

Движения плоскости и теорема Шаля

В. БУГАЕНКО

ПОНЯТИЕ ДВИЖЕНИЯ ЯВЛЯЕТСЯ ОДНИМ ИЗ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ПОНЯТИЙ ГЕОМЕТРИИ. Однако в школьной программе эту тему, по существу, обходят стороной, ограничиваясь лишь изучением частных случаев. Так, в курсе планиметрии рассматриваются только параллельный перенос, поворот (с частным случаем – центральной симметрией) и осевая симметрия. Очень естественный и важный вопрос «А какие вообще бывают движения плоскости?» в школьном учебнике, как правило, не поднимается. А между тем, ответ на этот вопрос оказывается неожиданно простым, и дает его теорема Шаля. Доказательство этой теоремы является главной целью настоящей статьи.

Важность теоремы Шаля еще и в том, что она дает мощный инструмент для решения задач. В подтверждение этих слов приведем три задачи с различных математических олимпиад. Советуем попытаться решить их самостоятельно. Это возможно сделать, опираясь лишь на сведения, почерпнутые из школьного учебника планиметрии, однако полученные решения всех трех задач будут достаточно непростыми. Если вам это удастся, значит, вы обладаете мастерством решения олимпиадных задач по геометрии. Если не получится – не отчаивайтесь. Вернитесь к этим задачам, когда дочитаете статью до последнего раздела. Вооруженные знанием теоремы Шаля, вы наверняка справитесь с ними. В конце статьи приведены решения этих задач.

Задача 1 (XIX Турнир городов, весенний тур, 1998). Внутренняя точка M выпуклого четырехугольника $ABCD$ такова, что треугольники AMB и CMD – равнобедренные, и у каждого угол при вершине M равен 120° . Докажите, что найдется точка N такая, что треугольники BNC и DNA – равносторонние.

Задача 2 (XXIII Турнир городов, весенний тур, 2002). На плоскости нарисованы два равных треугольника $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ так, что обход вершин одного треугольника происходит по часовой стрелке, а обход соответствующих им вершин другого треугольника происходит против часовой стрелки. Докажите, что середины отрезков A_1A_2 , B_1B_2 и C_1C_2 лежат на одной прямой.

Задача 3 (Украинская республиканская олимпиада, 1977). Дан треугольник ABC . Произвольная точка M плоскости отображается последовательно относительно прямых AB , AC и BC . При этом она переходит в точку $T(M)$. Найдите множество таких точек M , чтобы расстояние между точками M и $T(M)$ было минимальным.

Что такое движение?

Определение. Движением плоскости называется преобразование плоскости, сохраняющее расстояния.

На всякий случай напомним, что преобразованием плоскости (взаимно однозначным отображением плоскости на себя) называется любое правило, ставящее в соответствие каждой точке плоскости точку этой же плоскости (ее *образ*) так, что любая точка плоскости является образом одной и только одной точки (ее *прообраза*). Тем самым, чтобы выяснить, является ли преобразование плоскости движением, нужно проверить, что для любой пары точек расстояние между ними равно расстоянию между их образами. Используя физическую терминологию, будем говорить, что при движении каждая точка *переходит* в свой образ.

Заметим, что понятие движения в геометрии не совпадает с тем, что обычно называют движением физики. Для задания движения в физике существенна траектория каждой точки, а в геометрии важны лишь ее начальное и конечное положения.

Начинаем классифицировать движения

Есть простой способ пополнять коллекцию движений. Если взять несколько движений и осуществить их последовательно одно за другим, то в результате получим еще одно движение, которое называется *композицией* исходных движений. Таким образом, на первый взгляд может создаться впечатление, что разнообразие движений плоскости необъятно. Ведь имея запас параллельных переносов, поворотов и осевых симметрий, можно строить различные их композиции любой длины! А кроме этого, можно предположить, что существуют движения, не представимые в виде композиций движений, известных из школьной программы. Оказывается, что это предположение неверно. Да и вообще, упомянутое впечатление обманчиво, поскольку часто различные композиции задают одно и то же движение. Это явление существенно сужает разнообразие всевозможных движений. Нашей ближайшей целью будет доказать, что любое движение может быть представлено в виде композиции уже знакомых нам движений, причем достаточно короткой.

Рассмотрим на плоскости два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$. Зададимся вопросом: существует ли движение, переводящее вершины первого треугольника в соответствующие вершины второго? Очевидным образом, из определения движения следует, что необходимым условием существования такого движения является равенство соответствующих сторон треугольников: $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$ и $AC = A_1C_1$. Являются ли эти условия достаточными? Попытаемся найти движение, переводящее тройку вершин одного треугольника в соответствующую тройку вершин второго равному ему треугольника.

Будем делать это последовательно (рис. 1), совмещая точки по очереди. Сначала добьемся того, чтобы вершина A перешла в A_1 . Это сделать просто, с помощью параллельного переноса на вектор $\overrightarrow{AA_1}$. Далее, используя поворот вокруг

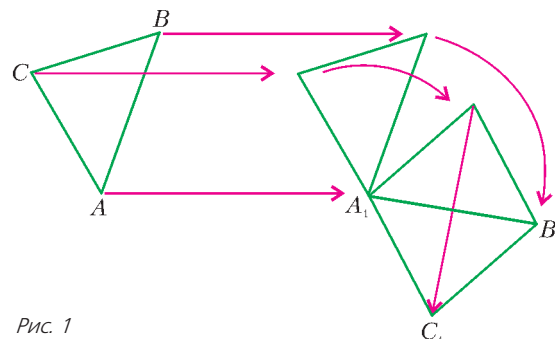


Рис. 1

точки A_1 , можно добиться, чтобы и точка B перешла в B_1 . Итак, точки A и B у нас уже попали на свое место. Где может при этом оказаться точка C ? Образ точки C должен находиться на заданных расстояниях (равных длинам отрезков AC и BC соответственно) от точек A_1 и B_1 . Таких точек всего две и расположены они симметрично относительно прямой A_1B_1 . Одна из них обязана быть точкой C_1 . Если образ точки C совпал с C_1 , то искомое движение найдено. В противном случае (именно этот случай получился в примере на рисунке 1) нужно сделать еще один шаг – осевую симметрию относительно A_1B_1 . Итак, искомое движение можно представить в виде композиции параллельного переноса, поворота и, быть может, симметрии.

Пусть теперь мы уже имеем некоторое движение, переводящее первую тройку точек во вторую. Можно ли по этим данным найти образы остальных точек плоскости? Иными словами, единственно ли движение, задаваемое образами трех точек? Положительный ответ на этот вопрос почти очевиден. Наглядно это можно представить так, как будто мы треугольник, нарисованный на листе бумаги, накладываем на равный ему треугольник, нарисованный на другом листе бумаги. Очевидно, что достаточно проследить лишь за тем, чтобы вершины перешли в вершины – тогда каждая точка верхнего листа бумаги наложится на однозначно определенную точку нижнего, и никакой свободы уже не будет. Несмотря на убедительность этого наглядного рассуждения, тем не менее, проведем аккуратное доказательство.

В значительной степени нам придется повторить рассуждения, приводимые при доказательстве существования в начале данного раздела. Сначала воспользуемся тем, что точки A и B перешли в A_1 и B_1 соответственно. Где может оказаться образ точки C ? Он должен отстоять от A_1 и B_1 на расстояния AC и BC соответственно, а значит, должен находиться на пересечении двух соответствующих окружностей. Две окружности пересекаются не более чем в двух точках (а в данном случае – ровно в двух точках – подумайте, почему?). Таким образом, у нас есть две точки, претендующие на роль образа точки C . После того, как мы выберем один из этих двух вариантов, образ любой другой точки будет определяться однозначно, поскольку точка на плоскости однозначно определяется своими расстояниями до трех заданных точек, не лежащих на одной прямой. Действительно, три окружности, центры которых не лежат на одной прямой, пересекаются не более чем в одной точке (докажите это).

Итак, единственность движения, заданного образами трех не лежащих на одной прямой точек, доказана. Ранее мы нашли такое движение явно. Объединяя доказанные существование и единственность, получаем факт, вполне заслуживающий звания теоремы.

Теорема 1. Любое движение плоскости представимо в виде композиции параллельного переноса, поворота и, быть может, симметрии.

Элементарные движения

В силу важности трех видов движений, упомянутых в теореме 1, будем называть их *элементарными*. С помощью операции композиции из элементарных движений мы можем получать любые.

Каждое элементарное движение (кроме тождественного движения, которое является одновременно параллельным переносом на нулевой вектор и поворотом на нулевой угол с любым центром) принадлежит только одному из трех типов.

Выясним, чем задается каждый из трех типов элементарных движений.

Параллельный перенос задается своим вектором. Разным векторам соответствуют разные параллельные переносы. Таким образом, соответствие между множеством параллельных переносов и множеством векторов является взаимно однозначным.

Осевая симметрия задается своей осью. Множество осевых симметрий находится во взаимно однозначном соответствии с множеством прямых на плоскости.

