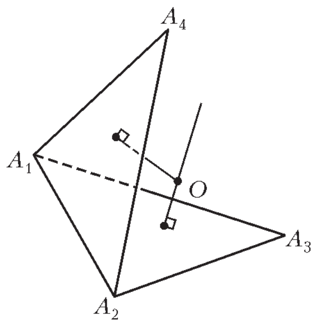

Рис. 7

сами грани не изменяем. По какой линии будет двигаться при этом центр O описанного шара тетраэдра? По перпендикуляру, восставленному к грани $A_1A_2A_3$ в центре ее описанной окружности (рис.7). Чем ближе точка O к плоскости грани, тем меньше радиус описанного шара, а чем дальше – тем больше. Значит, немного изменив двугранный угол – либо увеличив, либо уменьшив его, можно переместить точку O дальше от грани, а значит, увеличить радиус описанного шара. Причем, так как двугранный угол изменился мало, ребро A_3A_4 как было, так и останется меньше D, а длины остальных ребер не поменялись вовсе. Значит, тетраэдру Δ не соответствовал наибольший радиус шара. Получили противоречие, чем и завершается доказательство.

Упражнения

12. Для любого центрально-симметричного множества $R = D/2$.

13. Верно ли, что если $R = D/2$, то множество имеет центр симметрии?

14. Верно ли, что если для выпуклого плоского множества $R = \frac{\sqrt{3}}{3}D$, то это – правильный треугольник?

Звездные множества и теорема Красносельского

Представим себе, что мы попали в комнату весьма причудливой формы, не прямоугольную и даже не выпуклую. Из каждого места в комнате мы можем разглядеть лишь некоторую ее часть. Если же нам удалось найти точку, из которой видна вся комната, то комната называется *звездной* относительно этой точки. Итак, ограниченное замкнутое множество **G** называется звездным, если оно содержит некоторую точку K, из которой видно все множество (рис.8). Это означает, что для любой точки $X \in$ **G** отрезок KX лежит в **G**. Говорят еще, что **G** звездно относительно точки K. Например, множество, состоящее из нескольких отрезков, выходящих из одной точки, звездно (относительно этой точки), хотя оно не выпукло. А выпуклые множества – это те, которые звездны относительно каждой своей точки.

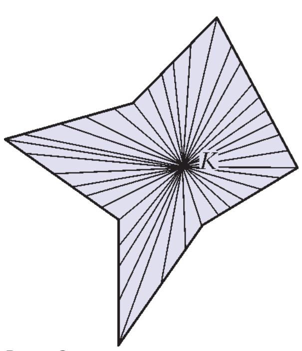

Рис. 8

Зачем нужны звездные множества? Во многих задачах математики интересующее нас множество не является выпуклым, но часто обладает каким-то другим, более слабым свойством. Звездность – одно из таких свойств. Как определить, является ли множество звездным? Для этого есть следующий замечательный критерий, доказанный Марком Александровичем Красносельским (1920–1997), выдающимся советским математиком. Получил он этот результат будучи еще совсем молодым человеком, когда, призванный в Красную Армию, преподавал в артиллерийском училище в городе Талгар, близ Алма-Аты. Эта теорема – один из первых результатов Красносельского, принесших ему всемирную известность. Мы сформулируем ее только для плоскости, хотя точно так же она доказывается и для множеств в пространстве (надо только в формулировке заменить «три точки» на «четыре»).

Теорема 4 (Красносельский, 1946). *Если любые три точки плоского множества* **G** *видны из некоторой его точки, то найдется точка, из которой видно все множество (т.е.* **G** *– звездно).*

Вернувшись к аналогии с комнатой, представим, что на ее стенах везде висят картины. Тогда если любые три картины можно одновременно увидеть из подходящего места в комнате, то найдется точка, из которой видны сразу все картины.

Родство с теоремой Хелли видно сразу: «если каждые три – то и все…» Но до доказательства еще далеко, сначала нужна предварительная работа. Первое – нам понадобится понятие выпуклой оболочки.

Выпуклой оболочкой множества **A** называется пересечение всех выпуклых множеств, содержащих **A**. Для получения выпуклой оболочки нужно взять все выпуклые множества, содержащие **A**, и пересечь. Получим выпуклое множество (как пересечение выпуклых множеств). Любое выпуклое множество, содержащее **A**, содержит и его выпуклую оболочку (докажите это). Итак, выпуклая оболочка – это наименьшее выпуклое множество, содержащее **A**. Несколько примеров показано на рисунке 9.

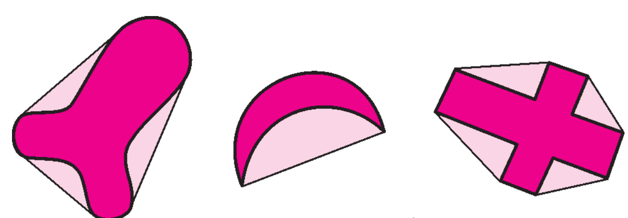
Рис. 9 *Примеры выпуклых оболочек*

И еще один факт, который мы используем в доказательстве. Для любых ограниченных замкнутых множеств **A** и **B** среди всех отрезков, соединяющих точку из **A** с точкой из **B**, существует самый короткий. Иными словами, расстояние между двумя ограниченными замкнутыми множествами всегда достигается.

Доказательство теоремы 4. Для каждой точки $X \in$ **G** обозначим через $\mathbf{V}_X$ геометрическое место точек множества **G**, из которых видна точка X. По условию, любые три множества $\mathbf{V}_{X_1}, \mathbf{V}_{X_2}$ и $\mathbf{V}_{X_3}$ пересекаются. На этом месте можно вспомнить гоголевскую Агафью Тихоновну: «Ах, если бы губы Никанора Ивановича да приставить к носу Ивана Кузьмича…» Ах, если бы эти множества были выпуклы! Тогда из теоремы Хелли немедленно получилось бы, что все они имеют общую точку, из которой было бы видно все множество **G**. Но, увы! Они могут быть невыпуклы (рис. 10).

Попробуем обойти эту трудность. Рассмотрим не сами множества $\mathbf{V}_X$, а их выпуклые оболочки. К ним мы можем применить теорему Хелли. Получаем, что существует точка C, принадлежащая выпуклым обо-

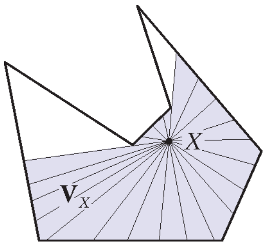

Рис. 10

лочкам всех множеств $\mathbf{V}_X$, $X \in \mathbf{G}$. Но будет ли все множество $\mathbf{G}$ видно из точки C? Оказывается, да. Хотя пока не очевидно даже, что точка C принадлежит множеству $\mathbf{G}$, ведь это множество не выпукло! Итак, докажем от противного, что множество $\mathbf{G}$ звездно относительно точки C. Пусть это не так, и некоторая точка $N \in \mathbf{G}$ *не видна* из C. Это значит, что некоторая точка A отрезка CN не принадлежит $\mathbf{G}$. Пусть $\rho > 0$ – расстояние от A до множества $\mathbf{G}$, т.е., расстояние от точки A до ближайшей к ней точки $\mathbf{G}$. Пусть также B – ближайшая к A точка отрезка NA, принадлежащая $\mathbf{G}$. Отложим на отрезке BA отрезок $BP = \frac{1}{2}\rho$. Поскольку $\rho \le BA$, точка P лежит на отрезке BA. Наконец, пусть V – ближайшая к множеству G точка отрезка PA, а $U \in \mathbf{G}$ – ближайшая к V точка множества $\mathbf{G}$. Заметим, что V отлична от A (это важно!). Кроме того, угол UVA – не острый. В противном случае, если $\angle UVA < 90^\circ$, на отрезке VA можно взять близкую к V точку V', для которой угол $\angle UV'A$ также острый. Но тогда в треугольнике $UV'V$ сторона UV лежит напротив тупого угла, а значит – наибольшая. Получаем $V'U < VU$, что противоречит определению точки V, как ближайшей к множеству $\mathbf{G}$ точке отрезка PA.

Проведем теперь через точку U прямую, перпендикулярную VU, и назовем $\mathbf{H}$ полуплоскость, ограниченную этой прямой, не содержащую точку V (рис. 11). Докажем, что множество $\mathbf{V}_U$ целиком лежит в $\mathbf{H}$. Если это не так, то найдется точка X, не лежащая в $\mathbf{H}$, для которой весь отрезок UX лежит в $\mathbf{G}$ (рис. 12). Так как угол VUX – острый, то на отрезке UX можно взять близкую к U точку U', для которой угол $VU'X$ также острый, и получаем $VU' < VU$, что противоречит определению точки U, как ближайшей к V точке множества $\mathbf{G}$. Итак, множество $\mathbf{V}_U$ лежит в полуплоскости $\mathbf{H}$. Но тогда и его выпуклая оболочка лежит в $\mathbf{H}$, ведь полуплоскость – выпуклое множество! Значит, и точка C лежит в $\mathbf{H}$, что невозможно, поскольку $\angle UVC \ge 90^\circ$. Итак, мы предположили, что существует точка, которая не видна из точки C, и пришли к противоречию. Теорема доказана.

