Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 сентября 2009 года по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №3–2009» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М2131» или «Ф2138». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений). Решения задач по математике и физике можно присылать также по электронным адресам math@kvant.info и phys@kvant.info соответственно.

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М2131–М2134, М2136 и М2138 предлагались на весеннем туре XXX Турнира городов.

Задачи Ф2138–Ф2141 предлагались на заключительном этапе XLIII Всероссийской олимпиады школьников по физике.

Задачи М2131–М2138, Ф2138–Ф2144

М2131. Пусть a^b обозначает число a^b. В выражении 7^7^7^7^7^7^7 надо расставить скобки, чтобы определить порядок действий (всего будет 5 пар скобок). Можно ли расставить эти скобки двумя разными способами так, чтобы получилось одно и то же число?

А.Толпыго

М2132. На плоскости даны несколько точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Некоторые точки соединены отрезками. Известно, что любая прямая, не проходящая через данные точки, пересекает четное число отрезков. Докажите, что из каждой точки выходит четное число отрезков.

И.Богданов, Г.Гальперин

М2133. Замок обнесен круговой стеной с девятью башнями, на которых дежурят рыцари. По истечении каждого часа все они переходят на соседние башни, причем каждый рыцарь движется все время либо по часовой стрелке, либо против. За ночь каждый рыцарь успевает подежурить на каждой башне. Известно, что был час, когда на каждой башне дежурили хотя бы два рыцаря, и был час, когда ровно на пяти башнях дежурили ровно по одному рыцарю. Докажите, что был час, когда на одной из башен вообще не было рыцарей.

М.Мурашкин

М2134. Три плоскости разрезают параллелепипед на восемь шестигранников, все грани которых – четырехугольники (каждая плоскость пересекает свои две пары противоположных граней параллелепипеда и не пересекает две оставшиеся грани). Известно, что вокруг одного из этих шестигранников можно описать сферу. Докажите, что и вокруг каждого из них можно описать сферу.

В.Произволов

М2135. Натуральное число называется *хорошим*, если из него можно получить полный квадрат, приписав к его десятичной записи слева некоторое число, оканчивающееся ровно на 2009 нулей. Для каких n существует n-значное хорошее число, которое не является полным квадратом?

Н.Агаханов

М2136. Пусть C_n^k обозначает количество способов выбрать k предметов из n различных предметов (способы, отличающиеся только порядком выбора предметов, считаются одинаковыми). Докажите, что если натуральные числа k и l меньше n, то числа C_n^k и C_n^l имеют общий делитель, больший 1.

Фольклор

М2137. Дан остроугольный неравнобедренный треугольник ABC, в котором точка H – точка пересечения высот, точки I и O – центры вписанной и описанной окружностей. Известно, что точки A, O, I, H лежат на одной окружности ω. Докажите, что окружность ω проходит через одну из вершин B и C.

П.Кожевников

М2138*. В ячейку памяти компьютера записали число 6. Далее компьютер делает миллион шагов. На шаге номер n он увеличивает число в ячейке на наибольший общий делитель этого числа и n. Докажите, что на любом шаге компьютер увеличивает число в ячейке либо на 1, либо на простое число.

М.Франк

Ф2138. Подъемный кран медленно поднимает с помощью троса плавающее в воде бревно (рис.1). Трос прикреплен к одному концу бревна, которое можно считать тонким цилиндром с постоянной плотностью. Масса бревна m, длина L. Отношение плотностей воды и древесины $\gamma = 4/3$. Ускорение свободного падения g. 1) Какую минимальную работу A нужно совершить крану, чтобы полностью вытащить бревно из воды? 2) Постройте график зависимости силы натяжения T троса от высоты над водой h приподнимаемого конца бревна. Укажите характерные точки графика. 3) Какую работу $A_{\Delta h}$ совершит кран при переводе бревна из одного наклонного положения в другое наклонное положение, в котором верхний конец бревна поднялся на высоту $\Delta h = L/5$?

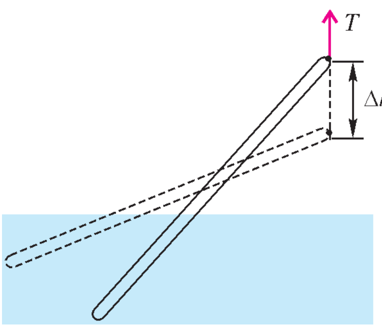


Рис. 1

В.Чивилёв

Ф2139. В открытом космосе три небольших астероида из-за гравитационного притяжения сближаются друг с другом вдоль общей прямой, неподвижной относительно звезд. Отношение расстояний от среднего астероида до крайних остается равным $n = 2$ вплоть до их столкновения (рис.2). Масса левого астероида m_1, центрального m_2. Найдите массу m_3 правого астероида.

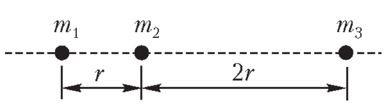


Рис. 2

И.Воробьев

Ф2140. Говорят, что в архиве лорда Кельвина нашли pV-диаграмму замкнутого циклического процесса тепловой машины (рис.3). Процесс *1–2* – изобара, процесс *2–3* – адиабата, *3–1* – изотерма. От времени чернила выцвели, и координатные оси на диаграмме исчезли. Известно, что рабочим веществом машины был идеальный газ (гелий) количеством $\nu = 2$ моль. Масштаб по оси давлений: 1 мал. кл. = = 1 атм, по оси объемов: 1 мал. кл. = 1 л. 1) Восстановите положение координатных осей и вычислите максимальное давление газа в данном циклическом процессе. 2) Вычислите максимальную и минимальную температуры газа в цикле. 3) Найдите работу A_T газа на изотерме *3–1*. 4) Найдите КПД цикла η.

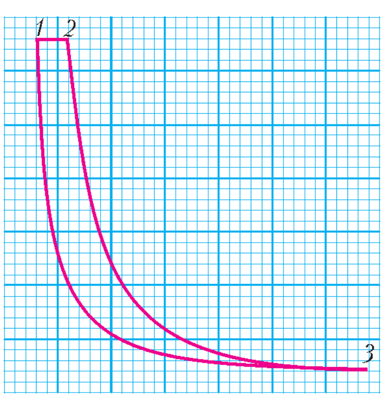


Рис. 3

Примечание. Универсальная газовая постоянная $R = 0,082$ л.атм/(моль · К).

А.Шеронов

Ф2141. В электрической цепи, схема которой приведена на рисунке 4, напряжение между зажимами C и D равно $U_{CD} = 15$ В. Известно, что $R \gg r$. 1) Определите показание идеального вольтметра, подключенного к клеммам A и B. 2) Предположим, что к клеммам A и B подключен идеальный амперметр. Укажите направление тока, текущего через каждый из резисторов и амперметр.

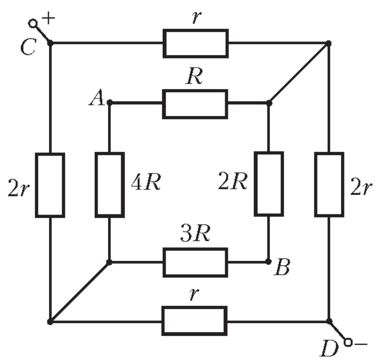


Рис. 4

М.Проскурин

Ф2142. $N = 2009$ одинаковых конденсаторов емкостью $C = 10$ мкФ каждый зарядили до одинаковых напряжений $U = 10$ В и соединили последовательно, причем $n = 100$ штук оказались подключенными в одной полярности, а остальные – в другой. Концы получившейся цепочки соединили резистором сопротивлением $R = 1$ кОм. Какой полный заряд протечет по резистору и сколько в нем выделится тепла?

З.Рафаилов

Ф2143. На кольцевой сердечник с большой магнитной проницаемостью сложенным вдвое изолированным тонким проводом намотана катушка с большим числом витков, получились две одинаковые катушки – одна с выводами *А* и *Б*, другая – с выводами *В* и *Г*. Индуктивность катушки *АБ* равна 1 Гн. К точкам *Б* и *Г* подключили резистор сопротивлением 1000 Ом, а к выводам *А* и *В* присоединили источник синусоидального напряжения частоты 1000 Гц с амплитудой 1 В. Какой ток течет через резистор? Как изменится ток, если выводы *В* и *Г* поменять местами?