Поворот задается своим центром, величиной угла поворота и направлением. Мы исключим из рассмотрения направление поворота, вместо этого будем считать, что угол поворота может быть как положительным, так и отрицательным. Положительные углы означают поворот против часовой стрелки, а отрицательные – по часовой стрелке. При этом повороты относительно одного и того же центра на углы, различающиеся на величину, кратную 360° , совпадают между собой. Например, повороты на -50° и на 310° – это одно и то же. Таким образом, поворот задается парой (центр поворота, величина поворота). С учетом сделанной оговорки о возможности добавления к величине поворота кратных 360° и за исключением упомянутого выше случая тождественного преобразования разным парам соответствуют разные движения.

Композиции движений

В отличие от элементарных движений самих по себе, композиция двух элементарных движений иногда может быть представлена в более простом виде и часто сводится к одному элементарному движению. Приведем несколько таких случаев, начиная от совсем очевидных и переходя потом к более сложным, в виде последовательности лемм. В сложных случаях мы приведем доказательства. В простых случаях ограничимся набросками доказательств или даже только формулировками.

Лемма 1. Композиция двух параллельных переносов на векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ является параллельным переносом на вектор $\vec{a} + \vec{b}$.

Лемма 2. Композиция двух поворотов с общим центром на углы α и β является поворотом с тем же центром на угол $\alpha + \beta$.

Лемма 3. Композиция двух осевых симметрий относительно двух параллельных осей l_1 и l_2 является параллельным переносом на вектор, перпендикулярный этим осям, направленный от l_1 к l_2 , длина которого равна удвоенному расстоянию между осями.

Набросок доказательства. Возьмем произвольную точку M плоскости, найдем ее образ M_1 и убедимся, что вектор $\overline{MM_1}$ является тем самым вектором, который описан в формулировке леммы. Рисунок 2 является иллюстрацией к доказательству. Чтобы оно было полным, нужно рассмотреть все возможные случаи взаимного расположения осей и точки M .

Можно избежать рассмотрения различных случаев при доказательстве этой леммы, если воспользоваться методом

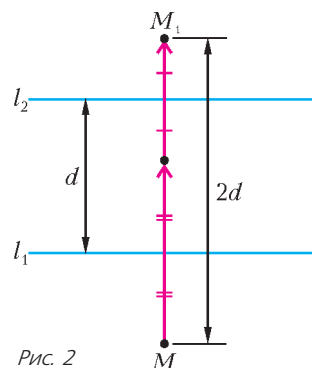


Рис. 2

координат. Удобно расположить ось абсцисс параллельно прямым l_1 и l_2 . Тогда рассматриваемые оси симметрий будут задаваться уравнениями $y = a$ и $y = b$ соответственно. При отражении относительно этих осей абсциссы точек будут сохраняться, а ординаты меняться по правилам $y \mapsto 2a - y$ и $y \mapsto 2b - y$ соответственно. При композиции этих симметрий ординаты будут преобразовываться по правилу $y \mapsto 2b - (2a - y) = y + 2(b - a)$, а это и означает параллельный перенос на указанный вектор.

Лемма 4. Композиция двух осевых симметрий относительно двух пересекающихся осей l_1 и l_2 является поворотом относительно точки их пересечения на удвоенный угол между осями. (Под углом между осями мы понимаем угол поворота относительно их точки пересечения, при котором ось l_1 переходит в l_2 .)

Доказательство. Рассуждаем аналогично доказательству предыдущей леммы, иллюстрацией служит рисунок 3.

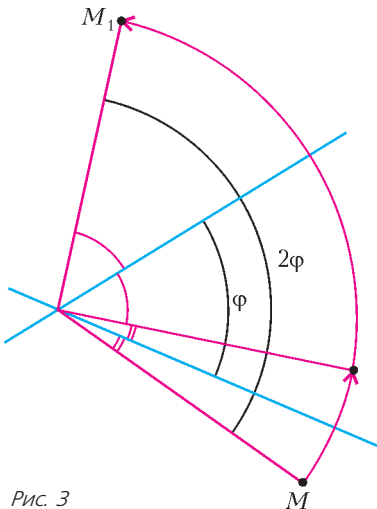


Рис. 3

В этом случае аналитическое доказательство, позволяющее избежать рассмотрения различных случаев, проводится с использованием полярной системы координат. Начало координат следует выбрать в точке пересечения рассматриваемых осей симметрий. Тогда полярный радиус при этих симметриях сохраняется, а полярный угол меняется по правилам $\varphi \mapsto 2\alpha - \varphi$ и $\varphi \mapsto 2\beta - \varphi$, где α и β — углы, образованные прямыми l_1 и l_2 соответственно с полярной осью. При композиции полярный угол будет преобразовываться по правилу $\varphi \mapsto 2\beta - (2\alpha - \varphi) = \varphi + 2(\beta - \alpha)$, а это и означает поворот на угол $2(\beta - \alpha)$.

Сделаем очевидное замечание: композиция двух осевых симметрий с совпадающими осями является *тождественным преобразованием*, оставляющим все точки на месте. Однако же, несмотря на очевидность замечания, оно дает нам инструмент, которым мы будем пользоваться в дальнейшем — если в некоторой композиции нескольких движений идут подряд две осевые симметрии с одной и той же осью, то их можно сократить и получить более короткую композицию.

Лемма 5. Композиция двух поворотов на углы α и β с различными центрами O_1 и O_2 соответственно является поворотом на угол $\alpha + \beta$ (относительно некоторого третьего центра), если $\alpha + \beta \neq 360^\circ \cdot k$, и параллельным переносом в противном случае.

Доказательство. Воспользуемся предыдущей леммой и представим каждый из двух данных поворотов в виде композиции двух осевых симметрий. Мы получим композицию четырех симметрий относительно прямых l_1, l_2, l_3 и l_4 . Оси первых двух симметрий пересекаются в точке O_1 под углом $\alpha/2$, а оси двух последних пересекаются в точке O_2 под углом $\beta/2$. Заметим, что выбор пары осей в каждом из этих случаев неоднозначен. Воспользуемся предоставленной свободой для того, чтобы прямые l_2 и l_3 совпали. В качестве такой общей прямой нужно выбрать прямую O_1O_2 , соединя-

ющую центры поворотов. В этом случае прямые l_1 и l_4 находятся однозначно (рис. 4). В силу сделанного выше замечания, у нас остается композиция всего двух симметрий относительно прямых l_1 и l_4 . Если эти прямые пересекаются

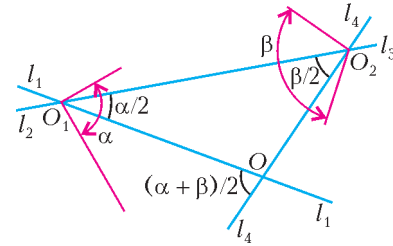


Рис. 4

в некоторой точке O , то угол между ними составляет $(\alpha + \beta)/2$ (это следует из теоремы о величине внешнего угла треугольника, примененной к треугольнику OO_1O_2). Согласно предыдущему утверждению, это и означает, что искомая симметрия является поворотом с центром O на угол $\alpha + \beta$. Если эти прямые параллельны (в этом случае углы $\alpha/2$ и $\beta/2$ смежные, а значит, их сумма равна 180°), то рассматриваемое движение — параллельный перенос.

Лемма 6. Композиция параллельного переноса на вектор $\vec{a}$ и поворота с центром в точке O на ненулевой угол α является поворотом на тот же угол α (с другим центром, если вектор $\vec{a}$ ненулевой).

Доказательство. Аналогично предыдущему доказательству, воспользовавшись леммами 3 и 4, представим каждое из двух составляющих композиций движений в виде композиции двух симметрий так, чтобы вторая симметрия из первой пары совпала с первой симметрией из второй пары. Для этого общей осью этих двух симметрий нужно взять прямую, проходящую через точку O и перпендикулярную вектору $\vec{a}$ (рис. 5). И в этом случае рассматриваемое движение есть композиция двух симметрий с пересекающимися (под углом $\alpha/2$) осями, а значит, является поворотом на угол α .

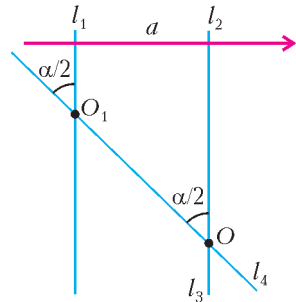


Рис. 5

Лемма 7. Композиция параллельного переноса на вектор $\vec{a}$ и осевой симметрии относительно оси l , перпендикулярной вектору $\vec{a}$, является осевой симметрией с осью, параллельной l .

Доказательство. И в этот раз, воспользовавшись леммой 3, представим параллельный перенос в виде композиции двух симметрий с параллельными осями, вторая из которых совпадает с l (рис. 6).

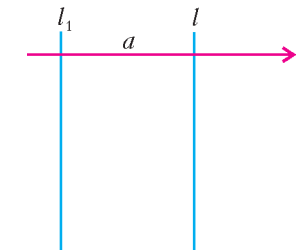


Рис. 6

В полученной композиции трех симметрий две последние сокращаются.

Ориентация

Мы уже упоминали о разнице в понятиях движения в геометрии и в физике. Речь шла о том, что одно и то же движение с точки зрения геометрии может представляться как физическое движение различными способами. Однако

есть еще одно отличие между этими понятиями. Некоторые движения, например осевую симметрию, нельзя реализовать в виде непрерывного (физического) движения, не выходящего за пределы плоскости (также как в пространстве нельзя совместить несимметричную фигуру с ее зеркальным изображением, например, правую руку с левой). Поэтому с точки зрения физики такие преобразования движениями не являются. В геометрии же они считаются движениями, и про такие движения говорят, что они меняют ориентацию. Придадим понятию ориентации большую строгость.