Теория приближений

Еще одна область применения теоремы Хелли – теория приближений. Она изучает, как имеющиеся «неудобные» функции или числовые данные (например, полученные в результате эксперимента) приближать более простыми и удобными. Допустим, некоторый физический процесс может быть описан функцией $F(x)$. Сама функция нам неизвестна, но мы можем узнать ее значение в любой точке. Мы хотим приблизить ее квадратичной функцией $f(x) = ax^2 + bx + c$, где коэффициенты a, b, c неизвестны. Для этого выбираем n чисел $x_1, \ldots, x_n$ и узнаем значения $F(x_1), \ldots, F(x_n)$. Необходимо определить, существует ли квадратичная функция $f(x)$ такая, что $|f(x_k) - F(x_k)| < \varepsilon$ для всех $k = 1, \ldots, n$, где $\varepsilon > 0$ – нужная нам точность приближения.

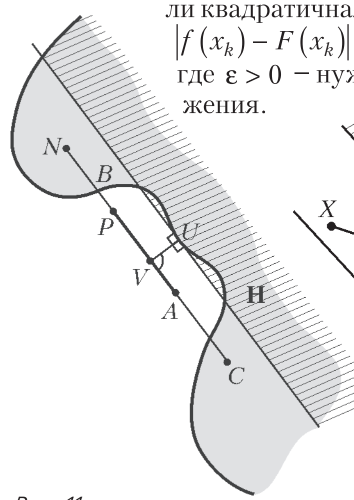

Рис. 11

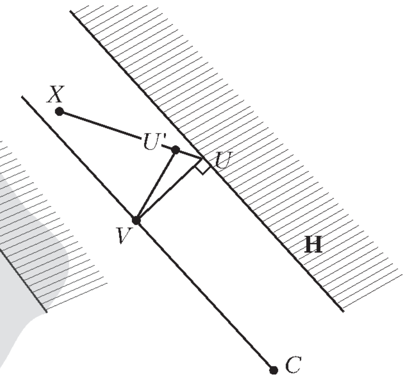

Рис. 12

Упражнения

15. Для данного набора точек $x_1, \ldots, x_n$ искомая квадратичная функция $f(x)$ существует тогда и только тогда, когда такая функция существует для любых четырех точек из этого набора.

Указание. Каждой квадратичной функции f поставим в соответствие точку $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ и для каждого k определим множество таких точек, для которых $|f(x_k) - F(x_k)| < \varepsilon$. Докажите, что эти множества выпуклы, и примените теорему Хелли.

16. Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение, если вместо квадратичных функций приближать функциями вида $f(x) = A\sin(x + \varphi)$.

Еще несколько задач

Мы заканчиваем знакомство с теоремой Хелли несколькими задачами для самостоятельного решения.

Упражнения

17. На плоскости дано конечное семейство прямых. Известно, что любые три прямые можно пересечь кругом радиуса r. Тогда все прямые семейства можно пересечь кругом радиуса r.

18. Сформулируйте и докажите аналоги утверждения из упражнения 17

а) для семейства прямых в пространстве;

б) для семейства плоскостей в пространстве.

19. Внутри ограниченной выпуклой фигуры всегда найдется точка, обладающая следующим свойством: любая прямая, проходящая через эту точку, делит площадь фигуры на части, отношение которых не превосходит 2.

20. На плоскости лежат несколько прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат (не обязательно одинаковых), каждые два из которых пересекаются. Тогда все прямоугольники имеют общую точку.

21. Если несколько полуплоскостей покрывают всю плоскость, то из них всегда можно выбрать три, которые также покроют всю плоскость.

22. Сформулируйте и докажите аналоги утверждений из упражнений 19–21 для пространства $\mathbb{R}^3$.

Заключение

Сколько же, оказывается, интересного связано с одной лишь первой теоремой Хелли! А ведь есть еще вторая и третья …

Плазма и… немного биологии

А.МИНЕЕВ

Казалось бы, что общего между физикой плазмы (а именно с ней связала профессиональная деятельность автора статьи – *прим. ред.*) и биологией? Однако, если присмотреться повнимательнее, поражает множество сходных в обеих науках идей и возникающих аналогий.

Плазма

Слово «плазма» часто встречается в нашей жизни. Плазменные панели телевизоров и осветительные приборы – в быту, разряды молнии и полярные сияния – в природе. Излучение Солнца, обеспечивающее нам жизнь, также обязано реакциям, происходящим в плазме. Если взглянуть немного шире, за пределы Земли, то в состоянии плазмы находится более 90% вещества во Вселенной. Там это естественное состояние.

Любое вещество переходит в состояние плазмы, если его нагреть до ионизованного состояния, когда атомы распадаются на составляющие – электроны и ионы. Температура, при которой это происходит, может составлять тысячи градусов – тогда речь идет о низкотемпературной плазме или многие миллионы градусов – в случае высокотемпературной плазмы. Так, характерная температура в центре звезд (типа Солнца) – десятки миллионов градусов, при этом происходит интенсивное протекание реакций синтеза легких ядер.

А вот несколько терминов из биологии, близких плазме по написанию:

- плазма крови (желтоватая полупрозрачная составляющая крови, без эритроцитов, лейкоцитов и тромбоцитов),
- протоплазма (жидкое содержимое живой клетки),
- плазматическая мембрана (клеточная мембрана, окружающая протоплазму),
- плазмодии (это, простите, паразиты, обитающие в эритроцитах млекопитающих).

Как можно видеть, смысл биологических «плазменных» словообразований совсем другой. К тому же и диапазоны температур существования биологических объектов и плазмы совершенно различны. Однако рассмотрим поподробнее ряд более общих аналогий между биологией и физикой плазмы.

Похожие зависимости

При нагревании твердого тела оно претерпевает ряд фазовых переходов: твердое тело $\to$ жидкость $\to$ газ $\to$ плазма, что качественно изображено на рисунке 1.

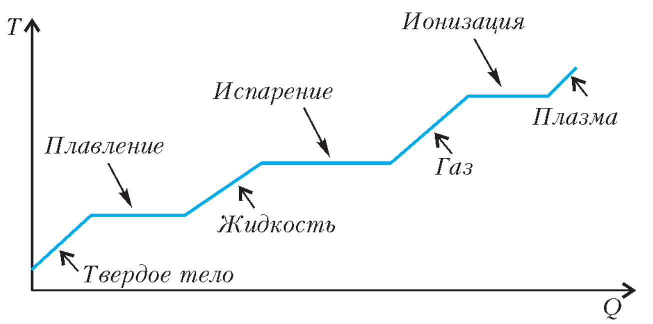

Рис.1. Характерная зависимость температуры вещества от подводимой энергии (количества теплоты)

Из рисунка следует, что в ходе фазового перехода температура тела остается постоянной (вся подводимая энергия тратится на перевод вещества в новое фазовое состояние), а между фазовыми переходами сохраняется монотонная зависимость температуры от подводимой энергии.

Приведем пример подобной зависимости из физики плазмы. Как известно, материальными стенками (из обычного вещества) длительно удерживать плазму невозможно. За пределами Земли (в звездах) плазма удерживается силами гравитации, а на Земле уменьшить уход энергии горячей плазмы на стенки можно только при использовании магнитного поля. Наибольшие успехи в нагреве и удержании горячей плазмы достигнуты на тороидальных магнитных установках типа ТОКАМАК, идея которых была предложена в начале 1950-х годов И.Е.Таммом и А.Д.Сахаровым. (Более подробно об особенностях таких систем можно прочитать в книге Г.С.Воронова «Штурм термоядерной крепости» – М.: Наука, серия «Библиотечка «Квант», выпуск 37.) В нашей стране были построены и первые токамаки, после впечатляющих результатов на которых установки такого типа стали строить во всем мире. А недавно, в 2006 году, принято решение о сооружении первого международного экспериментального реактора типа токамака – ITER (International Thermonuclear Experimental Reactor) с участием России, Европы, США, Китая, Индии и Южной Кореи.

Казалось бы, с момента появления идеи токамаков прошло уже около 60 лет, а исследования по удержанию и нагреву горячей плазмы продвигаются очень медленно. Однако это впечатление обманчиво. На рисунке 2 приведена эволюция так называемого интегрального параметра токамаков $n\tau_E T$ (здесь n и T – концентрация и температура плазмы, в единицах

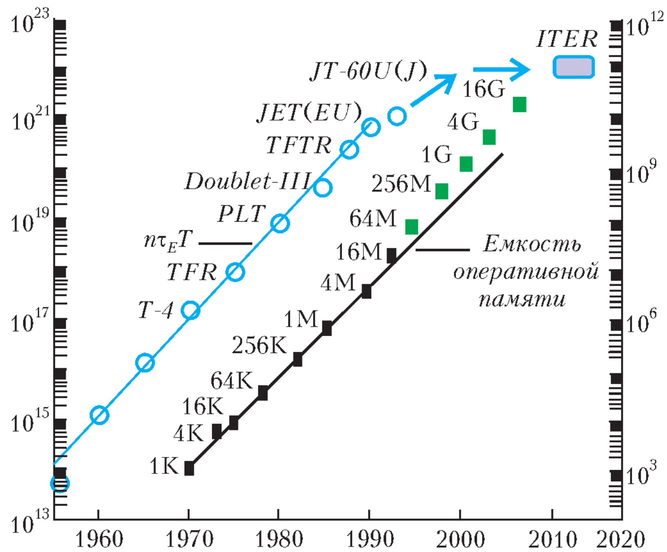

Рис.2. Динамика роста интегрального параметрам $n\tau_E T$ токамаков и оперативной памяти персональных компьютеров

10^{20} м$^{-3}$ и кэВ соответственно, τ_E – энергетическое время удержания плазмы, в секундах), характеризующего близость параметров плазмы к требуемым в реакторе, в сравнении с ростом объема оперативной памяти персональных компьютеров – с одной из самых быстро растущих величин. Из рисунка видно, что скорости роста соответствующих параметров в обоих случаях примерно одинаковы.

