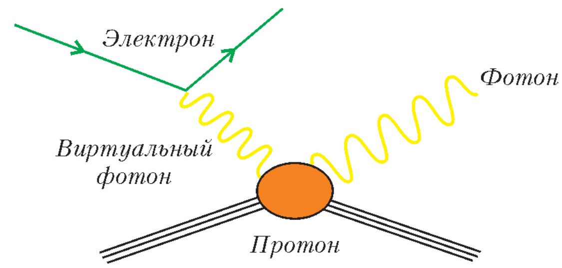


Рис.5. Схема глубоко-виртуального комптоновского рассеяния. Налетающий электрон испускает виртуальный фотон, который и рассеивается на протоне наподобие эффекта Комптона

и какую часть энергии у него отбирает протон, зависит от устройства протона, от взаимного расположения партонов внутри него. Именно поэтому, изучая этот процесс, можно восстановить трехмерный облик протона, как бы «вылепить его скульптуру».

Правда, для физика-экспериментатора сделать это очень непросто. Нужный процесс происходит довольно редко, и зарегистрировать его трудно. Первые экспериментальные данные об этой реакции были получены лишь в 2001 году на ускорителе HERA в немецком ускорительном комплексе DESY в Гамбурге; новая серия данных сейчас обрабатывается экспериментаторами. Впрочем, уже сегодня, на основании первых данных, теоретики рисуют трехмерные распределения кварков и глюонов в протоне. Физическая величина, про которую физики раньше строили лишь предположения, наконец стала «проступать» из эксперимента.

Ждут ли нас какие-нибудь неожиданные открытия в этой области? Вполне вероятно, что да. В качестве иллюстрации скажем, что в ноябре 2008 года появилась интересная теоретическая статья, в которой утверждается, что быстро летящий протон должен иметь вид не плоского диска, а двояковогнутой линзы. Так получается потому, что партоны, сидящие в центральной области протона, сильнее сжимаются в продольном направлении, чем партоны, сидящие на краях. Было бы очень интересно проверить эти теоретические предсказания экспериментально!

Почему все это интересно физикам?

Зачем вообще физикам надо знать, как именно распределено вещество внутри протонов и нейтронов?

Во-первых, этого требует сама логика развития физики. В мире есть много поразительно сложных систем, с которыми современная теоретическая физика пока не может полностью совладать. Адроны – одна из таких систем. Разбираясь с устройством адронов, мы оттачиваем способности теоретической физики, которые вполне могут оказаться универсальными и, возможно, помогут в чем-то совсем ином, например при изучении сверхпроводников или других материалов с необычными свойствами.

Во-вторых, тут есть непосредственная польза для ядерной физики. Несмотря на почти вековую историю изучения атомных ядер, теоретики до сих пор не знают точный закон взаимодействия протонов и нейтронов.