А.Зильберман

Ф2144. Зрительная труба имеет объектив с фокусным расстоянием 1 м и окуляр с фокусным расстоянием 5 см. Линзы находятся на расстоянии 106 см друг от друга, на объектив падает широкий пучок лучей, параллельный главной оптической оси. Найдите угол расхождения выходящего пучка. Диаметр окуляра 0,5 см.

А.Простов

Решения задач М2111 – М2115, Ф2123–Ф2129

М2111. *Одна из клеток бесконечной клетчатой полоски окрашена. Вначале фишка находится на расстоянии n клеток от окрашенной. Бросается иг-*

ральная кость, и в случае выпадения k очков ($k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$) фишка перемещается на k клеток по направлению к окрашенной клетке. Процесс продолжается, пока фишка не попадает в окрашенную клетку (выигрыш) или пока она не проскочит окрашенную клетку (проигрыш). При каком натуральном n вероятность выигрыша p_n наибольшая? Найдите это наибольшее значение вероятности.

Ответ: наибольшее значение вероятности равно

$$p_6 = \frac{7^5}{6^6}.$$

Сначала можем последовательно найти

$$p_1 = \frac{1}{6},$$

$$p_2 = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}p_1 = p_1 + \frac{1}{6}p_1 = \frac{7}{6}p_1,$$

$$p_3 = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}p_1 + \frac{1}{6}p_2 = p_2 + \frac{1}{6}p_2 = \frac{7}{6}p_2,$$

$$\ldots$$

$$p_6 = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}p_1 + \frac{1}{6}p_2 + \ldots + \frac{1}{6}p_5 = p_5 + \frac{1}{6}p_5 = \frac{7}{6}p_5,$$

значит,

$$p_1 < p_2 < p_3 < p_4 < p_5 < p_6 = \frac{7^5}{6^6}.$$

За один ход с вероятностью $\frac{1}{6}$ фишка перемещается на 1, 2, …, 6 клеток по направлению к окрашенной, поэтому для любого $k \ge 7$ справедливо равенство

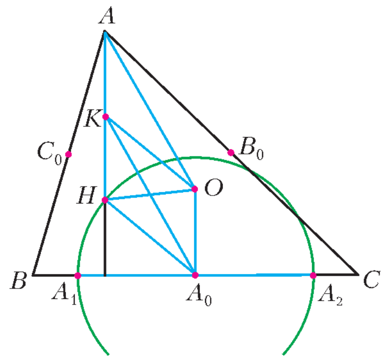
$$p_k = \frac{p_{k-1} + p_{k-2} + p_{k-3} + p_{k-4} + p_{k-5} + p_{k-6}}{6}. \quad (*)$$

Следовательно, при $n \ge 7$ величина p_n не превосходит наибольшего из чисел $p_{n-1}, p_{n-2}, \ldots, p_{n-6}$ и даже строго меньше одного из них, так как иначе $p_n = p_{n-1} = p_{n-2} = p_{n-3} = \ldots = p_{n-6}$, и, продолжив применять $(*)$ для $k = n$, $k = n - 1$, …, $k = 7$, мы получили бы $p_n = p_{n-1} = p_{n-2} = p_{n-3} = \ldots = p_{n-6} = p_{n-7} = \ldots = p_1 = \frac{1}{6}$, что неверно. Имеем цепочку неравенств $p_n < p_{n-i_1} < p_{n-i_1-i_2} < \ldots$, где $i_j \in \{1, 2, \ldots, 6\}$, которая остановится на одном из чисел $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$. Таким образом, (строгий) максимум p_n достигается для некоторого $n \in \{1, 2, \ldots, 6\}$. Значит, максимальное значение равно $p_6 = \frac{7^5}{6^6}$.

Процессы, подобные описанному в данной задаче, изучаются в теории *цепей Маркова*, из которой, в частности, следует, что предел последовательности p_n равен $\frac{2}{7}$ (это интуитивно понятно, так как $\frac{2}{7}$ – величина, обратная средней длине хода фишки).

В.Лецко

М2112. *Пусть H – точка пересечения высот остроугольного треугольника ABC. Окружность с центром в середине стороны BC, проходящая через точку H, пересекает прямую BC в точках A_1 и A_2. Аналогично, окружность с центром в середине стороны CA, проходящая через точку H, пересекает прямую CA в точках B_1 и B_2, и окружность с центром в середине стороны AB, проходящая через точку H, пересекает прямую AB в точках C_1 и C_2. Докажите, что точки $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ лежат на одной окружности.*



Пусть H – ортоцентр треугольника ABC, O и R – центр и радиус окружности, описанной около треугольника ABC, A_0, B_0, C_0 – середины сторон BC, CA, AB соответственно (см. рисунок). Докажем, что точка O равноудалена от точек $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$. По теореме Пифагора

$$OA_1^2 = OA_0^2 + A_0A_1^2 = OA_0^2 + A_0H^2. \quad (1)$$

Заметим, что O является ортоцентром треугольника $A_0B_0C_0$, поэтому при гомотетии, переводящей треугольник ABC в треугольник $A_0B_0C_0$, точка H переходит в точку O. Поскольку коэффициент этой гомотетии равен $1/2$, отношение соответствующих отрезков A_0O и AH равно $1/2$, иначе говоря, $AH = 2A_0O$.

Пусть K – середина отрезка AH. Так как $AH \perp BC$, $OA_0 \perp BC$ и $AK = HK = OA_0$, то AKA_0O и KHA_0O – параллелограммы. Получаем $KA_0 = AO = R$, а так как в параллелограмме KHA_0O сумма квадратов сторон равна сумме квадратов диагоналей, имеем

$$2\left(OA_0^2 + A_0H^2\right) = OH^2 + KA_0^2 = OH^2 + R^2. \quad (2)$$

Из (1) и (2) вытекает равенство $OA_1^2 = \left(OH^2 + R^2\right)/2$. Аналогично доказываются равенства

$$OA_2^2 = OB_1^2 = OB_2^2 = OC_1^2 = OC_2^2 = \left(OH^2 + R^2\right)/2.$$

А.Гаврилюк, П.Кожевников

М2113. *Многочлен степени $n > 1$ имеет различные вещественные корни $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а его производная – корни $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$. Докажите, что среднее арифметическое чисел $x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2$ больше, чем среднее арифметическое чисел $y_1^2, y_2^2, \ldots, y_{n-1}^2$.*

Пусть X и Y – средние арифметические квадратов корней многочлена f и его производной f' соответственно.

Без ограничения общности считаем, что f имеет старший коэффициент, равный 1: $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$. Из условия следует, что $f(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$. Приравнивая коэффициенты при x^{n-1} и при x^{n-2}, получаем следующие *формулы Виета*: $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -a_1$, $x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n = a_2$ (в левой части последнего равенства стоит сумма всех попарных произведений x_ix_j для $1 \le i < j \le n$). Отсюда

$$X = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n} = \frac{a_1^2}{n} - \frac{2a_2}{n}. \quad (1)$$

Отметим, что из *неравенства о средних* вытекает, что

$$X = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n} \geq \left(\frac{|x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|}{n} \right)^2 \geq$$

$$\geq \left(\frac{|x_1 + x_2 + \ldots + x_n|}{n} \right)^2 = \frac{a_1^2}{n^2}.$$

Поскольку числа $x_1, \ldots, x_n$ различны, один из знаков нестрогого неравенства превращается в знак строгого неравенства, что дает

$$X > \frac{a_1^2}{n^2}. \qquad (2)$$

Далее, имеем

$$f'(x) = nx^{n-1} + (n-1) a_1 x^{n-2} + (n-2) a_2 x^{n-3} + \ldots + a_{n-1}$$

и

$$f'(x) = n(x - y_1)(x - y_2)\ldots(x - y_{n-1}),$$

откуда

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} = -\frac{(n-1) a_1}{n},$$

$$y_1 y_2 + y_1 y_3 + \ldots + y_{n-2} y_{n-1} = \frac{(n-2) a_2}{n}$$

(при $n > 2$). Получаем, что при $n > 2$ выполнено равенство

$$(n-1) Y = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_{n-1}^2 =$$

$$= \left(\frac{(n-1) a_1}{n} \right)^2 - \frac{2(n-2) a_2}{n}. \quad (3)$$

Проверка показывает, что равенство (3) верно и при $n = 2$.

