

# Гравитационное «отталкивание»

**В. ВОРОНОВ**

**ЗАКОН ВСЕМИРНОГО ТЯГОТЕНИЯ** ОТНОСИТСЯ К ЧИСЛУ фундаментальных физических законов. Казалось бы, нет основания сомневаться в справедливости его основного тезиса о взаимном притяжении тел в природе. Однако существуют ситуации, в которых всемирное тяготение приводит к совершенно неожиданным эффектам. Вот об этих необычных случаях и хотелось бы поговорить.

Вообразим бесконечную вселенную, заполненную водой. Как будут взаимодействовать друг с другом различные тела в этой вселенной? Вроде бы, ответ очевиден: они будут притягиваться, подчиняясь закону всемирного тяготения. Но... не стоит торопиться с выводами. Давайте разберем несколько частных случаев.

Для начала исследуем взаимодействие двух свинцовых дробинки. Сразу стоит оговориться, что термин «взаимодействие» здесь не очень подходит, так как на дробинки действуют не только силы взаимного гравитационного притяжения, но и гравитация вселенной, и силы упругости водной среды. В первую очередь, постараемся учесть все силы, имеющие гравитационную природу.

**Учет гравитационного взаимодействия.** Рассмотрим силы, действующие на дробинку 1 (рис. 1). Проведем через ее центр

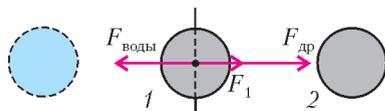


Рис. 1

плоскость, перпендикулярную линии, соединяющей обе дробинки. Она разделит вселенную на две полувселенные. Для удобства назовем их левой и правой. Эти две полувселенные симметричны относительно разделяющей их плоскости, но в правой есть дополнительная дробинка 2. Симметричные части полувселенных действуют на дробинку 1 с совершенно равными силами притяжения. Результирующая сила является итогом действия двух различающихся сферических элементов. В правой части это дробинка, а в левой – вода в объеме дробинки. Так как масса дробинки больше массы соответствующего элемента воды, то полная сила  $\vec{F}_1$ , действующая на дробинку 1, будет направлена вправо, но окажется меньше силы гравитационного притяжения к дробинке 2. Рассчитаем эту силу:

$$\begin{aligned} F_1 &= F_{др} - F_{воды} = G \frac{m_{др} m_{др}}{r^2} - G \frac{m_{др} m_{воды}}{r^2} = \\ &= G \frac{m_{др}}{r^2} (m_{др} - m_{воды}) = G \frac{m_{др}^2}{r^2} \left( 1 - \frac{\rho_{воды}}{\rho_{др}} \right), \end{aligned}$$

где  $r$  – расстояние между дробинками.

Легко показать, что эта формула в случае разных по массе дробинки преобразуется к виду

$$F_1 = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \left( 1 - \frac{\rho_{воды}}{\rho_{др}} \right),$$

а в случае взаимодействия частиц любого вещества в любой бесконечной среде принимает вид

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \left( 1 - \frac{\rho_{среды}}{\rho_{вещества}} \right).$$

Выражение, стоящее до скобок, полностью совпадает с законом всемирного тяготения, и если плотность среды положить равной нулю, то мы получаем стандартную формулировку закона. (Что и должно произойти, поскольку в этом случае формула описывает гравитационное взаимодействие тел в вакууме.)

Если плотность среды постепенно увеличивать, то сила взаимного притяжения будет уменьшаться, пока не обратится в ноль при равенстве плотностей среды и вещества. Если же плотность среды будет больше плотности помещенных в нее элементов вещества, то сила станет отрицательной, что соответствует отталкиванию этих элементов. Так, два деревянных шарика в водной вселенной будут отталкиваться с силой

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \left| 1 - \frac{\rho_{воды}}{\rho_{дерева}} \right|.$$

Таким образом, тяготение способно породить *отталкивание!*

Этот эффект взаимного отталкивания можно пояснить, вводя в рассмотрение «поля», порождаемые внесением в бесконечную однородную среду элементов вещества с иной плотностью. Появление более плотного вещества приводит к созданию «поля» тяготения. Причем тяготение создается только за счет «избыточной» плотности в объеме вещества. Если же плотность вещества меньше плотности среды, то возникает «поле» отталкивания. Особенность этих «полей» в том, что они проявляют свои свойства вне зависимости от того, на какое вещество (с плотностью большей или меньшей плотности среды) они действуют. Напряженность такого «поля» можно рассчитать по формуле (речь идет о центральном поле)

$$E = G \frac{m_{вещества}}{r^2} \left| 1 - \frac{\rho_{среды}}{\rho_{вещества}} \right|.$$

Теперь попробуем исследовать более сложный случай. До сих пор мы рассматривали элементы вещества, имеющие одну и ту же плотность. А как будут взаимодействовать тела с различными плотностями? Для определенности выберем деревянный шарик и свинцовую дробинку и воспользуемся понятиями «полей» отталкивания и тяготения. Дробинка, имея избыточную плотность, создает «поле» тяготения и поэтому будет притягивать деревянный шарик (рис. 2). А

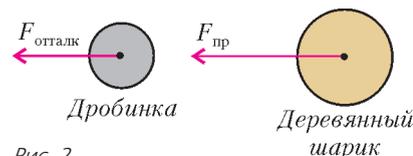


Рис. 2

этот шарик, обладая недостаточной плотностью, создает «поле» отталкивания и потому будет отталкивать свинцовую дробинку. Таким образом, силы, действующие на дробинку и шарик, будут направлены *в одну сторону*. Можно показать, что в этом случае модуль каждой силы, при соответствующей замене индексов 1 (для дробинки) и 2 (для шарика), рассчитывается по формуле

$$F_{12} = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \left| 1 - \frac{\rho_{среды}}{\rho_2} \right|.$$

Но нарушение третьего закона Ньютона (силы не только не направлены навстречу друг другу, но, в общем случае, и не равны по модулю), как и закона всемирного тяготения, только кажущееся. Дело в том, что силы, описываемые последней формулой, не являются силами *взаимодействия*. Наряду с гравитационным взаимодействием тел эта формула учитывает гравитационное влияние вселенной, порожденное ее асимметрией по отношению к каждому из тел. И различие в силах «взаимодействия» порождается именно различным влиянием вселенной на находящиеся в ней элементы.

Подводя промежуточный итог, можно заметить, что учет всех сил, имеющих гравитационную природу, показывает, что закон всемирного тяготения вызывает не только притяжение тел. Но необходимо помнить, что мы пока не принимали во внимание наличие сил упругости водной среды. Этим и займемся.

**Учет архимедовой силы.** Кажется вполне очевидным, что в однородной водной вселенной давление во всех точках одинаково. Архимедова сила возникает только тогда, когда появляется неоднородное включение. Рассчитаем эту силу для случая, когда она вызывается появлением свинцовой дробинки.