А теперь – о зависимости «с изломом» (типа фазового перехода), характерной при описании удержания энергии в токамаках. В тороидальной геометрии токамака из-за неоднородности магнитного поля появляется два сорта заряженных частиц – запертые, их траектория имеет вид банана, и пролетные, их траектория близка к круговой. При небольшой частоте соударений частиц уход энергии из плазмы определяется частицами с бананообразными траекториями, при очень большой – частицами с круговыми траекториями. В результате зависимость коэффициента теплопроводности от частоты соударений имеет вид, изображенный на рисунке 3. Отметим, что время жизни плазмы τ_E определяется через коэффициент теплопроводности χ простым соотношением $\tau_E \sim 1/\chi$.

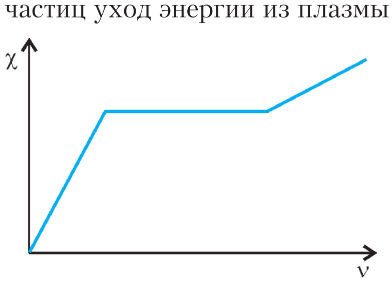

Рис.3. Зависимость коэффициента теплопроводности плазмы от частоты соударений частиц в токамаке

Обратимся к биологии и приведем зависимость относительной высоты дерева от его диаметра из статьи «О высоких деревьях». (См. статью А.Минеева в «Кванте» №3 и 4 за 1992 г.– *Прим.ред.*) График, приведенный на рисунке 4, характеризуется наличием плато, когда максимальное значение отношения h/d при умеренном диаметре дерева примерно постоянно и равно 50, увеличением отношения h/d для невысоких деревьев ($h < 10$ м) и снижением этого отношения для очень высоких деревьев (с диаметром ствола $d >$ > 2 – 2,5 м), так что максимальная высота деревьев на Земле не превышает величины $h_{\max} = 150$ м.

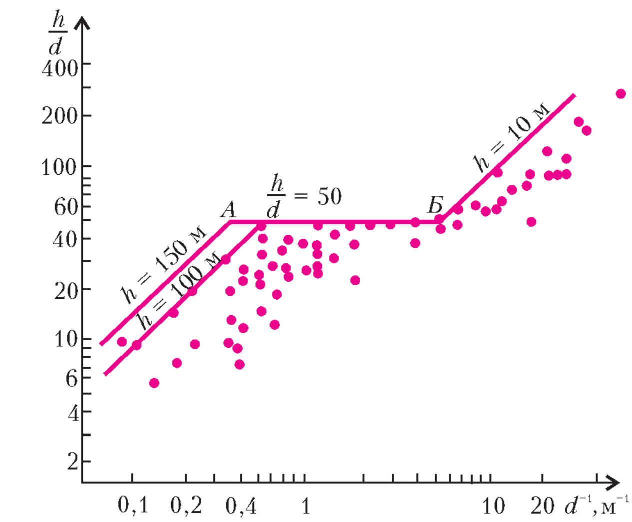

Рис.4. Зависимость относительной высоты дерева от его диаметра

Но ведь это тот же самый вид зависимости, что и на рисунке 3 для плазмы! А что если и в случае деревьев по мере увеличения диаметра ствола (или, что то же самое, по мере уменьшения величины d^{-1}) происходит появление какого-то нового механизма – типа фазового перехода, как на рисунке 1, или нового механизма ухода энергии, как на рисунке 4?

В упомянутой статье подробно исследованы причины такого типа зависимости. Основной вклад дала механика (рис.5): ограничения на прочность дерева при сильном изгибе для тонких деревьев объяснили правую часть зависимости, сильный ветер ответствен за наличие плато, а некоторое уменьшение отношения h/d для очень толстых деревьев объясняется устойчивостью формы ствола дерева под действием собственного веса.

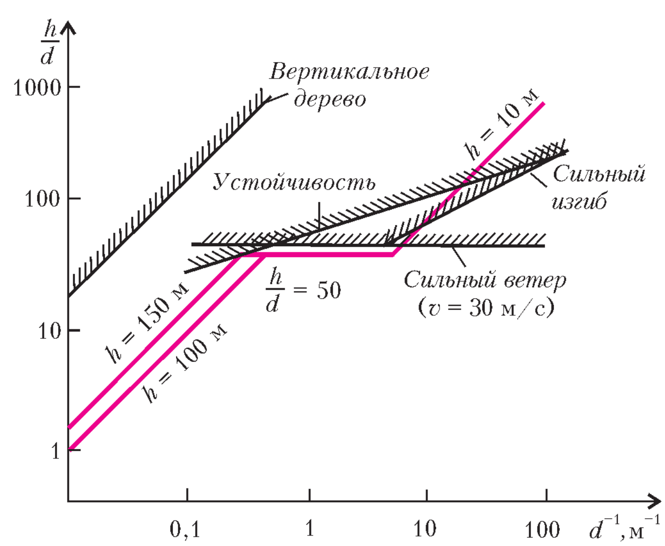

Рис.5. Ограничения, связанные с механическими параметрами дерева

Тем не менее, выяснилось, что природа ограничения высоты дерева ($h_{max} = 150$ м) – вне рамок механики и механической прочности. Анализ площади годовых колец (за десятки лет) привел к выводу о том, что для взрослых деревьев годовые кольца имеют одинаковую площадь. Это означает примерно линейный закон роста массы ствола со временем: $M \sim t$ и (поскольку $h/d \approx \text{const}$) приводит к следующему закону роста высоты дерева:

$$h \sim M^{1/3}, \quad h \sim t^{1/3}.$$

Видно, что рост дерева со временем сильно замедляется, и за время жизни оно просто не успевает дорасти до высоты $h > 150$ м.

Полученные результаты оказались достаточно правдоподобными и в последнее время получили дополнительное подтверждение – как теоретическое, так и экспериментальное. Например, в статье 1999 года из журнала «Nature» (G.B.West, J.H.Brown, B.J.Enquist, «A general model for the structure and allometry of plant vascular systems») развита модель, согласно которой зависимость высоты дерева от массы его ствола оказывается еще более медленной:

$$h \sim M^{1/4},$$

и дерево действительно просто не успевает вырасти слишком высоким.

В еще одной статье, теперь уже 2004 года, из журнала «Nature» (G.W.Koch, S.C.Sillett, G.M.Jennings, S.D.Davis, «The limits to tree height») приведены результаты очень изящных измерений характеристик кроны наиболее высоких секвой в северной Калифорнии (для этого пришлось научиться брать пробы с высоты более 100 м). Измерения показали, что по мере увеличения высоты дерева уменьшаются длина хвоинок и угол их наклона к ветке (рис.6), в итоге жизнь

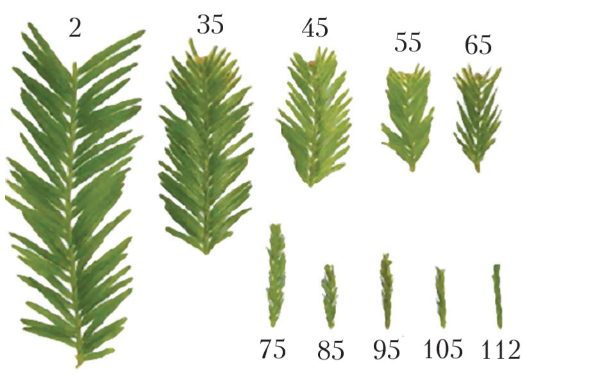

Рис.6. Изменение размеров и структуры хвои в зависимости от высоты секвойи (цифры – высота дерева в метрах)

на большой высоте как бы замирает. Полученные экспериментальные зависимости приводят к предельной высоте деревьев $h_{max} \le 130$ м.

Ограничения на потребление и высвобождение энергии

В статье «Фауна и Флора» (см. статью А.Минеева в «Кванте» №4 за 2001 г. – *Прим.ред.*) проанализированы ограничения, связанные со скоростью потерь тепла животными, и показано, что постоянство температуры тела приводит к ограничениям на их массу: сверху порядка 100–200 тонн (при большей массе организм перегревается при движении) и снизу порядка нескольких грамм (при меньшей массе тепло не удержать, организм очень быстро охлаждается, приходится все время «грызть пищу»). Условие постоянства температуры можно записать в виде равенства

$$P = \frac{W}{\tau},$$

где P – мощность, вырабатываемая в организме, W – отводимая тепловая энергия, τ – время потерь тепла.