Преобразуем (3), используя (1):

$$(n-1) Y = \frac{(n-1)^2 a_1^2}{n^2} + (n-2)\left(X - \frac{a_1^2}{n} \right) = (n-2) X + \frac{a_1^2}{n^2}.$$

Применение неравенства (2) дает

$$(n-1) Y < (n-2) X + X \Leftrightarrow Y < X,$$

что и требовалось.

П.Кожевников

М2114. *Докажите, что существует бесконечно много точных квадратов, не оканчивающихся нулем, в которых любая отличная от нуля цифра – нечетная.*

Рассмотрим число $n = 3 \cdot 10^{2k} + 5 \cdot 10^k + 1$, где $k \geq 2$ – натуральное. Имеем

$$n^2 = 9 \cdot 10^{4k} + 25 \cdot 10^{2k} + 1 +$$

$$+ 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 10^{3k} + 2 \cdot 3 \cdot 10^{2k} + 2 \cdot 5 \cdot 10^k =$$

$$= 9 \cdot 10^{4k} + 3 \cdot 10^{3k+1} + 31 \cdot 10^{2k} + 10^{k+1} + 1 =$$

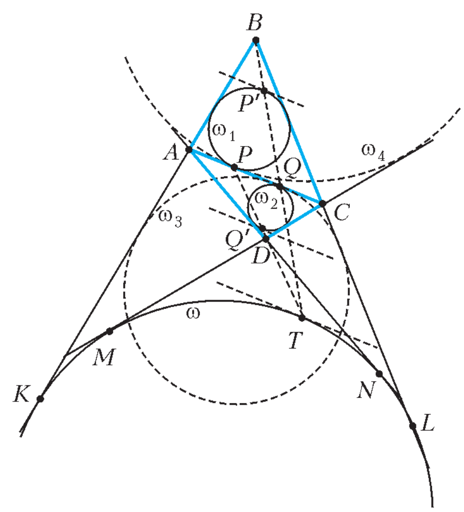
$$= \overline{9\underbrace{000\ldots003}_{k-1\text{ цифр}}0\underbrace{000\ldots003}_{k-1\text{ цифр}}1\underbrace{000\ldots001}_{k-1\text{ цифр}}0\underbrace{000\ldots000}_{k-1\text{ цифр}}1}.$$

Можно построить и другие примеры, допустим, поменять в построенном числе n цифры 3 и 1 местами.

В.Сендеров

М2115*. *Пусть $ABCD$ – выпуклый четырехугольник, в котором $BA \neq BC$. Обозначим окружности, вписанные в треугольники ABC и ADC, через ω_1 и ω_2 соответственно. Предположим, что существует окружность ω, которая касается продолжения отрезка BA за точку A, продолжения отрезка BC за точку C и касается прямых AD и CD. Докажите, что общие внешние касательные к окружностям ω_1 и ω_2 пересекаются на окружности ω.*

Пусть K, L, M, N – точки касания окружности ω с прямыми AB, BC, CD, DA соответственно (см. рисунок). Пусть окружности ω_1 и ω_2 касаются отрезка AC в точках P и Q соответственно. Пусть ω_3 и ω_4 – вневписанные окружности треугольников ABC и ADC, касающиеся отрезка AC в точках Q_1 и P_1 соответственно.



Из условия $AB \neq BC$ вытекает, что точки P и Q_1 не совпадают.

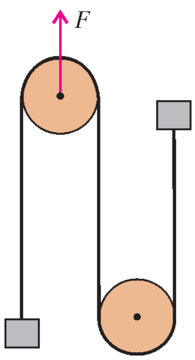
Из равенства отрезков касательных имеем $AB + AD = BK - AK + AN - DN = BK - DN = BL - DM = BL - CL + CM - DM = CB + CD$. Так как $AP = (AC + AB - BC)/2$ и $AP_1 = (AC + CD - AD)/2$, получаем $AP = AP_1$, и поэтому $P = P_1$. Аналогично, $Q = Q_1$.

Пусть TT', PP', QQ' – диаметры, соответственно, окружностей ω, ω_1, ω_2, проведенные перпендикулярно AC (пусть точки T и T' обозначены так, что T ближе к прямой AC, чем T'). Касательные к окружностям ω, ω_1, ω_2, проведенные через точки T, P', Q' соответственно, параллельны прямой AC. Окружности ω, ω_1 и ω_3 гомотетичны с центром B, поэтому соответственные точки T, P', Q этих окружностей лежат на прямой, проходящей через точку B, т.е. точки B, P', Q, T лежат на одной прямой. Так же, поскольку окружности ω, ω_2 и ω_4 гомотетичны с центром D, точки D, P, Q', T лежат на одной прямой. Из доказанного следует, что существует гомотетия h с центром T, переводящая точку Q в точку P'. Заметим, что $QQ' \parallel P'P$, а прямая PQ' проходит через точку T и отлична от прямой $P'Q$, поэтому под действием гомотетии h отрезок QQ' переходит в отрезок $P'P$. Гомотетия h переводит окружность ω_2, построенную на отрезке QQ' как на диаметре, в окружность, построенную на отрезке $P'P$ как на диаметре, т.е. в окружность ω_1. Тогда центр T гомотетии h принадлежит общим внешним касательным окружностей ω_1 и ω_2. Таким образом, точка T на окружности ω и является точкой пересечения общих внешних касательных к окружностям ω_1 и ω_2.

Замечание. Нетрудно показать, что утверждение задачи справедливо и в случае $AB = BC$.

В.Шмаров, И.Богданов

Ф2123. *На гладком горизонтальном столе лежат два блока – тонкие легкие диски. Ось одного их них закреплена, так что двигаться он не может, но может вращаться в горизонтальной плоскости. Кусок легкой нерастяжимой нити охватывает блоки, к концам нити прикреплены одинаковые грузы массой M каждый. В начальный момент нить натянута, свободные куски нити параллельны друг другу. На ось «подвижного» блока начинает действовать сила F (см. рисунок; вид сверху). Найдите ускорение этого блока, если при движении свободные куски нити остаются параллельными. Во сколько раз отличаются скорости вращения блоков? Нить не проскальзывает относительно блоков.*



Сила натяжения нити равна $T = F/2$, ускорения грузов направлены в разные стороны – левого вверх, а правого вниз, – одинаковы по величине и равны

$$a = \frac{F}{2M}.$$

Ясно, что ускорение оси подвижного блока тоже равно a.

Подвижный блок, в отличие от закрепленного, не вращается.

А.Блоков

Ф2124. *Грузы с массами M и m связаны очень легкой пружинкой жесткостью k. На грузы начинают действовать одинаковые по величине и противоположные по направлению силы F (рис.1). Найдите максимальную скорость груза массой M. Найдите также максимальное смещение груза массой m. В начальный момент пружина не деформирована, грузы неподвижны.*

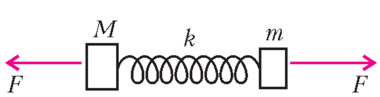


Рис. 1

Ускорение центра масс системы равно нулю. Если пружинка однородная, то неподвижной будет точка, находящаяся на расстоянии $l_1 = l\dfrac{m}{M+m}$ от груза массой M. Жесткость этого куска пружинки равна $k_1 = k\dfrac{M+m}{m}$, жесткость второго куска равна, соответственно, $k_2 = k\dfrac{M+m}{M}$. Для первого куска пружинки можно записать (рис.2)

$$Fx_1 = \frac{k_1x_1^2}{2} + \frac{Mv_1^2}{2},$$

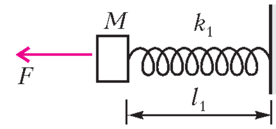


Рис. 2

где x_1 – положение равновесия, v_1 – максимальная скорость груза массой M. Отсюда находим искомую скорость:

$$v_1 = \frac{F}{\sqrt{k_1M}} = F\sqrt{\frac{m}{k(M+m)M}}.$$

Для максимального смещения x_2 груза массой m получим

$$Fx_2 = \frac{k_2x_2^2}{2}, \text{ и } x_2 = \frac{2F}{k_2} = \frac{2FM}{k(M+m)}.$$