Рассмотрим произвольно выбранный элемент воды (рис.3). Он находится в состоянии покоя, а значит, сила, действующая

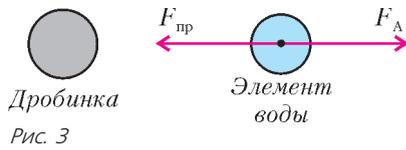


Рис. 3

щая со стороны «поля» тяготения дробинки, полностью компенсируется архимедовой силой. Найдем эту силу:

$$F_A = F_{пр} = m_{эл-та\ воды} E_{«поля»} = \rho_{воды} V_{эл-та\ воды} E_{«поля»}.$$

Очевидно, что эта формула, так напоминающая классический школьный вариант  $F_A = \rho V g$ , может использоваться и для «поля» отталкивания (в этом случае она также будет направлена против «поля»).

А теперь можно попробовать учесть все силы. Вернемся к случаю двух свинцовых дробинки. Полная сила  $\vec{F}_1$ , действующая на первую дробинку, равна векторной сумме силы, вызванной «полем» второй дробинки, и архимедовой силы (рис.4):

$$\begin{aligned} F_1 &= F_{«поля»2} - F_A = m_1 E_{«поля»2} - \rho_{воды} V_1 E_{«поля»2} = \\ &= \left(1 - \frac{\rho_{воды}}{\rho_{др}}\right) m_1 E_{«поля»2} = \left(1 - \frac{\rho_{воды}}{\rho_{др}}\right) m_1 G \frac{m_2}{r^2} \left(1 - \frac{\rho_{воды}}{\rho_{др}}\right) = \\ &= G \frac{m_1 m_2}{r^2} \left(1 - \frac{\rho_{воды}}{\rho_{др}}\right)^2. \end{aligned}$$

Полная симметрия этой формулы относительно индексов показывает, что полная сила, действующая на вторую дробинку, будет по величине такой же:  $F_2 = F_1$ . Наличие

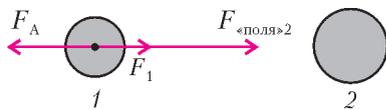


Рис. 4

квадрата выражения в скобках в этой формуле тоже не случайно. Если плотность среды оказывается больше плотности вещества, то знак силы не меняется. А значит, два

деревянных шарика в водной вселенной тоже будут притягиваться. И тогда последнюю формулу можно переписать в более общем виде:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \left(1 - \frac{\rho_{среды}}{\rho_{вещества}}\right)^2.$$

Однако и эту формулу нельзя использовать для расчета сил, действующих на тела с различными плотностями. Вернемся к ситуации с деревянным шариком и свинцовой дробинкой. Найдем силу, действующую на свинцовую дробинку.

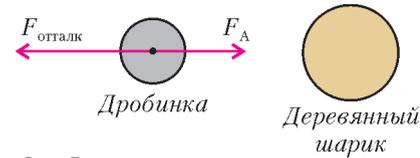


Рис. 5

Деревянный шарик создает силу отталкивания, но в противоположную сторону действует архимедова сила (рис.5). Полную силу  $\vec{F}_{др}$  найдем как векторную сумму соответствующих сил:

$$\begin{aligned} F_{др} &= F_A - F_{оттгак} = \rho_{воды} V_{др} E_{оттгак} - m_{др} E_{оттгак} = \\ &= \left(\frac{\rho_{воды}}{\rho_{др}} - 1\right) m_{др} E_{оттгак} = \\ &= \left(\frac{\rho_{воды}}{\rho_{др}} - 1\right) m_{др} G \frac{m_{дерева}}{r^2} \left(1 - \frac{\rho_{воды}}{\rho_{дерева}}\right) = \\ &= G \frac{m_{дерева} m_{др}}{r^2} \left(\frac{\rho_{воды}}{\rho_{др}} - 1\right) \left(1 - \frac{\rho_{воды}}{\rho_{дерева}}\right). \end{aligned}$$

Мы видим, что  $F_{др} < 0$ , а значит, сила отталкивания больше архимедовой силы. Таким образом, деревянный шарик и свинцовая дробинка будут отталкиваться друг от друга. Можно показать, что такая же по модулю, но противоположно направленная сила будет действовать и на деревянный шарик.

Итак, общая формула, описывающая «взаимодействие» двух тел в бесконечной жидкой среде, имеет следующий вид:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \left(\frac{\rho_{вещ1} - \rho_{среды}}{\rho_{вещ1}}\right) \left(\frac{\rho_{вещ2} - \rho_{среды}}{\rho_{вещ2}}\right).$$

Очевидно, что в частном случае, когда плотности тел одинаковы, вне зависимости от их соотношения с плотностью среды эти тела будут притягиваться друг к другу ( $F > 0$ ). Притяжение будет наблюдаться и в том случае, когда плотности не равны, но *обе* либо больше, либо меньше плотности среды. Тогда выражения в скобках в последней формуле будут одного знака, и сила будет положительной. Отталкивание тел возможно лишь тогда, когда плотность одного тела больше плотности среды, а плотность другого – меньше. В этом случае сила меняет знак на отрицательный, что говорит об отталкивании тел. Если же плотность одного из тел совпадает с плотностью среды, то сила обращается в ноль.

# Загадки магнитной стрелки

И. ЛЕЕНСОН

**Т**РУДНО НАЙТИ ЧЕЛОВЕКА, НИ РАЗУ НЕ ВИДЕВШЕГО компас. Этот простенький прибор необходим и путешественнику, и охотнику, и даже грибнику, идущему за грибами в незнакомый лес. Какие же тайны может скрывать в себе такой прибор? Синий конец стрелки компаса показывает на север, красный показывает на юг – казалось бы, вот и весь секрет. Оказывается, не все так просто, и с этого лишь начинается наша серия загадок про магнитную стрелку.

**Загадка первая.** *Всегда ли синий конец стрелки компаса показывает на север?*

Далее. Многие видели подковообразные или полосовые магниты. Если полосового магнита нет, но есть сильный подковообразный, с его помощью легко намагнитить стальную полоску (или просто длинную иголку), сделав из нее полосовой магнит. Концы магнита, где обнаруживаются наиболее сильные магнитные действия, называют полюсами магнита. Слово «полюс» происходит от греческого *pólos* – ось, поэтому в дальнейшем вместо «конец стрелки» или «конец магнита» будем говорить «полюс». У каждого магнита, как и у земного шара, есть два полюса: северный и южный, только эти полюса называются магнитными. По традиции, ту половину магнитной стрелки, которая показывает на север, окрашивают в синий цвет и ее конец называют северным полюсом магнита; его обозначают буквой N. Ту же половину магнитной стрелки, которая показывает на юг, окрашивают в красный цвет и ее конец называют южным полюсом магнита; его обозначают буквой S. Так же окрашивают и обозначают любые постоянные магниты. Такое обозначение пришло в русский язык из голландского во времена правления Петра I.

А при чем тут голландцы? Дело в том, что когда-то Голландия была владычицей морей и соперничала с Англией. Так, 21 августа 1673 года около голландского острова Тексель состоялось морское сражение между голландским и объединенным англо-французским флотами; в это время шла уже третья англо-голландская война (1672–1674). В бою, длившемся весь день, голландцы одержали победу, хотя численный перевес был на стороне противника. Голландия захватила в те времена обширные колонии, особенно в Юго-Восточной Азии. До сих пор в государстве Суринам в Южной Америке голландский – это официальный язык.