Будем называть треугольник *ориентированным*, если в нем задан некоторый порядок обхода его вершин. Треугольники ABC и ACB – это один и тот же треугольник, однако если их рассматривать как ориентированные треугольники, то они различны. Если обход вершин ориентированного треугольника происходит против часовой стрелки, то он называется *положительно ориентированным*, а если по часовой стрелке, то – *отрицательно ориентированным*.

Два вида движений плоскости

Заметим, что параллельный перенос и поворот сохраняют ориентацию (переводят любой треугольник в треугольник той же ориентации), а осевая симметрия меняет ориентацию (переводит любой треугольник в треугольник противоположной ориентации). Значит, любая композиция элементарных преобразований либо сохраняет, либо меняет ориентацию всех треугольников в зависимости от того, четное или нечетное количество осевых симметрий в нее входит. Поскольку любое движение представляется в виде композиции элементарных движений, оно либо сохраняет ориентацию всех треугольников, либо меняет ориентацию всех треугольников (движение не может сохранять ориентацию у одних треугольников и менять у других). Движения, сохраняющие ориентацию, будем называть *собственными*, а меняющие ориентацию – *несобственными*. (Иногда эти два вида движений называют *движениями первого и второго рода* соответственно.)

При доказательстве теоремы 1 мы попутно доказали, что движение однозначно задается образами трех точек, не лежащих на одной прямой, и даже «почти» задается образами двух точек. Слово «почти» в данном случае означает, что хотя мы и не сможем однозначно восстановить движение, зная образы всего двух точек, но выбирать придется всего из двух вариантов. Если мы рассмотрим композицию одного из этих двух движений и осевой симметрии относительно прямой, соединяющей известные нам образы двух точек, то получим второе такое движение. Значит, эти два движения разного вида: одно из них собственное, а второе – несобственное.

Для удобства будем говорить не о паре точек, а о направленном отрезке¹ с концами в них. Итак, мы доказали теорему.

Теорема 2. *Существуют единственное собственное и единственное несобственное движения, переводящие данный направленный отрезок в равный ему данный направленный отрезок.*

¹ Не путайте понятия направленного отрезка и вектора, несмотря на то, что в физике эти понятия часто отождествляются. Отрезок называется направленным, если указано, какой из его концов первый, а какой второй. В параллелограмме $ABCD$ векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$ совпадают, хотя направленные отрезки AB и DC различны.

Формулировка и доказательство теоремы Шаля

Теперь, с помощью теоремы 2, мы можем несколько усилить теорему 1, слегка модернизировав ее доказательство. Для этого выясним, какими композициями элементарных движений можно перевести направленный отрезок AB в равный ему направленный отрезок A_1B_1 . Сначала можно совместить точку A с A_1 с помощью параллельного переноса. Затем у нас есть две возможности перевести конец получившегося отрезка в B_1 : либо с помощью поворота, либо с помощью осевой симметрии (рис.7). В первом случае полу-

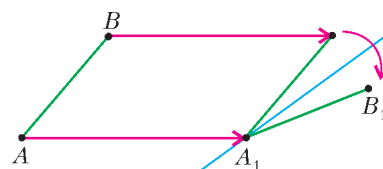


Рис. 7

чается собственное движение, а во втором – несобственное. Поскольку, согласно теореме 2, в каждом из этих двух случаев такое движение единственно, приходим к выводу, что любое собственное движение является композицией параллельного переноса и поворота, а несобственное – композицией параллельного переноса и осевой симметрии. Иными словами, по сравнению с теоремой 1 для случая несобственного движения, удалось обойтись более короткой композицией – без поворота. Однако же это еще не конец – любое движение плоскости можно свести к еще более простому виду.

В случае собственного движения – композиции переноса и поворота, – если поворот происходит на ненулевой угол, воспользуемся леммой 6 и получим, что рассматриваемое движение является поворотом. Если же поворот в композиции происходит на нулевой угол, то движение является параллельным переносом. В результате мы получаем совсем простое описание собственных движений.

Теорема 3. *Любое собственное движение плоскости является либо параллельным переносом, либо поворотом.*

Перейдем теперь к случаю несобственных движений. Попробуем привести композицию параллельного переноса и осевой симметрии к более простому виду. Для этого разложим параллельный перенос на два: параллельно и перпендикулярно оси симметрии. Композицию параллельного переноса на вектор, перпендикулярный оси, и симметрии относительно оси заменим по лемме 7 на симметрию относительно другой оси, параллельной исходной. Остается композиция параллельного переноса в направлении, параллельном оси, и симметрии относительно этой оси. Такое движение называется *скользящей симметрией*. Подведем итог.

Теорема 4. *Любое несобственное движение плоскости является скользящей симметрией.*

Объединение теорем 3 и 4 и называется *теоремой Шаля*. Мы получили простую классификацию движений плоскости.

Коммутирующие движения

Под конец сделаем еще одно замечание. При рассмотрении композиций движений существен порядок, в котором они производятся. При изменении порядка, вообще говоря, получается другое движение. Иными словами, операция композиции на множестве движений плоскости некоммутативна. Иногда встречаются пары коммутирующих движений. Такими, очевидно, являются пары движений

из леммы 1 (параллельные переносы) и из леммы 2 (повороты с общим центром). А во всех композициях из лемм 3–7 порядок существен – рассматриваемые в них пары движений не коммутируют. Еще один пример коммутирующих движений – это осевая симметрия и параллельный перенос на вектор, параллельный оси симметрии. Поэтому при определении скользящей симметрии неважно, в каком порядке делать составляющие ее элементарные движения.

Решения задач

Решение задачи 1. Из условия следует, что при повороте на угол 120° относительно точки M вершина A переходит в B , а C в D . Значит, при этом повороте направленный отрезок AC переходит в направленный отрезок BD , поэтому их длины равны, а угол между ними равен 120° . Значит, угол между направленными отрезками AC и DB равен 60° . Рассмотрим собственное движение, переводящее направленный отрезок AC в DB . По теореме Шаля, он является поворотом, а величина угла поворота должна быть равна углу между этими направленными отрезками, т.е. 60° . Центр этого поворота и будет искомой точкой N .

Решение задачи 2. Рассмотрим движение, переводящее треугольник $A_1B_1C_1$ в $A_2B_2C_2$. Поскольку эти треугольники различно ориентированы, рассматриваемое движение несобственное, а значит, является скользящей симметрией. Очевидно, что середина отрезка, соединяющая любую точку с ее образом при скользящей симметрии, лежит на оси этой симметрии.

Решение задачи 3. Движение, описанное в задаче, является композицией трех осевых симметрий, а следовательно, несобственным движением плоскости. По теореме Шаля это скользящая симметрия. Очевидно, что при скользящей симметрии точки, сдвигающиеся на минимальное расстояние, это в точности точки оси. Действительно, все они сдвигаются на один и тот же вектор, параллельный оси симметрии, в то время как другие точки сдвигаются кроме этого еще и в направлении, перпендикулярном оси.

Осталось найти ось этой симметрии. Для этого достаточно найти две точки на ней. Воспользуемся фактом, который уже помог нам при решении предыдущей задачи: середина отрезка, соединяющего точку с ее образом при скользящей симметрии, лежит на оси этой симметрии. Поэтому, чтобы найти ось, достаточно найти середины двух отрезков, соединяющих точки с их образами. Поиск можно сильно упростить, если удачно выбрать две точки, образ которых при рассматриваемой композиции легко найти. В качестве первой точки выберем вершину A треугольника. При первых двух симметриях она останется на месте, а при третьей отразится относительно стороны BC . Искомой серединой будет основание высоты, опущенной из вершины A . В качестве второй точки возьмем точку, симметричную точке C относительно стороны AB . При первой симметрии она перейдет в C , а при двух следующих останется на месте. Значит, вторая искомая точка – основание высоты, опущенной из точки C .

Ответ: искомым множеством точек будет прямая, проходящая через основания высот, опущенных из вершин A и C треугольника ABC .

Случай, когда эти основания высот совпадают (а это происходит, если треугольник ABC прямоугольный с прямым углом B), следует разобрать отдельно. Оставляем это читателям в качестве упражнения.

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

1 (для тех, кто знаком с понятием группы). Докажите, что множество движений образует группу относительно операции композиции. Образует ли группу множество собственных движений? А множество несобственных движений?

2. Докажите (без использования теоремы Шаля), что любое движение можно представить в виде композиции не более трех осевых симметрий.

3. Получите другое доказательство теоремы Шаля с помощью задачи 2.

4. Скользящая симметрия задается парой (ось симметрии, вектор переноса). Докажите, что скользящие симметрии, задаваемые разными парами, различны.

5. Завершите решение задачи 3, рассмотрев случай прямоугольного треугольника с прямым углом B .

6. Образами скольких точек задается движение пространства?

7. Попробуйте дать определения ориентации, а также собственного и несобственного движений в пространстве. Образами скольких точек задается собственное движение пространства?

8. Какое движение является композицией двух центральных симметрий с различными центрами?