А.Простов

Ф2125. *Моль гелия при нормальных условиях находится внутри эластичной оболочки. Наружные условия изменяются так, что к некоторому моменту газ получает 100 Дж тепла, а температура газа увеличивается при этом на 10 К. Оцените изменение объема газа.*

Видно, что при такой небольшой тепловой добавке (по сравнению с начальной внутренней энергией порции газа) изменение объема газа будет совсем малым (это придется проверить!). Тогда запишем

$$p \approx \text{const} = p_0 \text{ и } Q = p_0\Delta V + \frac{3}{2}\nu R\Delta T,$$

откуда

$$p_0\Delta V = Q - \frac{3}{2}\nu R\Delta T =$$

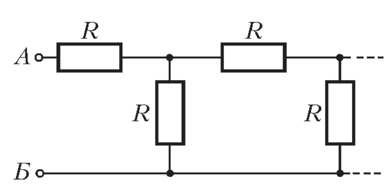
$$= 100 \text{ Дж} - \frac{3}{2}\cdot 1\cdot 8{,}3\cdot 10 \text{ Дж} \approx -25 \text{ Дж},$$

$$\Delta V = \frac{p_0\Delta V}{p_0} = \frac{-25 \text{ Дж}}{10^5 \text{ Па}} = -0{,}25 \text{ л}.$$

Итак, в данном процессе объем уменьшается примерно на 0,25 л, что существенно меньше начального объема этой порции газа $V_0 = 22{,}4$ л.

З.Повторов

Ф2126. *На рисунке изображена известная бесконечная цепочка, состоящая из резисторов с одинаковыми сопротивлениями. Все знают, как посчитать ее сопротивление, измеренное между точками А и Б. А что если взять не бесконечную цепочку, а цепочку, состоящую ровно из 50 звеньев, – как посчитать ее сопротивление? Понятно, что сделать это «в лоб» трудно, проще считать цепь бесконечной... Какую погрешность мы при этом получим? Сильно ли сопротивление урезанной цепи отличается от сопротивления бесконечной цепочки? Зададим конкретный вопрос: эти отличия меньше миллионной доли процента или намного больше?*



Легко обычным способом посчитать сопротивление бесконечной цепочки:

$$R_б = \frac{R\left(\sqrt{5}+1\right)}{2} \approx 1{,}618033999R .$$

Сопротивление цепочки, которая содержит определенное число звеньев, несколько больше, при этом чем больше звеньев, тем оно ближе к указанному сопротивлению бесконечной цепочки. Конечно, считать «в лоб» сопротивление цепочки из 50 звеньев очень не хочется. Попробуем сделать проще. В условии задачи идет речь о миллионной доле процента, поэтому умножим сопротивление бесконечной цепочки на $\left(1+1\cdot 10^{-8}\right)$ – получится $1{,}618034R$. Будем последовательно увеличивать число звеньев цепочки и считать полученное сопротивление, надеясь на то, что нужный результат – меньше полученного выше – будет достигнут не слишком поздно…

Итак, для одного звена сопротивление равно $2R$, для двух звеньев будет $5R/3 = 1{,}(6)R$. Далее получим $1{,}625R$, $1{,}619048R$, $1{,}61818R$, $1{,}618055R$, $1{,}618037R$, $1{,}6180344R$, $1{,}61803405R$, $1{,}61803399R$ – уже при 10 звеньях получается почти такое же сопротивление, как у бесконечной цепи.

Как видно, увеличение числа звеньев быстро приводит к результату – достаточно даже 10 звеньев, а уж при указанных 50 разница между сопротивлениями урезанной цепи и бесконечной цепочки будет совершенно ничтожной.

Конечно, при другом соотношении сопротивлений резисторов звена результат может быть совершено иным. Так, при «коэффициенте деления» больше 2 (например, при сопротивлениях $10R$ и R) результат будет достигнут намного раньше. А вот при меньшем «коэффициенте деления» все будет наоборот.

А.Цепочкин

Ф2127. *Потенциалы точек А, Б и В поддерживаются постоянными:* $\varphi_A = 100$ *В*, $\varphi_Б = 200$ *В*, $\varphi_В = 500$ *В*. *Два одинаковых конденсатора емкостью 10 мкФ каждый и резистор сопротивлением 1 Мом соединяем «звездой» и подключаем одновременно свободными выводами к точкам А, Б и В (резистор – к точке В; рис.1). Какое количество теплоты выделится в резисторе за большое время?*

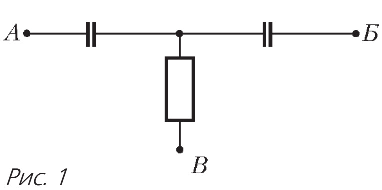


Рис. 1

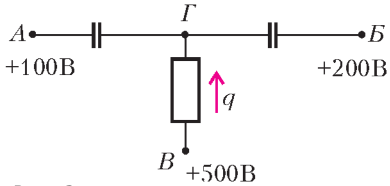


Рис. 2

Сразу после подключения потенциал точки $Г$ (рис.2) станет равным $\varphi_Г = +150$ В, а затем начнет медленно увеличиваться до значения $\varphi_В = +500$ В. Пусть к некоторому моменту по резистору протечет заряд q, тогда получим

$$C\left(\varphi_Г - \varphi_А\right) + C\left(\varphi_Г - \varphi_Б\right) = q ,$$

или

$$\varphi_Г = \frac{1}{2}\left(\varphi_А + \varphi_Б\right) + \frac{1}{2}\frac{q}{C} ,$$

т.е. потенциал точки $Г$ линейно зависит от величины q. Найдем теперь зависимость разности потенциалов между выводами резистора от величины протекаемого по нему заряда:

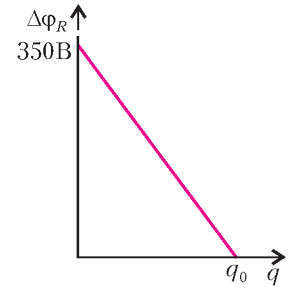


Рис. 3

$$\Delta\varphi_R = \varphi_В - \varphi_Г = 350\ \text{В} - \frac{q}{2C}$$

и нарисуем соответствующий график (рис.3). Здесь $q_0 = 2C\left(\varphi_В - \frac{\varphi_А + \varphi_Б}{2}\right) = 7\cdot 10^{-3}$ Кл – значение заряда, при котором разность потенциалов на резисторе равна нулю (к сожалению, в опубликованном условии в значении емкости конденсатора допущена опечатка). Площадь под этим графиком дает величину выделившегося в резисторе количества теплоты:

$$Q = \frac{1}{2}\cdot 350\cdot 7\cdot 10^{-3}\ \text{Дж} = 1{,}225\ \text{Дж} .$$

З.Рафаилов

Ф2128. *Две одинаковые катушки соединены последовательно, параллельно одной из них подключен конденсатор, а к выводам цепи подсоединена батарейка напряжением U (рис.1). Найдите максимальное напряжение конденсатора. Элементы цепи считать идеальными.*

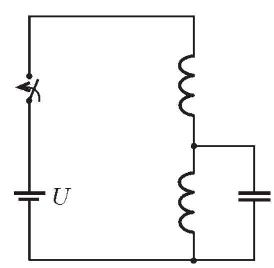


Рис. 1

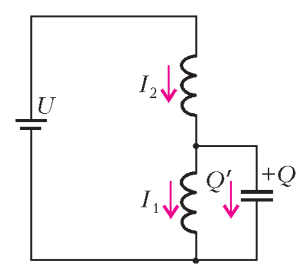


Рис. 2

Обозначим ток нижней катушки через I_1, заряд конденсатора – через Q (рис.2). Тогда ток верхней катушки будет

$$I_2 = I_1 + Q' .$$

Для получившегося колебательного контура запишем

$$LI_2' + \frac{Q}{C} = U ,\quad LI_1' = \frac{Q}{C} ,\quad LI_1' + LQ'' + \frac{Q}{C} = U ,$$

$$Q'' + \frac{2}{LC}Q = \frac{U}{L} .$$

Тут есть слагаемое в правой части последнего уравнения, но от него легко избавиться, чтобы получилось обычное уравнение гармонических колебаний. Для этого достаточно добавить к неизвестной величине постоянную:

$$z(t) = Q(t) - \frac{CU}{2} ,\quad z'' + \frac{2}{LC}z = 0 ,\quad z'' + \omega^2 z = 0 .$$

Полученное уравнение решаем обычным способом, с учетом того, что сразу после подключения батарейки заряд конденсатора равен нулю, нулю равен и ток через конденсатор – его ограничивает верхняя катушка индуктивности. Находим окончательное выражение для заряда конденсатора:

$$Q(t) = 0,5CU(1 - \cos\omega t),$$

откуда следует, что максимальное напряжение конденсатора равно напряжению батарейки.