Если у вас есть два магнита или один магнит и компас (его стрелка – тот же магнит, только маленький и легкий), то легко убедиться в том, что синий полюс одного магнита притягивает красный полюс другого, а одинаково раскрашенные полюса друг от друга отталкиваются. Если подвесить полосовой магнит точно за его середину на нитке подальше от железных предметов, нитку к чему-нибудь привязать и подождать, пока магнит перестанет раскачиваться, то мы увидим, что полоска повернулась так же, как и стрелка компаса. Иными словами, одним концом она будет

показывать на север, другим – на юг. Значит, наша намагниченная полоска – тоже компас, только большой и неудобный.

Теперь – следующая загадка.

**Загадка вторая.** *Что будет, если намагниченную полоску разрезать пополам точно посередине?*

И еще одна загадка.

**Загадка третья.** *Можно ли намагнитить шар?*

Если есть загадки, должны быть и разгадки. Действительно, откуда стрелка компаса знает, где у Земли север, а где юг? Оказывается, Земля – тот же магнит, только шарообразный. Пришли к такому пониманию люди далеко не сразу (как и не сразу догадались, что наша Земля не плоская, а шарообразная). Вот как это произошло.

Древнегреческий философ Фалес в VI веке до новой эры описал удивительное явление, известное людям, вероятно, задолго до этого. Это явление – магнетизм. По одной из легенд, такое название оно получило от греческого города Магнезия (ныне он называется Манисса и находится в Турции), где был найден минерал, способный притягивать железо. Сейчас этот минерал называется магнетитом, или магнитным железняком; он представляет собой соединение железа и кислорода. А вот кто и когда изобрел компас, неизвестно, хотя это изобретение – одно из величайших открытий человека. Возможно, кто-то случайно обнаружил, что если кусок магнетита вытянутой формы подвесить на нитке или пустить плавать на деревянной дощечке, то один его конец всегда будет показывать на север, а другой – на юг, как бы мы ни крутили нитку или дощечку. Раньше считали, что компас изобрели китайцы чуть ли не пять тысяч лет назад, однако первый китайский документ, в котором упоминается компас, датирован XI веком новой эры. Во всяком случае, еще в Средние века этим старинным открытием широко пользовались мореплаватели, определяя по примитивному компасу свой путь в открытом море. Со временем обнаружилось, что кусок магнетита может передавать свое «волшебное» свойство стальным предметам – например, иголке, и из нее получится более удобный компас.

В 1269 году француз Пьер де Мерикур, по прозвищу Перегрин, написал книжку «Письма о магните», в которой собрал различные сведения о магните – как известные ранее, так и открытые им лично. Именно Перегрин, экспериментируя с магнитами, обнаружил, что у них есть два особых конца – два полюса. Поскольку они показывали на север и на юг, их так и назвали северным и южным полюсами магнита. Когда Перегрин подвесил на нитках близко друг к другу две магнитные стрелки, оказалось, что их одноименные полюса отталкиваются, а разноименные притягиваются. Перегрин обнаружил еще одно важнейшее свойство магнитов: если



Старинный китайский компас



Уильям Гильберт

разломить постоянный магнит на две части, получатся два новых магнита с двумя полюсами – северным и южным – у каждого. Получить какой-нибудь один полюс не удалось ни Перегрину, ни кому-либо после него. Это и есть ответ на вторую загадку. Почему так получается, будет рассмотрено во второй части статьи.

А теперь – ответ на третью загадку: намагнитить шар можно, и это обнаружил английский физик и врач Уильям Гильберт. В 1600 году он опубликовал книгу «О магните, магнитных телах и о большом магните – Земле». В ней он рассказал о своих экспериментах с магнитами. Вот что он обнаружил:

Магнит обладает в различных частях различной притягательной силой; на полюсах эта сила наиболее заметна. Магнит имеет два полюса: северный и южный, они различны по своим свойствам; разноименные полюса притягиваются, одноименные отталкиваются. Магнит, подвешенный на нитке, располагается определенным образом в пространстве, указывая север и юг. Невозможно получить магнит с одним полюсом: сколько ни разламывай магнит, каждый вновь полученный кусочек всегда будет иметь два полюса. Земной шар – большой магнит. При сильном нагревании магнитные свойства у природных и искусственных магнитов исчезают. Магниты оказывают свое действие через стекло, кожу и воду.

Но самый замечательный опыт Гильберт провел с намагниченным шаром, выточенным из минерала магнетита. У него тоже оказались два полюса – северный и южный, и, находясь около этого шара, стрелка компаса всегда показывала на эти полюса, т.е. вела себя так же, как в отношении Земли. Поэтому Гильберт назвал свой шар «тереллой», т.е. маленькой землей. Слово это происходит от латинского terra – земля; в русском языке немало слов с этим корнем: территория, терраса (уступ на склоне горы), террариум (помещение для земноводных), террикон (куча земли и пустой породы), терракота (обожженная глина), терренкур (размеченные дорожки для лечебной ходьбы, обычно в гористой местности), а также terra инкогнита – неведомая земля. Гильберт впервые догадался, что земной шар – тоже магнит, поэтому намагниченная стрелка компаса и показывает на полюса этого гигантского магнита.

А всегда ли стрелка компаса одним концом показывает на север, а другим – на юг? Оказывается – и это ответ на первую загадку, – не всегда. Если идти (ехать, плыть, лететь) к северному или южному географическому полюсу, то пока

путешественник от него далеко, со стрелкой компаса обычно никаких неожиданностей не происходит. Но при приближении к полюсу стрелка начинает понемногу «сходить с ума». И моряки давно это заметили. В начале XVI века, когда была открыта Америка и корабли начали заплывать далеко на север, обнаружилось странное явление. Моряки знали, что в ясную ночь никакой компас им не нужен: направление на север показывает Полярная звезда. Но когда они сравнили это направление с показанием компаса, обнаружилось удивительное явление: чем дальше они заплывали на север, тем сильнее синяя стрелка компаса отклонялась от севера! Угол между осью стрелки компаса и точным направлением на полюс (оно совпадает с географическим меридианом) назвали магнитным склонением. Это склонение различно в разных точках земного шара. Что же происходит с компасом на Северном полюсе? Оказывается, синяя часть стрелки показывает в сторону северной части Канады. Там, на некоторой глубине, и находится в настоящее время один из магнитных полюсов Земли; другой же магнитный полюс расположен в Антарктике.

Почему так происходит, в точности неизвестно. Более того, установлено, что магнитные полюса Земли медленно передвигаются. Так, в Париже в 1580 году наблюдалось максимальное магнитное склонение к востоку от меридиана, оно составляло  $9,5^\circ$ . А через 230 лет, в 1810 году, было зафиксировано уже максимальное склонение в другую сторону – к западу от меридиана, и составило оно целых  $22,3^\circ$ . Значит, магнитные полюса Земли «гуляют», перемещаясь с места на место. Более того, очень редко – раз в тысячи лет – они меняются местами. Ученые не исключают, что в ближайшие сто-двести лет такое может вновь произойти. И трудно предсказать, как это отразится на живых существах.