Такое же уравнение энергобаланса «работает» и в плазме, для которой P – мощность, выделяющаяся в результате реакций синтеза в плазме, W – тепловые потери энергии плазмы, τ – энергетическое время жизни плазмы. Имеющиеся экстраполяции времени жизни приводят к наличию минимального размера плазмы в реакторе (если размеры будут еще меньше, то условие энергобаланса не будет выполнено). Для систем с магнитным удержанием это метры – так, в реакторе ITER малый радиус тора составляет 2 м, а объем плазмы около 1000 м^3.

Ограничения на размеры снизу

Наименьшая структурная единица, из которой построены живые организмы, это клетка. Она имеет характерный размер около 10 микрон. (Аргументы, приводящие к такому значению диаметра клеток, приведены, в частности, в статье А.Минеева «От мыши до слона» в «Кванте» №11/12 за 1993 г. – *Прим. ред.*)

Ограничение снизу на размеры имеется и у плазмы. Плазма, с одной стороны, представляет собой газ *заряженных* частиц, а с другой (на макроскопических расстояниях), она должна быть в целом *нейтральной*. Это противоречие снимается тем, что заряд на больших расстояниях экранируется из-за присутствия расположенных рядом других заряженных частиц. В результате потенциал заряженной частицы вместо обычного кулоновского $\varphi = \frac{q}{r}$ в плазме приобретает вид

$$\varphi = \frac{q}{r} \cdot e^{-\frac{r}{\lambda_D}},$$

т.е. он остается кулоновским на малых расстояниях r и эффективно экранируется на масштабах, превышающих так называемый дебаевский радиус λ_D. (Заметим, что формулы для потенциала записаны в гауссовой системе единиц, активно используемой физиками. – *Прим. ред.*) По мере увеличения концентрации заряженных частиц плазмы дебаевский радиус уменьшается (заряженные частицы ближе, экранирование лучше). В общем случае его можно выразить через концентрацию n и температуру T плазмы следующим образом:

$$\lambda_D \approx 2{,}4 \cdot 10^{-5} \cdot \sqrt{\frac{T}{n}},$$

где размерность дебаевского радиуса $[\lambda_D] = $ м, температуры $[T]$ = кэВ, а концентрация n измеряется в единицах 10^{20} м$^{-3}$. Как правило, дебаевский радиус довольно мал (так, для плазмы реактора ITER с T = = 10 кэВ и $n = 10^{20}$ м$^{-3}$ величина λ_D составляет около 100 микрон) и существенно меньше размера самой плазменной области.

Ограничения на предельные возможности теплоотвода

В живых организмах, обитающих на Земле, уровень интенсивности циркулирующих тепловых потоков задается Солнцем. От Солнца до поверхности Земли доходит тепловой поток порядка 1 кВт/м^2, из которых поглощается около 300 Вт/м^2.

В случае высоких деревьев этот поток тепла запускает главный механизм подъема воды по стволу дерева наверх (при испарении воды через устьица). При этом оказывается, что, хотя площадь, занимаемая устьицами, составляет всего около 1% площади листа, испарение через них происходит примерно с той же скоростью, как и с открытой поверхности. (О природе этого парадокса рассказано в статье А.Минеева «Листья улыбаются» в «Кванте» №4 за 2006 г. – *Прим. ред.*)

Величина удельного теплового потока, отводимого через кожу животных при испарении, в целом того же порядка. Так, для человека в спокойном состоянии она составляет примерно 50 Вт/м^2. При максимальных физических нагрузках, например, рекордсмена-спринтера отношение выделяемой при беге тепловой мощности к площади поверхности тела бегуна может достичь 2 кВт/м^2. Такую величину теплового потока человеческое тело уже не успевает отвести (через кожу отводится до 1 кВт/м^2), и в ходе бега температура тела такого рекордсмена-спринтера должна расти.

А каких величин могут достигать тепловые потоки в плазменных устройствах? В энергетическом реакторе плазму нужно догреть до температуры порядка 100 млн градусов с помощью ввода извне определенной мощности нагрева через специальные окна ввода. Достигнутые удельные тепловые потоки составляют при этом 10 – 50 МВт/м^2 (в виде пучков частиц или электромагнитных волн). Основная часть энергии синтеза приходится на нейтроны (например, в реакции $D^+ + T^+ \to He^{++} + n$ нейтрон уносит энергию ~14 МэВ), для них удельный тепловой поток на окружающие плазму стенки составляет 1 – 3 МВт/м^2.

Следует отметить, что параллельно с термоядерной установкой в реакторе ITER будет создаваться специальный стенд для испытания материалов под действием термоядерных нейтронов. Этот стенд представляет собой большой ускоритель, пучок дейтронов из которого попадает на литиевую мишень. В мишени по реакции $D + {}^6Li \to {}^8Be + n$ образуются нейтроны со спектром, близким к термоядерному. Для того чтобы достичь требуемой для испытания материалов нейтронной нагрузки порядка 1 – 2 МВт/м^2, нужно, чтобы поток тепла от атомов дейтерия на литиевую мишень достигал 1000 МВт/м^2! Такие величины удельных тепловых потоков можно отвести только при использовании струи жидкого лития, движущейся по транспортеру специальной конструкции с большой скоростью (~20 м/с).

НАШИ ИНТЕРВЬЮ

Интервью с А.Б.Сосинским

Алексей Брониславович Сосинский – известный математик, автор научных и научно-популярных книг и статей, среди которых монография (совместная с В.В.Прасоловым) «Узлы, зацепления, косы и трехмерные многообразия», научно-популярная книга (переведенная на 6 языков) «Узлы. Хронология одной математической теории». Много лет Алексей Брониславович был редактором отдела математики «Кванта». Он – один из постоянных авторов нашего журнала, выдающийся лектор и преподаватель. На сайте mathnet.ru можно посмотреть его фильм-лекцию «Теорема Гёделя». Советуем вам также познакомиться с докладом «Математика жонглирования», прочитанным Жаном-Кристофом Новелли и Флораном Ивером, в котором А.Б.Сосинский выступил в роли переводчика (см. сайт mccme.ru). Это не случайно: Алексей Брониславович с детства говорит по-французски и по-английски. Многие российские математики учились писать научные статьи на английском языке по книге А.Б.Сосинского «Как написать математическую статью по-английски».

Алексей Брониславович – человек интересной судьбы, и мы рады представить нашим читателям его рассказ о себе, о математиках и математике.

– Может быть, вы расскажете сначала о вашей семье, кто ваши родители...

– Совсем коротко о моей родословной. Отец – из безземельных дворян (его отец, мой дед, был очень известным железнодорожным инженером), воевал против большевиков, после окончания гражданской войны эмигрировал и на долгие годы осел в Париже. Там он познакомился с моей мамой, Ариадной Черновой, дочкой Виктора Михайловича Чернова, лидера и главного теоретика партии социалистов-революционеров, председателя Учредительного Собрания до его разгона большевиками. О жизни родителей и о моем детстве рассказывать читателям «Кванта», я думаю, нет смысла.

Давайте я начну сразу с того момента, когда я оказался на мехмате МГУ. Я был принят на мехмат в девятнадцатилетнем возрасте сразу на второй курс. До этого я жил и учился за границей. Родился я во Франции, а уже первую университетскую степень получил в Штатах в 1957 году – степень бакалавра Нью-Йоркского университета. Тогда же мне было предложено поступить в аспирантуру Математического института Куранта, но я отказался, понимая, что в тот момент, т.е. в середине 50-х годов, Москва (и в частности, Московский государственный университет) являлась одним из ведущих – если не самым сильным – математическим центром в мире.

– А сейчас это так?

– К сожалению, нет. Все знают, что большое количество очень сильных российских математиков уехали за границу. Можно сказать, что почти все звездные российские математики либо постоянно находятся за границей, либо работают за границей и только изредка появляются в России. Кроме того, что касается механико-математического факультета, то его уровень тоже очень упал по сравнению с тем, что было, скажем, в 60-е годы.

– Сейчас многие уезжают, а уж в 50-е годы немало людей в России мечтало о том, как бы уехать на преуспевающий Запад. А вы чуть ли не единственный человек, которого я знаю, кто приехал. Вы не жалеете об этом? Все двигались в одну сторону (по крайней мере мечтали), а вы – в другую?

– Я прекрасно понимал, что я еду «не в ту сторону». Но совершенно не жалею о том, что приехал, хотя дальнейшие события разворачивались не так, как я тогда наивно думал. Я тогда предполагал, что скоро уберут Хрущева и вместо него будет либеральный, умный правитель, появится в России «социализм с человеческим лицом», а получилось все ровно наоборот. Но несмотря на это, я никогда не жалел о своем приезде: в то время механико-математический факультет был абсолютно уникальным оазисом, где находились люди самого высокого профессионального уровня, а также самого высокого уровня культуры.

– Вы помните свою школу? Ваши учителя повлияли на ваш выбор профессии?

– Я учился во французской средней школе, у меня первые учителя математики были довольно слабые, но как только у нас появилась «алгебра с буковками» вместо арифметики и появилась геометрия, я страшно увлекся. Тогда мне было 13 лет, и я считал, что понимаю гораздо больше, чем мои педагоги. Поэтому повлияла сама математика, а не учитель. Однако уже в выпускных классах французского лицея, у меня был великолепный учитель математики, а перед этим, в другом лицее, в течение полугода был уникальный, оригинальный и сильный преподаватель этого предмета. Безусловно, они очень повлияли на мой окончательный выбор. Потому что то увлечение, которое у меня возникло в 13 лет, могло бы исчезнуть, если бы не эти замечательные учителя.

