

точки, лежащие на сфере, ребра – отрезки больших окружностей. Мы считаем, что ребра графа не пересекаются между собой (не считая, разумеется, общих вершин). Множество ребер графа  $G$  обозначим через  $E$ .

Нам интересны будут только те графы, которые можно представить в виде системы пружинок, по пружинке на каждое ребро. Каждая пружинка должна быть обязательно либо сжата, либо растянута (т.е. производить ненулевую силу). Главное условие – система пружинок должна находиться в равновесии.

Дадим строгое определение.

**Определение 2.** Стрессом графа на сфере  $G$  называется функция  $f$ , сопоставляющая каждому ребру некоторое вещественное число так, что для любого  $i = 1, \dots, n$

$$\sum_{(i,j) \in E} f(i,j) \mathbf{u}_{ij} = 0.$$

Здесь  $\mathbf{u}_{ij}$  – единичный вектор, касающийся ребра  $(i,j)$  в точке  $i$  и направленный вдоль ребра от вершины. Эта формула выражает равновесие сил, действующих на вершину  $i$ .

Представлять себе это надо так. У нас есть узкий шаровой слой (пространство между двумя сферами), в котором живет пружинная система. Из-за внешних ограничений пружинки не могут слезть со сферы, но по сфере могут двигаться свободно под действием сил натяжения пружинок.  $f(i,j)$  – сила натяжения пружинки, соответствующей ребру  $(i,j)$ . Векторы сил, создаваемых пружинкой на ее концах, не параллельны, но равны по величине и действуют вдоль ребра. Если стресс положительный, то силы сонаправлены векторам  $\mathbf{u}_{ij}$ .

На рисунках мы отмечаем ребра графа с положительным стрессом (растянутая пружина) красным цветом, а с отрицательным стрессом (сжатая пружина) – синим (как на рисунке 7).

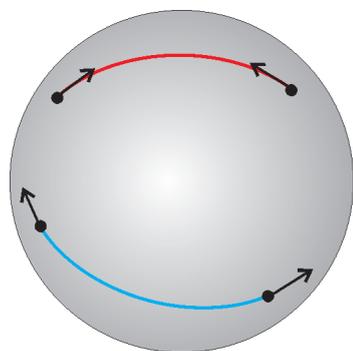


Рис.7. Сжатая и растянутая пружины

Нас интересуют только всюду ненулевые стрессы (т.е. все пружинки должны быть напряжены).

Кроме того, будем предполагать, что в графе со стрессом нет изолированных вершин и нет вершин, к которым примыкает ровно два ребра.

Совсем не все графы на сфере можно представить в виде системы пружинок. Например, если граф состоит из одного-единственного ребра. Или граф из трех ребер, образующих треугольник.

Итак, пусть  $G$  – граф на сфере, а  $f$  – его всюду положительный стресс (т.е. все пружинки растянуты). Покажем, что этому объекту можно поставить в соответствие трехмерный выпуклый многогранник  $P(G,f)$  (от английского слова «polytope»).

Рассмотрим вначале отдельно одну вершину  $i$  графа  $G$ . Пусть  $\mathbf{1}, \dots, \mathbf{k}$  – силы, создаваемые пружинками в вершине  $i$ . Это векторы, идущие вдоль ребер графа, примыкающих к  $i$ , длины которых равны значению стресса. Поскольку стресс всюду положительный, они все направлены вдоль ребра от вершины. Будем считать, что нумерация ребер соответствует порядку обхода ребер графа по часовой стрелке.

Для вершины  $i$  рассмотрим касательную к сфере плоскость. В этой плоскости построим выпуклый многоугольник, руководствуясь следующим правилом. Выберем точку в плоскости и будем откладывать один за другим векторы  $\mathbf{1}, \dots, \mathbf{k}$ , повернутые на угол  $\pi/2$  по часовой стрелке (рис.8). Поскольку сумма всех этих векторов равна нулю (это условие из определения стресса), ломаная замкнется.

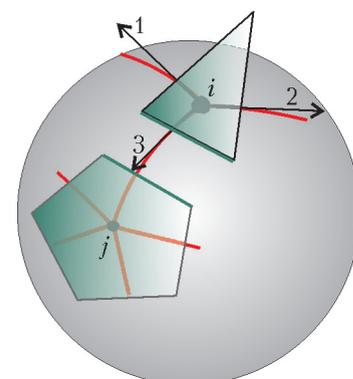


Рис.8. Граф с положительным стрессом порождает выпуклый многогранник

Не правда ли, знакомая картинка? Силы, приложенные к вершине, составляют букет векторов, сумма которых равна нулю, и из этих векторов мы строим выпуклый многоугольник. Это будет грань многогранника  $P(G,f)$ .

Аналогично поступим со всеми остальными вершинами графа.

Заметим, что у многоугольников, соответствующих соседним вершинам графа, есть параллельные стороны одинаковой длины. Поэтому из таких многоугольников, перенося их параллельно, можно собрать выпуклый многогранник  $P(G,f)$ . Он определяется такой конструкцией с точностью до параллельного переноса.

И наоборот, по выпуклому многограннику можно построить граф с положительным стрессом (рис.9). Для этого рассмотрим для каждой грани многогранника

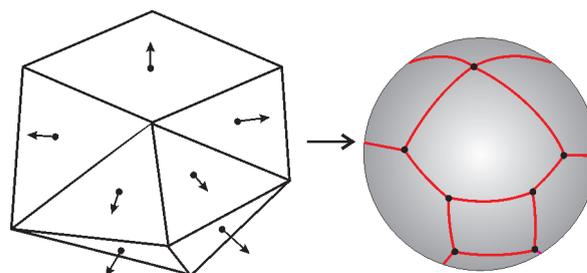


Рис.9. Выпуклый многогранник порождает граф с положительным стрессом

ка единичный вектор, ей ортогональный (и смотрящий наружу). Если отложить все полученные векторы от начала координат  $O$ , то их концы попадут на сферу  $S$ . Это будут вершины графа. Соединим их, согласно комбинаторике многогранника, отрезками больших окружностей (а именно, две точки нужно соединять, если

соответствующие грани многогранника имеют общее ребро). Так мы получим ребра графа. Значение стресса на ребре при этом полагаем равным длине соответствующего ему ребра многогранника.

В этой схеме мы имеем дело с *комбинаторной двойственностью*: вершинам графа соответствуют грани многогранника, вершинам многогранника – области разбиения сферы, ребрам графа – ребра многогранника, причем две вершины графа соединены ребром тогда и только тогда, когда соответствующие грани делят ребро.

**Пример 8.** Расположим на сфере три большие окружности, лежащие под углом  $\pi/2$  друг к другу. Их объединение порождает граф с 6 вершинами и 8 ребрами. Функция, ставящая в соответствие каждому ребру число 1, очевидно является стрессом. Убедитесь, что в нашей схеме такому графу со стрессом соответствует куб.

