ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

КМШ

ЗАДАЧИ

(см. «Квант» №2)

1. Результаты матчей показаны в таблице:

	A	B	C	D	*Очки*	*Место*
A		1	3	3	7	I
B	1		1	1	3	II
C	0	1		1	2	III-IV
D	0	1	1		2	III-IV

Команда, занявшая «чистое» второе место, могла заработать 3 очка двумя способами: 1) выиграть один матч; 2) три матча сыграть вничью. Первый случай невозможен, поскольку тогда у двух команд, которым она проиграла, тоже есть как минимум три очка. Во втором случае команды, занявшие третье и четвертое места, не имеют побед и не могли набрать более двух очков. Значит, между собой они сыграли вничью, а победителю группы проиграли.

2. Пусть щенок пробежал x метров навстречу Лене и y метров навстречу Кате. Тогда всего он пробежал $x + y$ метров и в результате сместился на $y - x$ метров по направлению к Кате. Нам известно, что $x + y = 85$ и $y - x = 13$. Складывая уравнения, получаем $2y = 98$, т.е. $y = 49$, а значит, $x = 36$.

3. Наша прямоугольная клякса превратится за 4 минуты в фигуру, изображенную на рисунке 1,*а*. (Для построения контура этой фигуры надо из каждой точки контура начальной

а) *б)* *в)*

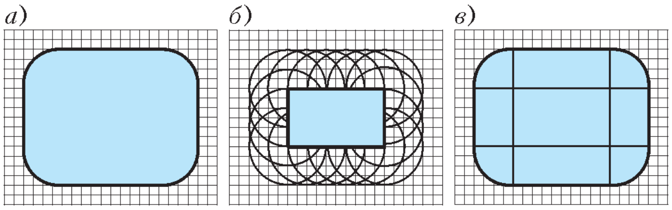

Рис. 1

«прямоугольной кляксы» провести окружность радиусом 4 клетки, как это показано на рисунке 1,*б*.) Мысленно разрезав эту фигуру на прямоугольники и четвертинки круга (рис.1,*в*), получаем ответ: искомая площадь равна

$$6\cdot 10 + 2\cdot 6\cdot 4 + 2\cdot 10\cdot 4 + \pi\cdot 4^2 = 188 + 16\pi .$$

4. Разберемся сначала со случаем 5 слоников. Занумеруем их массы по возрастанию: C_1, C_2, C_3, C_4, C_5. Тогда контролеру достаточно убедиться, что $C_1 + C_4 = C_2 + C_3$, $C_1 + C_5 = C_2 + C_4$ и $C_2 + C_5 = C_3 + C_4$. Эти равенства равносильны равенствам $C_4 - C_3 = C_2 - C_1$, $C_2 - C_1 = C_5 - C_4$ и $C_5 - C_4 = C_3 - C_2$ соответственно, т.е. тому, что разности масс соседних слоников равны.

Если слоников всего 4, то контролер не сможет проверить, отвечают ли слоники стандарту, потому что, например, наборы масс 10, 11, 12, 13 и 10, 11, 13, 14 дадут при любых взвешиваниях одинаковый результат (убедитесь в этом!).

5. К восьмиугольнику примыкают 8 прямоугольных треугольников с одинаковыми гипотенузами. В любых двух соседних треугольниках есть по одинаковому углу (равны как вертикальные), а значит все треугольники равны (по признаку равенства прямоугольных треугольников). Отметив равные стороны этих треугольников, видим, что P и Q – равные квадраты. Предположим, что их центры не совпадают. Сдвинем параллельно один квадрат так, чтобы его центр совместился с центром второго квадрата. При этом у нашего восьмиугольника в некоторой паре противоположных сторон одна увеличится, а другая – уменьшится, т.е. противоположные стороны станут разными. С другой стороны, из соображений симметрии в новом восьмиугольнике противоположные стороны будут одинаковыми. Полученное противоречие показывает, что центры квадратов совпадают.

КОНКУРС «МАТЕМАТИКА 6–8»

(см. «Квант» №6 за 2008 г.)

