

Формула крюков. Количество заполнений диаграммы равно факториалу количества ее клеток, деленному на произведение длин всех ее крюков.

Доказательство, которое вы вскоре узнаете, основано на свойствах антисимметрических многочленов. Сначала введем удобные обозначения.

Упражнения

3. Выведите из формулы крюков формулы для: а) чисел сочетаний; б) чисел Каталана.

4. При помощи формулы крюков вычислите, сколькими способами можно расставить числа от 1 до: а) 9; б) 16 в виде квадратной таблицы так, чтобы числа возрастали и при движении слева направо, и при движении сверху вниз.

Обозначения

Обозначим буквой k количество строк рассматриваемой диаграммы; $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ – их длины, причем нумеруем сверху вниз: первая строка самая длинная, вторая той же длины или короче первой, и так далее, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k$. Например, для диаграммы рисунка 14 имеем: $\lambda_1 = 13, \lambda_2 = 10, \lambda_3 = 7, \lambda_4 = 4, \lambda_5 = 4, \lambda_6 = 4, \lambda_7 = 4, \lambda_8 = 4, \lambda_9 = 1$ и $\lambda_{10} = 1$.



Рис. 14

Длина крюка верхней левой (угловой) клетки равна $\lambda_1 + k - 1$. Длина крюка клетки, расположенной непосредственно под ней, равна $\lambda_2 + k - 2$. Вообще, длина l_m крюка m -й сверху клетки левого столбца равна $l_m + k - m$. Очевидно, последовательность длин крюков l_1, l_2, \dots, l_k строго убывающая: $l_1 > l_2 > \dots > l_k$.

Крюки клеток первой строки и левого столбца

Среди длин крюков верхней строки рисунка 14 отсутствуют числа 4, 8, 9, 13, 14, 15, 16, 20 и 21. Заметьте: $22 - 18 = 4, 22 - 14 = 8, 22 - 13 = 9, 22 - 9 = 13, 22 - 8 = 14, 22 - 7 = 15, 22 - 6 = 16, 22 - 2 = 20$ и $22 - 1 = 21$. Интересно и неожиданно, не правда ли?

Лемма 1. Среди длин крюков чисел верхней строки присутствуют все числа от 1 до l_1 , кроме разностей $l_1 - l_m$, где $1 < m \leq k$.

Идея доказательства. При движении вдоль верхней строки рисунка 14 справа налево сначала длины крюков – последовательные числа 1, 2 и 3. Первое отсутствующее число – 4. Разность количеств клеток крюка длины 22, состоящего из всех клеток верхней строки и левого столбца, и желтого крюка длины 18 равна количеству зеленых клеток – числу 4.

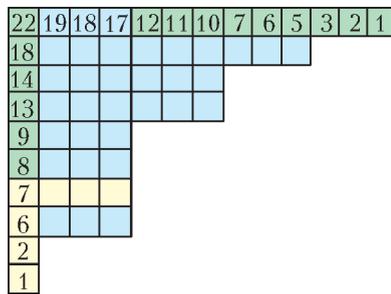


Рис. 15

Разность между числом 22 и числом 7 – количеством клеток желтого крюка рисунка 15 – равна количеству зеленых клеток этого рисунка. Надеюсь, больше ничего объяснять не нужно – вы уже все поняли.

Упражнение 5. Порисуйте, подумайте – и завершите доказательство.

Новый вид формулы крюков

Вследствие леммы 1, произведение длин крюков первой строки диаграммы равно числу $l_1!$, деленному на произведение $(l_1 - l_2)(l_1 - l_3) \dots (l_1 - l_k)$.

Отбросив верхнюю строку, мы получаем диаграмму, к верхней строке которой – второй строке исходной диаграммы – применима та же лемма. Таким образом, длины крюков второй строки – числа от 1 до l_2 , кроме разностей $l_2 - l_3, \dots, l_2 - l_k$. Рассуждая так же для третьей, четвертой и всех следующих строк, приходим к выводу: произведение длин крюков всех клеток диаграммы равно произведению факториалов $l_1! l_2! \dots l_k!$, деленному на произведение всевозможных разностей $l_j - l_m$, где $1 \leq j < m \leq k$.

Поэтому формула крюков означает, что интересующее нас количество расстановок равно величине

$$F(l_1, l_2, \dots, l_k) = \frac{n! \prod_{1 \leq j < m \leq k} (l_j - l_m)}{l_1! l_2! \dots l_k!},$$

где

$$n = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{k-1} + \lambda_k =$$

$$= l_1 + l_2 + \dots + l_{k-1} + l_k - (k-1) - (k-2) - \dots - 2 - 1.$$

Обратите внимание на последнее равенство: оно будет использовано в конце доказательства формулы крюков.

Умножение на ноль

Как часто предсказывают конец света! – и ведь ни разу не сбылось...

В числителе дроби F присутствуют все разности вида $l_j - l_m$. Поэтому величина $F(l_1, l_2, \dots, l_k)$ равна нулю, если в последовательности l_1, l_2, \dots, l_k есть совпадающие числа: $l_j = l_m$ при $j \neq m$. Вы помните, что $l_1 > l_2 > \dots > l_k$. Тем не менее, высказанное – истина, хотя наверняка пока кажется, что она не ко двору.

Сформулируем это свойство функции F чуть иначе. Поменяем местами l_1 и l_2 . Разность $l_1 - l_2$ заменится на $l_2 - l_1 = -(l_1 - l_2)$, а другие множители числителя и знаменателя поменяются друг с другом местами или останутся неизменными. Значит, $F(l_1, l_2, \dots, l_k) = -F(l_2, l_1, l_3, \dots, l_k)$.

Немного подумав, вы поймете, что величина F меняется на противоположную не только при замене l_1 на l_2 и l_2 на l_1 , но и при перестановке любых двух аргументов – так называемой транспозиции. Такие функции F называют *антисимметрическими*.

Симметрическими называют функции, не меняющие свое значение ни при какой перестановке аргументов.

В зависимости от того, как перестановка действует на антисимметрический многочлен – меняет его знак на противоположный или сохраняет многочлен неизменным, – перестановку называют, соответственно, *нечетной* или *четной*.