**Задача 6.** А какой многогранник получится, если взять не три, а только две большие окружности?

**Пример 9.** Единичный отрезок тоже можно рассматривать как трехмерный многогранник. Попробуем образовать, какой граф на сфере ему соответствует. Согласно комбинаторной двойственности, у него не должно быть вершин (ведь у отрезка нет граней) и должно быть всего одно ребро. Поэтому нам приходится расширить понятие графа на сфере.

**Определение 3.** Одно замкнутое ребро, совпадающее с большой окружностью, тоже будем считать графом на сфере. Значение стресса на этом ребре может быть любым. Такой граф (со стрессом) будем называть *экзотическим*.

Физический смысл экзотического графа ясен: это замкнутая пружина, опоясывающая сферу по экватору.

Давайте научимся складывать графы с положительными стрессами.

Пусть  $(G_1, f_1)$  и  $(G_2, f_2)$  – два графа с положительными стрессами. Зададим их сумму алгоритмически (рис.10).

- Поместим на сферу оба графа и в качестве суммы  $(G_1, f_1) + (G_2, f_2)$  возьмем результат наложения этих

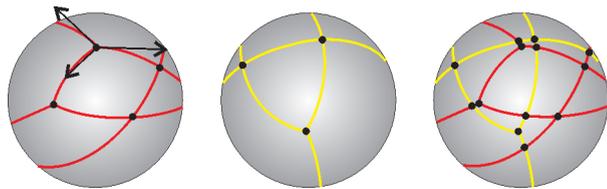


Рис. 10

графов. Говоря точнее, нужно взять все вершины графов  $(G_1, f_1)$  и  $(G_2, f_2)$  и все новые вершины, получившиеся как пересечения ребер  $(G_1, f_1)$  и  $(G_2, f_2)$ . Ребра полученного графа – кусочки ребер  $(G_1, f_1)$  и  $(G_2, f_2)$ .

- Значение стресса  $(G_1, f_1) + (G_2, f_2)$  на ребре наследуется. Это значит, что если ребро графа  $(G_1, f_1) + (G_2, f_2)$  есть часть ребра графа  $G_1$ , то ему

надо присвоить значение стресса  $f_1$ . Аналогично, если ребро суммы есть часть ребра графа  $G_2$ , то ему надо присвоить значение стресса  $f_2$ . Если же ребро одновременно является частью ребер обоих графов, то значения стрессов надо сложить.

Нулевым элементом относительно этой операции является пустой граф (граф без ребер и без вершин).

Несложно убедиться, что в результате мы получим граф с положительным стрессом.

**Теорема.** Сложение по Минковскому выпуклых многогранников соответствует сложению их графов со стрессами.

*Иными словами, если есть два графа со стрессами  $(G_1, f_1)$  и  $(G_2, f_2)$ , то*

$$P((G_1, f_1) + (G_2, f_2)) = P(G_1, f_1) + P(G_2, f_2).$$

Мы оставляем эту теорему без доказательства. Отметим впрочем, что примеры 6 и 7, в сравнении с примерами 8 и 9, хорошо ее иллюстрируют.

### Вычитание по Минковскому

– Интересно, куда мне теперь идти?

На этот вопрос ответить было нетрудно: через лес вела только одна дорога, и обе стрелки указывали на нее.

– Дойду до развилки, – подумала Алиса, – тогда и решу. Ведь там им придется указывать в разные стороны.

Напрасно она на это надеялась! Она все шла и шла по дороге, но и на развилках стрелки неизменно указывали в одну сторону.

Теперь наша цель – придать геометрический смысл выражению «разность Минковского двух выпуклых многогранников». Двумерный случай нас подготовил к тому, что нас ждет нечто невыпуклое и с самопересечениями.

Сначала разберемся, как складывать графы с произвольными, не обязательно положительными стрессами. Как и для Алисы, у нас сейчас нет выбора: все стрелки ведут в одно и то же место.

**Определение 4.** Пусть  $(G_1, f_1)$ ,  $(G_2, f_2)$  – два графа с ненулевыми стрессами. Зададим их сумму алгоритмически (рис.11):

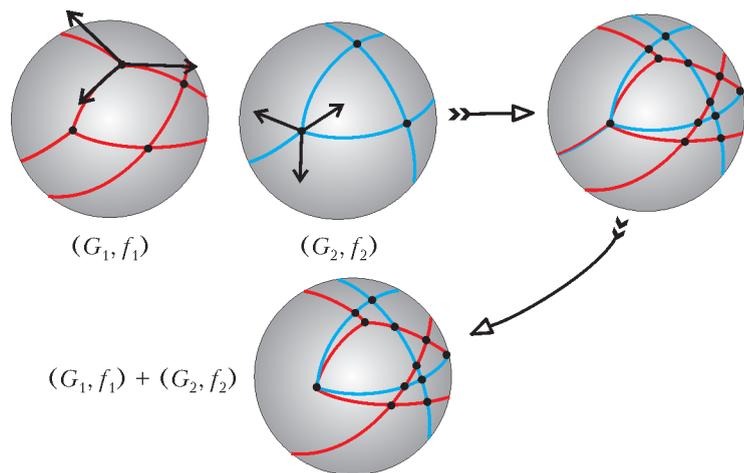


Рис. 11

- Как и прежде, нужно взять результат наложения этих графов.

- Как и прежде, значение стресса на ребрах наследуется от  $(G_1, f_1)$  и  $(G_2, f_2)$ .

- Однако на этом процедура сложения не заканчивается. Следующий шаг – удаление лишних ребер и вершин. Может случиться так, что стресс суммы  $(G_1, f_1) + (G_2, f_2)$  на некотором ребре окажется равным нулю. Тогда такое ребро надо удалить.

- После удаления всех ребер с нулевым стрессом может случиться так, что к одной вершине примыкают ровно два ребра (это означает, что эти ребра образуют угол  $\pi$ , и стрессы на этих ребрах равны). Тогда эту вершину надо удалить, а два ребра объединить в одно. Вершины, к которым не примыкают ребра, тоже нужно удалить.

В результате мы получим некоторый граф на сфере с ненулевым стрессом.

Теперь ясно, как вычитать графы со стрессами. Обратным графом к графу  $(G, f)$ , очевидно, является граф  $(G, -f)$ . (Убедитесь, что  $(G, f) + (G, -f)$  – пустой граф!) Поэтому взять разность графов  $(G_1, f_1)$  и  $(G_2, f_2)$  означает взять сумму графов  $(G_1, f_1)$  и  $(G_2, -f_2)$ .

