XVII Международная олимпиада «Интеллектуальный марафон»

Международный интеллект-клуб (МИК) «Глюон» в рамках международной программы «Дети. Интеллект. Творчество» при участии Мэрии департамента Пиерия (Греция), МГУ им. М.В.Ломоносова, Фонда некоммерческих программ «Династия» и при поддержке компаний «Кирилл и Мефодий», «Физикон» и «1С», Издательского дома «Первое сентября» и журнала «Квант» провел очередную международную тест-рейтинговую олимпиаду «Интеллектуальный марафон».

Олимпиада проходила с 5 по 12 октября 2008 года в Греции, недалеко от знаменитой горы Олимп. На олимпиаду приехали участники из разных регионов России, Белоруссии, Казахстана и Норвегии. Одаренные школьники, проявившие интерес к фундаментальным наукам, соревновались в командных и индивидуальных турах по математике, физике, истории научных идей и открытий. В олимпиаде также участвовали школьники, интересующиеся экологией и биологией.

Абсолютным победителем олимпиады «Интеллектуальный марафон-2008» по фундаментальным наукам в командном зачете стала команда Классического лицея 1 города Ростова-на-Дону (Россия). Ей был вручен главный приз соревнований – Суперкубок. Команда была также лучшей в турах по физике и математике. Второе место в общем зачете заняла команда города Альметьевска (Россия). Она также заняла первое место по истории научных идей и открытий. На третье место вышла команда из города Павлодара (Казахстан), которая также стала третьей по математике и физике.

В индивидуальных соревнованиях абсолютным победителем олимпиады стал Алексей Кожевников, ученик 11 класса Классического лицея 1 из Ростова-на-Дону. Ему были вручены большая золотая медаль и малые золотые медали за первые места по математике и физике. Вторым призером в общем зачете стал Sondre Andreas Engebraten из Норвегии, ему была вручена большая серебряная медаль. Большую бронзовую медаль в общем зачете и малую бронзовую медаль за третье место по физике завоевала Айгуль Салахова, представляющая город Альметьевск. Жадра Шайкенова (г. Павлодар, Казахстан) получила малую серебряную медаль за второе место по физике, Юрий Пастухов (г. Альметьевск) был награжден малой серебряной медалью за второе место по

математике, а Евгений Солоневич (г. Барановичи, Белоруссия) – малой бронзовой медалью за третье место по математике.

Все победители и призеры получили разнообразные подарки и призы от организаторов и спонсоров олимпиады.

Международный интеллект-клуб «Глюон» приглашает региональные центры, школы, лицеи и гимназии, работающие с одаренными детьми, принять участие в XVIII Международной олимпиаде «Интеллектуальный марафон», которая пройдет в октябре 2009 года в Греции.

Заявки на участие присылайте по адресу: 115522 Москва, Пролетарский проспект, д.15/6, корп. 2, МИК «Глюон»

Телефон: (495)517-8014, факс: (495)396-8227

E-mail: gluon@yandex.ru (см.также сайт: www.gluon.ru)

Задачи олимпиады

ПИСЬМЕННЫЙ ИНДИВИДУАЛЬНЫЙ ТУР

Математика

1. Можно ли число $\frac{1}{2009}$ представить в виде суммы трех различных чисел, обратных нечетным числам?

2. Несколько горизонтальных и вертикальных прямых разбивают данный большой прямоугольник на меньшие прямоугольники, каждый из которых имеет целочисленный периметр. Верно ли, что периметр большого прямоугольника тоже целый, если количества вертикальных и горизонтальных прямых: а) равны; б) различны?

3. Решите уравнение $\sqrt{4x-y^2}=\sqrt{y+2}+\sqrt{4x^2+y}$.

4. В остроугольном треугольнике ABC ортоцентр (точка пересечения высот) H делит высоту CC_1 в отношении $3:1$, считая от вершины C. Найдите угол AMB, где M – середина высоты CC_1.

5. Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$, где коэффициенты a, b и c – целые числа. Найдите наибольшее значение $|b|$, если известно, что $|f(x)| \le 1$ при всех $x \in [0; 1]$.