11. В треугольниках $BA'C'$ и $AB'C'$ равны углы при вершинах A' и B' (по условию) и при вершинах A и B (оба равны 60°), а значит, равны углы $AC'B'$ и $BC'A'$. Продлим отрезок $B'C'$ за точку C' и рассмотрим угол, вертикальный углу $AC'B'$. По доказанному, он равен углу $BC'A'$, откуда $C'B$ – биссектриса внешнего угла при вершине C' треугольника $B'C'A'$, следовательно, точка B равноудалена от прямых $C'A'$ и $C'B'$. Аналогично доказываем, что точка B равноудалена от прямых $C'A'$ и $A'B'$. Но тогда точка B равноудалена от прямых $C'B'$ и $A'B'$, откуда B лежит на биссектрисе угла $A'B'C'$, что и требовалось доказать.

12. Уменьшаемое имеет вид 9^m, где m делится на 3, т.е. $m = 3k$, где k – натуральное. Вычитаемое имеет вид 8^n, где n – натуральное. Воспользуемся таким фактом: при делении на 7 произведение нескольких чисел дает такой же остаток, как и произведение их остатков. Значит, 9^m дает при делении на 7 такой же остаток, как и 2^m, а $2^m = 2^{(3k)} = 8^k$ дает при делении на 7 такой же остаток, как и 1^k, т.е. 1. Остаток 1 при делении на 7 дает и число 8^n. Значит, разность $9^m - 8^n$ дает при делении на 7 остаток 0, что и требовалось доказать.

13. Найдем количество всевозможных направлений, которые могут быть у ребер нашей ломаной (считаем, что параллельные отрезки одинаково направлены). Каждое ребро может быть либо вертикальным, либо горизонтальным, либо являться диагональю прямоугольника $a\times b$, где a и b – целые числа от 1 до 6. Всего таких прямоугольников $6\cdot 6 = 36$. Заметим, что если стороны двух прямоугольников пропорциональны, то их диагонали дают одинаковые направления. Значит, из прямоугольников 1×1, 2×2, 3×3, 4×4, 5×5, 6×6 надо учесть только один. Точно так же только один прямоугольник надо учесть из следующих наборов прямоугольников: 1×2, 2×4 и 3×6; 2×1, 4×2 и 6×3; 1×3 и 2×6; 3×1 и 6×2; 2×3 и 4×6; 3×2 и 6×4.

Остаются $36 - 5 - 2 - 2 - 1 - 1 - 1 - 1 = 23$ прямоугольника, их диагонали дают $23\cdot 2 = 46$ направлений. Добавляя вертикальное и горизонтальное направления, получаем всего 48 возможных направлений. Но ребер у нашей ломаной 49. Значит, обязательно какие-то два ребра имеют одинаковые направления, т.е. параллельны.

14. а). Можно. Спрашиваем у первого компьютера: «Ты бы ответил «да», если бы у тебя спросили, является ли второй компьютер российским?» Заметим, что и американский и китайский компьютеры оба ответят на этот вопрос «да», если второй компьютер российский, и оба ответят «нет», если второй компьютер не российский. Поэтому, если мы услышим ответ «да», то либо первый компьютер российский, либо второй компьютер российский. Значит, третий компьютер не российский. Если же мы услышим ответ «нет», то либо первый компьютер российский, либо второй компьютер не российский. В каждом из случаев мы можем выбрать не российский компьютер.

б) Нельзя. Докажем от противного. Пусть мы придумали вопрос и выбрали компьютер (скажем, первый). Он может оказаться китайским, поэтому в случае по крайней мере одного из возможных ответов мы должны выбрать другой (т.е. второй или третий) компьютер. Однако если опрашиваемый компьютер – российский, он может дать именно этот ответ вне зависимости от того, какой из двух других компьютеров китайский, а какой – американский. Значит, мы не сможем гарантированно выбрать не китайский компьютер. Противоречие.

15. На рисунке 2 показан способ, при котором в коробку помещается 41 батарейка (в нижнем ряду – 5 батареек, в следующем – 4, в следующем – 5 и так далее, всего 9 рядов). Центры кругов на рисунке расположены в вершинах треугольной решетки. Примем радиус круга за 1. Тогда длинная сторона нашей коробки равна 16. Расстояние между прямой, на которой лежат центры кругов первого ряда, и прямой, на которой лежат центры кругов второго ряда, равно высоте равностороннего треугольника со стороной 2, т.е. равно $\sqrt{3}$ (рис.3). Поэтому для размещения 41 батарейки достаточно, чтобы длинная сторона коробки была не короче $8\sqrt{3}+2$. Но $16 > 8\sqrt{3}+2$ (поскольку $196 = 14^2 > 64 \cdot 3 = 192$).