**Задача 7.** Покажите, что любой пружинный граф на сфере можно представить в виде разности двух графов с положительными стрессами.

Теперь попробуем по графу с всюду ненулевым (но теперь не обязательно положительным) стрессом  $(G, f)$  построить геометрический объект  $P(G, f)$ .

Алгоритм в точности повторяет алгоритм построения  $P(G, f)$  для графа с положительным стрессом. Опять, как и у Алисы, у нас нет другого выбора.

- Пусть  $1, \dots, k$  – силы, создаваемые пружинками в вершине  $i$  графа  $(G, f)$ . Теперь это векторы, идущие либо в направлении ребра, либо в противоположном направлении, в зависимости от знака стресса. Мы считаем, что их нумерация соответствует порядку обхода ребер графа по часовой стрелке. *Поскольку стресс может быть знакопеременный, сами векторы  $f_1, \dots, f_k$  могут идти совсем в другом порядке.*

- Как и прежде, для вершины  $i$  рассмотрим касательную к сфере  $S$  плоскость. В этой плоскости построим замкнутую ломаную, руководствуясь старым правилом. Выберем точку в плоскости и будем откладывать один за другим векторы  $f_1, \dots, f_k$ , повернутые на угол  $\pi/2$  по часовой стрелке. Здесь важно, что мы берем векторы согласно порядку ребер, а не порядку векторов.

*Полезно убедиться, что эта процедура в точности описывает построение разности Минковского выпуклых многоугольников.*

- Аналогично поступим со всеми остальными вершинами графа. Для каждой вершины мы получим невыпуклый многоугольник (замкнутую плоскую ломаную, возможно с самопересечениями)

- Важно, что для этих многоугольников остается выполненным главное свойство, позволяющее собрать их воедино, – у многоугольников, соответствующих

соседним вершинам графа, есть параллельные отрезки одинаковой длины.

Поэтому из таких многоугольников, перенося их параллельно, можно собрать некий объект  $P(G, f)$ , определяемый такой конструкцией с точностью до параллельного переноса.  $P(G, f)$  называется *виртуальным многогранником*.

Теперь ясно, что нужно сделать для построения разности Минковского двух многогранников  $K$  и  $L$ :

- Превратить многогранники в пружинные графы.
- Взять разность пружинных графов.
- Построить виртуальный многогранник  $P(G, f)$ , соответствующий разности графов.

Дадим пояснение для продвинутых читателей. Дело в том, что при суммировании по Минковскому параллельные грани многогранников складываются. Поэтому естественно ожидать, что гранями разности Минковского  $K - L$  должны служить разности Минковского граней многогранников  $K$  и  $L$ . Именно это явление закодировано в конструкцию виртуального многогранника.

**Пример 10.** На рисунке 12,а) представлен граф со стрессом. Граф трехвалентен, следовательно, виртуальный многогранник  $(G, f)$  (рис.12,б) склеен из треугольников.

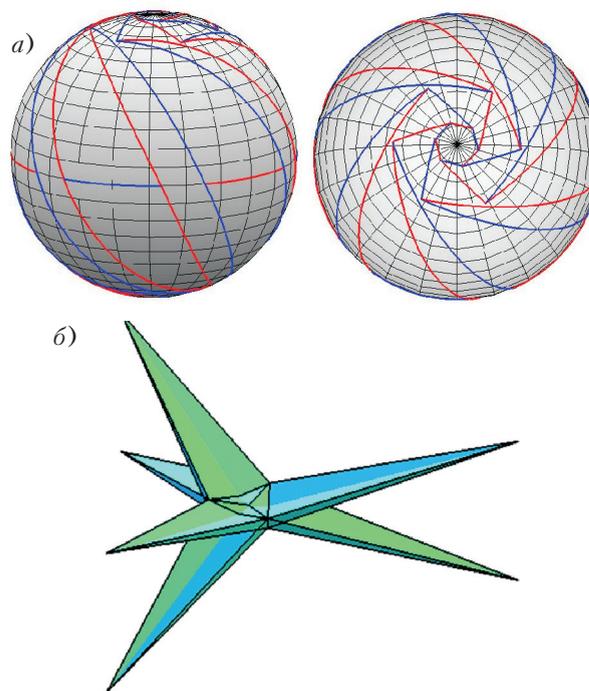


Рис.12. Пример графа со знакопеременным стрессом и соответствующий ему виртуальный многогранник

**Литература**

1. А.Пухликов, А.Хованский. *Конечно-аддитивные меры виртуальных многогранников*. (Алгебра и анализ, т.4 (1992), вып. 2, с. 161–185.)
2. Сайт, посвященный гиперболическим виртуальным многогранникам: [club.pdmi.ras.ru/~panina/hyperbolicpolytopes.html](http://club.pdmi.ras.ru/~panina/hyperbolicpolytopes.html)

# Рассказы о современной механике (продолжение)

Г. ЧЁРНЫЙ

## Исследование вулканических извержений методами механики

Изучение вулканов и их активности всегда было делом специалистов – вулканологов, геологов и представителей других наук. Механика долгое время не вмешивалась в этот вопрос. Были отдельные попытки рассмотрения гейзеров и других подобных образований. Но собственно вулканами ученые-механики занялись лишь в последнее время, и сразу же произошел прорыв в этой области.

Для изучения и прогнозирования деятельности вулканов были применены традиционные для механики методы математического моделирования. На нынешнем этапе исследований уже получены интересные и обнадеживающие результаты. Построены модели различных типов извержений (в хорошем согласии с имеющимися данными). В наши дни, благодаря работе ученых из Института механики МГУ, появилась возможность задним числом провести расчет происходивших в свое время извержений, о которых было многое известно, но, как оказалось, многое становится известным лишь сейчас.

Вулканическое извержение – один из наиболее разрушительных видов природных катастроф. Достаточно сказать, что за последние три века в результате вулканических извержений погибли более 220 тысяч человек. Для надежного прогноза последствий вулканических извержений необходимо научиться правильно интерпретировать различные сигналы, получаемые от вулкана, – микроземлетрясения, деформации построек, рост температуры в термальных источниках и состав выделяемых газов. Связать эти не прямые разрозненные наблюдения под силу лишь математическим моделям, основывающимся на фундаментальных законах механики.

Рассмотрим, например, подробнее, что произошло в 79 году нашей эры во время извержения вулкана Везувий, когда погибли города Помпеи и Геркуланум. Как известно из многочисленных источников, после кратковременного всплеска извержение быстро пошло на убыль. Жители Помпей, хотя и изрядно напуганные, решили, что вулкан успокоился, и не собирались покидать свои дома. Внезапно извержение снова усилилось, и на город обрушились потоки раскаленных камней. Практически мгновенно город был погребен под их многометровым слоем.