6. На плоскости провели n прямых так, что любые две прямые пересекаются и никакие 4 прямые не проходят через одну точку. Всего имеется 16 точек пересечения, причем через 6 из них проходят по три прямые. Найдите количество прямых n.

7. Существуют ли: а) три; б) четыре; в) n натуральных чисел таких, что сумма любых двух из них нацело делится на их разность?

Физика

Задача 1. «Торможение частицы». Заряженная частица вылетает из источника частиц с некоторой скоростью v. Пролетев с этой скоростью по прямолинейной траектории расстояние L, частица попадает в однородное тормозящее поле и летит до остановки с ускорением a вдоль той же прямой. При каком значении скорости v время движения частицы до остановки будет наименьшим?

Задача 2. «Два бруска и пружина». Брусок (массой M), покоящийся на горизонтальном столе, и пружинный маятник, состоящий из грузика (массой m) и легкой пружины, связаны легкой нерастяжимой нитью, перекинутой через идеальный блок (рис.1). Коэффициент трения между бруском и столом $\mu = 0{,}25$. Грузик маятника совершает колебания с периодом $T = 0{,}5$ с вдоль вертикали, совпадающей с вертикальным отрезком нити. Максимально возможная амплитуда этих колебаний, при которой они остаются гармоническими, составляет $A_{\max} = 4{,}0$ см. Чему равно отношение массы бруска к массе грузика?

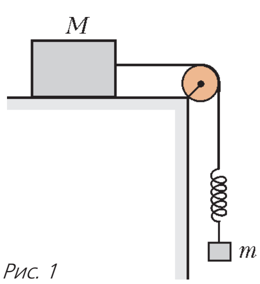

Рис. 1

Задача 3. «Вертолет». Модель вертолета, изготовленная в 1/10 натуральной величины, удерживается в воздухе при помощи двигателя мощностью P = 30 Вт. Оцените, какой должна быть мощность двигателя вертолета, изготовленного из тех же материалов, что и модель.

Задача 4. «Температура паров». Из баллона, в котором находятся сильно разреженные пары рубидия, через узкую горизонтальную трубку выходит пучок атомов. Оцените температуру паров, если на горизонтальном пути l = 1 м среднее смещение атомов по вертикали составляет h = 2 мкм.

Задача 5. «Законы электростатики». В далеком космосе для проверки законов электростатики три маленьких одинаковых шарика массой m = 8 г и зарядом q = 2 мКл каждый соединили шелковыми нитями так, что образовался равносторонний треугольник со стороной l = 300 м. Одну нить пережгли. Каким должно быть ускорение среднего шарика при справедливости законов электростатики?

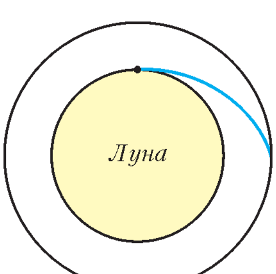

Рис. 2

Задача 6. «Посадка на Луну». Космический корабль массой M = 12 т движется вокруг Луны по круговой орбите на высоте h = 100 км над поверхностью Луны. Для перехода на посадочную орбиту на короткое время включается тормозная двигательная установка. Скорость истечения газов из двигателя $u = 10^4$ м/с, масса израсходованного топлива m = 1,2 т. Какую скорость будет иметь корабль в момент посадки в точке, указанной на рисунке 2? Радиус Луны $R_{Л} = 1700$ км, ускорение свободного падения у поверхности Луны $g_{Л} = 1{,}7$ м/с^2.

Задача 7. «Монета». При рассматривании монеты в лупу диаметр монеты увеличивается в два раза. Во сколько раз увеличивается ее толщина? Плоскость монеты параллельна плоскости лупы.

УСТНЫЙ КОМАНДНЫЙ ТУР

Математика

1. Существуют ли такие положительные числа x, y и z, что

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} = 1?$$

2. На стороне BC правильного треугольника ABC взяли точки K и L так, что $BK = KL = LC$, а на стороне AC взяли точку M так, что $AM = \frac{1}{3}AC$. Найдите сумму углов AKM и ALM.