Нетрудно доказать, что множество S_k всех перестановок множества первых k натуральных чисел можно разбить на две равные половины. Все перестановки σ одной из них – нечетные перестановки – обладают тем свойством, что

$$F(l_{\sigma(1)}, l_{\sigma(2)}, \dots, l_{\sigma(k)}) = -F(l_1, l_2, l_3, \dots, l_k).$$

Перестановки из другой половины – четные – удовлетворяют равенству

$$F(l_{\sigma(1)}, l_{\sigma(2)}, \dots, l_{\sigma(k)}) = F(l_1, l_2, l_3, \dots, l_k).$$

Для доказательства формулы крюков нам потребуются следующие две леммы.

Лемма 2. Если многочлен $g(x, y)$ антисимметричен, то $g(x, x) = 0$.

Доказательство. Меняя местами букву x с буквой y (да, это не опечатка, мы меняем букву с такой же в точности буквой!), получаем равенство $g(y, x) = -g(x, y)$, откуда и следует равенство $g(x, x) = 0$.

Лемма 3. Если многочлен $g(x, y)$ антисимметричен, то существует такой симметрический многочлен $h(x, y)$, что $g(x, y) = (x - y)h(x, y)$.

Доказательство. Поделив уголко¹ многочлен $g(x, y)$ на разность $x - y$, получаем некоторое частное $h(x, y)$ и некоторый остаток $f(y)$. Это значит, что верно тождество

$$g(x, y) = (x - y)h(x, y) + f(y).$$

Подставив в это тождество $y = x$, получаем

$$g(x, x) = (x - x)h(x, x) + f(x).$$

В силу леммы 2 имеем $g(x, x) = 0$; следовательно, $f(x) = 0$; лемма 3 доказана.

Множественно применяя лемму 3, приходим к следующему утверждению.

Следствие из леммы 3. Всякий антисимметрический многочлен $g(l_1, l_2, \dots, l_k)$ представим в виде произведения всевозможных разностей вида $l_j - l_m$, где $1 \leq j < m \leq k$, и некоторого симметрического многочлена.

Вычитание нуля

Робкий человек чуть было не прослыл решительным. Характера не хватило.

С.Лузан

Пусть $l_k = 0$. (Вы помните, что такого не бывает. Но я хочу рассмотреть эту ситуацию – как ни странно, она нам пригодится!) Поскольку $l_1 - 0 = l_1$, $l_2 - 0 = l_2, \dots, l_{k-1} - 0 = l_{k-1}$ и $n = l_1 + l_2 + \dots + l_{k-1} + 0 - (k-1) - (k-2) - \dots - 2 - 1 =$

$$= (l_1 - 1) + (l_2 - 1) + \dots + (l_{k-1} - 1) - (k-2) - \dots - 2 - 1,$$

то

$$F(l_1, l_2, \dots, l_{k-1}, 0) = F(l_1 - 1, l_2 - 1, \dots, l_{k-1} - 1).$$

Индукционный переход

Для $k = 1$ и $\lambda_1 = 1$ формула крюков тривиальна: $1 = \frac{1!}{1!}$.

Применим индукцию. Предположив, что формула крюков верна для всех диаграмм, состоящих из $n - 1$ клеток, докажем ее для n -клеточной диаграммы. Воспользуемся приемом, который мы уже обсуждали, – отбрасыванием клеток.

Переход от диаграмм рисунка 7 к диаграммам рисунка 8 соответствует формуле

$$F(7, 4, 3, 1) = F(6, 3, 2) + F(7, 4, 2, 1) + F(6, 4, 3, 1).$$

Поскольку $F(6, 3, 2) = F(7, 4, 3, 0)$ и $F(7, 3, 3, 1) = 0$, ее можно записать в виде

$$F(7, 4, 3, 1) = F(6, 4, 3, 1) + F(7, 3, 3, 1) + F(7, 4, 2, 1) + F(7, 4, 3, 0).$$

По очереди каждый аргумент уменьшаем на 1. В общем виде формула такова:

$$F(l_1, l_2, \dots, l_k) = F(l_1 - 1, l_2, \dots, l_k) + F(l_1, l_2 - 1, \dots, l_k) + \dots + F(l_1, l_2, \dots, l_k - 1). (*)$$

В правой части k слагаемых: мы как бы по очереди отбрасываем из каждой строки ее самую правую клетку (хотя на

¹ При делении $g(x, y)$ рассматриваем как многочлен от x , коэффициенты которого – многочлены от y .

самом деле следует отбрасывать самые правые клетки не все подряд, а только те, под которыми нет клеток таблицы, – «лишние» слагаемые все равно нулевые).

Лемма 4. Если функция F антисимметрична, то антисимметрична и функция

$$F(l_1 - 1, l_2, \dots, l_{k-1}, l_k) + F(l_1, l_2 - 1, \dots, l_{k-1}, l_k) + \dots + F(l_1, l_2, \dots, l_{k-1} - 1, l_k) + F(l_1, l_2, \dots, l_{k-1}, l_k - 1).$$

Доказательство. Меняя местами l_1 и l_2 , получаем

$$F(l_2 - 1, l_1, \dots, l_k) + F(l_2, l_1 - 1, \dots, l_k) + \dots + F(l_2, l_1, \dots, l_{k-1} - 1, l_k) + F(l_2, l_1, \dots, l_k - 1).$$

Очевидно,

$$F(l_2 - 1, l_1, \dots, l_k) = -F(l_1, l_2 - 1, \dots, l_k),$$

$$F(l_2, l_1 - 1, \dots, l_k) = -F(l_1 - 1, l_2, \dots, l_k),$$

...

$$F(l_2, l_1, \dots, l_{k-1} - 1, l_k) = -F(l_1, l_2, \dots, l_{k-1} - 1, l_k),$$

$$F(l_2, l_1, \dots, l_k - 1) = -F(l_1, l_2, \dots, l_k - 1).$$

При любой другой транспозиции ситуация аналогична. Лемма доказана.

Ни правая, ни левая части равенства (*) – не многочлены: «мешаются» факториалы. Однако, разделив обе части на $(n - 1)!$ и домножив на $l_1! l_2! \dots l_k!$, приходим к необходимости доказать тождество

$$n \prod_{1 \leq j < m \leq k} (l_j - l_m) = l_1 \prod_{1 < m \leq k} (l_1 - l_m) \prod_{2 \leq j < m \leq k} (l_j - l_m) + l_2 (l_1 - (l_2 - 1)) \prod_{2 < m \leq k} (l_1 - l_m) \prod_{2 < m \leq k} (l_2 - 1 - l_m) \prod_{3 \leq j < m \leq k} (l_j - l_m) + \dots + l_k \prod_{1 \leq j < m < k} (l_j - l_m) \prod_{1 \leq j < k} (l_j - (l_k - 1)). (**)$$

Выписано оно шика ради. А принципиально то, что вследствие леммы 4 правая часть (**) – антисимметрический многочлен от l_1, l_2, \dots, l_k , так что правая часть делится на всевозможные разности этих переменных, а частное от деления – симметрический многочлен $h(l_1, l_2, \dots, l_k)$ первой степени. (Первой – поскольку степень правой части на единицу больше степени левой части вследствие наличия множителей l_1, l_2, \dots, l_k , соответственно, в каждом из k слагаемых правой части.)