Объяснить это не мог никто, а механики – объяснили.

Создали модель, расчеты по которой восстановили хронологию событий. На рисунке 1 приведен график рассчитанной зависимости интенсивности извержения от времени. Оказывается, возле Везувия в земле имеется достаточно мощный водоносный слой. И вот,

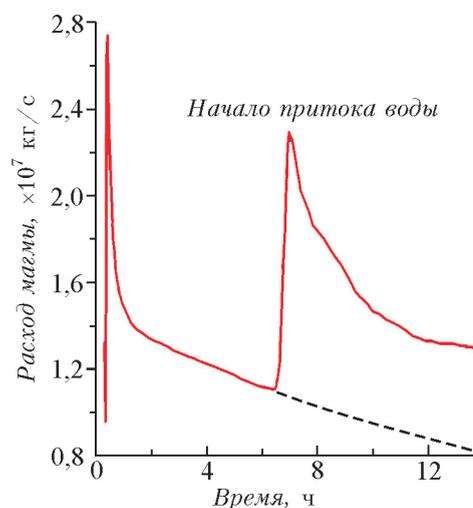


Рис.1. Интенсивность извержения Везувия (79 г.)

когда произошел спад извержения, в месте контакта с этим слоем давление внутри канала вулкана сильно упало, и туда устремилась вода, которая практически мгновенно превратилась в пар и произвела выстрел, выбросивший громадное число камней, пепла и тому подобное.

В настоящее время методы механики активно используются для анализа и прогноза вулканических извержений. В Институте механики МГУ созданы модели течения магмы (расплавленной лавы) в канале вулкана для различных типов извержений. Эти модели позволяют связать наблюдаемые на поверхности величины, например расход магмы и ее температуру, с процессами, происходящими в земной коре. Для ряда вулканов их история известна, описана методами механики, и, таким образом, становится возможным прогноз. Например, взяв параметры извержения для Везувия приблизительно те же, что были в начале нашей эры, ученые рассчитали лавовые потоки, которые могут возникнуть сегодня. Они установили, в частности, что на город Неаполь в течение 15 минут могут обрушиться огромные потоки раскаленной магмы. Население и местные органы власти призадумались, и сейчас разрабатываются планы эвакуации населения на этот случай.

### Механическая модель образования суперконтинентов

Еще один, действительно ошеломляющий, пример применения механики в огромном по масштабу промежутке времени от начала возникновения Земли и до наших дней – это образование континентов. Известно, что континенты и составляющие их плиты движутся. И вот, по данным геологов, за последние три с половиной миллиарда лет эти плиты несколько раз собирались в

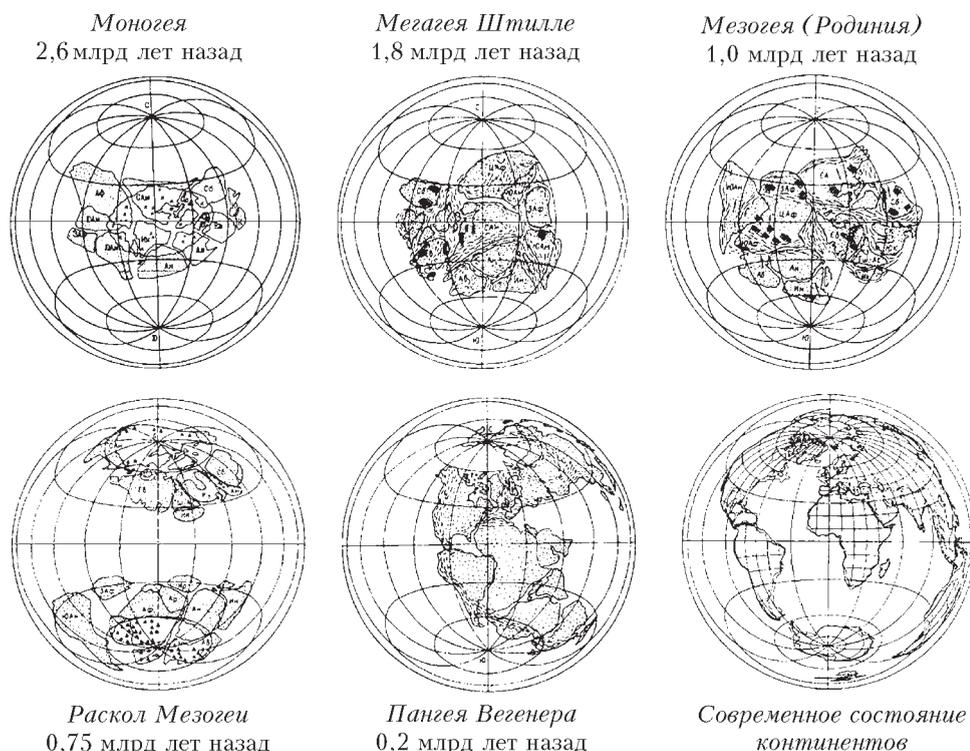


Рис.2. Суперконтиненты в геологической истории Земли

некий общий материк (рис.2). Геологи умеют определять возраст пород. На ныне существующих континентах есть области, где породы очень старые – по три миллиарда лет и больше, а в других местах обнаружены так называемые ювенильные породы, т.е. породы, возникшие намного (на миллиард, на два миллиарда лет) позже. Но почему все это происходит – неясно.

Для объяснения была предложена конвекционная теория динамики земной коры. Внутреннее строение Земли выбиралось очень простым – в центре находится горячее расплавленное ядро, которое является источником тепла, дальше располагается мантия, которая разделена на два слоя – верхний и нижний (это – данные сейсмологии). Слои – толстые, верхний слой имеет толщину примерно 650 километров. Эти слои отличаются друг от друга по своему внутреннему строению. Граница между слоями – это поверхность фазового перехода вещества мантии с поглощением тепла, т.е. при переходе через эту поверхность одни химические связи преобразуются в другие и это сопровождается поглощением тепла. Так вот, была построена такая упрощенная модель: есть сферически симметричная Земля, затем ей дают небольшое возмущение, отклонение от сферически симметричной формы,

и отслеживают, что происходит при дальнейшей эволюции. При решении этой задачи используется метод математического моделирования.

Оказывается, что развивающиеся (увеличивающиеся) возмущения приводят к глобальным движениям мантии Земли. Возникают так называемые тепловые конвективные потоки, и в двухслойной мантии наблюдается интереснейшее явление. В некоторые периоды, достаточно короткие по сравнению с общим временем

эволюции, верхний, более холодный, слой мантии почти целиком сливается одной гигантской струей вглубь Земли, обволакивая ее ядро. Взамен этого происходит всплытие на поверхность части вещества нижнего, более горячего, слоя. Всплытие происходит тремя-пятью менее мощными струями, чем струя, идущая вниз. Всплывающий материал образует новые, ювенильные породы.