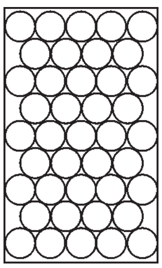
Рис. 2

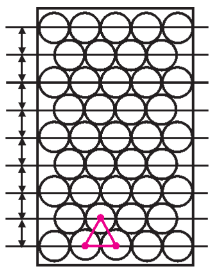
Рис. 3

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

Вопросы и задачи

1. Сужение потока воздушных масс всегда приводит к возрастанию его скорости.

2. Явление объясняется разностью давлений в потоке воздуха в узкой и широкой частях горизонтальной трубки.

3. Относительная скорость воды между кораблями будет больше, чем снаружи; давление воды на корабли изнутри оказывается ниже, чем извне, и перепад давлений создает силу, толкающую корабли друг к другу.

4. Поток, обтекающий шар, симметричен относительно линии OO' и плоскости LL' (рис.4). На любую пару точек шара, симметричных относительно его центра, например A и A', будут оказываться равные давления, поскольку скорости жидкости в этих точках одинаковы. Тем самым, уравновешиваются все силы давления, действующие на шар со стороны жидкости.

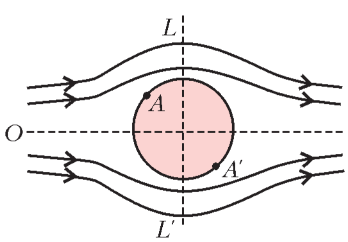

Рис. 4

5. Поток тепла, передаваемого стержню от пламени, пропорционален площади его боковой поверхности, т.е. радиусу стержня. Теплоотвод же вдоль стержня пропорционален площади его поперечного сечения, т.е. квадрату радиуса. Поэтому тепловое равновесие толстого стержня наступает при значительно меньшей температуре по сравнению с тонкой проволокой.

6. Когда температура воды в маленькой и большой кастрюлях достигнет 100 °C, поток тепла в малую кастрюлю прекратится: значит, вода в ней не закипит. Если воду в большой кастрюле предварительно прокипятить, то из воды будет изгнан воздух и температура ее кипения теперь будет выше, чем у сырой воды. В этом случае возможен поток тепла в маленькую кастрюлю и возможно закипание воды в ней.

7. Потери тепла термосом происходят в основном через боковые стенки. Боковая поверхность у цилиндрического термоса меньше, чем у квадратного. Значит, первый термос выгоднее.

8. Плитка расходует энергию на нагревание воды и окружающей среды. Поток тепла от стенок сосуда наружу зависит от разности температур воды и воздуха. Поскольку этот поток больше при нагревании воды от 80 до 90 °C, то и времени для нагревания при этом потребуется больше.

9. В этом месте наибольшая плотность тока.

10. Индукционный ток возникает при изменении магнитного потока, пронизывающего рамку, т.е. в случаях б), в) и д).

11. Участок диска между точками D и A непрерывно пересекает линии магнитной индукции, поэтому в нем возбуждается ЭДС индукции и, значит, по цепи течет ток. Магнитный поток, пронизывающий контур $ABCDA$, меняться не будет.

12. В обоих случаях по катушке проходит один и тот же заряд, так как одинаково изменяется поток магнитной индукции. А вот тепла выделится больше в первом случае, так как ЭДС индукции при этом будет больше.

13. Магнитный поток сверхпроводника сохраняется. Поскольку общая площадь контура уменьшилась в два раза, индукция магнитного поля во столько же раз увеличилась.

14. Интенсивность, или плотность потока энергии, прямо пропорциональна частоте колебаний в четвертой степени и обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника. Следовательно, частоту надо увеличить в $\sqrt{2}$ раз.

15. Плотность потока энергии точечного излучателя уменьшается пропорционально квадрату расстояния от источника. Объект локации также можно рассматривать как точечный источник, но отраженного сигнала. Если увеличение дальности радиосвязи в $n = 2$ раза требует увеличения мощности передатчика в $n^2 = 4$ раза, то при радиолокации потребуется увеличение мощности в $(2n)^2 = 16$ раз.