Любой симметрический многочлен первой степени от l_1, l_2, \dots, l_k имеет вид $a(l_1 + l_2 + \dots + l_k) - b$, где a и b – числа. Осталось их найти.

Коэффициент при l_1^k в правой части формулы (**) равен произведению $\prod_{2 \leq j < m \leq k} (l_j - l_m)$, а коэффициент при l_1^{k-1} в

многочлене $\prod_{1 \leq j < m \leq k} (l_j - l_m)$ ровно такой же. Следовательно,

$a = 1$ и $h(l_1, l_2, \dots, l_k) = l_1 + l_2 + \dots + l_k - b$, где величина b зависит только от k , а не от l_1, l_2, \dots, l_k .

Последний удар

Когда хорошо подумаешь – и говорить не о чем.

Осталось сделать последний шаг – обосновать равенство

$$b = 1 + 2 + \dots + (k - 1).$$

Удивительным образом никаких вычислений не требуется! Поскольку для любого натурального k формула крюков верна для столбика высотой k , то для обеспечения правильного перехода от столбика высотой $k - 1$ к столбику высотой k величина b именно такая, как надо!

ЕСТЬ ИДЕЯ?!

Предлагаемая статья написана одним из самых давних и любимых авторов нашего журнала профессором Московского физико-технического института А.Л.Стасенко. Много лет он является ведущим разделом «Школа в «Кванте» и чаще всего пишет небольшие заметки-эссе именно для этой рубрики. Почему же на этот раз редколлегия решила опубликовать статью А.Л.Стасенко в разделе «Есть идея?!»? Дело в том, что эта статья необычна как для самого автора, так и для журнала. Как правило, мы публикуем материалы, посвященные популярному изложению вопросов, прошедших ранее апробацию на страницах научных журналов и книг и признанных научным сообществом. В предлагаемой же статье автору захотелось пофантазировать на тему о том, как на основе научных соображений и аргументов можно придумать, «сконструировать» формулу для коэффициента трения. Нам кажется, что читателям будет интересно познакомиться со свободным научным фантазированием, которое является необходимым звеном в поиске новых истин. Мы предлагаем вам поразмышлять над полученной автором статьи формулой, сравнить ее с любыми доступными вам данными и, может быть, предложить свою (возможно, более удачную) формулу или теорию.

Упругость, текучесть, трение...

А. СТАСЕНКО

*...в механике твердых тел применяется
...технически необходимое, но физически плохо
распознаваемое понятие о внешнем трении.*

Р. Поль

ЭТО СЛЕГКА ПЕССИМИСТИЧЕСКОЕ ВЫСКАЗЫВАНИЕ ПРИнадлежит известному немецкому демонстратору физических явлений. Попробуем внести свою лепту в понимание столь повсеместного процесса, как трение.

Представим себе брусок весом P , лежащий на горизонтальной плите из того же материала (рис. 1). В реальности оба тела шероховаты, так что они соприкасаются в некотором числе контактных областей (в принципе, для равновесия

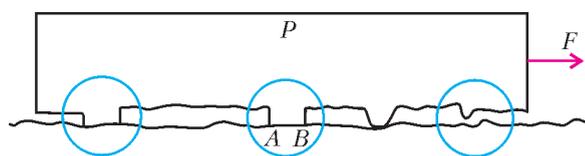


Рис. 1

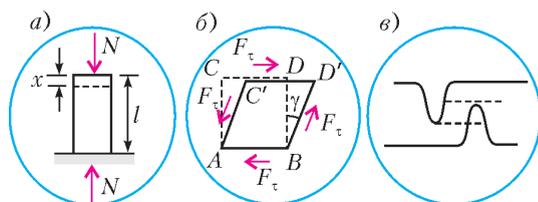


Рис. 2

достаточно трех), суммарная площадь которых много меньше видимой. Прежде всего рассмотрим возможные типы деформации, которой подвержены контактные выступы («бугорки» шероховатости), считая их в недеформированном состоянии вертикальными цилиндриками или брусками.

При осевом сжатии стержня начальной высоты l и сечения S под действием силы N наблюдается его укорочение на

величину x (рис.2,а), которое выражается в виде хорошо известного закона Гука

$$x = \frac{l}{E} \frac{N}{S}.$$

Здесь величина E называется модулем продольной упругости, или модулем упругости первого рода, или (сокращенно) модулем упругости, или модулем Юнга. Приведенное выражение можно переписать в виде, привычном для школьника и характеризующем пружину:

$$N = \frac{ES}{l} x = kx.$$

Таким образом, мы уподобили упругий стержень пружине жесткостью $k = ES/l$.

Закон Гука утверждает линейную зависимость относительной деформации стержня x/l от механического напряжения (нормальной силы, приходящейся на единицу площади) $\sigma = N/S$. И серьезные исследователи, и школьники очень любят такие зависимости за их простоту. Например, закон Ома дает линейную зависимость между силой тока I и разностью потенциалов U на концах проводника длиной l и сечением S :

$$U = \frac{l}{\lambda S} I.$$

Сравнивая это выражение с законом Гука, видим, что электропроводность проводника λ формально аналогична модулю Юнга E .

Однако, при увеличении механического напряжения простая линейная зависимость перестает быть справедливой: при некотором значении $\sigma_t = N_{\max}/S$ наступают необратимые деформации – сжатая пружина-стержень не распрямится после снятия нагрузки. Значение σ_t называется пределом текучести. С помощью этой величины можно определить, например, наибольшую высоту h гор на Земле. В самом деле, считая гору конусом и приравнявая давление породы ее пределу текучести:

$$\frac{1}{3} \rho g h \lesssim \sigma_t,$$

получим

$$h \lesssim \frac{3\sigma_t}{\rho g} \sim \frac{3 \cdot 10^8}{3 \cdot 10^3 \cdot 10} \text{ м} = 10^4 \text{ м} = 10 \text{ км}.$$

Здесь плотность базальтовой породы принята равной 3000 кг/м^3 , а ее предел текучести – порядка 10^8 Па . Как известно, самая высокая гора на Земле имеет высоту $8,848 \text{ км}$. Отсюда же можно заключить, к примеру, что на Луне могли бы существовать горы в 6 раз выше.