Заметим, что наиболее неожиданным открытием оказалась так называемая «глобальная самоорганизация» течения, которая заключается в коллективном, т.е. одной мощной струей, погружении вещества. Следствием этого и является сборка (над местом погружения) суперконтинента из отдельных континентов, а также повышенная скорость погружения вещества.

Описываемая теорией картина не только качественно согласуется с геологической историей нашей планеты, но и позволяет делать некоторые выводы (авторы работы – московские ученые-механики).

Поскольку теория имеет некоторую свободу (свободные параметры, которые можно задавать), временной масштаб подгоняется под масштаб действительных новых образований, которые геологи определяют по распаду радиоактивных элементов. На рисунке 3 приведен

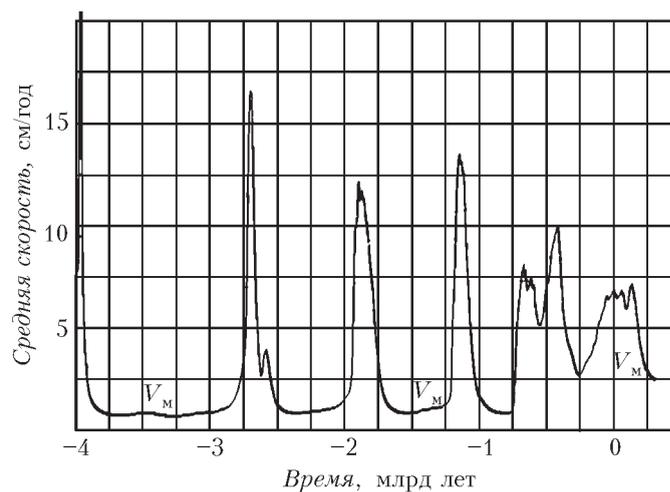


Рис.3. Средняя скорость движения мантии

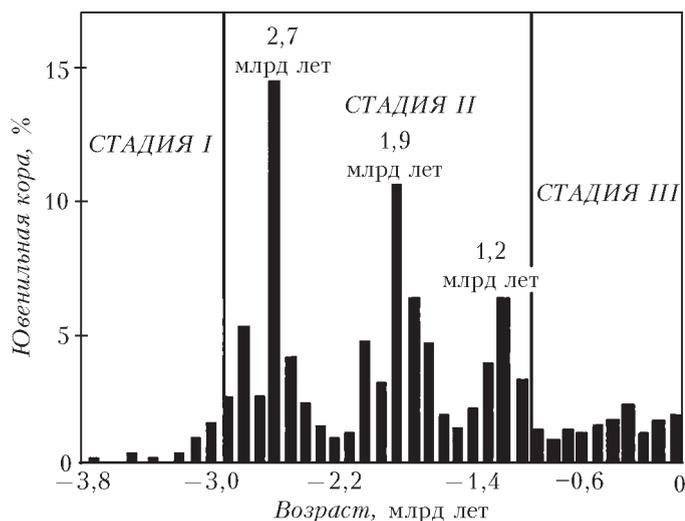


Рис.4. Геологические данные по возрасту ювенильных пород

график рассчитанной средней скорости движения мантии. Он имеет довольно острые пики, когда скорость сильно возрастает, продолжительность пиков невелика по сравнению с общим временем эволюции. Во время этих пиков и происходит интенсивное образование пород. Полученная картина хорошо согласуется с имеющимися геологическими данными по возрасту ювенильных пород (рис.4). После того как периоды подогнаны, получается очень похожая картина.

### Механика и арктические исследования

В нашей стране разработаны (чего нет больше нигде в мире) глубоководные, до 6 километров глубины погружения, самоходные или управляемые извне самодвижущиеся аппараты — обитаемый «Мир» и необитаемый «Клавесин». Они принципиально отличаются от имеющихся в ряде стран так называемых батискафов, которые просто опускают на канате, внизу они сбрасывают балласт и всплывают. Но 6 километров глубины — это давление 600 атмосфер, которое должно выдержать достаточно сложное устройство аппарата. И здесь нужна механика материалов, механика их поведения в таких сложных условиях.

Новость, которая в газетах освещалась очень широко, — недавняя экспедиция к Северному полюсу на атомных ледоколах «Россия» и «Академик Федоров» и установка Российского флага на дно Северного Ледовитого океана. На атомных ледоколах есть атомные реакторы, которые представляют собой почти чисто механические устройства. Возможность создания прочных судов — это тоже механика. Но еще раньше на Северном полюсе побывали подводные лодки, которые всплыли точно в точке полюса. Кто их туда привел? Радио? Оно не работает под водой. Эхолокация? Хотя она и работает, но на очень малых расстояниях. А привели лодки инерциальные гироскопические системы навигации поразительной точности — еще одно чудо, выдающееся достижение механики и прошлого и совсем недавнего времени.

Навигация — это наука и искусство, находясь на перемещающемся аппарате (машине, морском или воз-

душном судне, космическом или воздушном корабле), определять местоположение и ориентацию этого аппарата. В старину моряки для навигации использовали компас, Солнце и звездное небо. Потом на помощь пришло радио. Новая эпоха началась с появлением инерциальных систем навигации, которые не используют никаких внешних сигналов или наблюдений. Самые первые такие системы, до сих пор остающиеся традиционными, — гироскопические. В их основе лежит чисто механическое устройство — гироскоп. (Простейшее представление о гироскопе дает быстро вращающийся волчок, который, вопреки силе тяжести, не падает, и при этом его ось вращения прецессирует, т.е. медленно описывает конус.) Гироскопические системы навигации прошли колоссальную эволюцию за последние десятилетия и особенно в наши дни. В нашей стране созданы гироскопические системы навигации поразительной точности. На эти приборы имеется огромный спрос во всем мире, каждые два года проводятся посвященные им международные конференции. Хотя эти приборы и электронные, но принцип их действия и принцип использования — чисто механические.

Кстати сказать, акустическая локация и связь — тоже дело механиков. Ведь акустика — наука, отпочковавшаяся от механики, как и давно выделившаяся динамическая метеорология (и значительная часть океанологии). В совокупности эти две науки изучают движения в воздушной оболочке Земли — атмосфере и движения в мировом океане, а также их взаимодействие.

Среди ряда новейших достижений этих наук можно отметить теорию «рингов» Гольфстрима и теорию торошения льдов в Арктике. Последняя сродни теории столкновения материковых плит, но, конечно, относится к явлениям гораздо меньшего масштаба по пространству и времени и к более простой среде.

### Производство электроэнергии на атомных электростанциях

Хорошим примером использования механики в технике может служить атомная энергетика — одна из быстро развившихся в последние десятилетия технологий. Ныне атомные реакторы используются не только в энергетике, но и для транспорта.