Магнитное склонение часто имеет и местные отклонения – иногда очень сильные; их называют девиацией (от латинского deviatio – уклонение от пути). Например, знаменитая Курская магнитная аномалия вызвана залежами магнитной руды, которая действует на стрелку. Маленькие «магнитные аномалии» легко обнаружить и у себя дома, если неподалеку от компаса будут находиться железные предметы. Можно только представить, сколько неприятностей и даже несчастий приносили мореплавателям такие «местные аномалии». Ведь даже на деревянных парусных судах всегда было много железных предметов: пушки, ядра, якоря. Положение усугубилось после того, как на смену парусным судам пришли железные пароходы. В 1854 году страшное несчастье потрясло Великобританию: на восточном берегу Ирландии разбилось судно «Тэйлор» водоизмещением 2000 тонн с несколькими сотнями эмигрантов, направлявшихся в Америку. Большая часть пассажиров и команды погибла. А ведь это было новое судно, легко выдержавшее двухдневный шторм в начале плавания. Расследование показало, что виной всему – неправильное показание компаса, вызванное девиацией. Надо сказать, что современные компасы имеют специальные приспособления для уничтожения девиации.

А вот и последняя загадка. Если синий полюс магнита называют северным, а красный – южным, то синий конец стрелки компаса должен показывать не на север, а на юг: ведь притягиваются только разноименные полюса! Почему же синяя половинка стрелки компаса показывает не на юг, а на север? Если синий конец стрелки показывает на север, следовательно, там находится южный магнитный полюс Земного шара, а в южном полушарии – северный магнитный полюс!?

**Загадка четвертая.** Какой же магнитный полюс находится на севере земного шара?

*(Продолжение следует)*

# «Нулевые» ЛИНЗЫ

**В. ДРОЗДОВ**

ЛИНЗОЙ НАЗЫВАЮТ ПРОЗРАЧНОЕ ТЕЛО, ОГРАНИЧЕННОЕ двумя поверхностями, преломляющими световые лучи, которое способно создавать оптические изображения предметов. Наиболее просты в изготовлении линзы со сферическими поверхностями. Если толщина линзы значительно меньше радиусов кривизны ее поверхностей, линза называется *тонкой*. Как известно, оптическая сила такой линзы  $D$  находится по формуле

$$D = (n - 1) \left( \pm \frac{1}{R_1} \pm \frac{1}{R_2} \right),$$

где  $n$  – относительный показатель преломления материала линзы,  $R_1$  и  $R_2$  – радиусы кривизны сферических поверхностей. Перед слагаемыми в скобке знаки выбираются так: для выпуклой поверхности – «плюс», для вогнутой – «минус».

Приведенному определению линзы удовлетворяет, например, прозрачное тело, изображенное на рисунке 1. Одна его поверхность выпуклая, другая – вогнутая, радиусы кривизны поверхностей равны:  $R_1 = R_2 = R$ , а толщина мала:  $l \ll R$ . (Разумеется, при этом центры кривизны обеих поверхностей не совпадают, а смещены на  $l$ .) Значит, в соответствии с приведенной формулой, оптическая сила этой линзы равна нулю. Поскольку данная линза не будет ни собирающей, ни рассеивающей, назовем ее «нулевой».

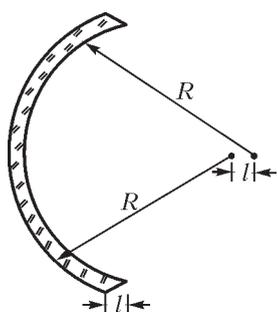


Рис. 1

Очевидно, что двояковыпуклая тонкая линза «нулевой» быть не может. Если, конечно, не поместить ее в жидкость с показателем преломления, равным показателю преломления стекла. Но здесь мы молчаливо предполагаем, что наша линза находится в воздухе.

Интересно, а не существует ли двояковыпуклая «нулевая» линза среди *толстых* линз? Допустим, что существует, и

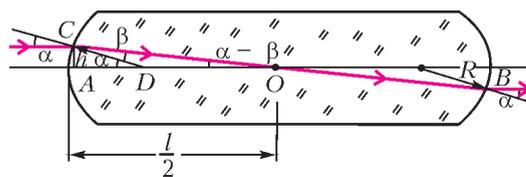


Рис. 2

изобразим ее такой, как показано на рисунке 2. Возьмем радиусы кривизны сферических поверхностей одинаковыми:  $R_1 = R_2 = R$ , а толщину линзы обозначим  $l$ . Очевидно, что линза симметрична относительно плоскости, проходящей перпендикулярно ее главной оптической оси через точку  $O$  – середину отрезка  $AB$ .

Пусть на линзу луч, параллельный главной оптической оси и находящийся на расстоянии  $h \ll R$  от нее (параксиальный луч). Если после преломления луч пройдет через точку  $O$ , то, по соображениям симметрии, из линзы он выйдет параллельно входящему лучу. Это означает, что при таком условии толстая линза фокусировать лучи не будет, т.е. ее оптическая сила будет равна нулю.

Рассчитаем толщину нашей толстой «нулевой» линзы, т.е. выразим  $l$  через  $R$  и  $n$ . При этом синусы и тангенсы малых углов заменим значениями этих углов в радианной мере. По закону преломления луча, в точке  $C$  имеем  $\alpha = n\beta$ . Из треугольников  $AOC$  и  $ADC$  находим

$$\alpha - \beta = \frac{h}{(l/2)} = \frac{2h}{l}, \quad \alpha = \frac{h}{R}.$$

Делим почленно левые и правые части этих равенств:

$$1 - \frac{\beta}{\alpha} = \frac{2R}{l}.$$

Из закона преломления выражаем отношение углов  $\beta$  и  $\alpha$ :

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{n}.$$

Дальнейшее ясно:

$$1 - \frac{1}{n} = \frac{2R}{l}, \quad \text{и} \quad l = \frac{2Rn}{n-1}.$$

Если взять, например, значение  $n = 1,5$ , то окажется, что  $l = 6R$ , т.е. «нулевая» линза будет весьма толстой.

Оказывается, линзы с нулевой оптической силой (афокальные линзы) находят свое практическое применение. Такие линзы хотя и не рассеивают и не собирают световые пучки, но создают aberrации, т.е. искажения оптических изображений предметов по сравнению с самими предметами. Поэтому их используют в сложных объективах в качестве компенсаторов aberrаций.

## КВАНТЫ ИНТЕРНЕТА

### Как нарисовать прямую?

(Начало см. на 2-й странице обложки)

В 1784 году Дж. Уатт изобрел механизм, названный впоследствии «паралелограммом Уатта» (рис. 1). На показанных пунктиром участках траектории середина среднего звена отклоняется от прямой довольно сильно, но участок, показанный сплошной линией, дает достаточную во многих практических задачах точность.

Другое приближенное решение предложил П.Л.Чебышёв. Если подобрать длины звеньев так, как показано на рисунке 2, то отмеченная точка движется по линии, которая хотя и не является отрезком прямой, но на глаз почти неотличима от отрезка (рис. 3). Используя этот механизм («прямоугольник Чебышё-

ва»), а также «лямбда-образный механизм Чебышёва», можно изготовить «табуретку» (рис. 4), «сидение» которой перемещается почти параллельно земле.