– Значит, в 12 лет вы были еще, что называется, обычным ребенком, не вундеркиндом? О вас не говорили лет в шесть, что у вас выдающиеся математические способности?

– На самом деле я действительно был несколько вундеркиндистый, но настоящий интерес к математике у меня возник лет в 13. Я был на год моложе своих одноклассников, проскочив один класс средней школы.

– Во сколько лет вы пошли в школу?

– Видимо, с шести; но в военные годы я находился на оккупированной территории Франции, там школы иногда функционировали, а иногда нет. Я временами ходил в начальные приготовительные классы.

– Значит не было домашнего обучения?

– Нет, было домашнее обучение, конечно. Притом очень серьезное. Но мои родители к точным наукам, к арифметике меня не приучали, и обучение было гуманитарным. Где-то начиная с четырехлетнего возраста я уже умел писать по-русски, а по-французски писать научился несколько позже, уже в школе. Мои родители, люди очень образованные, сумели заинтересовать меня русской литературой и поэзией.

– Как они этого добились? Как сделать, чтобы ребенок стал умным?

– Ну, я думаю, что тут в большей степени влияет генетика, а не обучение. Когда я был совсем маленький, мы жили очень большой дружной семьей. Это был своеобразный матриархат – моя бабушка, ее три дочки, их мужья, если они там присутствовали, потому что во время войны не все они были с нами, и много детей. В нашей семье принято было читать вслух. При этом не было никакого принуждения, никто меня не заставлял слушать, когда читали. Иногда мама специально для меня читала, и мне всегда было это интересно. А интерес к литературе, к культуре, к живописи впитывался сам собой, через воздух.

– В семье говорили на двух языках?

– Нет, в семье говорили только по-русски. А французский язык я освоил, как только я смог выйти во двор, я себя не помню не знающим французского языка. Где-то в двa-три года я уже говорил на двух языках.

– А английский уже потом?

– Английский позже. Я оказался в Штатах в десятилетнем возрасте и тогда очень быстро освоил английский язык. Родители сразу послали меня в американскую школу, я два года там учился, но новых знаний не получил. Известно, что американская школа – и тогда, и сейчас – находится на катастрофически низком уровне. Но зато я выучил язык и приспособился к американской жизни.

После этого родители перевели меня во французский лицей в Нью-Йорке.

– Были ли в то время, когда вы учились, математические олимпиады?

– Олимпиады во Франции до сих пор не существует. В Америке, когда я был студентом, уже проводился конкурс Патнама (Putnam contest), и я в нем участвовал. Что касается французской традиции, там есть так называемый Concours General (буквально – генеральный конкурс), который учредил Наполеон. Этот конкурс состоит из решения трудных задач по продвинутым разделам школьной программы, а не из «олимпиадных» задач на сообразительность; впрочем, в нем я как раз не участвовал.

– Когда вы поняли, что будете ученым?

– Примерно в 14 лет.

– Уже? И так уверенно?

– Да, уверенно. Могу рассказать следующую историю. Когда мне было 14 лет, я размышлял о геометрии и пришел к выводу, что евклидова геометрия противоречива. И что правильная геометрия устроена так, что если линии продолжать, то они в итоге замыкаются.

– Выходит, вы придумали проективную геометрию?

– Скорее, сферическую. То, что эта геометрия неориентируема, я не очень четко понимал. И я написал каллиграфическим почерком свое первое математическое сочинение, где я привел некий софизм, «доказывающий» противоречивость евклидовой геометрии. И немножко там объяснял, как устроена «настоящая» геометрия. Ну, например, что сумма углов больше, чем 180 градусов, я понимал. В целом это было совсем глупое сочинение.

– Какой был софизм?

– Он был связан с гиперболой. Элемент проективного мышления. Я считал, что асимптоты естественно должны соединиться. Не в этом был софизм, но я написал какие-то формулы, я уже знал, что гипербола имеет вид «единица, деленная на икс»; из этих формул «следовало», что асимптоты должны замкнуться, и кривая станет овалом. Текст я положил в конверт и запечатал. Тогда под влиянием Сент-Экзюпери я считал, что взрослые все равно не в состоянии понять важное и глубокое. По крайней мере моя учительница не в состоянии понять мои «новаторские» мысли. И я решил, что когда я вырасту, я распечатаю конверт и скажу, что вот когда-то я все это обнаружил. А дальнейшее развитие сюжета такое. Мне подарили замечательную книжку Кагана про Лобачевского на русском языке. Из нее я узнал, как обстоит дело на самом деле, мне стало очень стыдно, я порвал свое первое математическое сочинение и выбросил его. Вот такая у меня была смешная история.

– *Информацию вы тогда получали в основном от учителей или из книг?*

– Только от учителей. У меня никаких математических книг, кроме учебников, не было. Первая математическая книга – это книга Кагана о Лобачевском. До поступления в университет я не прочитал ни одной математической книги, кроме учебников. И Кагана. А широко читать про математику я стал позже, уже будучи студентом Нью-Йоркского университета.

– *И что же вы читали?*

– Во «взрослой» математике меня впервые заинтересовала проективная геометрия. Видимо, это было как-то связано с моими детскими увлечениями. И я прочитал какие-то книжки по проективной геометрии, и у меня даже были собственные изыскания по этому поводу, которые закончились следующим образом. Когда меня рекомендовали в аспирантуру в институт Куранта, меня пригласили на собеседование с Липманом Берсом (известным классиком многомерного комплексного анализа). На собеседовании он спросил, какие курсы я слушал, стал мне задавать разные вопросы по геометрии и по анализу. Я быстро и точно отвечал и явно Берсу понравился. И тогда он спросил, не занимаюсь ли я вообще чем-нибудь вне контекста обязательных курсов. И я, скромно потупившись, сказал, что – да, я немножко интересовался некоторыми вопросами комплексной проективной геометрии – и собирался сказать, чем я занимался. Берс развел руками и сказал: «Как же вы не понимаете, проективная геометрия давно умерла. После работ Веблена там ничего не осталось, там нету нерешенных задач, это мертвая наука, нельзя этим заниматься!» Я очень смутился и больше не занимался проективной геометрией. Насколько я был неправ, я понял, когда, будучи топологом и аспирантом в МГУ, познакомился с Семеном Гиндикиным и Геннадием Хенкиным, которые вслед за Роджером Пенроузом сделали гениальные работы именно по комплексной проективной геометрии, которая мне была указана как мертвая наука.

– *Не могли бы вы вкратце объяснить школьникам, что такое топология?*

– Топологию можно многими способами охарактеризовать. Например, таким образом. В евклидовой геометрии главное – это расстояние между точками. В аффинной геометрии главное – это отношение расстояний между точками. В проективной геометрии главное – это так называемое двойное отношение четырех точек на прямой. В евклидовой геометрии при движениях не меняется расстояние. А в топологии такого простого инварианта, как расстояние, нет. Можно себе представить, что вы изучаете геометрическую фигуру, сделанную из резины. Вы можете ее растягивать, вы можете ее сжимать, вы можете ее деформировать. И топология изучает самые глубокие свойства геометрических фигур, а именно те, которые не меняются при таких деформациях. А какие бывают инварианты в топологии? Самый простой и известный многим читателям «Кванта» – это эйлерова характеристика. Если вы возьмете бублик, то как вы его ни будете деформировать, в нем будет оставаться дырка. Наличие этой дырки является инвариантом, а этот инвариант (количество дырок называют родом поверхности) можно описать алгебраически. Это и делается в алгебраической топологии, но как именно – в двух-трех фразах не скажешь.

– *Бывают ли мертвые науки?*

– Очень трудно выносить той или иной ветви науки смертный приговор, однако иногда это делается. В моем поколении мы, топологи, вынесли смертный приговор общей, или теоретико-множественной, топологии. Мы дружно все объявили, что это мертвая наука. Но нельзя гарантировать, что она не воскреснет.

– *Смертный приговор все еще действует?*

– Сейчас бывшие общие топологи переключились на более алгебраическое изучение основ топологии, связанных не с конкретными геометрическими объектами, а с очень общими абстрактными пространствами. Классическая абстрактная топология школы Павла Сергеевича Александрова в Москве, расцвет которой пришелся на сороковые годы, сейчас вышла из моды. В мире есть лишь небольшая горстка исследователей, которые продолжают работать в этом направлении. Но я бы был осторожен. Потому что никогда не известно, что в математике может пригодиться. Может вдруг оказаться, что общая топология будет востребована.

– *А скажем, теория множеств?*

– Теория множеств сейчас продолжает быть в центре оснований математики, безусловно. Она играет очень важную роль, как ни странно, в вопросах, связанных с компьютерами, потому что факты из так называемой дескриптивной теории множеств постепенно переработались в замечательные теоремы теории алгоритмов. Так, теорема Гёделя имеет глубокие приложения к компьютерной науке: из нее следует, что ряд задач никакой компьютер не может решить в принципе. Кроме того, ряд конструкций теории множеств, полученных в первой половине XX века, сейчас нашел неожиданное применение в теории динамических систем, в частности, в связи с так называемыми странными аттракторами. Так что вряд ли можно считать теорию множеств мертвой наукой.