9. Пусть $0 < \alpha, \beta, \gamma < 180^\circ$, $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$. Докажите, что композиция трех поворотов на углы $2\alpha, 2\beta, 2\gamma$ относительно точек A, B, C соответственно является тождественным преобразованием тогда и только тогда, когда углы треугольника ABC равны α, β и γ соответственно. (Повороты осуществляются против часовой стрелки, а треугольник ABC отрицательно ориентирован.)

10. На плоскости нарисован многоугольник с нечетным числом сторон. Точку M отражают последовательно относительно середин последовательных сторон многоугольника, в результате чего получается точка M_1 . Докажите, что середина отрезка MM_1 является вершиной многоугольника.

11. На плоскости был нарисован многоугольник с нечетным количеством сторон. Затем в нем отметили середины сторон, а сам многоугольник стерли. Восстановите многоугольник по отмеченным точкам с помощью циркуля и линейки.

12. Дан треугольник ABC . Постройте точки K, L и M так, чтобы треугольники AKM, BLK и CLM были равносторонними.

13. Дан произвольный треугольник. На двух его сторонах наружу построены равносторонние треугольники. Пусть M и N – вершины этих треугольников, не совпадающие с вершинами исходного. На третьей стороне также построили равносторонний треугольник, но теперь – во внутреннюю сторону. Пусть O – его центр. Найдите углы треугольника MNO .

14. Археологи нашли старинный свиток, в котором было написано: «Встань около березы, и дойди от нее, не сворачивая, до колодца, а у колодца поверни под прямым углом налево и пройди такое же расстояние. В том месте, где ты оказался, вбей колышек в землю. Теперь опять встань у березы, и дойди от нее, не сворачивая, до дуба, поверни под прямым углом направо и пройди такое же расстояние. Вбей второй колышек в землю. Посередине между колышками зарыт клад». Оказалось, что колодец и дуб по-прежнему на месте, но березы уже нет. Смогут ли археологи найти клад?

15. На сторонах произвольного четырехугольника во внешнюю сторону построены квадраты. Докажите, что у четырехугольника с вершинами в центрах этих квадратов диагонали перпендикулярны и равны.

Загадочные круги и движения плоскости

С.ДОРИЧЕНКО, С.ШАШКОВ, А.ШЕНЬ

ОБ ЭТОМ ЛЮБОПЫТНОМ ЭКСПЕРИМЕНТЕ НАМ РАССКАЗал Жак Мазойе, профессор Высшей нормальной школы в Лионе (Франция). Сделайте две копии рисунка 1 (случайно расположенные черные пятнышки) на тонкой бумаге, лучше с увеличением. Наложите их друг на друга, глядя на просвет (можно приложить к окну). Если совместить точно – получится исходная картинка. Но если немного

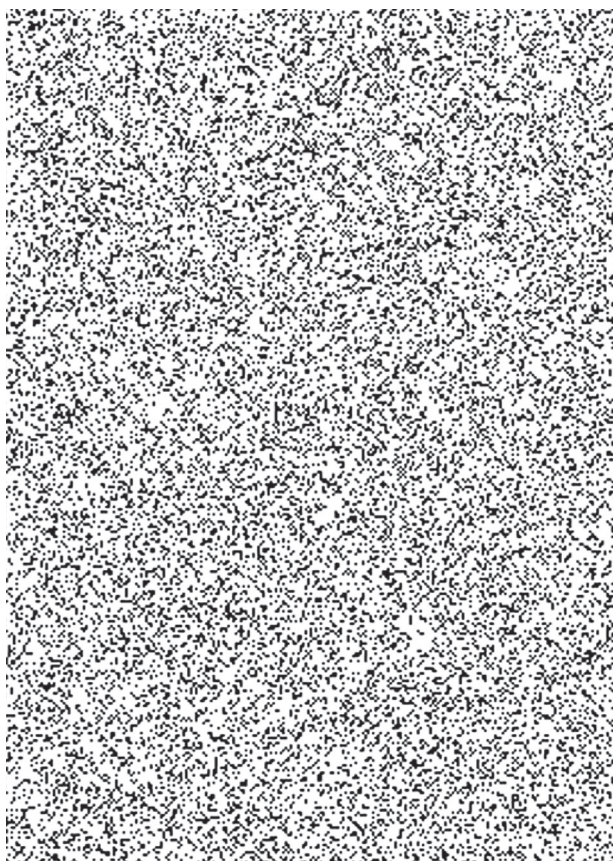


Рис. 1

повернуть один лист относительно другого, картинка изменится (рис. 2).

Еще проще это увидеть, если одну из картинок напечатать на прозрачной пленке и накладывать на вторую.

На рисунке 2 явно видны окружности. Откуда они возникают, если изначально ничего похожего не было?

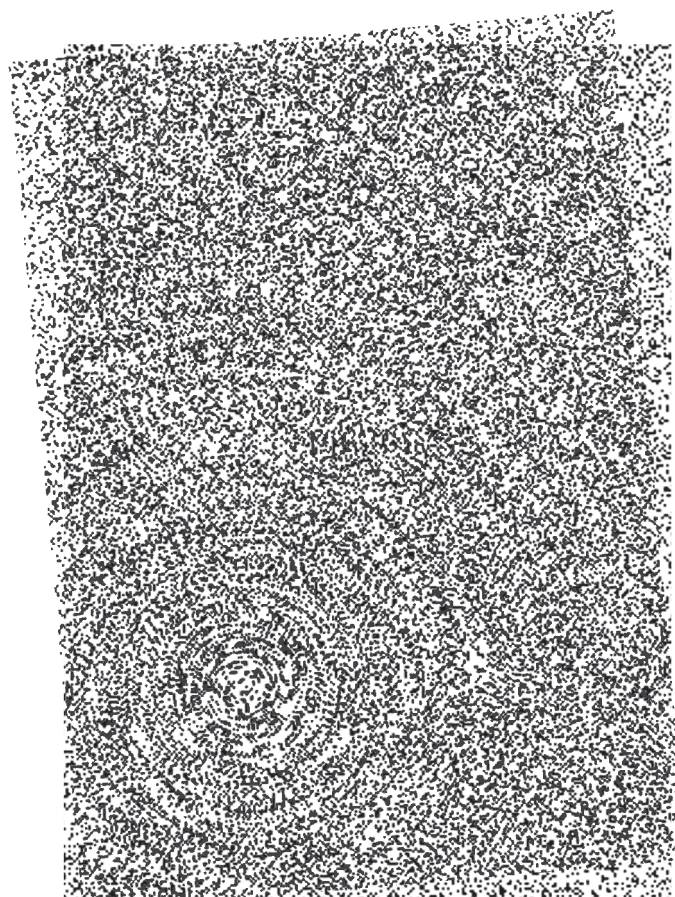


Рис. 2

Одно из возможных объяснений такое. Вторая картинка слегка повернута относительно первой. Около центра поворота разница невелика, и картинки практически совпадают (этот участок хорошо виден). Чуть дальше от центра пятнышки уже не совпадают, но накладываются друг на друга, образуя маленькие «дуги» (как показано на рисунке 3). Эти «дуги» и являются частями окружностей, которые мы видим.

По этой теории, окружности должны быть видны на таком расстоянии от центра, где пятнышки еще накладываются. Можно оценить это расстояние как d/α , где d – размер одного пятнышка, а α – угол поворота в радианах.

Когда пятнышки разъезжаются дальше, окружности постепенно должны перестать быть заметны. Однако мы видим окружности и существенно большего радиуса. Почему? Возможно, черные пятнышки, случайно разбросанные по листу, образуют иногда пятна большего размера, поворот которых мы и замечаем. Или мы по инерции видим окружности там, где их уже нет. (В самом деле, если закрыть нижнюю половину рисунка 2, разглядеть окружности в верхней половине будет труднее.)

Но продолжим наши эксперименты. Сдвинем немного одну картинку относительно другой в какую-нибудь сторону. Как ни удивительно, окружности снова будут видны, хотя их центр сдвинется (причем в другую сторону). Что же это значит?

Рис. 3



Так проявляется замечательное свойство движений плоскости: *сделав последовательно поворот и сдвиг, мы в итоге снова получим поворот*. Другими словами, когда мы сначала повернули одну картинку, а затем сдвинули ее относительно другой, полученный результат точно такой же, как если бы мы просто повернули первую картинку вокруг другой точки.

Одно из доказательств этого факта можно прочесть, например, в статье С.Дориченко «Комплексные числа» в «Кванте» № 5 за 2008 год. Кстати, можно заметить, что

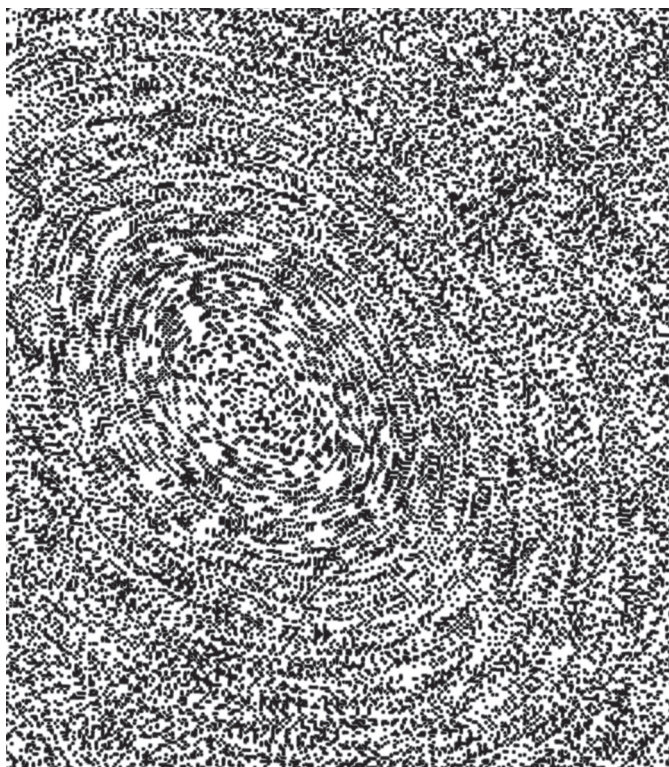


Рис. 4

центр окружностей смещается примерно перпендикулярно направлению сдвига: это уже следствие того, что у нас малый угол поворота. Формула, приведенная в конце раздела «Задача о неподвижной точке и преобразования плоскости» упомянутой статьи, позволяет это понять.