Но линейное сжатие и растяжение – не единственный вид деформации. Существует еще деформация сдвига. Представим себе упругий брусок $ABDC$, нижняя грань которого AB приклеена к абсолютно жесткой поверхности (рис.2,б).

Под действием касательной силы F_{τ} его верхняя грань CD примет положение $C'D'$, а вертикальные грани наклонятся на угол γ . (На рисунке расставлены силы так, чтобы деформированный брусок остался в равновесии.) Аналогично случаю сжатия, закон Гука при сдвиге выражается в виде

$$\gamma = \frac{\sigma_{\tau}}{G},$$

где σ_{τ} – напряжение сдвига, или касательная сила в расчете на единицу площади, а величина G называется модулем сдвига или модулем упругости второго рода и, естественно, имеет ту же размерность, что и модуль Юнга, и механическое напряжение ($[G] = \text{Н/м}^2$).

Но при чем здесь трение? Несомненно, еще первобытный человек, таща тушу мамонта или бревно к костру, убедился, что его усилиям противодействует тангенциальная сила F тем большая, чем больше вес P мамонта или бревна. Прошло немало времени, прежде чем Амонтон отважился записать (1699 г.) линейную зависимость между этими силами:

$$F = \mu P,$$

а коэффициент μ назвать коэффициентом трения. И прошло еще немало лет, пока физики осознали, что макроскопический эффект, называемый трением, есть результат множества микроскопических взаимодействий молекул, атомов, электронов соприкасающихся тел. Были написаны сотни (а может быть, и тысячи) диссертаций, в которых исследовались различные аспекты проблемы трения. И тем не менее, даже в энциклопедии вошли пессимистические нотки: «...коэффициенты трения часто являются лишь грубой и условной характеристикой сил трения. Кроме того, величина коэффициента трения существенно изменяется при изменениях (часто с трудом поддающихся контролю) физических условий на поверхности соприкосновения». Здесь имеется в виду наличие пленок окислов, адсорбированных слоев газов, паров и жидкостей; кроме того, локальная температура в местах контактов при скольжении одного тела по другому может быть гораздо более высокой (например, несколько сот градусов), чем средняя температура обоих тел. А еще – крупные бугорки, сталкиваясь друг с другом, просто препятствуют движению и должны быть срезаны активной силой F (на рисунке 1 справа и на рисунке 2, в изображены два таких бугорка, которые готовятся встретиться друг с другом). В результате коэффициент трения зависит еще и от качества обработки поверхностей – не напрасно ведь в машиностроении тщательно шлифуют трущиеся детали.

Всеми этими факторами объясняется разброс значений коэффициентов трения, приводимых в различных литературных источниках. Например, значение $\mu = 0,18$ для случая трения металла по металлу приведено в учебнике позапрошлого века с пышным названием «Начальная физика в объеме гимназического преподавания с 766-ю полнотипажными в текст», задачами, репетиторством и вопросами для упражнении» Н. Любимова (Москва, 1876. Лицей Цесаревича Николая).

В «Механике, акустике и учении о теплоте» упомянутого выше Роберта Вихарда Поля указано, что численное значение коэффициента трения покоя лежит большей частью между 0,2 и 0,7, коэффициент трения скольжения в большинстве случаев лежит между 0,2 и 0,5, а с возрастанием скорости он может снизиться на 20% от начальной величины, имеющей при малой скорости.

В других источниках можно найти такие значения коэффициента трения: для санок по твердому снегу $\mu = 0,05$; между деревом и льдом $\mu = 0,09$; для стали по чугуну $\mu = 0,15 - 0,18$,

а для стали по стали $\mu = 0,44$; для колес тормозящего трамвая $\mu = 0,2$ и т.д.

В этих условиях вполне оправдано предложить какую-либо простую зависимость, описывающую столь сложное и неопределенное явление. Для этого и воспользуемся введенными выше понятиями модулей упругости и предела текучести.

Картина, изображающая взаимодействие поверхностей двух соприкасающихся тел (см. рис. 1), наглядно иллюстрирует как упругую деформацию одних «бугорков» шероховатостей, так и неупругую других, как их линейное сжатие (см. рис. 2, а), так и сдвиговую деформацию (см. рис. 2, б), которая в конце концов приводит к разрыву «спаек» в области неупругой деформации (с последующим образованием новых спаек в процессе движения). Значит, коэффициент трения должен, в принципе, зависеть от всех рассмотренных нами макроскопических характеристик вещества: E , G , σ_{τ} .

Прежде всего выпишем в таблицу (в первые три столбца) характерные значения всех нужных нам величин для некоторых металлов и сплавов. Обратим внимание на то, что модули упругости E и G даны в гигапаскалях ($1 \text{ ГПа} = 10^9 \text{ Па}$), а пределы текучести σ_{τ} – в единицах, в тысячу раз меньших, т.е. в мегапаскалях ($1 \text{ МПа} = 10^6 \text{ Па}$):

	E , ГПа	G , ГПа	σ_{τ} , МПа	$\mu = (\sigma_{\tau}/\sqrt{EG})^{1/3}$
Алюминий				
и сплавы	70–80	26–30	20–500	0,08–0,22
Медь и сплавы	100–130	40–47	30–700	0,08–0,21
Свинец	16	5,6	5–10	0,08–0,1
Сталь	190–210	230	75–80	0,12

Из этой таблицы виден разброс данных, приведенных в различных справочниках. Тем не менее, значения предела текучести для всех веществ оказываются на два-три порядка меньше значений модулей упругости

В сложных вопросах физики часто прибегают к помощи теории размерностей и подобия. Но в данном случае из перечисленных характеристик материалов σ_{τ} , E , G , имеющих одну и ту же размерность (Н/м^2), можно составить бесконечное число безразмерных комбинаций. Как тут быть? Воспользуемся дополнительными разумными соображениями. Во-первых, поскольку при деформации бугорков имеет место как их сжатие, так и сдвиг, целесообразно ввести \sqrt{EG} вместо E или G в отдельности. Разумеется, этот корень имеет тот же порядок величины, что и стоящие под ним множители. Во-вторых, σ_{τ} , как уже было отмечено, на два-три порядка меньше \sqrt{EG} , а величина μ находится где-то вблизи 0,1. Отсюда разумно предложить такую зависимость для коэффициента трения:

$$\mu \sim \left(\frac{\sigma_{\tau}}{\sqrt{EG}} \right)^{1/3}.$$

Конечно, это не вывод и не доказательство, и предлагаемая формула носит отпечаток произвола. Но ведь она дает разумные значения μ ! Как тут не вспомнить английского физика и математика Оливера Хевисайда, который сказал, что не может отказаться от вкусного обеда только потому, что не знает, как тот приготовлен. Или Марка Блока, историка: «...если бы физики не были так дерзки в своей профессии, много ли достигла бы физика?»