16. Из-за интерференции волн происходит перераспределение энергии, что может привести к уменьшению интенсивности излучения в одних точках и увеличению в других.

17. Световой поток на выходе из окуляра телескопа гораздо у́же широкого потока, падающего на объектив; это и приводит к росту интенсивности воспринимаемого света.

18. См. рис.5. Центры всех приборов следует разместить на одной прямой, причем расстояние от зеркала до линзы должно быть равно радиусу зеркала, а лампа должна находиться в фокусе линзы.

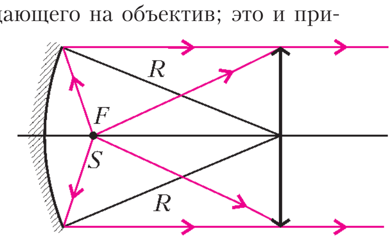

Рис. 5

Микроопыт

Вода быстрее охладится в стакане.

ПОТОК МАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ

1. Суммарный момент сил Ампера равен $M = 2\pi R^2 \rho B_r v$.

2. $F_A = \dfrac{0{,}01\mu_0 \pi R I_A^2}{2l} = 5{,}9 \cdot 10^{-6}$ Н.

3. $\Delta i_1 = \dfrac{2L_2(I_1 - I_2)}{L_1 + L_2}$, $\Delta i_2 = \dfrac{2L_1(I_1 - I_2)}{L_1 + L_2}$.

XVII МЕЖДУНАРОДНАЯ ОЛИМПИАДА «ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЙ МАРАФОН»

Письменный индивидуальный тур

Математика

1. Можно. Поскольку $2009 = 41 \cdot 49$, попробуем представить число в таком виде:

$$\frac{1}{2009} = \frac{1}{x} + \frac{1}{41x} + \frac{1}{49x}.$$

Из этого уравнения получаем $x = 2099$.

Замечание. Найденное представление не единственно возможное. Например, можно искать ответ как решение уравнения

$$\frac{1}{2009}=\frac{1}{y}+\frac{1}{49y}+\frac{1}{7\cdot 41y},$$

откуда получим $y = 2057$.

2. а) Верно; б) не всегда.

а) Большой прямоугольник разбит проведенными прямыми на одинаковое количество вертикальных и горизонтальных полос, в каждой из которых имеется одинаковое количество меньших прямоугольников. Выберем в первой (левой) вертикальной полосе самый нижний меньший прямоугольник, во второй – второй снизу и т.д., в последней (правой) вертикальной полосе – самый верхний меньший прямоугольник. Сумма периметров выбранных меньших прямоугольников, с одной стороны, целочисленна, а с другой – равна периметру большого прямоугольника.

б) Пусть прямоугольник составлен из шести квадратов с длиной стороны $\frac{1}{4}$ (на одной стороне прямоугольника умещается 2 квадрата, а на другой – три). Очевидно, периметры квадратов равны 1, а периметр прямоугольника равен $\frac{5}{2}$.

3. $\left(\frac{1}{2};-1\right)$. Возведем обе части данного уравнения в квадрат и преобразуем результат. Уравнение примет вид

$$(2x-1)^2+(y+1)^2+2\sqrt{y+2}\sqrt{4x^2+y}=0.$$

Сумма неотрицательных слагаемых равна нулю только тогда, когда каждое из них равно нулю, т.е.

$$2x-1=0,\ y+1=0,\ \left[\begin{array}{l} y+2=0 \\ 4x^2+y=0. \end{array}\right.$$

Решив полученную систему, получим ответ.

4. 90°. Пусть D – середина отрезка C_1B. Тогда отрезок MD параллелен стороне BC, и поэтому высота AH исходного треугольника – одновременно и высота треугольника AMD, а значит, H – ортоцентр и этого треугольника. С другой стороны, из условия следует, что H – середина отрезка MC_1, поэтому высота DH треугольника AMD параллельна отрезку BM. Итак, искомый угол – прямой.