Другое доказательство имеется в статье В.Бугаенко «Теорема Шаля и движения плоскости» в этом номере журнала.

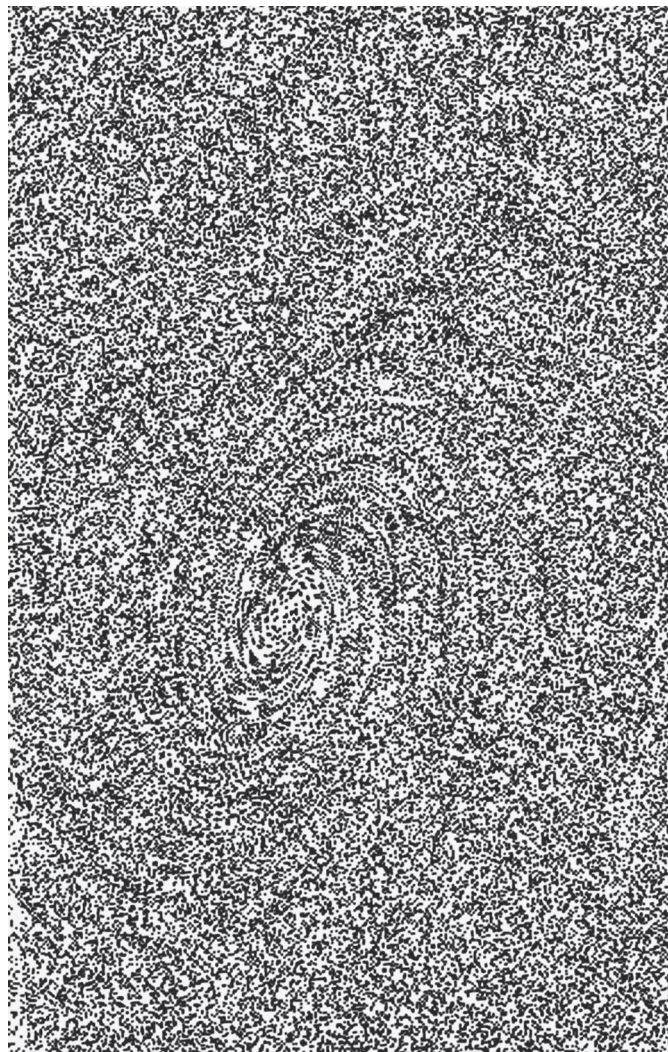


Рис. 5

Там рассказано о классификации движений плоскости и о решении задач с помощью теоремы Шаля.

Если вы умеете работать с рисунками на компьютере, эксперимент можно провести и без бумаги. При этом можно сделать и более сложные вещи – попробуйте разобраться, например, как получились рисунки 4 и 5 (где видны эллипсы и спирали).

Почему углеродные нанотрубки прочнее стали?

(Начало см. на с. 7)

Идеальная нанотрубка не имеет никаких дефектов и представляет собой *одну* молекулу, в которой атомы углерода связаны между собой довольно прочными ковалентными связями. Сталь – это поликристалл, содержащий множество внутренних дефектов, таких как границы и микротрещины. При растяжении образца из стали один из таких дефектов превращается в трещину, и образец разрушается. Наличие множества дефектов у металлического образца объясняет пластичность металла. В то же время, нанотрубка не обладает пластичностью.

Очевидно, что если одну одностенную нанотрубку вложить в другую несколько большего диаметра, то прочность такой двухстенной нанотрубки будет почти в два раза больше, чем у одностенной. Поэтому у многостенных нанотрубок прочность в несколько раз выше.

У конструкций из нанотрубок большое будущее. Их уже сейчас используют на практике, например для укрепления теннисных ракеток. В планах – делать из нанотрубок тросы для космических лифтов, чтобы снабжать всем необходимым космические станции на геостационарных орбитах.

К.Богданов

Опыты с компакт-диском

Н. РОСТОВЦЕВ, А. СЕДОВ

ПРИ ВЗГЛЯДЕ НА КОМПАКТ-ДИСК (ИЛИ НА DVD-ДИСК), освещенный солнечным или электрическим светом, обращают на себя внимание красивые, окрашенные в радужные цвета секторы на его поверхности. Какова природа их возникновения?

Немного теории. Для того чтобы ответить на этот вопрос, познакомимся вначале с отражательными дифракционными решетками, которые применяются для точного измерения длин волн спектральных линий. Изготавливают такие решетки путем нанесения равноотстоящих рисок на поверхность хорошо отражающей металлической пленки, покрывающей стеклянную пластину. На рисунке 1 изображен участок такой решетки и профиль ее сечения перпендикулярно рискам. Видно, что между соседними рисками находятся полосы недеформированного металла – на нижнем рисунке им соответствуют выступы. Расстояние d между двумя соседними зеркальными полосками называют постоянной решетки.

Пусть на решетку под углом i падает параллельный пучок лучей. Тогда, согласно принципу Гюйгенса, от каждой точки каждого выступа распространяются вторичные волны. Причем лучи от каждого выступа идут не только под углом $i' = i$, как это следует из законов геометрической оптики, но и по всем другим направлениям. Говорят, что лучи дифрагируют (от лат. *diffractus* – разломанный). Установим на пути вторичных волн, дифрагирующих под некоторым углом φ , собирающую линзу. Она соберет их в главном фокусе, где при наложении волн будут интерферировать. Результат интерференции зависит от разности хода волн Δ , идущих от двух соседних выступов. Найдем ее.

Допустим, что на решетку под углом i падает параллельный пучок света с длиной волны λ . Выберем падающие лучи 1 и 2 и соответствующие им дифрагирующие под углом φ лучи 1' и 2' (рис. 2). Из точки B проведем отрезок $BC \perp AC$, а из точки A – отрезок $AD \perp BD$. Ход лучей 1 и 2 до AD и ход лучей 1' и 2' от BC до встречи в фокальной плоскости собирающей линзы одинаковы, следовательно, разность хода интерферирующих волн равна $\Delta = AC - BD$. Из треугольников ACB и ADB получаем $AC = d \sin \varphi$ и $BD = d \sin i$,

откуда

$$\Delta = d (\sin \varphi - \sin i).$$

При интерференции максимум интенсивности света (максимум освещенности) наблюдается в том случае, если разность

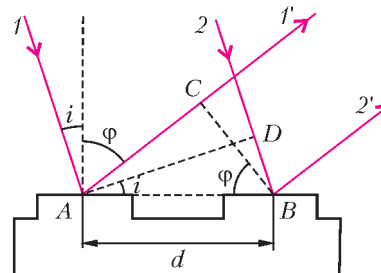


Рис. 2

хода кратна длине волны:

$$\Delta = k\lambda, \text{ где } k = 0, 1, 2, \dots$$

Из соотношений для Δ получаем, что максимум освещенности участка решетки в окрестности выступов A и B наблюдается, когда

$$d (\sin \varphi - \sin i) = k\lambda. \quad (1)$$

Если угол падения $i = 0$, т.е. свет падает по нормали к решетке, то условие максимума принимает вид

$$d \sin \varphi = k\lambda. \quad (2)$$

Посмотрите теперь на рисунок 3, на котором приведено увеличенное изображение участка поверхности компакт-

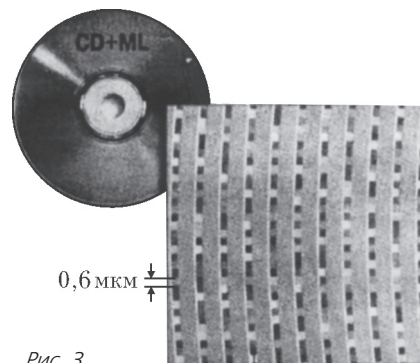


Рис. 3

диска. Информация на нем записана точками и черточками. Видно, что между строками информации, как и в отражательной решетке, находятся равноотстоящие полосы недеформированной пленки металла. Следовательно, при освещении диска максимально освещенными будут те участки, для которых выполняется условие максимума (1).