Принципиальная схема атомной электростанции — АЭС — изображена на рисунке 5. Помимо атомного реактора она включает двухконтурную систему теплоносителя (первый контур — радиоактивный, он располагается внутри корпуса реактора, а второй, уже с малой радиоактивностью, находится вне реакторного корпуса), паровые турбины, которые вращают электрогенераторы, сами электрогенераторы, системы передачи электроэнергии, систему охлаждения, насосы.

Сердцем АЭС является атомный реактор — совместное детище физиков и механиков. Топливо (уран) загружают в реактор в виде тепловыделяющих элементов, которые представляют собой трубочки, набитые этим топливом. Атомную реакцию уменьшают или усиливают, перемещая вверх или вниз эти тепловыделяющие элементы, т.е. выдвигая их из реактора или задвигая в него.

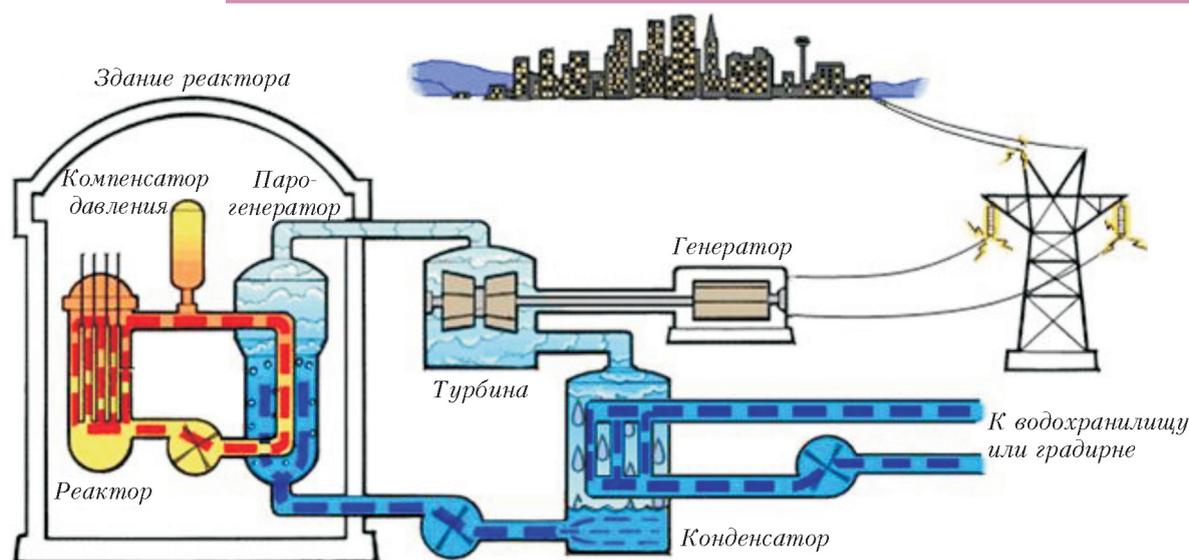


Рис.5. Схема устройства АЭС

Тепловыделяющие элементы – это далеко не самая сложная часть станции, но даже их технология изготовления разрабатывается учеными-механиками совместно с инженерами завода-изготовителя. Вся загружаемая в реактор конструкция в сборе привозится с завода на нескольких большегрузных автомашинах. На этом роль физиков заканчивается. Корпус реактора рассчитывается методами механики, и, между прочим, не методами XIX века, а непрерывно совершенствующимися методами последних лет.

Все остальное тысячетонное сложнейшее оборудование АЭС также рассчитывается, создается и монтируется инженерно-техническим персоналом на основе новейших достижений механики. Правда, это требует электротехнических и теплотехнических расчетов (включая расчет движения жидкости и пара в системах теплоносителя и охлаждения), которые относятся к области физики. Но можно сказать, что теплотехника – это небольшая часть механики. Механика, вобрав в себя тепловые процессы, вообще говоря, давно занимается теплотехническими проблемами более сложными, чем те, которые решает сама теплотехника.

На этом примере хотелось бы обосновать следующий тезис. Для того чтобы достижения ряда других наук, включая физику, сделать полезными человеку, без механики не обойтись. Механика является основой. Так, физики открыли и изучили реакцию деления урана с выделением энергии. Механики на основе этого открытия создали сооружения, дающие людям тепловую и электрическую энергию. Другие открытия в физике (лазеры или иные источники излучения), в химии, в науке о материалах и даже в биологии, для того чтобы стать полезными людям, требуют использования новейших достижений механики. Например, все, что говорилось выше об АЭС, остается верным и для всех новых химических технологий. Здесь сердце – химический реактор – опять совместное детище химиков и механиков, причем, учитывая, что желаемое ускорение химических процессов требует во многих случаях создания все более быстропротекающих химических

реакторов, роль методов механики в их расчете становится все большей. Развитие современных технологий спутниковой связи, создание в будущем космических систем, использующих солнечную энергию для передачи ее на Землю, – все это абсолютно невозможно без механики, без уже существующих и новых, требующих развития, ее методов.

#### Закключение. Сэр Исаак Ньютон и вечно новая механика

Современный этап развития науки и прогресс научного знания в целом в значительной мере определяются проникновением в различные области науки методов математического моделирования, которые основаны на построении и использовании тех или иных математических моделей.

Не нужно забывать, что метод математического моделирования возник в ньютоновской механике (знаменитые законы Ньютона) и был с успехом использован самим Ньютоном при решении ряда серьезных задач. Впоследствии искусство построения сложных математических моделей было создано именно механиками и затем применено последовательно физиками, геофизиками, химиками, биологами, лингвистами, а в последнее время – социологами и экономистами.

Модели механики необычайно наглядны. Неслучайно ряд знаменитых физиков прошлого утверждали, что ни одно физическое явление не может считаться до конца понятым, пока оно не сформулировано в терминах механики. Замечательный механик и математик, академик Алексей Николаевич Крылов писал в предисловии к его русскому переводу «Математических начал натуральной философии» Ньютона: «Начала ...» Ньютона составляют незыблемое основание механики, теоретической астрономии и физики». Лагранж назвал это сочинение «величайшим из произведений человеческого ума».

Ньютоновская механика – действительно непревзойденное достижение физики (натуральной философии), всей истории человеческой цивилизации. Она вечна.

# Математики и программисты

**А.ШЕНЬ**

**И**МЕЮТСЯ  $N$  НА ВИД ОДИНАКОВЫХ ПРЕДМЕТОВ, КОТОРЫЕ на самом деле нескольких различных типов. Известно, что предметы одного из типов составляют большинство (больше  $N/2$ ). Требуется указать представителя этого большинства, используя детектор, в который можно (за один раз) загрузить два предмета и определить, одного они типа или разных. Сколько таких проб (сравнений) придется сделать?