3. Сколько раз в течение суток часовая и минутная стрелки часов взаимно перпендикулярны?

4. Через точку внутри треугольника проведены три прямые, параллельные его сторонам. Отрезки этих прямых, заключенные внутри треугольника, имеют одинаковую длину. Найдите эту длину, если стороны треугольника равны a, b и c.

5. Двое играют в такую игру. На шахматной доске размером $m \times n$ клеток стоит ладья. Игрок своим ходом может передвинуть ее на любое количество клеток вправо или вверх. Первоначально ладья стоит в левом нижнем углу доски. Кто выигрывает при правильной игре, если проигравшим считается игрок, который не может сделать очередной ход?

6. Найдите наименьшее значение дроби $\frac{x}{y}$, если $\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} = 1$.

7. Дан прямоугольный сектор OAB (OA и OB – взаимно перпендикулярные радиусы окружности с центром в точке O; рис.3). Пусть C – середина дуги сектора, а радиус OC пересекает полукруг, построенный на радиусе OB как на диаметре, в точке D. Пусть, наконец, S_1 – площадь криволинейного треугольника OBD, отсеченного радиусом OC от полукруга, а S_2 – площадь части $OACD$ сектора AOC, лежащей вне полукруга. Что больше: S_1 или S_2?

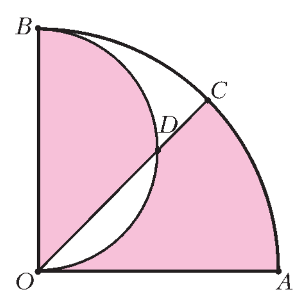

Рис. 3

8. По окружности расположены, чередуясь, 10 гирек различных масс и 10 шариков, причем масса шарика равна разности масс двух соседних с ним гирек. Можно ли разложить шарики на 2 кучки равной массы?

9. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, центр O которой лежит внутри него. Найдите площадь $ABCD$, если углы BAO и DAC равны, а диагонали AC и BD равны m и n соответственно.

10. Сумма 120-х степеней 2008 натуральных чисел делится на 7. Что можно сказать о числе слагаемых в этой сумме, которые не делятся на 7?

Физика

Задача 1. «Книга». На столе лежит книга размером $a \times a$. Наименьшая работа, необходимая, чтобы раскрыть книгу на середине, равна A. Чему равна масса книги?

Задача 2. «Кит». Одна из древних моделей мира утверждала, что Земля расположена на спине кита, плавающего в океане. Оцените размеры этого кита, считая его брусом квадратного сечения, у которого длина в 10 раз больше стороны квадрата, лежащего в поперечном сечении, а плотность составляет $\rho_к = 0,9$ г/см^3. Землю можно считать полушаром радиусом $R_З = 6400$ км и плотностью $\rho_З = 5,5$ г/см^3.

Задача 3. «Шар на рельсах». Шар катится без проскальзывания по двум горизонтальным рельсам со скоростью v (рис.4). Длина хорды AB равна радиусу шара. У каких точек шара скорость наибольшая? Чему равна эта скорость?

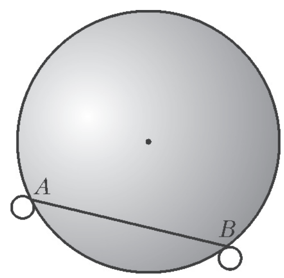

Рис. 4

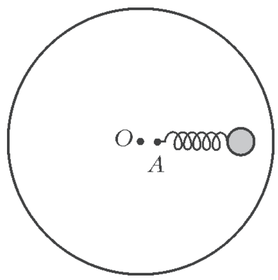

Рис. 5

Задача 4. «Вращающаяся пружина». В точке A горизонтального диска, вращающегося вокруг вертикальной оси O, прикреплена пружина, на другом конце которой закреплен шарик массой m = 10 г (рис.5). Жесткость пружины k = 1 Н/см. Расстояние OA равно l = 3 см, длина пружины в нерастянутом состоянии L = 5 см. Определите угловую скорость вращения диска, при которой шарик будет находиться в равновесии при любом удлинении пружины.