5. 8. Подставим в данное неравенство $|f(x)|\le 1$ значения x, равные 1, 0, $\frac{1}{2}$. Получится система ограничений на коэффициенты данного трехчлена:

$$\begin{cases} -1\le a+b+c\le 1, \\ -1\le c\le 1, \\ -1\le \frac{a}{4}+\frac{b}{2}+c\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1\le -a-b-c\le 1, \\ -3\le -3c\le 3, \\ -4\le a+2b+4c\le 4. \end{cases} \Rightarrow\ -8\le b\le 8.$$

Пример трехчлена $f(x)=8x^2-8x+1$, удовлетворяющего условию $|f(x)|\le 1$ при всех $x\in[0;1]$, приводит к ответу.

6. 8 прямых. Рассмотрим одну из шести «тройных» точек пересечения прямых. Легко видеть, что можно слегка «сдвинуть» одну из прямых так, чтобы сдвинутая прямая и две оставшиеся по-прежнему попарно пересекались, но каждая пара – в своей точке. При этом общее число точек пересечения всех прямых увеличится на 2. Проделав это преобразование с каждой из 6 тройных точек, мы получим систему из того же количества n прямых, попарно пересекающихся в $16 + 12 = 28$ точках. С другой стороны, количество точек пересечения, как легко понять, равно $\frac{n(n-1)}{2}$. Получается уравнение, которое легко решить.

7. а), б), в) существуют.

а) Пример: числа 1, 2, 3. б) Пример: числа 6, 7, 8, 9.

в) Предположим, что мы нашли систему $a_1, a_2, \ldots, a_k$ из k чисел, удовлетворяющих условию задачи: сумма двух любых из них делится на их разность. Докажем, что тогда можно построить и систему из $k + 1$ чисел, обладающую таким же свойством. Пусть $A = a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_k$ – произведение всех найденных ранее чисел. В качестве искомой системы возьмем числа A, $A+a_1$, $A+a_2$, …, $A+a_k$. Их количество равно $k+1$. Рассмотрим сумму двух любых из них, скажем $x=A+a_i$ и $y=A+a_j$. Тогда, если обозначить через A^p отношение числа A к числу a_p, получим

$$\frac{x+y}{x-y}=\frac{2A+a_i+a_j}{a_i-a_j}=\frac{A^j\cdot 2a_j+a_i+a_j}{a_i-a_j}=$$

$$=\frac{A^j\left(\left(a_i+a_j\right)-\left(a_i-a_j\right)\right)+\left(a_i+a_j\right)}{a_i-a_j}=$$

$$=\frac{A^j\left(a_i+a_j\right)}{a_i-a_j}-A^j+\frac{a_i+a_j}{a_i-a_j}.$$

Дроби – первое и третье слагаемые последней суммы – можно сократить на знаменатель в силу свойств системы из k выбранных ранее чисел, поэтому сумма $x + y$ делится на разность $x - y$. В силу принципа полной математической индукции утверждение доказано.

Физика

1. $v=\sqrt{aL}$. **2.** $\frac{M}{m}\ge\frac{1}{\mu}\left(1+\frac{4\pi^2 A_{\max}}{gT^2}\right)\approx 6{,}5$.

3. $P_{д} = 300$ кВт.

4. $T=\frac{\mathrm{M}gl^2}{6hR}=13500$ К (здесь M – молярная масса паров, R – универсальная газовая постоянная).

5. $a=\frac{\sqrt{3}q^2}{20\pi\varepsilon_0 ml^2}=17{,}6$ м/с^2. **6.** $v\approx 840$ м/с.

7. В 4 раза.

Устный командный тур

Математика

1. Не существуют. Предположим, что такие числа нашлись. Уменьшим левую часть данного равенства, увеличив каждый знаменатель на недостающее в нем число. Получим

$$1=\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}>\frac{x}{x+y+z}+\frac{y}{z+x+y}+\frac{z}{x+y+z}=1.$$

Противоречие.

2. 30°. Обозначим угол AKM через угол 1, а угол ALM – через угол 2. Поскольку $BK : KC = AM : MC$ (= 1 : 2), прямые KM и AB параллельны, поэтому угол BAK равен углу 1. Из равенства треугольников ABK и ALC следует, что угол LAM равен углу BAK и, значит, тоже равен углу 1. Искомая сумма углов 1 и 2 – сумма двух внутренних углов треугольника ALM, она равна внешнему углу LMC этого треугольника, который, в свою очередь, равен 30° как угол между биссектрисой ML правильного треугольника MKC и его стороной MC.