Наши вдумчивые читатели могут «испытать» эту формулу и для других веществ, выписав из справочников их физико-механические данные, а также найдя в литературе (или измерив) соответствующие коэффициенты трения. Правда, тонкие эксперименты показали, что сила трения существует и в случае, когда не происходит упруго-пластических изме-

нений поверхности. Эта сила связана с так называемой адгезией (от лат. *adhaesio* – прилипание). Именно для описания этого явления Кулон «подправил» закон Амонтона и ввел дополнительное слагаемое, связанное не с прижимающей силой, а с взаимодействием приповерхностных атомов и молекул (см. статью А. Стасенко «Не пренебрежем трением качения...» в Кванте №1 за 2008 г. – *Прим. ред.*). Здесь мы не будем рассматривать эту нежную добавку, а вернемся к нашей таблице.

В последнем столбце таблицы приведены значения μ , рассчитанные по предлагаемой формуле. При этом брались крайние левые или крайние правые значения из интервалов для E , G и σ_T (т.е. принималось, что более жесткие тела обладают и более высоким пределом текучести). Таким

образом, предлагаемая простая связь между макроскопическими физико-механическими характеристиками материалов, несмотря на громадный разброс табличных данных, дает правдоподобное значение коэффициента трения между двумя телами (по крайней мере, из одного и того же материала).

В одном американском учебнике по физике говорится: «... учет трения – это, в сущности, бухгалтерский учет: если какая-то часть энергии уходит в бесполезной для нас форме, то мы можем назвать это трением». Конечно, это не означает, что окончательно разобраться с трением можно после месячных бухгалтерских курсов. Пожалуй, для этого неплохо поступить в Московский физико-технический институт, чего вам и желаем.

НАШИ НАБЛЮДЕНИЯ

Из плоскости – в пространство

Может быть, вы уже писали ЕГЭ, а может, еще нет, но в любом случае следует знать, что это тяжелая работа. Скажем, по физике за 3,5 часа нужно решить 36 задач. Факти-

взглядом на розовый бланк ответов ЕГЭ (рис. 1). Посмотрел туда, где расположены квадратики, в которых нужно отмечать номера правильных ответов. Мне показалось, что бланк приобрел глубину – сантиметра 2–3, не меньше.

Позже, уже после экзамена, я понял, что это было проявлением стереоскопического эффекта. Вот в чем тут дело (рис. 2). Если мы смотрим обоими глазами на один и тот же квадрат, то угол между лучами зрения велик. Если же мы

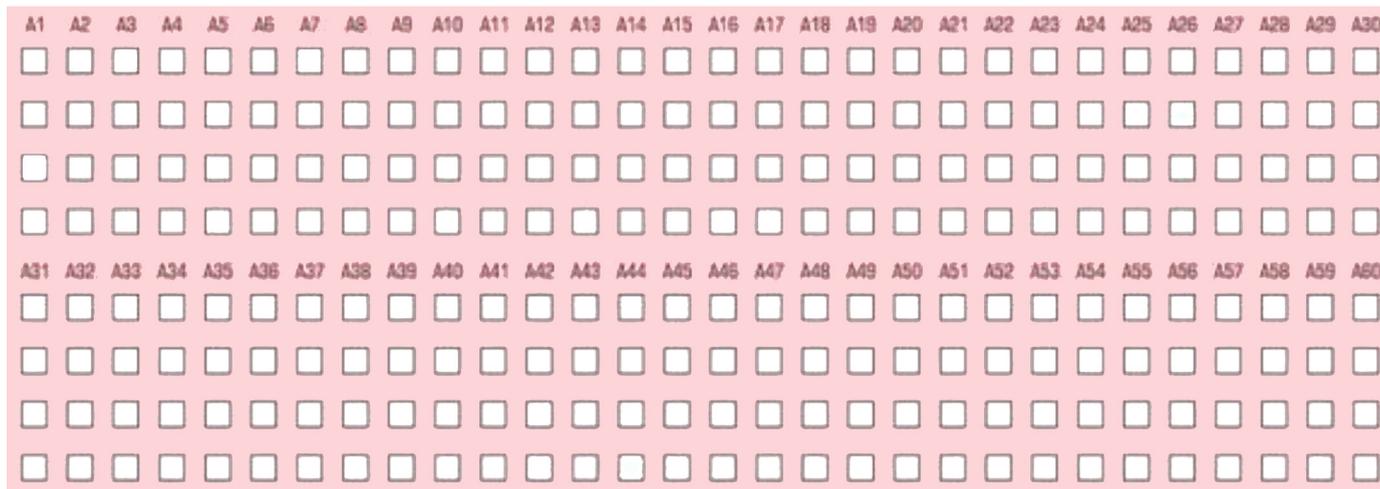


Рис. 1

чески невозможно проработать такой большой отрезок времени без передышки, без вольных или невольных отвлечений. В один из таких моментов я и посмотрел рассеянным

смотрим на два соседних квадрата – левым глазом на левый и правым на правый, то угол между лучами зрения становится меньше. И если все-таки нам удастся убедить себя, что оба глаза видят один и тот же квадрат, то этот квадрат будет казаться более удаленным.

Существуют определенные методики достижения такого самообмана. Вот одна из них. Приблизьте рисунок 1 к себе и расслабьте глаза – расфокусируйте свое зрение, не пытаясь разглядеть какие-либо мелкие детали рисунка. Теперь начните медленно удалять рисунок, все так же не пытаясь сфокусировать зрение. В некоторый момент должна возникнуть иллюзия объема.

Надеемся, вы лишний раз убедились в том, что глубину можно искать везде – даже там, где ее нет.