Этот результат можно получить и намного быстрее – при помощи метода «эквивалентного источника». Заменим батарейку и две подключенные к ней катушки эквивалентным источником из батарейки половинного напряжения и последовательно с ней соединенной эквивалентной катушки индуктивностью $L/2$. Получается совсем простая схема – к батарейке подключен обычный последовательный LC-контур. В этом случае максимальный заряд, а значит и максимальное напряжение, конденсатора находится совсем просто.

Р.Александров

Ф2129. *В трех вершинах квадрата с длиной стороны 2 м расположены одинаковые маленькие громкоговорители, в четвертой вершине находится очень маленький всенаправленный микрофон. К громкоговорителям поочередно подключают источники переменного напряжения частотой 100 Гц и регулируют их уровни так, чтобы напряжение на выходных зажимах микрофона составляло в каждом случае ровно 1 мВ. Какое напряжение выдаст микрофон, если включить одновременно два соседних громкоговорителя? А если включить все три громкоговорителя? Рассмотрите два разных варианта: используются независимые источники напряжения (три звуковых генератора и три усилителя низкой частоты) и используется один генератор, «размноженный» на три усилителя.*

При независимых источниках звука можно просто складывать мощности, тогда для двух источников получим

$$U_2 = U\sqrt{2} \approx 1,4 \text{ мВ},$$

для трех источников –

$$U_3 = U\sqrt{3} \approx 1,7 \text{ мВ}.$$

При одном «размноженном» источнике излучатели будут когерентными, складывать волны нужно будет с учетом фазовых сдвигов. Для случая двух соседних громкоговорителей разность хода равна $\Delta l = 2\sqrt{2}$ м – – 2 м ≈ 0,82 м. При частоте 100 Гц и скорости звука 330 м/с длина волны равна $\lambda = 3,3$ м и разность фаз составляет

$$\Delta\varphi = 2\pi\frac{\Delta l}{\lambda} = 1,56 \text{ рад} \approx 90°.$$

Тогда для двух громкоговорителей получится почти столько же, сколько и в первом случае:

$$U_2 = U\sqrt{2} \approx 1,4 \text{ мВ}.$$

Для трех громкоговорителей две амплитуды просто складываются, и к их сумме нужно прибавить вектор со сдвигом фаз 90°:

$$U_3 = U\sqrt{2^2 + 1^2} = U\sqrt{5} \approx 2,2 \text{ мВ}.$$

А.Зильберман

Интервью с А.Б.Сосинским

(Начало см. на с. 18)

хотел сказать, и это очень важно, – первоначальный замысел ЕГЭ состоял в том, чтобы бороться с коррупцией на вступительных экзаменах в некоторые вузы. К сожалению, очевидно, что этот аргумент в пользу ЕГЭ абсолютно несостоятелен. Дело в том, что гораздо проще подделать ответы абитуриента с помощью компьютера, чем это сделать на обычных письменных или даже устных экзаменах. Статистика, которую, кстати, министерство просвещения пытается скрыть от общественности, все-таки частично известна; она показывает, например, что количество максимальных баллов ЕГЭ по математике в Дагестане во много раз больше, чем количество таких же баллов в Москве и Московской области, хотя население Дагестана на пару порядков меньше, чем население Москвы. При всем уважении к учителям математики в Дагестане, ясно, что без активной коррупционной деятельности при проверке экзамена такой результат не мог быть достигнут. Вместо того, чтобы бороться с этим новым видом коррупции, министерство тщательно скрывает это обстоятельство от общественности.

– Вы много лет работали в «Кванте». Что для вас было самым важным, и что вы пожелаете нынешним авторам, редакторам, читателям?

– Я работал в «Кванте» в эпоху, когда происходил настоящий расцвет интереса к физико-математическому образованию у многих школьников, и это также совпало с эпохой расцвета журнала «Квант». Когда я пришел, там был тираж больше 200 тысяч экземпляров, т.е. более чем в пятьдесят раз больше, чем сегодня. И этот тираж держался до конца восьмидесятых годов.

– На максимуме было 380 тысяч.

– 380, да. Но я пришел уже позже, я пришел в 75-м году. В «Кванте» был замечательный коллектив работников. Активный интерес к журналу проявляли оба его основателя, и Исаак Константинович Кикоин, и Андрей Николаевич Колмогоров. Кикоин каждую неделю приходил в журнал. Колмогоров иногда журналом очень увлекался и много им занимался, иногда его оставлял сотрудникам. Разительное отличие от современного представлял раздел «Задачник «Кванта», которым заведовал Николай Борисович Васильев. Николай Борисович также вел раздел «Математический кружок» и вообще был, так сказать, ведущим математиком в журнале. Задачи решали тысячи школьников... или пытались решить тысячи школьников, это более точно. Было много хороших авторов. Сравнивать ситуацию с журналом тогда и сегодня просто некорректно. Появились интернет, десятки телепрограмм, компьютерные игры, просто компьютеры, и для тех школьников, которые интересуются математикой, «Квант» не является основным и часто не является даже одним из основных источников информации. Это, конечно, с одной стороны, грустно, а с другой стороны – это объективная реальность, и «Квант» сегодня пытается выполнить ту миссию, которая ему доступна, т.е. все-таки давать читателям живые образцы популярных статей по физике и математике. Что я хочу пожелать нынешней редакции и авторам – то же самое, что мы желали сами себе, но не сумели выполнить, когда я там работал, а именно – чтобы статьи были одновременно и интересные, и яркие, и доступные.

Вопросы задавали С.Дориченко, А.Спивак

В среде, в которой распространяется волна, появляется в направлении ее распространения давящая сила, которая во всякой точке численно равна количеству находящейся там энергии, отнесенной к единице объема.

Джеймс Клерк Максвелл

Насколько движение энергии и движение сжимаемого вещества обусловливаются законом их сохранения, настолько мы имеем право уподоблять движение энергии движению подвижного и сжимаемого вещества.

Николай Умов

Имеется общий закон переноса энергии, согласно которому энергия в любой точке движется перпендикулярно к плоскости, содержащей линии электрических и магнитных сил... Направление же потока совпадает с направлением движения правого винта.

Джон Генри Пойнтинг

...если магнитный поток, проходящий через петлю, ...меняется со временем, то ЭДС равна скорости изменения потока. Мы будем в дальнейшем называть это «правилом потока».

Ричард Фейнман

...свойства света лучше всего выявляются в предельных условиях развития явления или его исследования: при изучении предельно слабых световых потоков...

Сергей Вавилов

А так ли хорошо знакомы вам ПОТОКИ?

Конечно, если ограничить себя поверхностным пролистыванием школьных учебников, то не сразу и обнаружишь, где там встречается понятие потока. Да, есть поток магнитной индукции, еще есть плотность потока электромагнитной энергии. И все? Разумеется, нет.

Понятие потока пронизывает практически все разделы физики, в большинстве случаев скромно оставаясь в тени. Например, при рассмотрении движения жидкостей и газов прежде всего бросается в глаза перенос вещества, но с ним связано, хотя и не столь очевидное, течение импульса и энергии. При протекании электрического тока в первую очередь мы следим за переносом заряда, не всегда догадываясь, за счет чего нагревается проводник. А как распространяется энергия в процессе теплопроводности, как распределяется она в потоках волн различной природы?