Попробуем объяснить и возникновение цветных секторов на поверхности компакт-диска. Рассмотрим ход лучей от точечного источника света S в глаз наблюдателя (рис. 4). Источник освещает диск белым светом с длинами волн от $\lambda = 0,4$ мкм (фиолетовый свет) до $\lambda = 0,76$ мкм (красный свет). Волны дифрагируют от участков A и B диска, рассеянного вертикальной плоскостью вдоль его радиуса. Оптическая система глаза сводит лучи на сетчатке, где они интерферируют. Из рисунка 4 видно, что при перемещении от участка A к участку B угол дифракции φ уменьшается, а угол падения i растет. Следовательно, разность хода волн Δ убывает. Если, например, разность хода волн 1 и 2, попада-

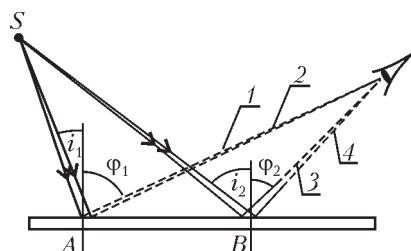


Рис. 4

ющих в глаз от участка A, равна $\Delta = 0,76$ мкм, а разность хода волн 3 и 4, пришедших в глаз от участка B, составляет $\Delta = 0,4$ мкм, то участок диска A будет казаться красным, а участок B – фиолетовым. Между участками A и B диск будет окрашен в другие цвета радуги.

А теперь – собственно опыты.

Определение расстояния между строками записанной информации. Схема установки для проведения измерений приведена на рисунке 5, где 1 – гелий-неоновый лазер или лазерная указка, 2 – миллиметровая линейка, в середине которой просверлено отверстие диаметром 2 мм, 3 – компакт-диск.

Линейку и диск устанавливают перпендикулярно лучу так, чтобы он проходил через отверстие в линейке и попадал на диск у его края. При правильной установке на линейке появляются 5 красных пятнышек – 5 дифракционных максимумов: центральный нулевой максимум и по два боковых максимума по обе стороны от него. (Если взять DVD-диск, то максимумов будет 3.) Небольшим поворотом и нажимом диска добиваются такого положения, при котором центральный максимум попадает в отверстие линейки, в этом случае угол падения $i = 0$. Из соотношения (2) получаем, что искомое расстояние между строками записи информации равно

$$d = \frac{k\lambda}{\sin \varphi}.$$

Из рисунка 5 находим

$$\sin \varphi = \frac{l}{\sqrt{l^2 + L^2}}.$$

Тогда окончательно

$$d = \frac{k\lambda\sqrt{l^2 + L^2}}{l},$$

причем для спектра первого порядка $k = 1$, для спектра второго порядка $k = 2$.

Определение границ видимого солнечного спектра. Для проведения этого опыта на лист плотного картона наклеивают лист клетчатой или миллиметровой бумаги. Шилом или толстой иглой прокалывают отверстие диаметром 1–2 мм. Картон с отверстием и диск зажимают между краями книги и ее картонными обложками (рис.6). Для опыта достаточно взять книгу толщиной 40–50 мм. Вместо книги можно воспользоваться деревянным брусом такой же или большей толщины.

В солнечный день эту установку располагают так, чтобы луч, проходящий через отверстие в картоне, попадал на край диска. Тогда на клетчатой бумаге возникает белый кружок –

спектр нулевого порядка, а по обе стороны от него появляются радужные полосы – спектры первого порядка. Небольшим поворотом и наклоном книги добиваются такого положения, когда спектр нулевого порядка совпадает с отверстием. Замечают расстояния от отверстия до фиолетового края спектра $l_{\text{ф}}$ и до красного края спектра $l_{\text{кр}}$. При рассмотренном расположении $i = 0$ и $k = 1$. Поэтому, согласно выражению (2) и рисунку 6,

$$\lambda = d \sin \varphi = d \frac{l}{\sqrt{l^2 + L^2}},$$

где d – постоянная решетки (в современных компакт-дисках $d \approx 1,6$ мкм, в DVD-дисках $d \approx 0,8$ мкм), l – расстояние от отверстия до края спектра первого порядка, L – толщина книги или бруска.

Наблюдение линейчатых спектров ртути и обращенной линии натрия. Для наблюдения линейчатых спектров проще всего воспользоваться излучением дуговых ртутных ламп, применяемых для освещения улиц и площадей. В колбе такой лампы находится или капля ртути (лампа «холодного» света), или капля раствора натрия в ртути (лампа «теплого» света). При дуговом разряде в колбе лампы капля превращается в пары Hg и Na, атомы которых излучают свет, имеющий линейчатый спектр.

Расположив диск перпендикулярно вертикальной плоскости, в которой лежат лампа и глаз, и приложив верхний край диска к щеке, чуть ниже глаза, вращают диск вокруг его горизонтального диаметра и находят зеркальное изображение лампы. При дальнейшем повороте диска по часовой стрелке появляется сначала линейчатый спектр первого порядка в виде черточек – спектральных линий – различного цвета, а затем – и спектр второго порядка.

Спектр ртутно-натриевой лампы обладает удивительной особенностью, на которую нельзя не обратить внимание. Кроме указанных цветных спектральных линий, принадлежащих атомам ртути, в желтой части спектра наблюдается также черная линия. Она находится как раз в том месте, где должна быть желтая линия натрия, поэтому ее называют обращенной линией натрия. Причина ее возникновения такова. Понятно, что температура паров Na в центральной части колбы значительно выше температуры слоя, прилегающего к стенкам колбы. Вследствие этого при прохождении излучения от центральных слоев через «холодный» пристенный слой желтый свет с длиной волны $\lambda_0 = 0,589$ мкм хорошо поглощается, а свет с длинами волн больше или меньше λ_0 поглощения не испытывает. Таким образом, линия с длиной волны λ_0 кажется черной по контрасту с соседними участками спектра.

Такова же причина возникновения и темных линий Фраунгофера в спектре Солнца. Они возникают при прохождении света от фотосферы с температурой $T \approx 6000$ К через атмосферу Солнца с гораздо меньшей температурой.

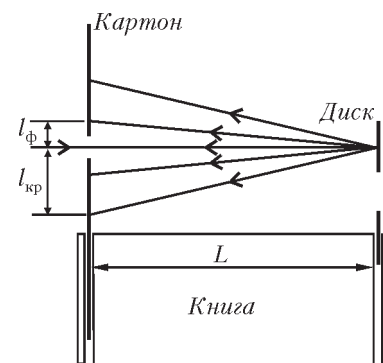


Рис. 6

Модуль суммы и сумма модулей

А.ЕГОРОВ

ЧИТАТЕЛИ «КВАНТА» НАВЕРНЯКА ВСТРЕЧАЛИСЬ С ПОЧТИ очевидным и очень важным неравенством:

$$|a + b| \leq |a| + |b|, \quad (1)$$

справедливым при любых действительных a и b . О его следствиях, применениях и обобщениях мы и поговорим.

Доказать неравенство (1) можно, рассматривая различные комбинации знаков чисел a и b . Мы поступим иначе.

Запишем равносильное неравенство $|a + b|^2 \leq (|a| + |b|)^2$. Раскрывая скобки и выполняя необходимые упрощения, приходим к неравенству $ab \leq |a| \cdot |b|$. Последнее неравенство очевидно, ибо $|x| \geq x$ при любом значении x .

Очевидно, что равенство в неравенстве (1) достигается, если и только если $ab \geq 0$. Иногда, допуская некоторую вольность речи, говорят, что a и b имеют одинаковые знаки.

Если числа a и b имеют разные знаки, то при $ab < 0$ имеет место строгое неравенство $|a + b| < |a| + |b|$.

Будущим студентам полезно знать, что неравенство (1) станет одним из основных при изучении курса математического анализа.

Некоторые следствия

Заменяя в неравенстве (1) b на $-b$, получаем неравенство

$$|a - b| \leq |a| + |b|. \quad (1')$$

Равенство в последнем неравенстве достигается при $ab \leq 0$.

Справедливы также неравенства

$$||a| - |b|| \leq |a + b|, \quad (2)$$

$$||a| - |b|| \leq |a - b|. \quad (2')$$

Упражнение 1. Докажите неравенства (2) и (2') и выясните, при каких a и b они обращаются в равенства.

Неравенство (1) по индукции обобщается на любое количество слагаемых:

$$|a_1 + a_2 + \dots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| \quad (3)$$

при любых действительных $a_1, a_2, \dots, a_n$, и равенство достигается лишь тогда, когда $a_i a_j \geq 0$ при $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Упражнение 2. Докажите неравенство (3).

Теперь посмотрим, как «работают» доказанные неравенства.

Несколько задач

Начнем с задачи, в решении которой используется метод доказательств неравенства (1).

Задача 1 (XV Московская математическая олимпиада). Докажите, что

$$\left| \frac{x - y}{1 - xy} \right| < 1$$

при любых действительных x и y таких, что $|x| < 1$, $|y| < 1$.

Решение. Запишем равносильное неравенство $|x - y| < |1 - xy|$ и возведем его в квадрат: $(x - y)^2 < (1 - xy)^2$. Раскрывая скобки, получим после простых преобразований

неравенство $(1 - x^2)(1 - y^2) > 0$, очевидно справедливое при имеющихся ограничениях на x и y .

Попутно заметим, что неравенство из условия задачи 1 справедливо и для любых x, y , для которых $|x| > 1$ и $|y| > 1$.

Упражнение 3. Что можно сказать о действительных числах x и y , если известно, что $|x + y| > |1 + xy|$?