А. Панов

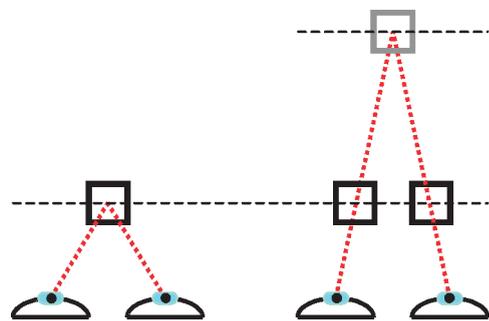


Рис. 2

Поток магнитной индукции

К.РЫБ

ОПИСАНИЕ РАЗЛИЧНЫХ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ основано на двух основных законах – на законе электромагнитной индукции и теореме Гаусса. Оба закона используют одну и ту же физическую величину – поток магнитной индукции, или просто магнитный поток. Поток вектора магнитной индукции \vec{B} через поверхность площадью S равен произведению модуля вектора магнитной индукции на эту площадь и на косинус угла α между вектором \vec{B} и нормалью к поверхности:

$$\Phi = BS \cos \alpha.$$

Согласно закону электромагнитной индукции, электродвижущая сила индукции в замкнутом контуре равна по модулю скорости изменения магнитного потока через поверхность, ограниченную контуром:

$$\mathcal{E}_i = \left| \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \right|.$$

Теорема Гаусса для потока магнитной индукции выражает одно из фундаментальных свойств магнитного поля – его вихревой характер. Она формулируется так: алгебраическая сумма потоков магнитной индукции через любую замкнутую поверхность равна нулю. Принято считать, что выходящие из поверхности магнитные линии дают положительный поток, а входящие – отрицательный.

Обратимся к примерам конкретных задач, предлагавшихся на конкурсных экзаменах и на олимпиадах.

Задача 1. В неоднородном магнитном поле, симметричном относительно оси OZ , осевая составляющая индукции магнитного поля B_z меняется по линейному закону:

$B_z = B_0 \left(1 + \frac{1}{H_0} z \right)$. Определите угол, который образует вектор индукции магнитного поля с направлением оси OZ в точке A , находящейся на расстоянии R от оси и на расстоянии H_A от плоскости XOY .

Решение. Окружим ось OZ цилиндрической поверхностью радиусом R и шириной Δz . Поверхность включает точку A . Суммарный магнитный поток представим как сумму потоков через торцы и через боковую поверхность цилиндра. Так как по теореме Гаусса суммарный поток вектора индукции через замкнутую поверхность равен нулю, то

$$\Delta B_z \cdot S_{\text{тор}} = B_r \cdot S_{\text{бок}}, \text{ или } -\frac{B_0}{H_0} \Delta z \cdot \pi R^2 = B_r \cdot 2\pi R \Delta z.$$

Отсюда получаем

$$B_r = -\frac{B_0 R}{2H_0}.$$

Теперь очевидно, что искомый угол равен

$$\gamma = \arctg \frac{B_r}{B_z} = \arctg \frac{R}{2(H_0 + H_A)}.$$

Задача 2. Вблизи северного полюса вертикально расположенного намагниченного стержня находится тонкая кольцевая катушка массой $m = 10$ г. Катушка может свободно перемещаться вдоль вертикальной оси OZ . Катушку заставляют колебаться около полюса по гармоническому закону с амплитудой $A = 5$ мм и частотой $\nu = 50$ Гц. При этом на ее разомкнутых концах появляется переменная электродвижущая сила с амплитудой $\mathcal{E}_0 = 1$ В. Какой постоянный ток I_0 нужно пропустить через катушку, чтобы она зависла в исходном положении?

Решение. Требуемое условие зависания катушки обеспечивается компенсацией силы тяжести вертикальной составляющей силы Ампера, которая, в свою очередь, определяется радиальной составляющей индукции магнитного поля:

$$mg = F_{Ay}, \quad F_{Ay} = I_0 \cdot 2\pi RN \cdot B_r,$$

где R и N – радиус и число витков катушки. При колебаниях катушки ее смещение вдоль оси OZ изменяет поток магнитной индукции и создает ЭДС индукции, которая определяется скоростью изменения потока:

$$\mathcal{E} = \left| \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \right| = N\pi R^2 \frac{\Delta B_z}{\Delta t} = N\pi R^2 \frac{\Delta B_z}{\Delta z} v.$$

При амплитудном значении скорости v колебаний катушки максимальна и ЭДС:

$$v_0 = 2\pi\nu A, \quad \mathcal{E}_0 = N\pi R^2 \frac{\Delta B_z}{\Delta z} \cdot 2\pi\nu A.$$

Теорема Гаусса позволяет установить связь между радиальной составляющей магнитной индукции и быстротой изменения индукции вдоль вертикальной оси. Катушка при колебаниях «вырезает» в пространстве цилиндр радиусом R и высотой Δz . По теореме Гаусса потоки через торцы и через боковую поверхность этого цилиндра равны:

$$\frac{\Delta B_z}{\Delta z} \cdot \Delta z \cdot \pi R^2 = B_r \cdot 2\pi R \cdot \Delta z,$$

откуда

$$\frac{\Delta B_z}{\Delta z} = \frac{2B_r}{R}.$$

Теперь из выражения для максимальной ЭДС индукции получим

$$B_r = \frac{\mathcal{E}_0}{4\pi^2 RN\nu A},$$

а из условия равновесия катушки найдем

$$I_0 = \frac{mg}{2\pi RN B_r} = \frac{2\pi m g \nu A}{\mathcal{E}_0} = 0,15 \text{ А}.$$

Важным примером применения закона сохранения потока магнитной индукции является оценка индукционного тока, наводимого внешним магнитным полем в сверхпроводящем контуре. Здесь необходимо учитывать изменения потоков магнитной индукции через площадь сверхпроводящего контура как внешнего поля, так и поля, создаваемого индукционным током. Действительно, изменение потока магнитной индукции через площадь контура порождает в нем ЭДС индукции. А если контур сверхпроводящий, то чем ограничивается возникающий в нем индукционный ток? Оказывается, в таком случае нельзя пренебрегать магнитным потоком поля, созданного этим индукционным током. В соответствии с теоремой Гаусса, алгебраическая сумма потоков магнитной индукции внешнего поля и поля индукционного тока через площадь сверхпроводящего контура остается неизменной. Иначе говоря, изменение потока внешнего поля вызывает

такое изменение тока в сверхпроводящем контуре, что создаваемый индукционным током поток магнитной индукции компенсирует это изменение.