Задача 5. «Шарики на стержнях». Два одинаковых шарика закреплены на концах двух одинаковых спиц. Спицы установлены вертикально свободными концами на горизонтальной плоскости. Конец одной спицы шарнирно закреплен, конец другой может скользить без трения по поверхности. Шарики выводят из равновесия. Какой из них быстрее коснется плоскости?

Задача 6. «Шарик в конденсаторе». Электрическое поле образовано двумя неподвижными, вертикальными, параллельными и разноименно заряженными непроводящими пластинами. Пластины расположены на расстоянии d = 9 см друг от друга. Напряженность поля между пластинами $E = 10^4$ В/м. Между пластинами на равном расстоянии от них помещен шарик с зарядом q = 2 мкКл и массой m = 1 г. В некоторый момент шарик отпускают. Какую скорость будет иметь шарик, когда коснется одной из пластин?

Задача 7. «Шар в стакане». В стакане, доверху наполненном водой и закрытом сверху крышкой, плавает деревянный шарик. Как изменится давление шарика на крышку, если стакан будет двигаться с ускорением a, направленным вверх?

Задача 8. «Цикл Отто». Покажите, что коэффициент полезного действия теплового двигателя, работающего по термодинамическому циклу, состоящему из двух адиабат и двух изохор (цикл Отто), зависит от выбора рабочего тела. Рассмотрите случай идеального газа.

Задача 9. «Выпрямитель». В электротехнике и радиоэлектронике часто применяют устройство, предназначенное для преобразования переменного напряжения в постоянное. Это – однополупериодный выпрямитель, его схема приведена на рисунке 6. Выпрямитель состоит из диода D и конденсатора емкостью C, а полезная нагрузка в виде резистора сопротивлением R подключается параллельно конденсатору. Будем рассматривать источник электрической энергии, который вырабатывает прямоугольные импульсы с периодом T, длительностью $T/2$ и амплитудой напряжения U_0 (рис.7). Напряжение на нагрузке получается не совсем постоянным, а немного изменяется относительно постоянной составляющей – пульсирует. Считая диод идеальным, пренебрегая внутренним сопротивлением источника электрической энергии, сопротивлением и индуктивностью конденсатора и емкостью и индуктивностью резистора, оцените относительные пульсации (отношение амплитуды колебаний к значению постоянной составляющей выпрямленного напряжения).

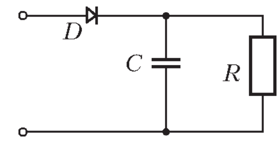

Рис. 6

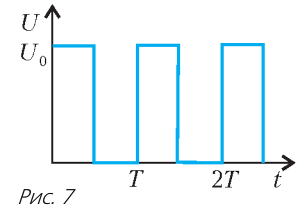

Рис. 7

Задача 10. «Щит Архимеда». Античные историки утверждают, что Архимед смог зажечь вражеские корабли, составив из медных щитов воинов – защитников города Сиракузы – криволинейное зеркало и направив сфокусированные солнечные лучи на корабли римлян. На протяжении веков ученые спорят, могло ли в действительности произойти такое событие. Оцените возможность этого события, полагая, что из медных щитов было собрано сферическое зеркало. Расстояние до корабля L = 200 м. Угловой размер Солнца $\alpha = 30'$, поверхностная плотность мощности солнечного излучения $N = 500$ Вт/м^2. Температура воспламенения дерева t = 270 °C, плотность дерева $\rho = 800$ кг/м^3, его удельная теплоемкость $c = 2,5$ кДж/(кг · К). Считайте, что солнечное излучение, падающее на дерево, полностью поглощается в поверхностном слое толщиной h = 0,1 мм.

ИСТОРИЯ НАУЧНЫХ ИДЕЙ И ОТКРЫТИЙ

Математика

1. Арабский астроном, математик и врач IX века Сабит ибн Курра внес свою лепту в коллекцию доказательств теоремы Пифагора. Одно из двух его доказательств иллюстрируется следующими двумя чертежами (рис.8). Оно интересно тем, что его нетрудно обобщить и получить теорему косинусов.