3. 44 раза. В начале суток часовая и минутная стрелки часов совпадают. Поскольку угловая скорость часовой стрелки равна $\frac{1}{12}$ оборота в час, а минутной – 1 обороту в час, в следующий раз они совпадут через t часов, где t удовлетворяет уравнению

$$t\cdot 1-t\cdot\frac{1}{12}=1\Leftrightarrow t=\frac{12}{11}.$$

Между такими совпадениями стрелки будут взаимно перпендикулярны дважды: минутная стрелка сначала обгонит часовую на 90°, а затем – на 270°. Аналогичная ситуация повторится между каждыми двумя следующими совпадениями стрелок. Всего за сутки интервалов между совпадениями стрелок будет $24 : \frac{12}{11} = 22$, а искомых положений – в 2 раза больше.

4. $\frac{2abc}{ab+ac+bc}$. Пусть ABC – данный треугольник, P – его внутренняя точка, через которую проходят равные отрезки DE, FG и LH, соответственно параллельные сторонам $AB = c$, $BC = a$ и $AC = b$. Обозначим длины равных отрезков через x.

Данный треугольник разбивается проведенными отрезками на три треугольника и три параллелограмма.

Поскольку $DE = DP + PE = AH + GB$, $AG = AH + HG$, $HB = HG + GB$, а $AH + HG + GB = AB$, то

$$DE + AG + HB = 2AB \Rightarrow \frac{DE}{AB} + \frac{AG}{AB} + \frac{HB}{AB} = 2.$$

Из подобия соответствующих треугольников имеем

$$\frac{DE}{AB} = \frac{x}{c},\quad \frac{AG}{AB} = \frac{FG}{BC} = \frac{x}{a},\quad \frac{HB}{AB} = \frac{HL}{AC} = \frac{x}{b},$$

поэтому

$$\frac{x}{c} + \frac{x}{a} + \frac{x}{b} = 2 \Leftrightarrow x = \frac{2abc}{ab+ac+bc}.$$

5. При правильной игре в случае квадратной доски выигрывает второй игрок, а в случае прямоугольной – первый.

Пусть сначала доска квадратная. Тогда второй игрок выиграет, если будет все время после хода первого игрока возвращать ладью на диагональ доски, идущую из нижнего левого угла в правый верхний.

Если же доска прямоугольная, ситуация меняется. Проведем «диагональ» доски из правого верхнего угла. Она может пересечь как нижний, так и левый край доски. В любом случае первый должен своим первым ходом прийти на эту диагональ, и тогда он выиграет – ведь он поставит второго в положение, в котором был он сам в случае квадратной доски.

6. Наименьшее значение дроби равно $\frac{1}{2}$.

Заметим, что данное уравнение имеет смысл, если обе переменные не меньше 1; с другой стороны, слагаемые его левой части неотрицательны и поэтому каждое из них не превосходит 1, откуда следует, что имеет место система ограничений

$$\begin{cases} 1 \le x \le 2, \\ 1 \le y \le 2. \end{cases}$$

На координатной плоскости указанная система задает квадрат со сторонами, параллельными осям координат и равными 1, причем его вершины $K(1;\ 2)$ и $M(2;\ 1)$ лежат на графике данного уравнения. Отсюда следует, что график данного уравнения – кривая, соединяющая точки K и M и не выходящая за пределы указанного квадрата.

Заметим также, что для любой точки P координатной плоскости отношение ее абсциссы к ординате равно котангенсу угла, образованного отрезком OP с осью абсцисс (O – начало координат).

Для любой точки рассматриваемого квадрата отрезок, соединяющий ее с началом координат, заключен между отрезками OM и OK и находится внутри угла KOM. Поэтому наибольший из углов, под которыми эти отрезки наклонены к оси абсцисс (именно у такого угла наименьший котангенс), равен углу, образованному отрезком OK с осью OX, а его котангенс равен $\frac{1}{2}$.

7. Эти площади одинаковы.

Пусть r – радиус данного сектора (тогда $\frac{r}{2}$ – радиус полукруга). Площадь данного сектора равна $\frac{\pi r^2}{4}$ и равна площади построенного полукруга. Поскольку радиус OC делит сектор на две равные части, то сколько полукруг отрезает от сектора AOC, столько же полукруг отрезает от сектора COB.

8. Можно.