Задача 2 (LIX Московская математическая олимпиада). Действительные числа x, y, z удовлетворяют условиям

$$|x| \leq |y - z|, |y| \leq |z - x|, |z| \leq |x - y|. \quad (*)$$

Докажите, что одно из чисел x, y, z равно сумме двух остальных.

Решение. Если хотя бы в одном из неравенств выполняется равенство, т.е., например, $|x| = |y - z|$, то либо $y = x + z$, либо $z = x + y$.

Предположим теперь, что все неравенства (*) строгие. Тогда $x^2 < (y - z)^2$, $y^2 < (z - x)^2$, $z^2 < (x - y)^2$, или

$$\begin{cases} (x - y + z)(x + y - z) < 0, \\ (y - z + x)(y + z - x) < 0, \\ (z - x + y)(z + x - y) < 0, \end{cases} \quad (**)$$

т.е. левые части неравенств (**) отрицательные. Однако, перемножив их, получим

$$(x + y - z)^2 (x + z - y)^2 (y + z - x)^2.$$

Это число положительно. Поэтому система (**) несовместна, так как произведение трех отрицательных чисел обязано быть отрицательным.

Следующая задача предлагалась на LVIII Московской математической олимпиаде.

Задача 3. Докажите, что

$$|x| + |y| + |z| \leq |x + y - z| + |x + z - y| + |y + z - x|.$$

Решение. Из неравенства (1) следует, что

$$|x + y - z| + |x + z - y| \geq |x + y - z + x + z - y| = 2|x|.$$

Аналогично,

$$|x + y - z| + |y + z - x| \geq 2|y|, \quad |x + z - y| + |y + z - x| \geq 2|z|.$$

Складываем полученные неравенства, и задача решена.

Упражнение 4. При каких x, y и z неравенство задачи 3 обращается в равенство?

Задача 4. Даны числа $a_1, a_2, \dots, a_n$. Известно, что сумма любых двух из этих чисел по модулю не больше двух. Докажите, что $|a_1 + \dots + a_n| \leq n$.

Решение. Запишем модуль удвоенной суммы данных чисел и воспользуемся неравенством (3):

$$\begin{aligned} |2a_1 + 2a_2 + 2a_3 + \dots + 2a_n| &= \\ &= |a_1 + a_2 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n + a_n + a_1| \leq \\ &\leq |a_1 + a_2| + |a_2 + a_3| + \dots + |a_n + a_1| \leq 2n, \end{aligned}$$

откуда и следует утверждение задачи.

Решим еще задачу, предлагавшуюся десятиклассникам в 1974 году на Всесоюзной математической олимпиаде.

Задача 5. При каких действительных a, b, c равенство

$$|ax + by + cz| + |bx + cy + az| + |cx + ay + bz| = |x| + |y| + |z|$$

верно для любых действительных x, y, z ?

Решение. Подставляя в условие $x = y = z = 1$, затем $x = y = 0, z = 1$, и $x = 1, y = -1, z = 0$, получим систему $|a + b + c| = 1$, $|a| + |b| + |c| = 1$, $|a - b| + |b - c| + |c - a| = 2$. Из первых двух равенств следует, что $ab \geq 0$, $bc \geq 0$, $ac \geq 0$.

Теперь запишем неравенства

$$|a - b| \leq |a| + |b|, |b - c| \leq |b| + |c|, |c - a| \leq |a| + |c|.$$

Сложив их, получаем

$$|a - b| + |b - c| + |c - a| \leq 2(|a| + |b| + |c|) = 2.$$

Равенство в последнем неравенстве возможно лишь тогда, когда во всех трех предыдущих неравенствах – тоже равенства, что возможно лишь при $ab \leq 0, bc \leq 0, ac \leq 0$. Из ранее сказанного следует, что $ab = bc = ac = 0$, так что два из чисел a, b, c заведомо равны 0. Подстановка в первое равенство дает, что третье число равно по модулю 1.

Ответ: два из чисел a, b, c – нули, а третье ± 1 .

Следующая задача взята из «Задачника «Кванта».

Задача 6 (М722). В точках $A_1, A_2, \dots, A_n$, расположенных на окружности, расставляются в некотором порядке числа $1, 2, \dots, n$. Какое наименьшее значение может иметь сумма n модулей разностей соседних чисел?

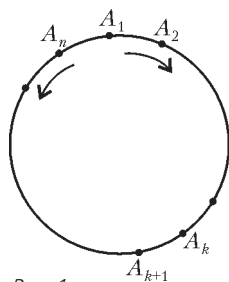


Рис. 1

Решение. Пусть число 1 находится в точке A_1 , а число n – в точке A_k (рис. 1). Пусть также на дуге A_1A_k против часовой стрелки стоят числа $a_1, a_2, \dots, a_{n-k}$, а на дуге A_1A_k по часовой стрелке – числа $b_1, b_2, \dots, b_{k-2}$.

Сумма модулей попарных разностей соседних чисел равна

$$|b_1 - 1| + |b_2 - b_1| + \dots + |b_{k-2} - n| + |a_1 - 1| + |a_2 - a_1| + \dots + |a_{n-k} - n| \geq |b_1 - 1 + b_2 - b_1 + b_3 - b_2 + \dots$$

$$\dots + b_{k-2} - n + a_1 - 1 + a_2 - a_1 + \dots + a_{n-k} - n| = 2(n-1).$$

Итак, сумма модулей попарных разностей не меньше $2n - 2$.

Осталось заметить, что если на каждой из дуг переставить числа $b_1, \dots, b_{k-2}$ и $a_1, \dots, a_{n-k}$ в порядке возрастания (при движении в соответствующем направлении), то полученная сумма будет в точности равна $2n - 2$.

Упражнение 5. Сколько существует способов расстановки чисел $1, 2, \dots, n$ в точках $A_1, A_2, \dots, A_n$, для которых сумма модулей попарных разностей равна $2n - 2$?

Векторы и комплексные числа

Неравенство (1) справедливо и для векторов на плоскости или в пространстве. Докажем это. Пусть $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ – два ненулевых вектора. Отложим их от некоторой точки O .

Если векторы не коллинеарны (рис. 2, а), их сумма изображается диагональю параллелограмма, и тогда в силу неравенства треугольника $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| < |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$.

Если $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны и одинаково направлены (рис. 2, б), то $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$, а если их направления противоположны (рис. 2, в), то $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = ||\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|| < |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$.

Таким образом, для векторов неравенство (1) справедливо и обращается в равенство лишь тогда, когда один из них равен нулю либо когда они одинаково направлены.

Для комплексных чисел $z_1 = a + bi$ и $z_2 = c + di$ неравенство (1) также справедливо, ибо комплексные числа можно отождествить с векторами на плоскости. Из неравенства

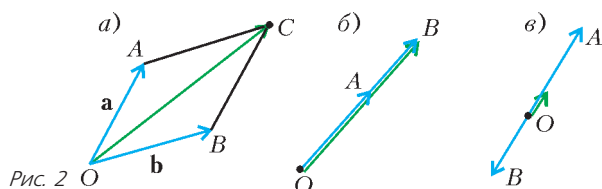


Рис. 2

$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ следует такое неравенство для любых действительных чисел a, b, c и d :

$$\sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2}.$$

Осталось заметить, что неравенства (1'), (2), (2') и (3) справедливы и для векторов, и для комплексных чисел.

Упражнение 6. Убедитесь в этом.

При этом из неравенства (3) для комплексных чисел $z_1 = a_1 + ib_1, \dots, z_n = a_n + ib_n$ следует неравенство

$$\sqrt{(a_1 + \dots + a_n)^2 + (b_1 + \dots + b_n)^2} \leq \sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \dots + \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

для любых действительных $a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_n$.

Упражнение 7. Остается ли справедливым неравенство задачи 1 при комплексных x и y ?

Задача 7. Из точки O плоскости проведено несколько векторов, сумма длин которых равна 4. Докажите, что можно выбрать несколько векторов так, что длина их суммы больше 1.

Решение. Введем такую прямоугольную систему координат xOy , что ни один из данных векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ не лежит на осях координат (рис. 3). При этом векторы разобьются на 4 группы – в каждом квадранте координатной плоскости – своя группа.

По условию $\sum_{i=1}^n |\mathbf{a}_i| = 4$. Пусть $\mathbf{a}_i = (x_i, y_i)$. Тогда $|\mathbf{a}_i| = \sqrt{x_i^2 + y_i^2}$. В силу выбора системы координат $\sqrt{x_i^2 + y_i^2} < |x_i| + |y_i|$ (докажите это неравенство!). Поэтому $4 = \sum_{i=1}^n |\mathbf{a}_i| < \sum_{i=1}^n |x_i| + \sum_{i=1}^n |y_i|$. Отсюда

следует, что сумма длин проекций

векторов на один из лучей, лежащих на координатных осях, больше 1. Но тогда и длина суммы векторов, лежащих в соответствующей полуплоскости, будет больше 1, поскольку при этом сумма проекций векторов на соответствующий луч равна проекции их суммы. Следовательно, модуль суммы этих векторов больше 1.

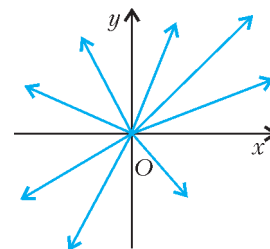


Рис. 3

Еще одно неравенство

Участникам X Всесоюзной математической олимпиады была предложена замечательная задача.