– *Как вы считаете, должна ли математика иметь приложения? Как соотносятся прикладная и так называемая чистая математика?*

– По этому поводу мне просто хочется привести точку зрения Андрея Николаевича Колмогорова. Когда я ему задал этот вопрос, он мне сказал следующее. Не бывает ни чистой математики, ни прикладной. Математика бывает хорошая и плохая. Хорошая математика может взяться прямо с кончика пера, из головы математика, который развивает математику ради самой математики, просто из чистого любопытства. Но если то, что он сделает, содержательное, интересное и хорошее, это рано или поздно найдет серьезное приложение. А если это плохая математика, об этом все через поколение забудут. Что же касается тех результатов, которые возникают при решении практической прикладной задачи, то здесь тоже нужно различать сильный результат от рядового. Если, решая какую-то прикладную задачу, математик копнул очень глубоко и придумал принципиально новый метод решения, то из него затем возникнет теория. И это будет такая же значительная математическая теория, как наилучшие абстрактные теории, которые взялись из умозрительных рассуждений математиков. Так что мне кажется, что очень важно не отделять математику прикладную и практическую от так называемой чистой математики. И это, кстати, очень хорошая черта русской математической школы. Все крупнейшие русские математики не вдавались ни в одну, ни в другую крайность. Из работающих сегодня математиков достаточно назвать Владимира Игоревича Арнольда. Работы Арнольда бывают абсолютно чисто математические, как, например, его недавние результаты по теории чисел. С другой стороны, у него есть работы, и очень много, по динамическим системам, по теории бифуркаций, которые нельзя назвать прикладными, они не решают конкретные практические задачи, но их полезность для решения конкретных задач безусловна и очевидна.

– А Ю.И.Манин?

– Манин сейчас и последние 20 лет занимается в первую очередь теоретической физикой. Уже этот факт говорит о том, что он перестал быть «чистым» математиком. Но то, что наилучшая часть его творчества, как по «чистой» математике, так и по теорфизике, вероятно, останется, и даже что-то будет иметь вполне конкретные приложения, вполне ожидаемо. Как и то, что что-то другое, наоборот, отомрет, как временное и ненужное.

– А физика вам нравится?

– Я всю жизнь очень любил физику, но мне не повезло с учителями. У меня никогда не было хороших учителей физики. Никогда: ни в школе, ни в Нью-Йоркском университете, ни когда я учился на мехмате. Лекции, которые читали мне профессора с физфака, были просто очень плохие. И я изучал теоретическую физику у математиков. Кроме того, теория узлов, которой я занимаюсь много лет, оказалась востребованной именно физиками.

– В.И.Арнольд говорит, что математика – это часть физики. Вы согласны с этим?

– Арнольд говорит не только, что математика часть физики, он добавляет, что это та часть физики, где эксперименты стоят очень дешево. Это очень важное добавление. Сам Арнольд, особенно в последние годы, очень любит демонстрировать, что математика – это экспериментальная наука, а математик – это человек, который экспериментирует. Про себя он говорит: я экспериментирую руками, считаю, провожу эксперименты и потом из этих экспериментов делаю выводы. Но можно проводить эксперименты и на компьютере. Деятельность математика как раз и связана с проведением таких недорогостоящих экспериментов. Однако Арнольд своим словам придает более глубокий, я бы сказал, философский смысл. И в этом отношении он себя позиционирует как ученик Андрея Николаевича Колмогорова. Арнольд верит в реальность того, что изучают математики. Он считает, что математика – это в какой-то мере наука про окружающий мир.

В 1990 году я брал интервью у Владимира Игоревича (интервью опубликовано в «Кванте» №7 за 1990 году), и задал ему такой вопрос: «Когда вы доказываете теорему, вы ее создаете или вы ее открываете?» Он ответил следующей цитатой из А.К.Толстого:

Тщетно, художник, ты мнишь, что творений своих ты создатель!
Вечно носились они над землею, незримые оку...
Много в пространстве невидимых форм и неслышимых звуков,
Много чудесных в нем есть сочетаний и слова и света.

– Можете ли вы объяснить школьникам, какие бывают практические приложения у современной математики – не математики Ньютона и Эйлера, а той, что была создана в последние десятилетия? Есть ли такие примеры?

– Таких примеров много, нетрудно перечислить некоторые из них, однако понятно объяснить школьникам суть дела – совсем не просто. Я назову, не вдаваясь в подробности, три примера, в надежде на то, что «Квант» найдет авторов, которые сумеют доходчиво объяснить основы соответствующих математических теорий и понятно описать, как эти теории работают на практике.

Первый пример – алгебраическая геометрия над конечным полем и криптография. Математическую теорию можно описать как геометрию эллиптических кривых в многомерном пространстве, но рассматриваемых не над полем вещественных или комплексных чисел, а над конечными полями. Эта теория позволяет строить то, что по-английски называется «one-way functions» – основу так называемой «шифровки с открытым кодом». Этот способ шифровки используется в обыкновенных банковских картах. Жулик, даже знающий способ шифровки вашей карты, не сможет расшифровать информацию, необходимую для снятия денег.

Второй пример – операторные методы (и связанные с ними теория лагранжевых многообразий и индекс Маслова) и предсказания цунами и торнадо. Здесь речь идет о работах Виктора Павловича Маслова и его школы, изначально относящихся к теоретическому исследованию уравнений в частных производных. Эти работы позволили построить достаточно точные модели распространения таких явлений, как циклон, торнадо и цунами. Ученик Маслова Сергей Доброхотов сумел найти, используя теорию, разработанную в последнее десятилетие, очень эффектную и реалистичную модель торнадо. Интересно, что лаборатория Института проблем механики, в которой работает Доброхотов, называется Лабораторией механики природных катастроф. Я бы не взялся объяснить школьникам, даже очень продвинутым, ни теорию, ни математическое описание модели торнадо. Однако можно рассказать, что такое индекс Маслова, благо для этого инварианта Арнольд придумал эквивалентное достаточно наглядное геометрическое определение.

Третий пример – бесконтекстные грамматики Хомского и языки программирования. Американский математический лингвист Наум Хомский придумал класс формальных языков, которые он назвал бесконтекстными. Эти языки – формальные математические объекты, основанные на формальных грамматиках, ныне носящих имя Хомского. Именно их использование совершило революцию в программировании – переход от программирования в кодах к языкам высокого уровня. В связи с этим примером стоит отметить, что еще раньше, когда только создавались первые цифровые электронные машины, исходной точкой их архитектуры послужила идея универсальной машины Тьюринга, придуманная английским математиком Аланом Тьюрингом (во время второй мировой войны он работал, кажется, в шпионском ведомстве MI-5).

– Что такое профессия математика?

– Все знают, что бывают физики-теоретики. Все знают, что бывают ученые-биологи. Но, как ни странно, большинство людей, даже многие школьные учителя математики, не знают, что существует профессия «математик-исследователь». Многие думают, что математика – это большой корпус знаний, который развивался особенно бурно в семнадцатом-восемнадцатом-девятнадцатом веке, а теперь представляет из себя устоявшийся массив знаний, очень полезный для практики. Однако это совершенно неверная точка зрения, потому что математика, так же как и теоретическая физика, продолжает интенсивно развиваться. И развивают ее люди, которых и называют математиками-исследователями.

Как устроена их жизнь? Часть математиков-исследователей работает при университетах, и тогда они преподают. Деньги им платят именно за преподавание. Но они это рассматривают как отнюдь не главную часть своей работы, а главной работой своей они считают доказательство новых теорем, придумывание новых теорий, решение старых, но до сих пор не решенных задач.

Кроме того, сейчас в мире имеется несколько институтов, где математикам платят деньги просто затем, чтобы они развивали математику.

Профессия эта тяжелая. Зарплаты сравнительно маленькие, а в России пока ничтожные. Конечно, человек, сильный в математике, будет зарабатывать гораздо больше денег, если он поступит в какую-нибудь крупную финансовую компанию в качестве финансового консультанта.

– *Посоветуете ли вы нашим молодым читателям идти в эту профессию?*

– Я решительно советую им туда не идти. А те, кто захотят, – они все равно пойдут. Не послушают моего совета.

– *Вы часто читаете лекции. На одной из них у вас выступал жонглер.*

– Да, был такой случай лет пять тому назад. В это время я заведовал франко-русской математической лабораторией, и в этой лаборатории по моему приглашению работали два молодых французских математика, специалисты по комбинаторике и по теории представлений. И оказалось, что один из них очень хороший жонглер. Вместе со своим коллегой – они дружили и вместе у нас работали – они изучили теорию жонглирования с точки зрения математики. И прочитали абсолютно изумительную лекцию. Теорию излагал один из них, я переводил на русский язык, а другой демонстрировал те способы жонглирования, которые были изложены теоретически. Там доказывалась некая теорема классификации жонглирования разных типов с разным количеством объектов.

Я еще хочу сказать, что очень известный специалист по комбинаторике, крупный американский математик Рон Грэхем, – тоже был очень сильный жонглер. Он мог жонглировать шестью мячами. Это близко к пределу человеческих возможностей. (Интервью с Роном Грэхемом опубликовано в «Кванте» № 4 за 1988 год.)