Задача 3. Сверхпроводящее кольцо индуктивностью L , в котором течет ток I_0 , вносят в однородное магнитное поле с индукцией B_0 . Найдите ток, который будет протекать по кольцу. Нормаль к плоскости кольца составляет с направлением поля угол α . Радиус кольца R .

Решение. Изменение внешнего магнитного потока через площадь кольца компенсируется потоком индукционного тока, т.е. изменением собственного магнитного потока кольца:

$$\Delta\Phi_{\text{вн}} + \Delta\Phi_{\text{соб}} = 0.$$

Изменение внешнего магнитного потока равно

$$\Delta\Phi_{\text{вн}} = B_0 \pi R^2 \cos \alpha.$$

Ток в контуре и созданный им магнитный поток связаны друг с другом через индуктивность контура L :

$$\Phi = LI.$$

В нашем случае изменение собственного магнитного потока будет равно

$$\Delta\Phi_{\text{соб}} = L\Delta I = L(I - I_0),$$

где I – искомый ток. Таким образом, получаем

$$B_0 \pi R^2 \cos \alpha = L(I_0 - I),$$

откуда находим

$$I = I_0 - \frac{B_0}{L} \pi R^2 \cos \alpha.$$

Задача 4. Квадратная сверхпроводящая рамка покоится на гладкой горизонтальной поверхности. Масса рамки m , длина стороны d , индуктивность L . Вся система находится в неоднородном магнитном поле, вертикальная составляющая которого зависит от координаты x следующим образом: $B_z = B_0(1 + \alpha x)$. Рамке толчком сообщают скорость v_0 вдоль оси OX . Установите закон движения рамки.

Решение. При перемещении рамки магнитный поток внешнего поля через контур рамки изменяется. Возникающий индукционный ток создает свой магнитный поток, компенсирующий изменение потока внешнего поля, так как суммарный магнитный поток через контур сверхпроводника измениться не может:

$$\Delta\Phi_{\text{вн}} + \Delta\Phi_{\text{соб}} = 0, \text{ или } B_0 d^2 \alpha \Delta x + Li = 0.$$

Отсюда для индукционного тока получаем

$$i = -\frac{B_0 d^2 \alpha}{L} \Delta x.$$

На все стороны рамки с индукционным током действуют силы Ампера. Равнодействующая этих сил, направленная по оси OX , равна

$$F = i B_0 d \alpha ((x + d + \Delta x) - (x + \Delta x)) = i B_0 d^2 \alpha = -\frac{B_0^2 d^4 \alpha^2}{L} \Delta x.$$

Это – квазиупругая сила. Следовательно, рамка будет совершать гармонические колебания с циклической частотой

$$\omega = \frac{B_0 d^2 \alpha}{\sqrt{Lm}}.$$

Так как начальная скорость v_0 – амплитудная, для амплитуды колебаний получим

$$x_0 = \frac{v_0}{\omega}.$$

Тогда уравнение колебаний рамки примет вид

$$x(t) = \frac{v_0 \sqrt{Lm}}{B_0 d^2 \alpha} \sin \frac{B_0 d^2 \alpha}{\sqrt{Lm}} t.$$

Интересным проявлением закона сохранения потока магнитной индукции является согласованное изменение токов в катушках индуктивности с пренебрежимо малым активным сопротивлением при их параллельном соединении. Изменения токов могут быть вызваны, скажем, разрядкой конденсатора, включенного параллельно катушкам. Рассмотрим этот пример подробнее.

Пусть параллельно соединенные катушки имеют индуктивности L_1 и L_2 . Создаваемые токами потоки магнитной индукции в катушках равны $\Phi_1 = L_1 i_1$ и $\Phi_2 = L_2 i_2$. Допустим, что в момент замыкания ключа конденсатор заряжен, а тока в катушках нет. ЭДС самоиндукции, возникающая при разрядке, препятствует нарастанию токов. Выделим контур, содержащий две катушки с пренебрежимо малым активным сопротивлением. По второму правилу Кирхгофа для этого контура можно записать

$$L_1 \frac{\Delta i_1}{\Delta t} - L_2 \frac{\Delta i_2}{\Delta t} = 0, \text{ или } L_1 (i_1 - i_{01}) = L_2 (i_2 - i_{02}).$$

Перегруппируем слагаемые и получим

$$L_1 i_1 - L_2 i_2 = L_1 i_{01} - L_2 i_{02} = \text{const}.$$

Если потоку с током, текущим против направления обхода контура, приписывать отрицательный знак, то полученное соотношение формулируется так: при изменениях токов в параллельных идеальных катушках алгебраическая сумма потоков магнитного поля в контуре остается неизменной.

Проверим этот вывод на других ситуациях.

Пусть ключ подключает катушку индуктивностью L_2 в момент, когда ток в катушке индуктивностью L_1 достигает значения i_1 . Тогда по второму правилу Кирхгофа получим

$$L_1 \frac{\Delta i_1}{\Delta t} - L_2 \frac{\Delta i_2}{\Delta t} = 0, \text{ или } L_1 i_1 - L_2 i_2 = L_1 i_0 = \text{const}.$$

Прежняя формулировка справедлива.

Усложним ситуацию: допустим, ключ замыкают в момент полной разрядки конденсатора, когда ток в первой катушке i_{01} максимален. Возникающая ЭДС противоположной полярности приведет к убыли тока i_1 в первой катушке и росту тока i_2 противоположного направления во второй катушке. ЭДС в катушках по-прежнему разнятся знаками, но теперь уже сама величина $\frac{\Delta i_1}{\Delta t}$ отрицательна. Поэтому второе правило Кирхгофа примет вид

$$-L_1 \frac{\Delta i_1}{\Delta t} - L_2 \frac{\Delta i_2}{\Delta t} = 0.$$

Отсюда следует

$$-(L_1 i_1 - L_1 i_{01}) = L_2 i_2, \text{ или } L_2 i_2 + L_1 i_1 = L_1 i_{01} = \text{const}.$$

Для этого случая по отношению к направлению обхода оба потока положительны – формулировка закона сохранения потока выполняется. Ее можно применить, например, для установления соотношения между мгновенными значениями токов в катушках. Проиллюстрируем это.