Задача 8. На плоскости даны векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ и $\mathbf{d}$, сумма которых равна $\mathbf{0}$. Докажите неравенство

$$|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| + |\mathbf{c}| + |\mathbf{d}| \geq |\mathbf{a} + \mathbf{d}| + |\mathbf{b} + \mathbf{d}| + |\mathbf{c} + \mathbf{d}|. \quad (4)$$

Прежде чем доказывать это неравенство, сделаем несколько замечаний.

Пусть $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ – произвольные векторы на плоскости. Подставляя в (4) $\mathbf{d} = -\mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c}$, получаем для векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ неравенство

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| + |\mathbf{b} + \mathbf{c}| + |\mathbf{c} + \mathbf{a}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| + |\mathbf{c}| + |\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}|. \quad (4')$$

Сначала мы докажем неравенство (4'), а следовательно и (4), для чисел.

Задача 9. Докажите, что неравенство

$$|a + b| + |b + c| + |c + a| \leq |a| + |b| + |c| + |a + b + c|$$

справедливо для любых действительных a, b и c .

Решение. Неравенство очевидно, если все числа a, b, c

неотрицательны (неположительны), а также если одно из них равно 0 (неравенство тогда обращается в равенство).

Если для тройки a, b, c неравенство выполняется, то оно справедливо и для тройки $-a, -b, -c$. Поэтому будем считать, что $a > 0, b > 0, c < 0$. Поделим левую и правую части на a и выполним замену $x = \frac{b}{a} > 0, y = \frac{c}{a} < 0$.

Задача теперь сводится к доказательству неравенства

$$|1+x|+|x+y|+|1+y| \leq 1+|x|+|y|+|1+x+y|$$

при $x > 0, y < 0$, т.е. неравенства

$$|x+y|+|1+y| \leq |y|+|1+x+y|, \text{ где } x > 0, y < 0.$$

При $y \geq -1$ получаем после упрощений неравенство $|x+y| \leq x-y = |x|+|y|$, а это – неравенство (1).

Если $y < -1$, приходим к неравенству $|1+x+y| \geq |x+y|-1$ справедливому в силу неравенства (2).

Тем самым неравенство (4') доказано.

На доказанное нами неравенство (4) для действительных чисел опирается эффективное и основанное на глубоких идеях доказательство неравенства (4) для векторов на плоскости и в пространстве. Оно изложено в статье Ю.Ионина и А.Плоткина «Среднее значение функции» (см. «Квант» №7 за 1977 г., с. 26).

Теперь решим задачу 8. Она оказалась одной из самых трудных задач X Всесоюзной математической олимпиады. Дело в том, что для векторов нет процедуры «снятия» знаков модуля, которой мы пользовались, решая задачу 9. Значит, нужно искать геометрическое решение.

Решение задачи 8. Прежде всего заметим, что неравенство (4) симметрично, т.е. сохраняется при любых перестановках векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ и $\mathbf{d}$. Это следует из вида неравенства и того, что $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} = \mathbf{0}$. Поэтому достаточно доказать его для любой четверки векторов, полученной перестановкой из данной. Кроме того, неравенство (4) очевидно, если сумма каких-то двух из векторов равна 0. Итак, в дальнейшем считаем, что ни один из векторов и ни одна из сумм двух из них не равны 0.

Последовательно откладывая векторы $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}, \overrightarrow{BC} = \mathbf{b}, \overrightarrow{CD} = \mathbf{c}, \overrightarrow{DA} = \mathbf{d}$ (рис.4), получим по правилу сложения векторов замкнутую ломаную линию $ABCD$ ($\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} = \mathbf{0}$).

Если эта ломаная окажется самопересекающейся, все сравнительно просто. В самом деле, по неравенству треугольника, $AC \leq AE + EC, BD \leq BE + ED$. Значит, $AC + BD \leq AE + ED + BE + EC = AB + DC$. Далее: $\overrightarrow{CA} = \mathbf{c} + \mathbf{d}, \overrightarrow{DB} = \mathbf{d} + \mathbf{a}$, т.е. $CA = |\mathbf{c} + \mathbf{d}|, BD = |\mathbf{a} + \mathbf{d}|, AB = |\mathbf{a}|, CD = |\mathbf{c}|$. Поэтому $|\mathbf{a} + \mathbf{d}| + |\mathbf{c} + \mathbf{d}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{c}|$. Кроме того, $|\mathbf{b} + \mathbf{d}| \leq |\mathbf{b}| + |\mathbf{d}|$. Складывая последние два неравенства, окончательно получаем требуемое: $|\mathbf{a} + \mathbf{d}| + |\mathbf{b} + \mathbf{d}| + |\mathbf{c} + \mathbf{d}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| + |\mathbf{c}| + |\mathbf{d}|$.

Теперь докажем, что данные векторы можно переставить так, что получится самопересекающаяся ломаная (прежде чем читать дальше, подумайте, как это сделать).

Итак, пусть сначала четырехугольник $ABCD$ – невыпуклый или «вырождающийся» (рис.5, а, б). Отложим от точки D вектор $\overrightarrow{DA'} = \mathbf{a}$. Луч DA' пересечет отрезок BC (почему?), $\overrightarrow{A'B} = \mathbf{d}$, а ломаная $A'BCDA'$ станет самопересекающейся.

Если же $ABCD$ выпуклый (рис.6), отложим от точки C вектор $\overrightarrow{CD'} = \mathbf{d}$. Тогда $\overrightarrow{D'A} = \mathbf{c}$, и четырехугольник $ABCD'$

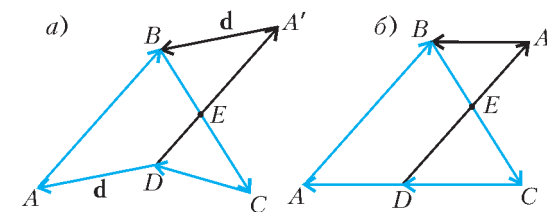


Рис. 5

окажется либо невыпуклым, либо самопересекающимся, т.е. все сведется к одному из двух уже рассмотренных случаев. Тем самым неравенство (4) доказано.

В трехмерном случае утверждение задачи 8 также справедливо, но приведенное доказательство уже не проходит. (Было бы интересно найти элементарное доказательство, поскольку доказательство Ю.Ионина и А.Плоткина неэлементарно.)

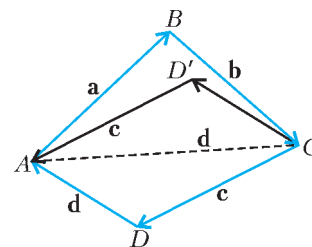


Рис. 6

Упражнения

В заключение предлагаем вам решить несколько задач. Некоторые из них могут показаться далекими от темы статьи. Однако такое впечатление обманчиво.

Начнем с конкурсных и близких к ним по содержанию задач. Задачи 8 б, в, 9, 11 в разные годы предлагались на вступительных экзаменах в МГУ.

8. Решите уравнения

- $|x^2 - 3x + 1| + |2x^2 - x - 1| = |3x^2 - 4x|$;
- $|x - 1| + |x + 1| + |x - 2| + |x + 2| + \dots + |x - 100| + |x + 100| = 200x$;
- $|\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 3x| + |\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x| = \operatorname{tg} 3x$ при $x \in (0; \pi]$.

9. Решите неравенства

- $|1 - x^2| - |x^2 - 3x + 2| \geq 3|x - 1|$;
- $\sqrt{1 - \sin 2x} + |\sin x| \leq \cos x$;
- $2 \sin x + 2 \cos x + \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x + \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} \leq 2$.

10. Найдите наименьшее значение функции

- $y = |x - 3| + |x| + |x + 3| + |x + 5|$;
- $y = |x^2 + 3x + 1| + |x^2 - 1| + |3x - 2|$.

При каких значениях x достигаются наименьшие значения?

11. При каких x и y выражение $|2x - y - 1| + |x + y| + |y|$ достигает наименьшего значения? Чему равно это значение?

И, наконец, еще несколько неконкурсных задач.

12. Пусть $a_1, a_2, \dots, a_n$ – произвольная перестановка чисел 1, 2, ..., n . Найдите наибольшее возможное значение суммы

$$|a_1 - 1| + |a_2 - 2| + \dots + |a_n - n|.$$

13. Докажите, что если a – корень многочлена $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$, где $a_n \neq 0$, то $|a| < 1 + \max_{1 \leq j \leq n} \frac{|a_j|}{|a_n|}$.

14. Докажите неравенство

$$\frac{|a|}{1+|b|} + \frac{|b|}{1+|c|} + \frac{|c|}{1+|a|} \geq \frac{|a+b+c|}{1+|a+b+c|},$$

где a, b, c – произвольные действительные числа. Попробуйте обобщить это неравенство на большее количество чисел (возможны различные обобщения!).

15. По окружности расставлены n гирек с различными массами, а на дугах между каждыми двумя соседними гирьками помещается шарик. Масса каждого шарика равна разности масс соседних с ним гирек (из большей массы вычитается меньшая). Можно ли разложить шарики на две чашки весов так, чтобы наступило равновесие?

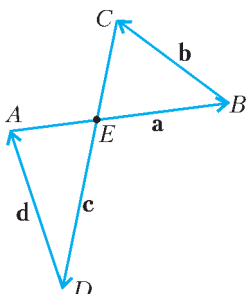


Рис. 4