– *Вы работали с А.Н. Колмогоровым в ФМШ.*

– Да, Андрей Николаевич меня пригласил в ФМШ уже со второго года ее существования, и я там проработал около шести или семи лет очень интенсивно. Сначала я вел упражнения за лекциями Андрея Николаевича, а потом с какого-то момента стал возглавлять очередной поток. Там были двухгодичные и одногодичные потоки, и я с огромным удовольствием работал в интернате в первые годы.

– *Расскажите что-нибудь интересное о том времени.*

– Изначальный подбор людей, преподающих математику, осуществлялся Андреем Николаевичем. И он подбирал только таких математиков, у которых, кроме математических познаний, умения преподавать и интереса к работе со школьниками, был бы какой-нибудь еще один талант. Мы все со своими школьниками своим талантом делились. Был, скажем, такой преподаватель, как Дима Гордеев, который был серьезным художником. Женя Гайдуков прекрасно играл на скрипке. Андрей Николаевич проводил замечательные музыкальные вечера, где он ставил пластинки классической музыки. Был замечательный литератор Николай Иванович Герасимов, который вел настолько интересные занятия по литературе, что я всегда договаривался с диспетчером, чтобы мне устраивали расписание таким образом, чтобы где-то у меня было окно, во время которого я бы мог ходить на его занятия. Основную славу ФМШ в те времена составлял Юлий Ким, знаменитый бард. Он устраивал прекрасные театральные представления, сейчас мы бы сказали – мюзиклы, силами школьников, чрезвычайно удачно. Они были немножечко рисковые. Очень трудно было тогдашнему директору интерната. Директором была замечательная женщина, Раиса Аркадьевна Острая, фронтовик, окончившая ИФЛИ, человек глубокой гуманитарной культуры. И у нее было очень трудное положение, потому что надо было, чтобы все было чинно с точки зрения советской власти, в то время как молодые математики и другие преподаватели тяготели к либеральным ценностям, не апробированным в те времена коммунистическим начальством. Власти очень внимательно следили за происходящим. Что касается моего собственного преподавания в интернате, оно кончилось тем, что партийное бюро мехмата мне запретило этим заниматься. Та же самая участь постигла нескольких других преподавателей, и примерно лет через десять после открытия интерната по тем или иным причинам почти все преподаватели, которых привел Андрей Николаевич, уже больше там не работали. А позже я ушел и из университета, и с 1975 года работал в «Кванте», вновь по приглашению Колмогорова. Параллельно я занимался переводами.

– *Вы написали книгу «Как написать математическую статью по-английски»*

– Это произошло в самом начале перестройки. Дело в том, что я свободно владею английским языком и много в своей жизни читал математических текстов по-английски. Я понимал, что в начале перестройки, когда открылись границы, наши математики оказались в чрезвычайно невыгодном положении. Практически никто из ведущих математиков международного уровня не мог сделать доклад по математике и тем более написать статью. Очень часто статьи возвращались с рецензиями такого содержания, что, возможно, это очень интересная работа, но она так плохо написана по-английски, что понять там ничего не возможно и нужно, чтобы эту работу отредактировал естественный носитель языка. И я счел, что моя роль состоит в том, чтобы помочь людям, т.е. моим коллегам, русскоязычным математикам, преодолеть этот барьер. И написал эту книжку. Это оказалось очень успешным экспериментом, я до сих пор встречаю людей, которые говорят: «А, Вы тот самый Сосинский, который написал эту книжку!» Люди, которые меня не знают по моим математическим работам, знают меня как автора этой книжки.

– *Кстати, почему сейчас гораздо меньше переводится книжек по математике?*

– На русский язык? Понятно, почему: во-первых, профессиональные математики все сейчас читают по-английски, им все равно, что по-русски, что по-английски. Это раз. Второе. В советское время мы находились в полной изоляции. Никто к нам не приезжал, после того как на мехмат перестали брать абитуриентов еврейской национальности, мировая общественность возмутилась, и в Россию западные математики почти совсем не приезжали. А за границу нас не пускали. Поэтому люди английский язык не знали. Но когда границы открылись, по-прежнему осмысленно было переводить книжки, доступные студентам, а монографии уже почти никто не переводит. Хотя некоторые издательства переводят, например издательство МЦНМО. Вообще-то это западные издательства должны переводить наши научно-популярные книжки, мы в этом плане, как в песне поется, шагаем впереди планеты всей…

– *На планете правда нет книг, которые надо перевести?*

– Нет, есть, сколько угодно, и понемножку это делается. Но я замечу, что сейчас имеются замечательные популяризаторы науки в Америке: Сергей Табачников, Дмитрий Фукс, Григорий Гальперин, Александр Сойфер… Там есть и свои, но их меньше.

– *Ну, все-таки еще есть Гарднер.*

– Гарднер – великий человек, спору нет, но его-то почти все книжки переведены.

– *Может быть, мы просто замкнуты в своем кругу: знаем того же Фукса, Гальперина и поэтому считаем, что мы лучше всех?*

– Нет, нет. Сейчас все-таки Россия очень открытая страна, и во всяком случае о том, что касается математики – как науки, так и научно-популярной ее части, – мы в общем неплохо осведомлены. Я бы сказал так: если сравнивать рос-

01-24.p65 22 29.05.09, 14:17

сийских математиков с французскими, то мы значительно больше знаем о том, что делается за границей, чем французы – вне Франции.

– Но почему тогда первое место на международной олимпиаде получает Китай, причем все время? Или это явление имеет совсем другие причины?

– Во-первых, не все время, иногда мы тоже. Прошлым летом, например. Но я хочу сказать следующее: результаты на олимпиадах совершенно не коррелируют с уровнем популяризации математики в данной стране. И вообще, с моей точки зрения, международные олимпиады испортились, и очень давно. Произошло это вот почему. Ведущие страны, т.е. те страны, которые занимали традиционно высокие места на международных олимпиадах, выработали чрезвычайно эффективную систему тренировки школьников для выступления в олимпиадах. Олимпиады стали политическим действием. Когда американцы победили на олимпиаде, их пригласили в Белый дом, им пожимал руку президент. То же самое у нас. Это стало очень важным политическим актом. И ведущие страны научились тренировать олимпиадников. Особенно преуспели в этом в Китае. Выбор огромный, китайцы очень трудолюбивы, очень толковы, очень способные к математике. Но при этом руководители этих делегаций – т.е. те, кто отбирают задачи на олимпиаду, – стали действовать, исходя из целесообразности, т.е. отбирать те задачи, по которым они были уверены, что их школьники сумеют их решить. И поэтому сейчас отдается предпочтение технически сложным задачам, которые используют уже известные хитрые математические приемы и про которые руководители знают, что их школьники точно их решат. А когда вдруг появляется простенькая с виду задача, для решения которой требуются новые идеи, они боятся: а вдруг наши не сообразят?

– Комбинаторика – это наука?

– Израиль Моисеевич Гельфанд лет 25 тому назад, выступая на своем семинаре, сказал, что математическая наука состоит из следующих частей: анализа, алгебры, геометрии и комбинаторики, и самая главная из этих наук – это комбинаторика, но ее пока еще нет.

– И это остается справедливым?

– Нет, комбинаторикой занимается очень много людей в мире, притом ведущие математики. Например, если взять последний конгресс в Мадриде, то две из четырех филдсовских медалей были получены математиками, которые очень сильно опираются на комбинаторику или фактически занимаются комбинаторикой. Это выдающийся американский математик китайского происхождения Теренс Тао и наш Андрей Окуньков. В их работах происходит удивительный симбиоз между комбинаторикой и другими науками. Например, у Тао, может быть, комбинаторика на первом месте, но сам он себя считает специалистом по гармоническому анализу и в сильной степени использует теорию вероятностей для того, чтобы доказывать элементарно формулируемые теоремы из теории чисел! Его основной результат – о существовании сколь угодно длинных арифметических прогрессий, составленных из простых чисел, – понятен любому читателю «Кванта», а в доказательстве используется чрезвычайно разнообразный и сложный арсенал математических понятий и, в частности, в нем почти центральную роль играет комбинаторика. Кстати, вот еще тема для публикации в «Кванте».

– Не могли бы вы что-то пояснить про гипотезу Пуанкаре?

– Можно объяснить школьнику, что это такое. Сферы бывают разной размерности. Одномерная сфера – это окружность. Двумерная сфера – это то, что вы и называете сферой. Трехмерная сфера – уже труднее представить себе, что это такое, но можно объяснить с помощью системы координат: она задается уравнением $x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = 1$ в четырехмерном пространстве, это трехмерный объект, она как бы толстая, но в четырехмерном пространстве она худая. Гипотеза Пуанкаре связана с характеризацией сферы. Как можно охарактеризовать двумерную сферу? Если мы нарисуем любой замкнутый путь на двумерной сфере, то его можно стянуть непрерывно в точку. Пуанкаре высказал гипотезу, что связное компактное пространство, локально устроенное как трехмерное евклидово пространство, будет трехмерной сферой тогда и только тогда, когда оно обладает тем же свойством – что любая замкнутая кривая стягивается в точку. Эта гипотеза на самом деле не так уж значительна, но она приобрела огромный интерес у математиков, потому что ее пытались доказать многие великие математики и долго никак не могли это сделать.