В 1864 году М.Поселье предложил механизм для точного рисования отрезка, основанный на свойствах инверсии (рис. 5).

При движении круга, касающегося изнутри окружности вдвое большего радиуса (рис. 6), любая точка границы круга (в частности, точки  $P$  и  $H$ ) движется по диаметру неподвижной окружности. Это факт (теорема Коперника) используется в механизме рисунка 7: точка  $P$  движется вертикально.

Аналогичный шарнирный механизм (рис. 8, 9) реализует точное параллельное перемещение отрезка: правое нижнее звено движется горизонтально.

Материал подготовили М.Панов, А.Спивак

# О лемнискате Бернулли

А.АКОПЯН

## Что такое лемниската?

Лемнискатой с фокусами  $F_1, F_2, \dots, F_n$  называется кривая на плоскости, обладающая тем свойством, что для любой точки на ней произведение расстояний до фокусов постоянно. На рисунке 1 приведено семейство лемнискат с тремя фокусами.

Уравнение лемнискаты с  $n$  фокусами имеет степень  $2n$ .

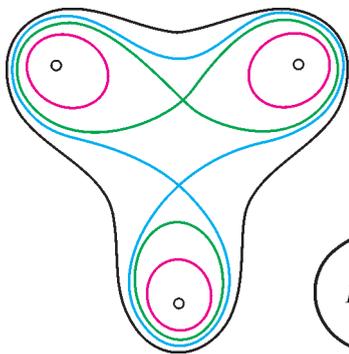


Рис. 1

**Упражнение 1.** Напишите это уравнение.

Лемнискаты с двумя фокусами называются *о-валами Кассини*. Среди них наибольший интерес представляет *лемниската Бернулли*

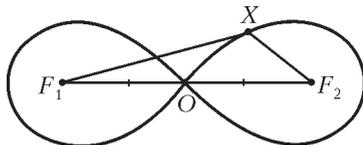


Рис. 2

нулли (рис.2) — такая кривая, что для любой точки на ней произведение расстояний до фокусов равно квадрату половины расстояния между ними:  $F_1X \cdot F_2X = \left(\frac{F_1F_2}{2}\right)^2$ . Очевидно, что эта лемниската проходит через середину отрезка с концами в своих фокусах. Эта точка называется *узловой*, или *двойной точкой* лемнискаты.

Лемниската Бернулли обладает множеством очень интересных свойств. Например, площадь, ограничиваемая ею, равна  $\frac{1}{2} F_1F_2^2$ . Здесь мы докажем несколько других интересных свойств, при этом постараемся использовать только «геометрические аргументы», т.е. доказывать факты по возможности без вычислений.

## Как построить лемнискату Бернулли?

Существует очень простой способ нарисовать лемнискату Бернулли с помощью следующей конструкции из трех скрепленных шарнирами «палочек». Первые две палочки  $F_1A$  и  $F_2B$ , прикрепленные к точкам  $F_1$  и  $F_2$  соответственно, имеют длину  $\frac{1}{\sqrt{2}} F_1F_2$ , причем точки  $A$  и  $B$  всегда лежат по разные стороны от прямой  $F_1F_2$ . Третья палочка соединяет точки  $A$  и  $B$  и имеет длину  $F_1F_2$  (рис.3).

Рис. 3

Оказывается, что при

«вращении» этих палочек *середина  $AB$  будет двигаться по лемнискате Бернулли с фокусами  $F_1$  и  $F_2$* .

Давайте докажем это. Обозначим середину  $AB$  через  $X$  (рис. 4). Заметим, что  $F_1AF_2B$  — равнобокая трапеция. Кроме того, треугольники  $AF_1X$  и  $ABF_1$  подобны, поскольку угол  $A$  у них общий, а  $\frac{AF_1}{AX} = \frac{AB}{AF_1} = \sqrt{2}$ . По тем же

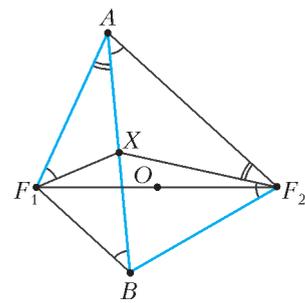


Рис. 4

самым причинам подобны и треугольники  $BXF_2$  и  $BF_2A$ , так как у них общий угол  $B$  и отношение длин сторон при угле  $B$  равно  $\sqrt{2}$ . Поэтому мы можем выписать следующую цепочку равенств углов:

$$\angle AF_1X = \angle ABF_1 = \angle BAF_2 = \angle XF_2B.$$

Обратим также внимание на то, что углы при  $A$  и  $F_2$  у трапеции  $F_1AF_2B$  равны, а поскольку равны и углы  $AF_1X$  и  $XF_2B$ , получаем, что равны и углы  $F_1AX$  и  $XF_2A$ . Следовательно, треугольники  $F_1AX$  и  $F_2AX$  подобны, откуда

$$\frac{F_1X}{AX} = \frac{AX}{XF_2} \Rightarrow XF_1 \cdot XF_2 = AX^2 = F_1O^2.$$

Итак, произведение расстояний от точки  $X$  до  $F_1$  и  $F_2$  равно квадрату половины расстояния между  $F_1$  и  $F_2$ . А значит, точка  $X$  движется по лемнискате Бернулли. Можно доказать, что траекторией точки  $X$  будет вся лемниската Бернулли. Интуитивно это понятно, поскольку точка  $X$  движется непрерывно и «появляется» во всех «крайних» точках лемнискаты.

**Упражнение 2.** Какова будет траектория точки  $X$ , если от конструкции потребовать, чтобы точки  $A$  и  $B$  всегда лежали по одну сторону от  $F_1F_2$ ?

Пусть  $O$  — середина отрезка  $F_1F_2$  — узловая точка лемнискаты. Обозначим через  $M$  и  $N$  середины отрезков  $F_1A$  и  $F_1B$  соответственно (рис.5). Сдвинем точку  $O$  на вектор  $\overrightarrow{NF_1}$ , получившуюся точку обозначим через  $O'$ . Заметим, что треугольники  $F_1MO'$  и  $NXO$  равны, кроме того, выполнено равенство

$$F_1M = F_1O' = \frac{1}{\sqrt{2}} F_1O.$$

Таким образом, точки  $M$  и

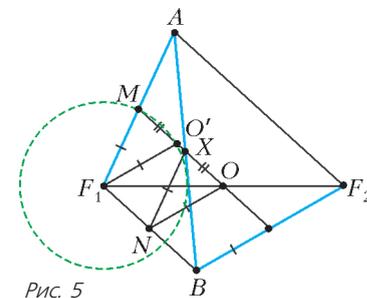


Рис. 5

$O'$  лежат на окружности с центром в  $F_1$  и радиусом  $\frac{1}{\sqrt{2}} F_1O$ . Из этого можно получить еще один элегантный способ построения лемнискаты Бернулли.