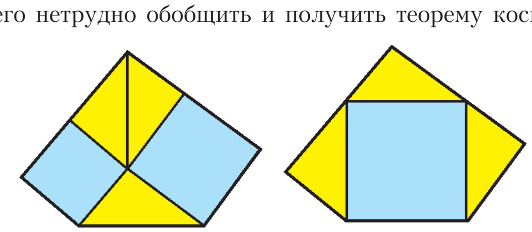
Рис. 8

Восстановите доказательство ибн Курры и преобразуйте его в доказательство теоремы косинусов.

2. В 2006 году высшей награды международного союза математиков – Филдсовской премии – был удостоен молодой американский математик Теренс Тао. Награда была ему присуждена за доказательство следующей удивительной теоремы: существует сколь угодно длинная арифметическая прогрессия, состоящая из простых чисел. О трудности этой задачи свидетельствует, например, то обстоятельство, что арифметическая прогрессия, состоящая из 250 простых чисел, имеет разность, приблизительно равную $3 \cdot 10^{98}$. Самое поразительное в доказательстве Т.Тао – это то, что оно является, по существу, вероятностным!

Найдите и вы арифметическую прогрессию из простых чисел длины: а) 3; б) 5; в) 6.

3. В середине XIX века усилиями многих математиков (Г.Штейнер, К.Вейерштрасс и др.) была доказана замечательная теорема о том, что из всех фигур данного периметра наибольшую площадь имеет круг (так называемая изопериметрическая задача). Это позволило, в частности, решить и пришедшую к нам из глубокой древности задачу Дидоны.

Решите ее и вы: располагая веревкой длины l, отгородите от прямолинейного морского берега участок наибольшей площади.

4. Английский математик Э.Варинг в 1770 году высказал гипотезу о том, что для любого натурального числа k существует такое натуральное число n, зависящее только от k, что любое натуральное число a можно представить в виде суммы не более чем n k-х степеней натуральных чисел:

$$a = a_1^k + a_2^k + \ldots + a_s^k ,$$

где $s \le n$. Например, каждое натуральное число есть сумма не более чем 4 квадратов (Л.Лагранж, 1770). Общее решение проблемы было дано в 1909 году Д.Гильбертом. Для случая $k = 3$ немецкий математик Виферих в 1909 году установил, что для представления всякого натурального числа достаточно не более 9 кубов, причем только для двух чисел их ровно 9, а для остальных – меньше.

Найдите меньшее из этих двух чисел.

5. В 1826 году великий русский математик Н.И.Лобачевский опубликовал свою «Новую геометрию», в которой заменил знаменитый пятый постулат Евклида другим. Его геометрия основана на тех же аксиомах, что и обычная евклидова, кроме пятого постулата. Пятый постулат Евклида – утверждение, эквивалентное такому: «Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит не более одной прямой, лежащей с данной в одной плоскости и не пересекающей ее». Н.И.Лобачевский заменил этот постулат другим: «Через точку, не лежащую на данной прямой, проходят по крайней мере две прямые, лежащие с данной прямой в одной плоскости и не пересекающие ее». Геометрия Лобачевского так же непротиворечива, как и привычная нам геометрия Евклида. В «абсолютной геометрии» (названной так венгерским математиком Я.Бойяи) – общей части этих геометрий (не содержащей ни пятого постулата Евклида, ни постулата Лобачевского) – доказано, что сумма углов всякого треугольника не превосходит 180°. Итак, в геометрии Лобачевского, как и в геометрии Евклида: а) на плоскости существуют прямые, не имеющие общих точек (например, два перпендикуляра к одной и той же прямой); б) верны три первых признака равенства треугольников; в) измерение углов аналогично евклидову. В геометрии Лобачевского доказано, что сумма углов произвольного треугольника меньше 180°.