Если не экономить и сравнивать попарно все предметы, то понадобится  $N(N-1)/2$  сравнений (каждый предмет участвует в  $N-1$  сравнениях и в каждом сравнении участвуют два предмета). Оказывается, если действовать с умом, можно сделать число проб пропорциональным  $N$  (вместо  $N^2$ ).

Мы сейчас приведем два доказательства этого факта. Первое (как мы надеемся) должно понравиться математикам, второе – программистам.

Оба рассуждения начинаются с такого замечания: *если мы нашли два предмета разных типов, то их можно выбросить, сохранив большинство*. В самом деле, из них максимум один принадлежит большинству, и после его удаления большинство не пропадет (ведь мы выбросили и предмет другого типа). По тем же причинам два приятеля, которые собираются голосовать за разных кандидатов, могут сговориться не идти на выборы, если они почему-либо верят, что подсчет производится честно и что один из кандидатов пользуется поддержкой более половины голосующих (он потеряет максимум один голос за и минимум один голос против).

Математик продолжит рассуждение так. Пусть сначала  $N$  четно. Тогда поделим предметы на пары и сравним их в каждой паре (всего  $N/2$  сравнений). Те пары, в которых предметы различны, можно выбросить. После этого остаются пары с равными предметами – и достаточно оставить от каждой по одному, так что задача после  $N/2$  сравнений сводится к такой же задаче для (максимум) половинного числа предметов, и можно повторять рассуждение.

Если временно забыть о нечетных  $N$ , получится формула

$$T(N) \leq N/2 + T(N/2),$$

где  $T(n)$  – число проб при поиске представителя большинства среди не более чем  $n$  предметов. Отсюда следует, что  $T(N) < N$ . (Индукция:  $T(2) = 0$ , поскольку в этом случае больше половины – это все; если  $T(N/2) < N/2$ , то  $T(N/2) < N/2 + N/2 = N$ . Например, из 8 предметов после 4 сравнений остаются максимум 4, затем после двух остаются 2, всего  $4 + 2 = 6$  сравнений.)

Конечно, это рассуждение не имеет смысла, пока мы не разобрались с нечетными  $N$ . При нечетном  $N$  после выбрасывания пар с неравными предметами остаются несколько пар с равными предметами плюс один непарный предмет.

Например, могут остаться пары  $(a, a)$ ,  $(b, b)$ ,  $(c, c)$  и еще  $d$  без пары (всего 7 элементов). Мы знаем, что среди этих 7 предметов больше половины (т.е. 4 или более) одинаковых. Поэтому как минимум две пары из трех принадлежат большинству (если только одна, то большинства никак не

наберется). Значит, предметы искомого типа составляют большинство среди  $a, b, c$ , а про  $d$  можно забыть.

Если остается не 7 элементов, а, скажем, 9, то ситуация будет другой. Пусть у нас четыре пары  $(a, a)$ ,  $(b, b)$ ,  $(c, c)$ ,  $(d, d)$  и непарный предмет  $e$ . Для большинства нужно 5 предметов – достаточно двух пар и  $e$ . Поэтому среди  $a, b, c, d$  предметы искомого типа могут не быть большинством. Но они должны быть большинством среди  $a, b, c, d, e$ , иначе будет 5 элементов другого типа (минимум две пары плюс один). Поэтому в этом случае надо не выбрасывать  $e$ , а присоединить его.

Легко сообразить, что один из этих двух приемов всегда работает: мы либо добавляем непарный предмет, либо нет – с тем расчетом, чтобы на следующем шаге оставалось нечетное число предметов. По индукции можно получить и  $T(N) < N$ , разобрав два случая:  $T(2k) \leq k + T(k)$  и  $T(2k+1) \leq k + T(k+1)$ . Первое доказательство закончено.

Это рассуждение порадует математика, но не программиста – который вынужден думать о том, как все эти разные случаи четного и нечетного  $N$  и четного и нечетного количества пар запрограммировать и ничего не пропустить. Но есть и другой вариант.

Представим себе, что нас заперли в комнате с детектором,  $N$  предметами и тремя большими коробками, где эти предметы могут лежать. Коробки предусмотрительно снабжены надписями: «НЕПРОВЕРЕННЫЕ» (Н), «ОДИНАКОВЫЕ» (О) и «ВЫБРОШЕННЫЕ» (В). Изначально все предметы лежат в коробке «НЕПРОВЕРЕННЫЕ» (что согласуется с ее названием), и нам известно, что более половины из них некоторого одного типа  $X$ .

Нам строго-настроено велено соблюдать две заповеди:

- Все предметы в коробке «ОДИНАКОВЫЕ» должны на самом деле быть одного типа (если там вообще что-то есть).
- Предметы типа  $X$  должны составлять большинство среди всех невыброшенных (находящихся в коробках «НЕПРОВЕРЕННЫЕ» и «ОДИНАКОВЫЕ»).

(Очевидно, в начальном состоянии оба условия выполнены.)

Когда коробка с надписью «НЕПРОВЕРЕННЫЕ» становится пустой, нас выпускают из комнаты (и это заслуженно, поскольку в этот момент предметы типа  $X$  по правилам составляют большинство среди предметов в коробке «ОДИНАКОВЫЕ», и можно взять из нее любой предмет – они все одинаковые).

Что мы можем делать, не нарушая заповедей? Несколько очевидных вещей.

Во-первых, если коробка «ОДИНАКОВЫЕ» пуста, а коробка «НЕПРОВЕРЕННЫЕ» – нет, то можно переложить один предмет из Н в О. (Множество невыброшенных предметов остается тем же самым, так что заповедей мы не нарушим.)

Во-вторых, если обе коробки О и Н непусты, то можно взять по одному предмету и сравнить их. Если они одинаковые, то кладем оба в О; если разные, то выбрасываем (кладем в В) оба. Как мы видели, это не противоречит заповедям.

Остается заметить, что

- если есть непроверенные предметы, то одно из действий заведомо выполнимо;
- любое из действий уменьшает число непроверенных на 1, при этом детектор используется не более одного раза.

Следовательно, после  $N$  шагов коробка Н опустеет и нас выпустят. При этом детектор будет использован не более  $N$  раз (на самом деле меньше, так как первый шаг – переключивание).

Соответствующая программа (совсем простая) приведена в книжке «Программирование: теоремы и задачи» (М.: МЦНМО, 2-е изд., 2004; см. также сайт [www/mcsmc.ru/freebooks](http://www/mcsmc.ru/freebooks)). Программирование первого решения явно потребовало бы существенно больших усилий.