А именно, **метод Маклорена**. Давайте построим окружность с центром в одном из фокусов и радиусом  $\frac{1}{\sqrt{2}} F_1O$  (рис.6). Далее, на каждой секущей  $ABO$  (где  $A$  и  $B$  — это точки пересечения секущей и окружности) выберем такие точки  $X$  и  $X'$ , что

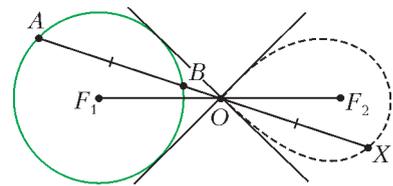


Рис. 6

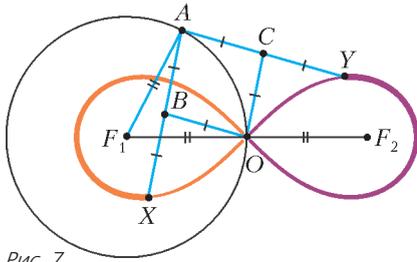


Рис. 7

Данная конструкция изображена на рисунке 7. Длина палочки  $F_1A$  равна  $F_1O$ . Точка  $A$  также является концом палочек  $AX$  и  $AY$ , длина каждой из которых равна  $\sqrt{2}F_1O$ . Кроме того, середины этих палочек – точки  $B$  и  $C$  – соединены с  $O$  палочками длины  $\frac{AX}{2}$ . При вращении точки  $A$  по окружности каждая из точек  $X$  и  $Y$  описывает половину лемнискаты Бернулли с фокусами  $F_1$  и  $F_2$ .

**Упражнение 3.** Докажите это.

**Лемниската и равносторонняя гипербола**

Гораздо более известной фигурой является гипербола – множество точек  $X$  таких, что величина  $|F_1X - F_2X|$  постоянна. Точки  $F_1$  и  $F_2$  называются фокусами гиперболы. Среди гипербол следует выделить *равностороннюю гиперболу* – множество точек  $X$  таких, что  $|F_1X - F_2X| = \frac{F_1F_2}{\sqrt{2}}$ .

**Упражнение 4.** Докажите, что уравнение  $y = \frac{1}{x}$  задает равностороннюю гиперболу, и найдите ее фокусы.

Оказывается, лемниската Бернулли является инверсным образом равносторонней гиперболы. Напомним, что такое инверсия.

**Определение.** Инверсией относительно окружности с центром в точке  $O$  и радиусом  $r$  называется преобразование плоскости, переводящее каждую точку  $X$  в точку  $X^*$ , лежащую на луче  $OX$  и такую, что  $OX \cdot OX^* = r^2$ .

Инверсия обладает одним очень удобным свойством – при инверсии окружности переходят в окружности или прямые. Подробнее про инверсию можно прочесть, например, в книге [1]. Мы же здесь докажем следующую лемму, которая пригодится нам в дальнейшем.

**Лемма.** Пусть  $A$  – проекция точки  $O$  на некоторую прямую  $l$ . Тогда при инверсии относительно окружности с центром  $O$  прямая  $l$  перейдет в окружность с диаметром  $OA^*$ , где  $A^*$  – инверсный образ точки  $A$ .

**Доказательство.** Пусть  $B$  – произвольная точка на прямой  $l$ , а  $B^*$  – ее инверсный образ (рис.8). Поскольку

$$OA^* = \frac{r^2}{OA} \text{ и } OB^* = \frac{r^2}{OB},$$

получаем, что треугольники  $OAB$  и  $OB^*A^*$  подобны. Следовательно, угол  $OB^*A^*$  прямой, и точка  $B^*$  лежит на окружности с диаметром  $OA^*$ . Стоит также отметить, что центром этой окружности будет точка  $O_1^*$ , инверсная точке  $O_1$ , симметричной  $O$  относительно прямой  $l$ .

Докажем теперь, что лемниската Бернулли с фокусами  $F_1$  и  $F_2$  и равносторонняя гипербола с

Рис. 8

фокусами  $F_1$  и  $F_2$  инверсны относительно окружности с центром в  $O$  и радиусом  $OF_1$ .

Для этого воспользуемся результатами, полученными при доказательстве корректности построения лемнискаты Бернулли с помощью трех палочек (см. рис.4). Обозначим через  $P$  точку пересечения прямых  $F_1A$  и  $F_2B$ , а через  $Q$  – точку, симметричную ей относительно прямой  $F_1F_2$  (рис.9).

Заметим, что

$$F_2Q - F_1Q = F_2P - F_1P = AP - F_1P = F_1A = \frac{F_1F_2}{\sqrt{2}}.$$

Значит, точки  $P$  и  $Q$  лежат на равносторонней гиперболе с центрами в  $F_1$  и  $F_2$ . Осталось показать, что точки  $X$  и  $Q$  инверсны относительно окружности с центром в  $O$  и радиусом  $OF_1$ . Для начала докажем, что треугольники  $F_1XO$  и  $PF_1O$  подобны.

Во-первых, заметим, что  $F_1XOB$  – трапеция, поэтому  $\angle OXF_1 + \angle XF_1B = 180^\circ$ , кроме того, выполнено равенство  $\angle AF_1O + \angle OF_1P = 180^\circ$ . А поскольку углы  $\angle XF_1B$  и  $\angle AF_1O$  равны, получаем, что равны и углы  $\angle OXF_1$  и  $\angle OF_1P$ .

Далее, поскольку углы  $\angle XF_2B$  и  $\angle XF_1A$  равны, то  $\angle XF_1P + \angle PF_2X = 180^\circ$ , т.е. четырехугольник  $PF_1XF_2$  вписанный. Следовательно,

$$\angle F_2F_1X = \angle F_2PX = \angle F_1PO.$$

Последнее равенство верно в силу того, что точки  $O$  и  $X$  симметричны относительно серединного перпендикуляра к  $F_1B$ .

Итак, треугольники  $F_1XO$  и  $PF_1O$  подобны по двум углам. Из этого следует, что углы  $\angle F_1OX$  и  $\angle F_1OP$  равны, а значит, точка  $Q$  лежит на луче  $OX$ . Кроме того, из подобия треугольников  $F_1XO$  и  $QF_1O$  (который симметричен  $\triangle PF_1O$ ) следует, что

$$\frac{OX}{OF_1} = \frac{OF_1}{OQ} \Rightarrow OX \cdot OQ = OF_1^2.$$

А это и означает, что точки  $Q$  и  $X$  инверсны относительно окружности с центром в  $O$  и радиусом  $OF_1$ .

Из рисунка 9 можно сделать еще одно наблюдение, а именно, что точки  $X$  и  $O$  лежат на окружности с центром в точке  $P$ . Оказывается, что эта окружность касается лемнискаты Бернулли (про две кривые говорят, что они касаются в некоторой точке, если касательные к кривым в этой точке совпадают). Давайте докажем это.