Продолжив более внимательное путешествие по главам курса физики, мы найдем в нем еще немало любопытных проявлений универсального понятия потока. Кроме того, с ним приходится многократно сталкиваться и далеко за рамками учебников: массо- и теплоперенос в химических реакторах; потоки вырывающихся из двигателей реактивных струй; перекачка по трубопроводам нефти и газа; потоки заряженных частиц, искусственно созданных в ускорителях или летящих к нам из космоса; потоки света от Солнца, звезд и осветительных приборов; океанические течения и циркуляция атмосфер Земли и других планет...

Однако, довольно примеров. Пора понятию потока выйти на авансцену нашего «Калейдоскопа» – мы рассчитываем, что вам будет интересно не только распознать участие понятия потока в разнообразных проблемных ситуациях, но и разрешить их с его помощью.

Вопросы и задачи

1. В сквозных проемах под высокими зданиями, в арках и подворотнях скорость ветра порой достигает такой величины, что его напор может сбить человека с ног. Чем это вызвано?

2. Если через горизонтальную трубку продувать воздух, как показано на рисунке, то при некоторой его скорости в правой вертикальной трубке начнет подниматься вода, а из левой будут выходить пузырьки воздуха. Почему?

3. Если два корабля идут параллельными курсами на близком расстоянии друг от друга, то они начинают сближаться. Как это объяснить?

4. Идеальная, т.е. несжимаемая и лишенная вязкости, жидкость обтекает шар. Покажите, что сила, с которой жидкость действует на шар, равна нулю.

5. Почему тонкая медная проволока плавится в пламени свечи, а толстый медный стержень даже не нагревается до красного каления?

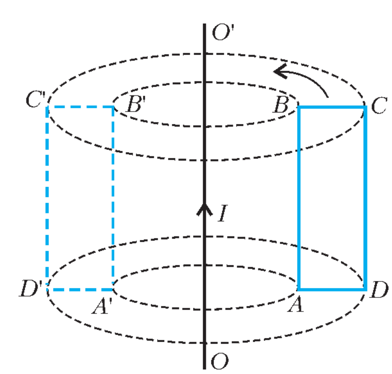
6. Будет ли кипеть вода в маленькой кастрюле, которая плавает в большой кастрюле с кипящей водой? А если воду в большой кастрюле предварительно прокипятить?

7. Какие термосы выгоднее при одной и той же высоте и вместимости: круглого или квадратного сечения?

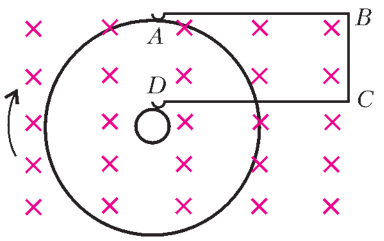
8. Вода в сосуде нагревается на электрической плитке постоянной мощности. Что требует большего времени: нагревание от 10 до 20 °С или от 80 до 90 °С?

9. В раствор медного купороса опущены два угольных стержня, на одном из которых в процессе электролиза осаждается медь. Почему наиболее толстый слой меди получается на той части его поверхности, которая обращена к другому стержню?

10. Будет ли в рамке *ABCD* возникать индукционный ток, если рамку: а) вращать относительно неподвижного проводника с током *OO'*, как показано на рисунке; б) вращать вокруг стороны *AB*; в) вращать вокруг стороны *BC*; г) двигать поступательно в вертикальном направлении; д) двигать поступательно в горизонтальном направлении?



11. Вращающийся медный диск связан с неподвижным проводником *ABCD* при помощи скользящих контактов *A* и *D*, как изображено на рисунке. Диск и



проводник находятся в однородном магнитном поле, перпендикулярном плоскости чертежа. Изменяется ли при вращении диска магнитный поток через контур *ABCDA*? Течет ли по проводнику *ABCD* ток?

12. В накоротко замкнутую катушку вдвигают магнит: один раз быстро, а другой – медленно. В каком случае в катушке выделяется больше тепла? А в каком случае через катушку проходит больший заряд?

13. Сверхпроводящее кольцо с током перекручивают, превращая его в «восьмерку» из двух одинаковых колец. Затем «восьмерку» складывают так, что получается одно двойное кольцо. Как изменится индукция магнитного поля в центре кольца по сравнению с первоначальной?

14. Во сколько раз над увеличить частоту колебаний электромагнитной волны, чтобы при удалении от источника на расстояние, вдвое большее первоначального, интенсивность волны не изменилась?

15. Почему увеличение дальности радиосвязи с космическими кораблями в 2 раза требует увеличения мощности передатчика в 4 раза, а увеличение дальности радиолокации в 2 раза требует увеличения мощности передатчика в 16 раз? Поглощением энергии средой пренебречь.

16. На круглое отверстие в непрозрачном экране падает параллельный пучок электромагнитного излучения. Почему при увеличении радиуса отверстия в некоторой точке на оси отверстия может наблюдаться уменьшение интенсивности излучения, хотя его поток через отверстие при этом возрастает?

17. М.В.Ломоносов утверждал, что телескоп не только увеличивает видимые размеры далеких предметов, но и усиливает воспринимаемое глазом количество света, испускаемого источником. Как это можно объяснить?

18. Как следует разместить электрическую лампу, вогнутое зеркало и собирающую линзу, чтобы получить наиболее интенсивный световой поток?

Микроопыт

Наполните горячей водой ванну и стакан. Проследите с помощью термометра и часов, где вода охладится быстрее. Объясните ваше наблюдение.

Любопытно, что...

...Даниил Бернулли, которому впервые удалось описать движение идеальной жидкости, черпал разнообразие гидродинамических задач в том числе и в физиологии. В молодости, изучая медицину, он интересовался вопросами определения скорости потоков крови в сосудах и влияния величины кровяного давления на характер этого движения.

...сущность так называемого парадокса Д'Аламбера – Эйлера заключена в том, что поток лишенного внутреннего трения газа (идеальной «жидкости») действует на тело любой формы с силами, сумма которых равна нулю. В воздухе, утратившем вязкость, не смогли бы взлететь ни самолет, ни вертолет, поскольку подъемная сила крыла и сила тяги воздушного винта оказались бы нулевыми.

...одно из фундаментальных явлений механики жидкости и газа – это отрыв потока, когда среда вблизи обтекаемых тел, например крыльев летательных и плавательных аппаратов, перестает двигаться вдоль их поверхности и отходит от нее. Научиться управлять этим явлением – насущная задача, поскольку срыв потока может сопровождаться резким снижением подъемной силы крыла, увеличением его сопротивления, что порой приводит к катастрофическим последствиям.

...в своих исследованиях по электричеству Ом вдохновлялся работой Фурье «Аналитическая теория тепла». Ому пришла мысль, что механизм теплового потока, о котором шла речь в этом труде, можно уподобить току в проводнике, и в одной из формулировок своего закона он ввел понятие плотности тока, иначе говоря, плотности потока электрического заряда.

...защита в 1874 году докторской диссертации российским ученым Умовым сопровождалась шестичасовым диспутом. Критику оппонентов вызвали предложенные Умовым новые понятия скорости и направления движения энергии, потока энергии и ее плотности в данной точке среды. Через 10 лет английский физик Пойнтинг ввел вектор плотности потока электромагнитной энергии. Сегодня этот вектор известен как вектор Умова–Пойнтинга.

...интенсивность видимого излучения стоваттной лампочки на расстоянии 3 м равна примерно $2\cdot10^{-6}$ Вт/см^2. Для сравнения, среднее значение так называемой солнечной постоянной – интенсивности потока солнечного света вблизи земной поверхности – немногим выше 0,1 Вт/см^2, а при фокусировке луча от непрерывно генерирующего лазера можно достичь интенсивности 10^{10} Вт/см^2. Используемые в экспериментах по термоядерному синтезу титан-сапфировые лазеры способны производить ультракороткие импульсы с интенсивностью до 10^{18} Вт/см^2.