Докажите, что отсюда следует такой признак равенства прямоугольных треугольников: если два острых угла одного прямоугольного треугольника соответственно равны двум острым углам другого прямоугольного треугольника, то эти треугольники равны.

Физика

1. В 1918 году Нобелевская премия по физике была вручена в знак признания заслуг в деле развития физики благодаря открытию квантов энергии. Ученый, получивший премию, начал свою научную деятельность работами по термодинамике. Применив термодинамический подход к электромагнитному излучению, он сформулировал идею существования для излучения каждой частоты минимальной порции энергии – кванта энергии. Этим он спас физику от ультрафиолетовой катастрофы и заложил фундамент современной физики. Однако еще в течение многих лет он считал идею квантования излучения только техническим приемом, приводящим в соответствие теоретические представления и экспериментальные результаты. Отличный музыкант, вдумчивый ученый, состоявший во многих академиях наук мира, автор глубокомысленных философских работ, в высшей степени порядочный человек, прожил долгую жизнь. Его именем названо научное общество и система научных институтов в одной из европейских стран.

а) Кто этот ученый? б) В какой стране он жил? в) В чем сущность ультрафиолетовой катастрофы? г) В каком году он сформулировал квантовую гипотезу?

2. Вопрос устройства мира занимал людей с давних пор. Уже в античное время ученые разделились на сторонников и противников идеи атомизма. С обеих сторон приводились убедительные аргументы и строились теории. Спор между ними завершился только в XX веке.

Назовите выдающихся ученых – сторонников гипотезы атомизма, укажите наиболее важные результаты, полученные ими, и назовите их оппонентов: а) в античное время; б) в XVII – XVIII веках; в) в XIX веке.

Какие особенности современной атомистической теории вам известны?

3. Для изучения строения материи современная физика использует как теоретические, так и экспериментальные методы. Для исследования взаимодействий элементарных частиц необходимы источники частиц высоких энергий. За последние полвека построены ускорители элементарных частиц с различными энергиями частиц в пучке. В 2008 году произведен пуск и осуществляется отладка нового, самого на сегодня мощного ускорителя, который, как ожидается, позволит экспериментально проверить теоретические представления физики высоких энергий.

а) Какой ускоритель запущен в 2008 году? б) Где он расположен? в) На какую энергию частиц рассчитан ускоритель? г) Какие планируемые эксперименты вам известны?

4. Два древнегреческих ученых – учитель и ученик. Они жили в городе Абдеры в V веке до н. э. Были сторонниками идеи множественности существующего. Утверждали, что элементы существующего разделены пустотой, сами же элементы однородны, непрерывны и неделимы. Ученик сформулировал эту идею как цельную теорию и стал известнее учителя. Ученик много путешествовал и потратил на это деньги, полученные по наследству. В Абдерах растрата наследства преследовалась по закону. На суде ученый прочитал свой труд «Великий мирострой», написанный по итогам путешествий. Суд оправдал его, решив, что наследство израсходовано не зря. Он часто уединялся и разговаривал сам с собой. По решению сограждан его обследовал великий Гиппократ, признав здоровым, а его странности отнеся за счет погружения в мудрые мысли.

Назовите этих двух великих древнегреческих ученых.

5. Эта идея к началу XIX века была принята почти всеми химиками мира. В 1860 году на Всемирном съезде химиков в Карлсруэ были окончательно сформулированы химические аспекты этой идеи. Однако почти все физики считали ее в лучшем случае неплохой расчетной моделью, но не картиной физической реальности. Известные физики Гельмгольц и Мах полагали, что эта идея лишена физического основания, утверждая, что материя непрерывна. Только такие выдающиеся физики, как Максвелл, Больцман, Эйнштейн, Резерфорд и некоторые другие, уверенно утверждали, что эта идея определяет наши воззрения на строение материи. XX век подтвердил их правоту.

Сформулируйте эту идею. Какие решения съезда 1860 года сформулированы в рамках этой идеи?

Публикацию подготовили В.Альминдеров, А.Егоров, А.Кравцов, В.Крыштоп, Ж.Раббот, Л.Шляпочник