Ситуация, аналогичная ситуации с теоремой Ферма. Теорема Ферма, собственно говоря, является совершенно несущественным мелким утверждением из теории чисел, никакого большого математического значения она не имеет, однако она приобрела огромное историческое значение, потому что куча гениальных людей пыталась это доказать, но до английского математика Эндрю Уайлса никто не преуспел.

Возвращаясь к гипотезе Пуанкаре, отмечу, что американский математик Уильям Тёрстон придумал некоторую другую гипотезу, которая называется гипотезой геометризации. Заодно Тёрстон доказал, что из гипотезы геометризации следует гипотеза Пуанкаре. А уже гипотеза геометризации имеет огромное концептуальное значение для всей математики. Она утверждает, что некоторая совокупность трехмерных объектов имеет геометрическую структуру. Эти объекты задаются топологически и тем не менее они имеют геометрическую структуру.

Именно гипотезу геометризации и доказал Григорий Перельман. Это действительно исключительная работа, гениальная работа, в которой используется анализ, топология, геометрия. Перельман опубликовал последовательно три статьи, но в интернете, а не в журналах. Тексты этих работ были достаточно короткими. Поначалу не нашлось в мире ни одного специалиста, который мог бы проверить все. И некоторые говорили, что там не все доказано, не до конца сделано, но когда стали разбираться, постепенно пришли к выводу, что это не так. Отсутствуют лишь детали. Детали в каждом конкретном месте специалист из данной области может восстановить.

А кстати, я знаю, что Гриша Перельман решал задачи из «Задачника «Кванта».

– Значит, Перельман – уникальный математик, знающий самые разные области науки. Таких людей сейчас, наверное, очень мало.

– Ну вот Тао и Окуньков тоже такие люди. Кстати, Окуньков не решал задач из «Задачника «Кванта», не участвовал в олимпиадах, Окуньков сначала служил в армии. Это для российской ситуации очень редкое явление. Когда он поступил на мехмат, его однокурсники, закончившие всякие там элитные школы, смотрели на него свысока и фыркали, – этот Окуньков вот, значит, глупый, из армии пришел...

– Правда ли, что математики делятся на два типа: те, которые любят решать конкретные задачи, и те, которые любят разрабатывать теории, или это очень условно?

– В какой-то мере это так, т.е. бывают и решатели, и построители теорий, но если посмотреть на крупных математиков, они чаще всего проявляли себя в обеих ипостасях. Более верно будет сказать, что большинство математиков тяготеет к тому или другому, но пример самых крупных математиков показывает, что есть обе стороны. Единственное яркое исключение – это Эрдеш, который ни одной теории не создал и всю жизнь занимался решением задач. В этом плане он, по-моему, стоит особняком.

– Математика как-то все время расширяется, появляются, разные теории, миллионы статей выходят в год. Чем все это кончится? Математики перестанут понимать друг друга окончательно?

– Сейчас уже математики друг друга плохо понимают, и почти нет математиков-универсалов, которые были бы в курсе всего. Но удивительным образом, несмотря на огромное расширение, разветвление, количество статей по математике – лучшие, выдающиеся математики нашего времени не являются узкими специалистами. Они одновременно в своих работах используют много разных кусков математики и как бы демонстрируют, что математика – единая наука. Если взять последних четырех филдсовских лауреатов, то Тао и Окуньков абсолютно разносторонние математики, непонятно, к какому разделу математики относятся их работы. Что касается Перельмана, то он решает топологическую задачу, и, казалось бы, он тополог, но основная идея его доказательства идет из теории дифференциальных уравнений. Он использует и анализ, и топологию, и геометрию, и замечательные работы А.Д.Александрова по геометрии. И наконец, Вендолин Вернер – впервые специалист по теории вероятностей получил филдсовскую медаль – но он не узкий специалист, он и комплексный анализ очень сильно использует, и комбинаторику, т.е. его работу нельзя отнести только к теории вероятности. Но конечно, количество статей, которые публикуются по математике, становится чудовищным. Например, меня считают специалистом по теории узлов. Я сейчас не успеваю прочитать и десятую часть тех статей, которые по этой теме выходят. Имеется специализированный журнал, выходящий раз в два месяца, в котором имеется по двадцать статей по теории узлов. А кроме этого, в ведущих журналах по топологии и других математических журналах тоже выходят статьи по теории узлов и ее приложениям, о связи этой теории с физикой. Даже специалисты не успевают следить за тем, что происходит в их собственной области. Это приводит к разным казусам, когда теоремы переоткрываются по многу раз, и, конечно, это создает большие практические трудности. Но тем не менее, как это ни удивительно, математика в своих лучших проявлениях усиленно демонстрирует свое единство.

– Не могли бы вы привести список из нерешенных задач – вроде того, что сделал Гильберт сто с небольшим лет назад? Есть ли сейчас подобный список?

– Сейчас существует в Америке благотворительный математический институт, он называется институтом Клея. Его создал миллиардер, который в юности занимался математикой, а потом перешел в бизнес. В конце жизни ему захотелось ностальгически вернуться к своим первым занятиям. Этот институт собрал лучших математиков мира и предложил им отобрать семь основных современных проблем математики. Это и было сделано. За решение каждой из этих проблем институт Клея обещает заплатить миллион долларов. Среди этих проблем гипотеза Пуанкаре, о которой мы только что говорили.

– Но институт Клея почему-то не платит пока этот миллион Перельману.

– Дело в том, что заплатить эти деньги сейчас нельзя, потому что по правилам нужно, чтобы прошло два года после публикации, и есть проблема с публикацией, ибо текст, сброшенный в интернет, публикацией не считается. Получается, что у Перельмана вообще нет журнальных публикаций по этой теме.

– А он не хочет печататься?

– Он не собирается печатать свою работу в журналах. Перельмана замучили недобросовестные журналисты, которые ради сенсации или по некомпетенции перепутали медаль Филдса с премией Клея, они писали, что Перельман отказался от миллиона долларов. Он не отказывался – никто ему миллиона долларов не давал. Отказался же Перельман от медали Филдса, и как он себя поведет, если – когда – ему этот миллион предложат, я не знаю.

– Когда я задавал вопрос, я имел в виду несколько другое. Хотелось бы рассказать читателям «Кванта» о нерешенных задачах из списка института Клея.

– Среди этих задач большинство нельзя сформулировать для читателей «Кванта», потому что они требуют слишком большой подготовки. Есть, однако, одна, которая, собственно говоря, относится не столько к математике, сколько к теоретической информатике, и формулируется очень коротко: $N \neq NP$, и смысл этой формулы можно объяснить читателям «Кванта». Кроме того, в список задач Клея не вошла, пожалуй, самая знаменитая задача из теории чисел – гипотеза Гольдбаха (о том, что любое четное число, большее двух, – сумма двух простых чисел), которую легко объяснить любому школьнику, не только читателям «Кванта».

– А какие еще нерешенные задачи, не обязательно старые, вы бы могли назвать?

– Попробую сформулировать еще пару таких задач.

Первая – такая: пусть в пространстве имеется механизм, состоящий из стержней, соединенных шарнирами. Например – каркас тетраэдра или куба. Нужно найти необходимые и достаточные условия жесткости такого механизма. (Так, тетраэдр – жесткий, куб – нет, он изгибается в параллелепипед.) Задача эта – очень трудная, и поэтому даже частичные продвижения к ее решению представляют интерес.

А вот и вторая: придумать «нормальную форму» для узлов вместе с непрерывным изгибанием, приводящим каждый узел к своей нормальной форме. Здесь тоже частичные решения представляют интерес. Частный случай тривиальных узлов (задача о распутывании) уже весьма труден, возможно, какие-то частные результаты можно получить с помощью так называемой «энергии узлов» (о ней тоже можно было бы написать и для «Кванта»).

– Приведите, пожалуйста, примеры одной-двух красивых элементарных задач, которые вам нравятся.

– Пожалуйста, сколько угодно. Во-первых, я назову задачу для первого класса. Задача такая. У Маши на восемь яблок больше, чем у Саши. Маша отдала Саше одно яблоко. На сколько теперь у нее яблок больше? Из любимых задач – имеется река или озеро с прямолинейным берегом, всадник в пункте А. Он должен из пункта А попасть в пункт В и по дороге напоить лошадь. Каким должен быть его кратчайший путь? Еще один пример: из шести спичек сложить граф с шестью ребрами, в котором содержатся четыре треугольника.

– Есть ли у вас любимая квантовская статья?

– Моя любимая статья в журнале «Квант», как ни странно, – крохотная. Это статья Володи Дубровского по поводу того, как строить поверхности отрицательной кривизны с помощью некоторого конструктора. Совершенно замечательная статья (см. «Квант» №7 за 1979 г.). Это раз. Очень люблю статью Николая Борисовича Васильева по поводу алгебраических кривых, «Гексаграммы Паскаля и кубические кривые» («Квант» №8 за 1987 г.).

– Как вы относитесь к ЕГЭ?

– Резко отрицательно. Конечно, исходная идея – иметь объективную инстанцию для определения уровня выпускников школы – совсем неплохая, но реализована она безобразно.

Во-первых, катастрофически плохо, если по математике даются вопросы с множественными ответами. Я думаю, что насколько это глупо и вредно для обучения математике, нет необходимости объяснять читателям «Кванта». Второе, что я бы

(Окончание см. на с. 31)