...минимальная интенсивность звукового потока, которую может еще почувствовать ухо человека, составляет около 10^{-16} Вт/см^2 при частоте звука 3 кГц. Порог чувствительности глаза примерно такой же – глаз способен реагировать на потоки световой энергии порядка $3\cdot10^{-17}$ Вт/см^2. А современные радиоприемники могут «услышать» станцию, интенсивность волн которой в месте приема достигает лишь 10^{-18} Вт/см^2.

...«звездные величины» и «блеск» – характеристики небесных объектов, используемые в астрономии, – представляют собой ни что иное как разновидности определения энергии потоков излучения, т.е. их интенсивности. Возникли они еще до появления понятий «световой поток» и «освещенность».

Что читать в «Кванте» о потоках

(публикации последних лет)

1. «Откуда течет энергия: открытие за открытием» – 2003, №5, с.31;
2. «Калейдоскоп «Кванта» – 2004, №3, с.32; 2005, №5, с.32; 2007, №5, с.32; 2008, №1, с.32; №3, с.32; №5, с.32;
3. «Магнитный поток сверхпроводника» – 2004, Приложение №4, с.38;
4. «Как в землю казан закопали» – 2004, Приложение №4, с.72;
5. «Этот ужасный космический холод» – 2005, Приложение №6, с.180;
6. «Закон электромагнитной индукции» – 2006, №5, с.36;
7. «Радиоволны переносят энергию и импульс» – 2007, Приложение №1, с.22;
8. «Магнитная сила и закон электромагнитной индукции» – 2008, №5, с.38;
9. «Лазер – новый источник света» – 2009, Приложение №2;
10. «Поток магнитной индукции» – 2009, №3, с.51.

Материал подготовил А.Леонович

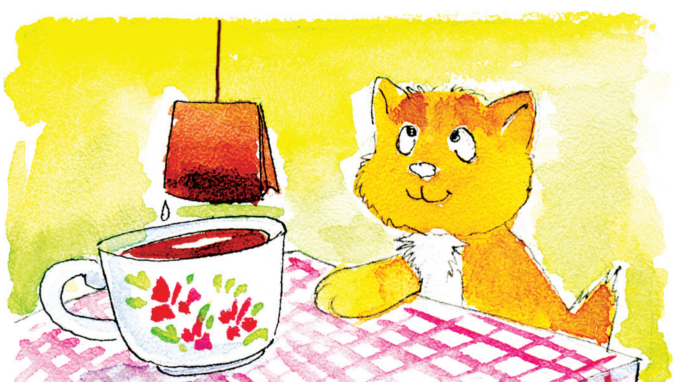
Задачи

1. Вдоль дороги длиной 60 км стоят несколько пеньков (больше одного). Первый турист идет по дороге со скоростью 5 км/ч и возле каждого пенька отдыхает одно и то же целое число часов. Второй турист едет на велосипеде со скоростью 12 км/ч и на каждом пеньке отдыхает в два раза дольше первого туриста. Вышли и пришли туристы одновременно. Сколько пеньков у дороги?

О.Иванова, К.Кохась

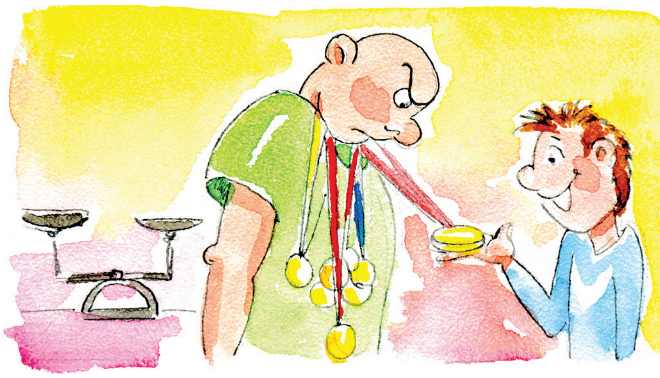
2. Опустив в кружку с водой чайный пакетик, приподнимите его за ниточку над кружкой — пакетик начнет вращаться. Почему это происходит?

А.Ковальджи



3. Есть 1 золотая, 3 серебряных и 5 бронзовых медалей. Известно, что одна из них фальшивая: легче настоящей. Настоящие медали из одного металла весят одинаково (а из разных — не одинаково). Как за 2 взвешивания на чашечных весах без гирь найти фальшивую медаль?

А.Шаповалов

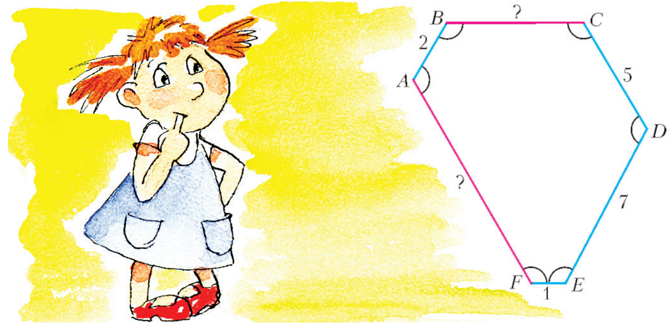


4. В деревне живут 250 хоббитов. Каждый хоббит живет в отдельном домике. По вечерам они ходят друг к другу в гости. За один вечер каждый хоббит, если он идет в гости, посещает всех, кого можно застать дома, причем у себя дома в этот вечер уже не появляется. За какое наименьшее число вечеров может случиться так, что среди любых двух жителей деревни хотя бы один побывал в гостях у другого?

А.Эвнин

5. В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ все внутренние углы равны. Известно, что $AB = 2$, $CD = 5$, $DE = 7$, $EF = 1$. Найдите BC и AF.

Фольклор



Иллюстрации Д.Гришуковой

Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6 – 8 классов.

Стабильные браки

В. УФНАРОВСКИЙ

— Сегодня стартовал наш долгий космический полет, — так начал свою речь капитан первого межзвездного корабля «Земля — Андромеда». — Нас здесь, как вы знаете, 50 мужчин и 50 женщин, а лететь нам 50 лет. Так что всем следует завести семьи. Каждый из вас не женат и должен вступить в брак здесь: таково было условие приема в экспедиционный корпус.

— Мы помним, и многие из нас будут рады жениться уже сегодня. Мы знаем друг друга не меньше года.

— Хорошо. Но я думаю, что жениться должны все, причем так, чтобы на этом корабле не было никаких супружеских измен.

Все рассмеялись от души.

— Капитан, вы идеалист, — сказал кто-то.

— Я вполне реалистичен, — улыбнулся капитан. — Это невозможно на Земле, но мы вполне можем осуществить это здесь.

— Как это? — все продолжали смеяться.

— Могу я спросить, — капитан был несгибаем, — почему это женатый мужчина А изменяет своей жене с замужней леди О?

— Что же здесь непонятного, капитан? Потому что они нравятся друг другу больше, чем их собственные супруги.

— И А запросто находит красотку О, которая предпочтет его собственному мужу?

— Проще некуда! — некоторые уже просто покатывались от хохота.

— Но это на Земле! — Капитан строго осмотрел на команду, и смех сам собой пропал. — А я намерен женить нас так, чтобы никакому мужчине А не удалось найти такую женщину О, которая бы нравилась ему больше собственной жены и которая предпочла бы его собственному супругу.

— Вы имеете в виду, капитан, что каждой такой женщине, которая нравится А больше, чем его половина, сам А не нравится? По крайней мере не больше собственного мужа.

— Именно. И наоборот, А предпочитает свою жену всем тем, которые с радостью сменили бы своих партнеров на него.

— Хорошая идея, капитан! Если вам это удастся, вы решите вековую проблему стабильности в браке. Но нам все равно кажется, что это невозможно.

— Но могу я попробовать? — спросил капитан вкрадчиво.

— Отчего же нет, это будет забавно!

— Прекрасно! Тогда начнем немедленно. Сегодня каждый мужчина должен выбрать ту женщину, которая ему нравится больше всех, и написать ей письмо: попросить ее руки.

— Но тогда все выберут Диану. — Диана Браун была признанной красавицей. Многие были влюблены в нее, но мало кто надеялся стать ее мужем.