Пусть $m_1, x_1, m_2, x_2, m_3, x_3, \ldots, m_{10}, x_{10}$ – массы чередующихся гирек и шариков. Очевидно, что

$$(m_1 - m_2) + (m_2 - m_3) + (m_3 - m_4) + \ldots + (m_{10} - m_1) = 0.$$

По условию, это равенство можно переписать так:

$$\pm x_1 \pm x_2 \pm x_3 \pm \ldots \pm x_{10} = 0,$$

где знак «$\pm$» означает, что возможен один из знаков, но нам неизвестно, какой, причем на самом деле в левой части последнего равенства встречается и плюс, и минус.

Перенеся все члены со знаком «–» в правую часть последнего равенства, получим искомое разбиение шариков на две группы равной массы.

9. $\frac{mn}{2}$. Пусть угол BAO равен α. Тогда в равнобедренном треугольнике ABO ($OA = OB$) центральный для окружности угол BOA равен $180^\circ - 2\alpha$, поэтому вписанный в окружность угол BDA, опирающийся на ту же дугу, вдвое меньше, т.е. равен $90^\circ - \alpha$. Но угол BCA опирается на ту же дугу окружности, значит, он тоже равен $90^\circ - \alpha$. По условию, угол DAC, а значит, и равный ему угол CBD тоже равны α. Следовательно, $\angle BEC = 90^\circ$, где E – точка пересечения диагоналей AC и BD, т.е. диагонали данного четырехугольника взаимно перпендикулярны. Отсюда получаем ответ.

10. Количество таких чисел равно $7k$, где целое число k может быть любым от 0 до 286.

Легко проверить, что шестая степень любого целого числа от 1 до 6 дает при делении на 7 в остатке 1. Значит, и 120-е степени любых натуральных чисел, кроме чисел, кратных 7, при делении на 7 дают в остатке 1. Поэтому количество таких чисел должно быть кратно 7.

Поскольку $2008 = 286 \cdot 7 + 6 = 2002 + 6$, чисел, не делящихся на 7, может быть любое число, кратное 7, от 0 до 2002.

Физика

1. $m = \frac{4A}{ga}$.

2. Сторона квадрата $a = \sqrt[3]{\frac{\pi R_3^3 \rho_3}{\rho_к + \rho_{воды}}} \approx 1{,}6 \cdot 10^7$ м.

3. Наибольшую скорость имеет точка шара, наиболее удаленная от хорды AB (мгновенной оси вращения); эта скорость равна $u = v\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right) \approx 2{,}15v$.

4. $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 10\ с^{-1}$. **5.** «Скользящий».

6. $v = \sqrt{\frac{qEd}{m} + \frac{mg^2d}{qE}} \approx 4{,}3$ м/с.

7. Давление возрастет в $\frac{g+a}{g}$ раз.

8. КПД зависит от показателя адиабаты, а значит, и от выбора рабочего тела.

9. $\frac{\Delta U}{U_0} = \frac{T}{2RC}$. **10.** Событие возможно.

История научных идей и открытий

Математика

1. Теорема Пифагора вытекает из равенства площади всей фигуры и трех равных прямоугольных треугольников на левом рисунке (см. рис.8 в статье), соответственно, площади всей фигуры и трех равных прямоугольных треугольников на правом рисунке (треугольники слева и справа равны), а также из того, что площадь квадрата равна квадрату стороны.

2. а) Пример легко подбирается: 3; 5; 7 (первый член, очевидно, должен быть нечетным, пробуем – и находим).

б) Если первый член прогрессии четен, то это число 2. Тогда, если разность четна, то остальные члены прогрессии четны и не являются простыми числами, а если разность нечетна, то члены прогрессии через 1 будут четными – противоречие с условием. Итак, первый член должен быть нечетен, а разность прогрессии, как легко понять, – четна. Далее, если разность прогрессии не кратна 3, то через 3 шага мы получим член прогрессии, делящийся на 3 – составное число. Поэтому разность прогрессии кратна числу 6. Пример: 5, 11, 17, 23, 29.

в) Соображения, аналогичные указанным в п. б), приводят к тому, что разность искомой прогрессии должна делиться на 30 (к делимости на 6 добавляется делимость на 5). Пример: 7; 37; 67; 97; 127; 157. («Случайно 157 + 30 = 187 – делится на 11, иначе было бы 7 членов прогрессии.)