На этом примере можно немного пофилософствовать о разнице между математическим и программистским взглядом на вещи. Пусть задача  $X$  сводится к множеству однород-

ных простых задач  $X_1, \dots, X_n$ . Математик обычно разбирает одну из них и пишет « $X_2, \dots, X_n$  решаются аналогичным способом и оставляются читателю в качестве упражнений». Напротив, программист понимает, что никто за него программировать не будет, а программирование большого количества даже и очень простых задач утомительно, и лучше найти другой подход, избегающий разбора многочисленных случаев.

## К ВАНТЫ ИНТЕРНЕТА

### На сколько частей делят пространство плоскости грани додекаэдра?

(Начало см. на 2-й странице обложки)

На Межрегиональной заочной математической олимпиаде 2008 года предлагались задачи:

*Найти число частей, на которые продолжения граней тетраэдра разбивают пространство* (задача 5, 7 класс).

*Найти число частей, на которые продолжения граней куба разбивают пространство* (задача 3, 6 класс).

Обе эти задачи решаются простым подсчетом. В первом случае ответ 15; во втором 27. Но возникает вопрос, а на сколько частей разбивают пространство продолжения граней других правильных многогранников: октаэдра, додекаэдра и икосаэдра. Подсчет в этом случае уже сложнее, но задача вполне разрешима! Рассмотрим эту задачу для додекаэдра.

Есть два способа подсчета числа частей, на которые продолжения граней додекаэдра разбивают пространство, не требующих выхода из плоскости.

**Первый способ.** Разобьем продолжения граней додекаэдра на 6 пар параллельных плоскостей. Теперь будем последовательно добавлять эти пары плоскостей и смотреть, сколько частей получается в результате. При добавлении пары плоскостей количество частей увеличивается на число частей, которые данные плоскости пересекают.

В начале есть одна часть (все пространство). Каждая из плоскостей первой пары пересекает 1 часть. Поэтому после добавления одной пары плоскостей число частей будет равно трем. Аналогично, вторая пара плоскостей пересекает по 3 части, а третья пара – по 9 частей. Поэтому после добавления трех пар плоскостей число частей станет равным 27. Чтобы посчитать число частей, добавляющееся на четвертом, пятом и шестом шаге, рассмотрим чертеж, на котором изображены пересечения плоскости одной из граней продолжениями других плоскостей (рис.1, 2). На рисунке 1 одинаковым цветом изображены пересечения данной плоскости с продолжениями пар параллельных граней. Здесь любая тройка пар параллельных прямых разбивает плоскость на 17 частей. Следовательно, четвертая пара плоскостей пересекает по 17 частей. Таким образом, после проведения четырех пар плоскостей количество частей станет равным  $27 + 17 \cdot 2 = 61$ . Аналогично, любая четверка пар параллельных прямых на рисунке разбивает плоскость на 26 частей. Поэтому после проведения пяти пар плоскостей количество частей станет равным  $61 + 2 \cdot 26 = 113$ . Наконец, все пять пар разби-

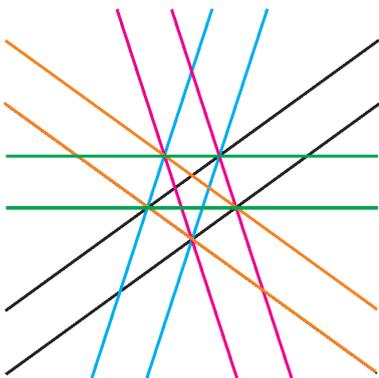


Рис. 1

вают плоскость на 36 частей (рис.2). Поэтому после добавления последней (шестой) пары плоскостей число пространственных частей станет равным  $113 + 36 \cdot 2 = 185$ .

**Второй способ.** Хорошо известна формула Эйлера для плоского графа. Вот один из ее частных случаев:

Пусть на плоскости проведено несколько

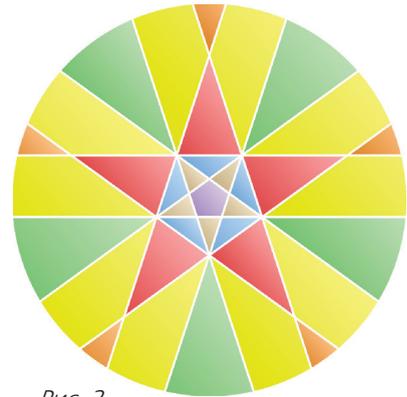


Рис. 2

прямых. Обозначим через  $V$  число вершин – точек пересечения нескольких прямых;  $P$  – число ребер – отрезков между парами вершин и лучей, выходящих из вершины;  $\Gamma$  – число граней – многоугольников, на которые данные прямые разбили плоскость. Тогда  $\Gamma - P + V = 1$ .

Менее известно, что аналогичная формула есть и в пространственном случае (в действительности такая формула есть и для пространства произвольной размерности):

Пусть в пространстве проведено несколько плоскостей. Обозначим через  $V$  число вершин – точек пересечения нескольких прямых;  $P$  – число ребер – отрезков между парами вершин и лучей, выходящих из вершины;  $\Gamma$  – число граней – многоугольников, которые в данных плоскостях высекаются другими плоскостями;  $\mathcal{C}$  – число пространственных частей, на которое пространство разбивается данными плоскостями. Тогда  $\mathcal{C} - \Gamma + P - V = 1$ .

Таким образом, количество частей, на которые данное множество плоскостей разбивает пространство, может быть вычислено по формуле:  $\mathcal{C} = \Gamma - P + V + 1$ .

Как видно из рисунка 2, в каждой из плоскостей содержится 36 «граней». Количество плоскостей равно числу граней додекаэдра, т.е. 12. Поэтому полное число «граней» пространственного графа равно  $\Gamma = 12 \cdot 36 = 432$ .

Аналогично можно посчитать количество «ребер». Каждая плоскость содержит 10 прямых, разбитых на 5 «ребер», а все 12 плоскостей – на  $5 \cdot 10 \cdot 12 = 600$  «ребер». Но каждое «ребро» принадлежит двум плоскостям. Следовательно, количество «ребер» вдвое меньше и равно  $P = 600 / 2 = 300$ .

Несколько сложнее посчитать количество «вершин». В каждой плоскости есть 5 «вершин», являющихся пересечением четырех прямых (и, следовательно, пяти плоскостей) и 10 «вершин», являющихся пересечением двух прямых (и, следовательно, трех плоскостей). Можно считать, что в каждой плоскости находится 5 «пярых частей вершин» и 10 «третьих частей вершин». Значит, общее число «вершин» данного пространственного графа равно  $V = (5/5 + 10/3) \cdot 12 = 52$ . Следовательно,  $\mathcal{C} = 432 - 300 + 52 + 1 = 185$ .

Л.Оридорога, М.Панов