Рассмотрим прямую  $l$  – касательную к гиперболе в точке  $Q$  (рис. 10). Из леммы следует, что при инверсии относительно окружности с центром  $O$  и радиусом  $OF_1$  прямая  $l$  должна перейти в окружность  $\omega_l$ , проходящую через точку  $O$ , а также касающуюся лемнискаты в точке  $X$ , поскольку точка  $X$  инверсна  $Q$ . Из леммы следует также, что центр этой окружности лежит на прямой, проходящей через  $O$  и перпендикулярной  $l$ . Покажем, что эта прямая  $OP$  симметрична прямой  $OQ$  отно-

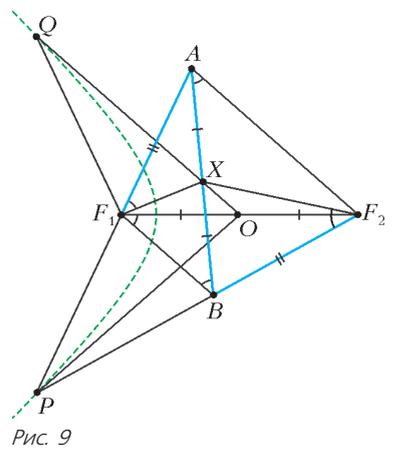


Рис. 9

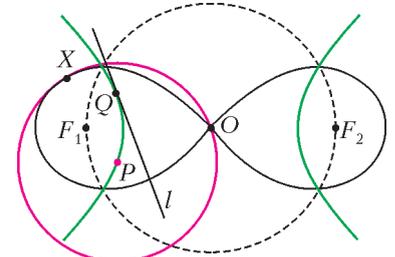


Рис. 10

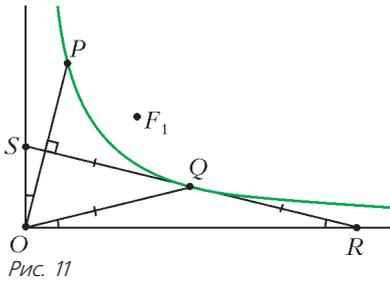


Рис. 11

сительно  $F_1F_2$ . Из этого будет следовать, что точка  $P$  является центром окружности  $\omega_l$ .

Перейдем в систему координат, в которой формула соответствующей гиперболы будет записываться как

$$y = \frac{1}{x}.$$

Пусть прямая  $l$  пересекает ось абсцисс и ось ординат в точках  $R$  и  $S$  соответственно (рис.11). Как известно, производная функции  $\frac{1}{x}$  в точке  $x_0$  равна  $-\frac{1}{x_0^2}$ . Отсюда легко получить, что точка  $Q$  является серединой отрезка  $RS$ , а  $OQ$  – медианой прямоугольного треугольника  $ROS$ . (Подробнее об этом можно прочитать в статье А.Заславского «Аффинная геометрия» в «Кванте» №1.) Следовательно, углы  $QOR$  и  $QRO$  равны. Но поскольку равны и углы  $POS$  и  $QOR$ , получаем, что прямая  $OP$  перпендикулярна  $RS$ . Что и требовалось.

Заметим также, что поскольку окружность  $\omega_l$  касается лемнискаты в точке  $X$ , радиус  $PX$  этой окружности будет нормалью (перпендикуляром к касательной) к лемнискате в точке  $X$  (рис.12). В силу того, что треугольник  $XPO$  равнобедренный, а прямые  $XO$  и  $PO$  симметричны относительно  $F_1O$ , можно выписать следующую цепочку равенств углов:  $\angle PXO = \angle XOP = 2\angle PO F_1$ . Это дает нам очень простой способ построения нормали к лемнискате Бернулли. А именно, для любой точки  $X$  проведем прямую, образующую с прямой  $OX$  угол  $2\angle XO F_1$ .

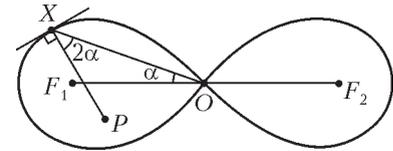


Рис. 12

Эта прямая и будет нормалью к лемнискате.

**Список литературы**

1. А.А. Заславский. *Геометрические преобразования*. – М.: МЦМНО, 2004.
2. Маркушевич А.И. *Замечательные кривые*. – М.: Гостехиздат, 1952.

# Формула крючков

**А. СПИВАК**

*Что для нас – головоломка,  
духом тайны разум будит –  
очевидно, для потомка  
просто школьным курсом будет.*

И.Губерман

**Д**ИАГРАММЫ И ТАБЛИЦЫ АЛЬФРЕДА ЮНГА (1873–1940) изучаются в математике уже более ста лет. Современная комбинаторика немыслима без них.

Появившись сначала в работах по разбиениям чисел на слагаемые, а затем в важной и довольно трудной области алгебры – теории представлений симметрических групп, диаграммы Юнга стали обнаруживаться в самых разных областях математики. В этой статье рассказывается об одной знаменитой формуле для количества таблиц Юнга данной формы – о формуле крючков.

Пользоваться ею в вычислениях сможет и пятиклассник, так что каждый читатель журнала что-то из этой статьи почерпнет. Но лучше, конечно, понять излагаемое здесь ее доказательство, которое замечательно тем, что при решении чисто комбинаторной задачи будут использованы антисимметрические многочлены. Что это такое – тоже рассказано в статье.

**Первые примеры**

На рисунке 1 показаны все существующие 16 способов так заполнить диаграмму, состоящую из 6 клеток, числами от 1 до 6, что числа возрастают при движении слева направо и сверху вниз. На рисунке 2 – пять заполнений диаграммы из 5 клеток (других способов, как легко убедиться, нет); на рисунке 3 – два заполнения диаграммы из 3 клеток; на рисунке 4 – единственный способ заполнить «столбик» высотой 5 (очевидно, способ единственный и при любой другой высоте столбика).

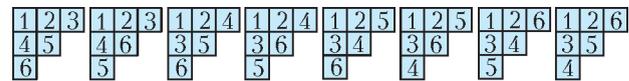


Рис. 1

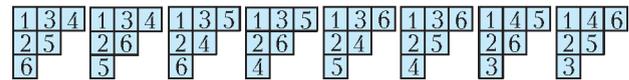


Рис. 2

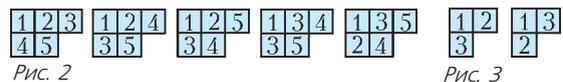


Рис. 3



Рис. 4

**Определения**

Чтобы понять, что такое диаграмма Юнга, представьте себе лист бумаги (какого угодно размера) в клеточку и отрежьте от него несколько клеток, соблюдая условие: вместе с любой отрезанной клеткой отрезаем и все клетки, расположенные ниже или правее нее.

Другими словами, *диаграмма Юнга* состоит из своего левого верхнего угла – некоторой клетки  $A$  – и обладает следующим свойством: вместе с любой своей клеткой  $B$  она содержит и все клетки прямоугольника, левым верхним углом которого является клетка  $A$ , а правым нижним – клетка  $B$ .

*Таблица Юнга* – это диаграмма из  $n$  клеток, заполненная числами от 1 до  $n$  так, что числа возрастают при движении слева направо и сверху вниз (далее мы будем рассматривать только такие заполнения).