3. Участок – полукруг радиуса $\frac{l}{\pi}$; его площадь равна $\frac{\pi l^2}{2}$. Отразим искомый участок симметрично относительно берега и рассмотрим задачу: располагая веревкой длины $2l$, отгородите от плоскости участок наибольшей площади. Ее решение, как говорит указанная в условии теорема, дает круг с длиной окружности $2l$, а половина его площади займет искомый участок.

4. $23 = 2 \cdot 2^3 + 7 \cdot 1^3$.

Понятно, что искать надо число после $2^3 = 8$ (до него слишком мало натуральных чисел), но до $3^3 = 27$ (между 8 и 27 «добирать» восьмерками и единицами).

Замечание: второе число равно $239 = 2 \cdot 4^3 + 4 \cdot 3^3 + 3 \cdot 1^3 = 5^3 + 3 \cdot 3^3 + 4 \cdot 2^3 + 1^3$; как видите, это представление даже неоднозначно!

5. Наложим прямоугольный треугольник $A_1B_1C_1$ с прямым углом C_1 на прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C так, чтобы вершина A_1 совместилась с вершиной A, сторона A_1C_1 пошла по стороне AC, а сторона A_1B_1 – по стороне AB (это возможно в силу равенства углов A и A_1). Предположим, что точка C_1 не совпала с точкой C; например, оказалась между точками A и C (второй случай рассматривается аналогично). Тогда в четырехугольнике CC_1B_1B углы C и C_1 – прямые, а углы B_1 и B в сумме составляют 180° (угол B_1 рассматриваемого четырехугольника – смежный с углом B_1 треугольника $A_1B_1C_1$, равный, по условию, углу B. Мы получаем, что сумма внутренних углов четырехугольника CC_1B_1B равна 360°. Проведя диагональ CB_1, имеем два треугольника, сумма углов одного из которых не меньше 180° (если у обоих треугольников сумма углов меньше 180°, то и у четырехугольника она меньше 360°, чего нет). Полученное противоречие доказывает утверждение задачи.

Физика

1. а) Макс Планк. б) Германия. в) Противоречие теории теплового излучения Рэлея–Джинса опытным фактам. г) 1900 год.

2. а) Сторонники: Зенон, Эмпедокл, Анаксагор, Левкипп, Демокрит; оппоненты: Гераклит, Платон, Аристотель.

б) Сторонники: Ньютон, Ломоносов; оппоненты: Галилей, Торричелли, Гюйгенс, Лавуазье.

в) Сторонники: Дэви, Менделеев, Максвелл, Больцман; оппоненты: Гельмгольц, Мах, Юнг, Френель, Фарадей. Взаимодействие частиц осуществляется через непрерывное поле, являющееся квантовым объектом.

3. а) Большой адронный коллайдер. б) Швейцария и Франция. в) 14 ТэВ. г) Изучение топ-кварков, кварк-глюонной плазмы, фотон-адронных столкновений, поиск суперсимметричных частиц.

4. Левкипп и Демокрит.

5. Молекулярно-кинетическая теория строения вещества. На съезде были сформулированы определения атома и молекулы.

Информацию о журнале «Квант» и некоторые материалы из журнала можно найти в ИНТЕРНЕТЕ по адресам:

Редакция журнала «Квант»
kvant.info

Московский центр непрерывного математического образования
kvant.mccme.ru

Московский детский клуб «Компьютер»
math.child.ru

Костромской центр дополнительного образования «Эврика»
ceemat.ru

журнал Квант ©

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

С.А.Дориченко, А.А.Егоров, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

Д.Н.Гришукова, А.Е.Пацхверия, М.В.Сумнина, В.М.Хлебникова

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:
119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»
Тел.: 930-56-48
E-mail: admin@kvant.info, math@kvant.info, phys@kvant.info
Сайт: kvant.info

Отпечатано в ОАО ордена Трудового Красного Знамени «Чеховский полиграфический комбинат»
142300 г.Чехов Московской области,
Сайт: www.chpk.ru E-mail: marketing@chpk.ru
Факс: 8(49672) 6-25-36, факс: 8(499) 270-73-00
Отдел продаж услуг многоканальный: 8(499) 270-73-59