— Во-первых, не все. Например, не я. Кроме того, это не играет никакой роли. Вы должны посвататься, даже если у вас нет никакого шанса. Выберите ту женщину, о которой мечтаете. Однако это — только начало. Мы продолжим завтра. А сейчас вы должны написать свое первое письмо. И не думайте о возможном отказе. Только выберите самую желанную женщину. И помните: это — приказ. Каждый должен выбрать и посвататься!

Не много мужчин смогли уснуть в эту ночь. Выбрать женщину своей мечты. Не так-то это просто! К тому же она может и отказать. Пожалуй, хорошо, что это был приказ, многие иначе и не осмелились бы посвататься. И многие выбрали Диану.

Капитану тоже не спалось. Мэри, в которую он тайно был влюблен, давно уже предпочитала другого.

— Но я должен написать Мэри, — тяжело вздохнул капитан и начал свое письмо.

На следующее утро после завтрака все собрались в зале. Многие женщины были тихи и печальны.

— Вижу, далеко не все получили письма, — заметил капитан. Несколько вздохов были ему ответом. — А кто-то получил больше одного письма. — Некоторые женщины радостно кивнули. Краем глаза он увидел, что и Мэри кивнула тоже. — Теперь ваш черед выбирать! Каждая женщина, которая получила больше чем одно письмо, должна выбрать только одного мужчину.

— И выйти за него замуж?

— Нет, этого я не говорил. Но вот что вы должны сделать, так это ответить всем остальным, что вы никогда не сможете выйти за них. Я думаю, это естественно. Они должны знать, что есть кто-то, кто вам нравится больше.

— Только это?

— Только это. И ждать завтрашнего дня.

— Тогда Диане придется писать много писем! — пошутил кто-то в зале. Но самой ей, похоже, было не до шуток.

— А можно я всем отвечу? — спросила она.

«Видать, не получила она того письма, которого ждала», — подумал капитан, а вслух сказал:

— Нет, ты должна ответить всем, кроме лучшего из них. Это только начало. Мы всего лишь отметаем заведомо нестабильные браки, — попытался он утешить красавицу. Только в последнюю секунду он осмелился поднять взгляд на Мэри. Она сочувственно улыбнулась ему, и он понял, что завтра получит от нее письмо.

Мало кому удалось легко уснуть и в эту ночь. Женщины, которым было из чего выбирать, размышляли. Те, кому вообще выбирать было не из чего, плакали. А мужчины... Мужчины ждали и тоже не могли уснуть.

На следующее утро больше половины из них получили письма, и бóльшую часть – от Дианы. Письма были вежливые, но безнадежные. Капитан также получил свое письмо от Мэри. После завтрака все собрались, и капитан сказал:

– Сегодня многие из нас получили письмо. Это означает, что мы, – капитан бросил печальный взгляд на Мэри, – не имеем никаких шансов на стабильный брак с нашими избранницами. И я считаю, что лучше узнать это сейчас, чем после женитьбы.

– Вы правы, капитан! – большинство были согласны.

– А знаете ли вы, что нам делать теперь?

– Нет, не знаем.

– Во-первых, забыть эту женщину. Вы никогда не женитесь на ней. Во-вторых, выбрать самую лучшую женщину из оставшихся и посвататься к ней!

– Значит, мы можем получить новое письмо? – спросили женщины с радостью в голосе.

– Да. И, может быть, не одно.

– И те, что уже получили письма, тоже могут?

– Конечно! С одним лишь исключением: вы не получите писем от тех, кому отказали. Но вряд ли вам нужны эти письма.

– Капитан, вы умнее, чем мы думали!

Новые надежды – новые радости. Женщины были возбуждены.

– А если мужчине не отказали, значит ли это, что он уже может заказывать кольца? – спросил довольный молодой человек. Многие подозревали, что он был единственным, кто написал Диане и не получил никакого письма в ответ.

– Нет, этого капитан не имел в виду. Ты просто имеешь хороший шанс, но надо еще подождать, – ответила Диана ко всеобщему изумлению.

– Совершенно верно, – подтвердил капитан. – Но если хочешь, ты можешь написать той же женщине.

– Я так и сделаю!

Новый выбор – новая надежда. Но на этот раз многие спали хорошо. Только некоторые из тех, кто получил отказ, не могли уснуть. Среди них был и капитан.

– И зачем я это начал? – спрашивал он себя. – Сам же убил свою надежду... Однако в любом случае я должен выбрать новую женщину. И получить еще одно письмо. Потому что я должен быть честным: Диана – лучше всех, если я должен позабыть про Мэри. – И он написал и отослал письмо Диане.

На следующее утро большинство женщин были веселы, а Диана просто светилась от радости.

– «Наверное, она получила то письмо, на которое надеялась», – подумал капитан, а вслух сказал:

– Девушки, те из вас, кто получил больше чем одно письмо, знают, что надо делать?

– Выбрать лучшего и ответить остальным.

– Умницы!

– Но капитан, как долго мы будем писать и выбирать?

– До тех пор, пока каждая из вас не получит хотя бы одно письмо. И тогда лучшее письмо будет от вашего будущего мужа. И это будет стабильный брак. Подумайте, почему.

– Капитан, – сказала Мэри,– кажется, я поняла, наконец, твою идею. Ты имеешь в виду, что мы, женщины, не будем неверны мужьям по той простой причине, что те, с кем мы могли бы это, возможно, сделать, не любят нас: они не прислали нам письма, у них есть кто-то лучше. А если ни одна женщина не будет неверна, то не будет и неверных мужей.

– Прекрасное рассуждение!

– Можно спросить? – сказала Диана. – Означает ли это, что я буду замужем за тем единственным человеком, которого люблю, если он уже написал мне?

– Ты можешь быть уверена в этом! Всем остальным ты все равно откажешь.

– Зачем же мне тогда ждать?

– Только для того, чтобы все остальные тоже получили свое письмо.

– Но могу я уже сейчас сказать моему будущему спутнику жизни, что я выбрала его до конца своих дней?

– Я думаю, ты должна это сказать и другим: они не будут тогда к тебе свататься и найдут свою пару быстрее.

– Тогда не хочу я больше писать никаких писем! – сказала Диана и нежно поцеловала оторопевшего капитана.

Хочется верить, что читатель понял ту математическую проблему, которая лежит в основе этой сказки. Мы надеемся, читатель согласится, что это – красивое решение, и спросит себя: как его можно использовать? И как решать похожие проблемы? Например, что будет, если женщин больше, чем мужчин, или если есть мужчины, которые скорее умрут, чем женятся? А если женщины будут писать первыми, будет ли решение тем же самым?

Если же читатель задумается: «Правда ли это? Могу ли я, например, *доказать*, что все найдут себе супруга?» – значит, он начал думать как математик.

А тогда несколько задач должны быть приятным дополнением к сказке.

1. Сформулируйте задачу строго математически. Это может оказаться сложнее, чем ожидалось. Не отступайте! Начните так: даны две квадратные таблицы размером $n \times n$. В каждой строке каждой из таблиц стоят все числа от 1 до n в каком-то порядке...

2. Напишите четкий алгоритм, который соответствует решению в сказке, и покажите, что он всегда работает.

3. Покажите, что бывают случаи, когда задача имеет несколько решений.

4. Предположим теперь, что таблицы бесконечные, занумерованы натуральными числами и что в каждой строке есть все натуральные числа. Можно ли тогда доказать существование решения, если предполагать, что в каждой строке кандидаты расположены в порядке убывания предпочтения (в частности, на первом месте каждой строки стоит номер самого лучшего кандидата)?

5. А если порядок противоположный?

6. Рассмотрите еще и такой алгоритм для исходной (конечной) задачи. Разрешим разводы. Выстроим всех мужчин в очередь. Первый в очереди сватается ко всем женщинам по очереди в порядке своего предпочтения (независимо от того, замужем очередная кандидатура или нет) до тех пор, пока кто-то не согласится. Они женятся, и если женщина была замужем, то она сначала разводится, а ее бывший супруг становится в конец очереди. Верно ли что:

а) такая женщина всегда найдется;

б) процесс закончится;

в) получившиеся браки будут стабильными?

Годится ли такой подход для бесконечных случаев?