Задача 5. Конденсатор емкостью C , заряженный до напряжения U_0 , разряжается через катушку индуктивностью L_1 (рис.1). Какой максимальный ток можно получить в катушке индуктивностью L_2 , если замкнуть ключ K в момент, когда ток в катушке индуктивностью L_1 максимален?

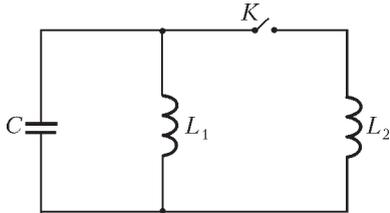


Рис. 1

Решение. Моменту замыкания ключа соответствует максимум тока в первой катушке, значит, конденсатор в этот момент полностью разряжен. Из закона сохранения энергии получаем

$$\frac{CU_0^2}{2} = \frac{L_1 I_{1\max}^2}{2},$$

откуда

$$I_{1\max} = \sqrt{\frac{C}{L_1}} U_0.$$

После замыкания ключа конденсатор перезаряжается, ток через первую катушку убывает, а ток через вторую катушку возрастает, но направлен по-другому. Поэтому запишем

$$-L_1 \frac{\Delta i_1}{\Delta t} = L_2 \frac{\Delta i_2}{\Delta t}.$$

Учитывая изменения токов в катушках, получим закон сохранения магнитного потока в виде

$$L_1 (I_{1\max} - i_1) = L_2 i_2, \text{ или } L_1 i_1 + L_2 i_2 = L_1 I_{1\max} = \text{const}.$$

Согласно первому правилу Кирхгофа, конденсатор будет заряжаться до выравнивая токов в катушках. При равенстве токов $i_1 = i_2 = I_3$ конденсатор будет максимально заряжен, значит,

$$L_1 I_{1\max} = (L_1 + L_2) I_3,$$

откуда

$$I_3 = \frac{L_1 I_{1\max}}{L_1 + L_2}.$$

В последующую четверть периода ток через вторую катушку будет продолжать увеличиваться до своего максимального значения, равного

$$I_{2\max} = 2I_3 = \frac{2\sqrt{L_1 C}}{L_1 + L_2} U_0.$$

Задача 6. В момент, когда ток в катушке индуктивностью L_1 (рис.2) был I_1 , ключ K замкнули. Какое количество теплоты выделится в резисторе R после замыкания ключа? Индуктивность L_2 второй катушки считать известной.

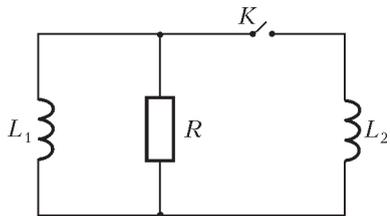


Рис. 2

Решение. Ток через резистор будет проходить до выравнивания токов в катушках (по первому правилу Кирхгофа). Этому моменту соответствует нулевое падение напряжения на резисторе, а значит, и нулевая ЭДС индукции. Дальше токи в катушках останутся неизменными. По закону сохранения потока магнитной индукции,

$$(L_1 + L_2) I_2 = L_1 I_1,$$

откуда

$$I_2 = \frac{L_1}{L_1 + L_2} I_1.$$

Тепловая энергия, выделившаяся в резисторе, определяется убылью энергии магнитного поля при переходе из началь-

го состояния в состояние с одинаковыми токами в катушках:

$$\frac{L_1 I_1^2}{2} - \frac{L_1 + L_2}{2} I_2^2 = Q.$$

Подставляя сюда выражение для I_2 , получим

$$Q = \frac{L_1 L_2 I_1^2}{2(L_1 + L_2)}.$$

Задача 7. В схеме на рисунке 3 величины \mathcal{E} , L_1 , L_2 и R заданы. Сначала замыкают ключ K_1 , а через некоторое время, когда ток через резистор достигает значения I_0 , замыкают ключ K_2 . Определите установившиеся значения токов через катушки. Внутреннее сопротивление источника пренебрежимо мало.

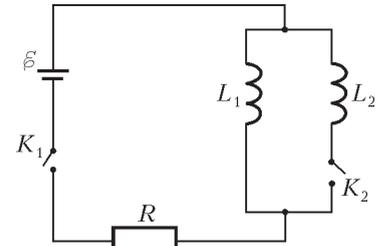


Рис. 3

Решение. Ток через резистор будет нарастать до значения $I = \frac{\mathcal{E}}{R}$. В соответствии с первым правилом Кирхгофа, он будет складываться из токов, проходящих через катушки:

$$\frac{\mathcal{E}}{R} = I_1 + I_2.$$

Из одинаковости мгновенных значений ЭДС индукции на параллельных катушках следует закон сохранения магнитного потока:

$$L_1 I_1 - L_2 I_2 = L_1 I_0.$$

Решая полученную систему уравнений, найдем искомые токи:

$$I_1 = \frac{L_1 I_0 + L_2 \mathcal{E}/R}{L_1 + L_2}, \quad I_2 = \frac{L_1}{L_1 + L_2} \left(\frac{\mathcal{E}}{R} - I_0 \right).$$

Упражнения

1*. Равномерно заряженное кольцо радиусом R с линейной плотностью заряда ρ движется соосно аксиально-симметричному магнитному полю со скоростью v . Радиальная составляющая индукции магнитного поля на расстоянии r от оси равна B_r . Определите момент сил, действующих на кольцо. Докажите, что приращение момента импульса кольца пропорционально приращению потока магнитной индукции через него.

2. Сверхпроводящий виток радиусом $R = 3$ см вносят в неоднородное магнитное поле соленоида. При этом в некоторой точке A сила тока в витке оказывается равной $I_A = 10$ А. При смещении витка на расстояние $l = 1$ см ток в нем уменьшается на 1%. С какой силой действовало на виток магнитное поле соленоида в точке A ? Индуктивность витка можно вычислить по формуле $L = \mu_0 \pi R/2$, где μ_0 – магнитная постоянная.

3. При замкнутом ключе K (рис.4) ток в катушке индуктивностью L_1 равен I_1 , а ток в катушке индуктивностью L_2 равен I_2 . Определите, в каких пределах будут меняться токи в катушках после размыкания ключа.

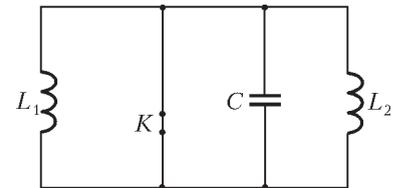


Рис. 4