**Числа сочетаний**

Рассмотрим диаграмму, состоящую из  $m + n + 1$  клеток,  $m + 1$  из которых расположены в верхней строке, а  $n + 1$  – в левом столбце. Пример для  $m = 3$  и  $n = 2$  – рисунок 5; число 1 в любом случае расположено в левом верхнем углу; заполнение однозначно определено тем, какие именно три числа стоят в незаполненных клетках верхней строки. Интересно

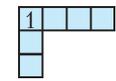


Рис. 5

нас количество заполнений обозначают  $C_{m+n}^m$  и называют числом сочетаний из  $m + n$  по  $m$ . *Число сочетаний* – это количество способов выбрать  $m$  элементов из множе-

ства  $\{2, 3, \dots, m + n + 1\}$ , состоящего из  $m + n$  элементов.  
 Треугольник Паскаля, образованный числами  $C_{m+n}^m$ , и свойства этих чисел в высшей степени важны для комбинаторики. Одна из важнейших ее формул – формула

$$C_{m+n}^m = \frac{(m+n)!}{m!n!}.$$

Как только мы сформулируем формулу крюков, станет ясно, что она является глубоким обобщением этой формулы.

**Числа Каталана**

В предыдущем номере нашего журнала опубликована статья «Разрезания на треугольнички», посвященная числам Каталана. Доказанная там формула – тоже частный случай формулы крюков.

Напомню вкратце, о чем речь. Числа Каталана почти столь же знамениты, как числа Фибоначчи: в статье «Числа Каталана» («Квант» №3 за 2004 год) дано три десятка разных определений, а науке известно более сотни.

Вот одно из самых коротких определений: *число Каталана* – это количество таблиц Юнга размером  $2 \times n$ .

То же можно сказать и другими словами. Любой такой таблице можно сопоставить последовательность из  $2n$  скобок, если ставить открывающие скобки на позиции, номера которых стоят в верхней строке, а закрывающие скобки – на остальные места: на рисунке 6 изображены все 5 существующих расстановок для  $n = 3$  вместе с соответствующими

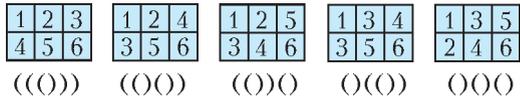


Рис. 6

системами скобок. Возникающие так последовательности правильные в том смысле, что при чтении слева направо ни в какой момент количество открывшихся скобок не оказывается меньше количества закрывшихся, а после прочтения последней (закрывающей) скобки эти количества становятся равными  $n$ .

**Упражнения**

1. Убедитесь, что: а) заполнений прямоугольной таблицы размером  $2 \times 3$  столько же, сколько заполнений таблицы рисунка 2; б) заполнений таблицы размером  $2 \times 2$  столько же, сколько заполнений таблицы Юнга с диаграммой рисунка 3.
2. Найдите все заполнения таблицы размером  $2 \times 4$ .

**Отбрасывание клеток**

Выясним, сколько существует заполнений диаграммы рисунка 7. Не советую выписывать все таблицы подряд: ответ слишком велик, чтобы вы получили удовольствие от такой работы. А главное – мы хотим найти не ответ для одной конкретной диаграммы, а общие закономерности.

Начнем. Где может стоять число 9? В клетке, ни правее, ни ниже которой ничего нет. Такие клетки на рисунке 7 помечены стрелочками. Отбрасывая их по одной, получаем диаграммы рисунка 8. Для каждой из них мы посчитаем количество способов и сложим результаты.

Число 8 в левой диаграмме рисунка 8 может стоять на одной из двух отмеченных стрелочками клеток, а в централь-

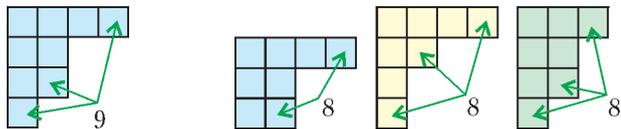


Рис. 7

Рис. 8

ной и правой таблиц таких клеток по три. Значит, достаточно решить задачу для каждой из восьми диаграмм рисунка 9 и сложить результаты. Облегчает работу то, что результаты для первой, третьей, пятой и седьмой диаграмм не отличаются; не отличается и вторая диаграмма от шестой.

Количество заполнений четвертой диаграммы равно  $C_6^3 = 20$ . При помощи рисунков 10, 11 и 12 легко найти ответы – числа  $4 + 5 + 10 + 16 = 35$ ,  $16 + 5 = 21$  и  $5 + 5 +$

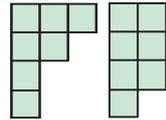
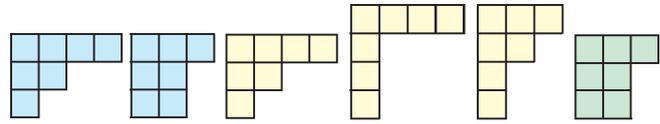


Рис. 9

$+ 4 = 14$  – для первой, второй и восьмой диаграмм рисунка 9 соответственно. Таким образом, для рисунка 7 существует  $4 \cdot 35 + 20 + 2 \cdot 21 + 14 = 216$  заполнений.

Ответ найден. Нам не пришлось рисовать все 216 таблиц одну за

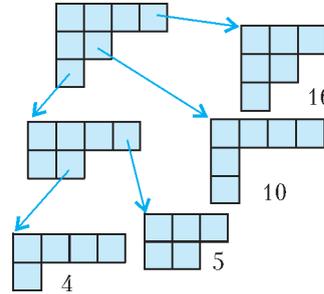


Рис. 10

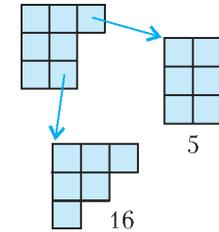


Рис. 11

другой. Но наш способ не самый быстрый.

Быстрее дает ответ открытая в 1954 году *формула крюков*.

**Крюки**

*Крюк* клетки – это она сама, а также клетки, расположенные справа от нее, и клетки, расположенные снизу. *Длина крюка* – это количество его клеток. На рисунке 12 для некоторых из встретившихся нам диаграмм указаны длины крюков (в каждой клетке записана длина крюка, содержащего эту клетку) и показано, как для каждой из них выглядит формула крюков.

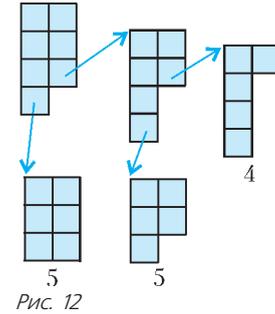


Рис. 12

$\begin{matrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & \\ 1 & & \end{matrix}$	$\begin{matrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & \end{matrix}$	$\begin{matrix} 3 & 1 \\ 1 & \end{matrix}$	$\begin{matrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{matrix}$
$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5} = 16$	$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 5$	$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 1 \cdot 3} = 2$	$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 1$

$\begin{matrix} 6 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & & & \\ 1 & & & \end{matrix}$	$\begin{matrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 7 & 5 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & & \\ 3 & 1 & & \\ 1 & & & \end{matrix}$
$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 6} = 10$	$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4} = 10$	$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7} = 216$

Рис. 13