



Квант

журнал[©]

МАЙ ИЮНЬ 2009 № 3

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:



Учредители — Российская академия наук, Фонд поддержки фундаментальной науки и образования (Фонд Осипьяна), ИФТТ РАН

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР
С.С.Кротов

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

А.Я.Белов, Ю.М.Брук, А.А.Варламов,
А.Н.Виленкин, В.И.Голубев, С.А.Гордюнин,
Н.П.Долбилин (заместитель главного
редактора), В.Н.Дубровский,
А.А.Егоров, А.В.Жуков,
А.Р.Зильберман, В.В.Кведер (заместитель
председателя редколлегии), П.А.Кожевников,
В.В.Козлов (заместитель председателя
редколлегии), С.П.Коновалов, А.А.Леонович,
Ю.П.Лысов, В.В.Производов, Н.Х.Розов,
А.Б.Сосинский, А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин,
В.М.Тихомиров, В.А.Тихомирова, В.М.Уроев,
А.И.Черноуцан (заместитель главного
редактора)

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

А.В.Анджанс, В.И.Арнольд, М.И.Башмаков,
В.И.Берник, В.Г.Болтянский, А.А.Боровой,
Н.Н.Константинов, Г.Л.Коткин, С.П.Новиков,
Л.Д.Фаддеев

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
1970 ГОДА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР
И.К.Кикоин

ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

А.Н.Колмогоров

Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков,
В.Г.Болтянский, И.Н.Бронштейн,
Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург, В.Г.Зубов,
П.Л.Капица, В.А.Кириллин, Г.И.Косуров,
В.А.Лешковцев, В.П.Лищевский,
А.И. Маркушевич, М.Д.Миллионщикова,
Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов,
А.П.Савин, И.Ш.Слободецкий,
М.Л.Смолянский, Я.А.Смородинский,
В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнейдер

Бюро Квантум

© 2009, РАН,
Фонд Осипьяна, «Квант»

- 2 Рассказы о современной механике. Г.Чёрный
8 Теорема Хелли и вокруг нее. В.Протасов
15 Плазма и ... немного биологии. А.Минеев

НАШИ ИНТЕРВЬЮ

- 18 Интервью с А.Б.Сосинским

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 25 Задачи М2131–М2138, Ф2138–Ф2144
26 Решения задач М2111–М2115, Ф2123–Ф2129

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

- 32 Потоки

КМ III

- 34 Задачи
35 Стабильные браки. В.Уфнаровский

ШКОЛА В «КВАНТЕ»

- 37 Гравитационное «отталкивание». В.Воронов
39 Загадки магнитной стрелки. И.Леенсон
41 «Нулевые» линзы. В.Дроздов

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

- 42 О лемнискате Бернулли. А.Акопян
44 Формула крюков. А.Сливак

ЕСТЬ ИДЕЯ?!

- 48 Упругость, текучесть, трение... А.Стасенко

НАШИ НАБЛЮДЕНИЯ

- 50 Из плоскости – в пространство

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

- 51 Поток магнитной индукции. К.Рыб

ОЛИМПИАДЫ

- 54 XVII Международная олимпиада «Интеллектуальный марафон»

ИНФОРМАЦИЯ

- 58 Заочное школа СУНЦ НГУ

- 60 Ответы, указания, решения

НА ОБЛОЖКЕ

- I Иллюстрация к статье Г.Чёрного
II Кванты Интернета
III Шахматная страницка
IV Прогулки с физикой



В издании журнала «Квант» финансовое участие принимает
ОАО «ТЕХСНАБЭКСПОРТ»



Рассказы о современной механике

Г.ЧЁРНЫЙ

Введение

Мы, люди, как и многие другие живые существа, живем на нашей прекрасной планете Земля. Все, что происходит вокруг нас и внутри нас – движение автомобилей на улицах, полет лайнера в небе, внезапные катастрофические наступления ледников и обвалы снежных лавин, изгибание стального листа под штампом, взрывы угольной пыли в шахтах, пляска пылинок в солнечных лучах, парение орла и стремительное плавание дельфина, неустанное биение сердца и ток крови в живом организме, – все это связано с движением или взаимодействием одних тел или сред с другими, с изменением их свойств при движении. Изучение движения и взаимодействия материальных объектов в природе и в творениях человеческих рук и есть предмет механики. Исключение представляет лишь микромир, им занимаются специальные разделы физики. Отчасти исключение составляет и астрономия, занимающаяся изучением нашей звезды Солнца и окружающих его планет и других космических тел, а также звездных систем и отдельных звезд. Правда, еще в самом начале оформления механики как науки в знаменитом труде И.Ньютона «Математические начала натуралистической философии» возникла ее отдельная ветвь, изучающая движение космических тел, – небесная механика, продолжающая развиваться и приносить результаты и в настоящее время. Уместно напомнить, что одним из первых выдающихся достижений механики в этой области стало знаменитое открытие «на кончике пера» планеты Нептун независимо и почти одновременно Дж.Адамсон в Англии в 1843 году и У.Леверье во Франции в 1845–46 годах. Эта планета была обнаружена 23 сентября 1846 года астрономом Берлинской обсерватории И.Галле точно в месте, указанном Леверье.

Механика является научной основой большинства, если не всех, областей техники, промышленности, строительства, транспорта (сухопутного, водного, воздушного, космического), техники сельскохозяйственного производства, военной техники. Может ли кто-нибудь оспаривать, что все существующие виды вооружения, обычные и ядерные, несмотря на большую

Эта статья написана по материалам лекций, прочитанных академиком Г.Г.Чёрным в ноябре 2005 года в школе имени А.Н.Колмогорова (СУНЦ МГУ) в рамках Научно-образовательной программы Института механики МГУ и в марте 2008 года в Политехническом музее в рамках чтений Академического клуба.

роль в их развитии и применении компьютерных и информационных технологий, прежде всего и в основном это продукты развития механики? Без механики создание современных высокотехнологичных видов вооружения просто немыслимо. Конечно, значительная часть перспективных технологий основана на новейших достижениях других наук – физики, химии, биологии. Однако использование всех этих научных достижений абсолютно невозможно без механики и ее самых последних достижений.

Современная механика – не только нестареющая, вечно новая наука, а важнейшая фундаментальная наука со своими теоретическими и экспериментальными подходами к решению задач. Наука быстро развивающаяся, захватывающая все более и более широкий круг явлений и приложений. Наука, не только имеющая выдающиеся исторические достижения, но и в самое последнее время получившая феноменальные, ошеломляющие результаты. Наука, без развития которой абсолютно невозможно использование большинства достижений других естественных наук.

Вся ракетная техника и основанная на ней космонавтика – разве это не триумф механики? Именно механика, разрешив ряд труднейших научных задач, позволила конструкторам создать совершенные системы вывода на орбиты искусственных спутников Земли, межконтинентальных баллистических ракет, космических аппаратов различного назначения. А разве не триумфом механики следует назвать удивительные, ошеломляющие успехи в изучении Солнечной системы?

Завершая введение, отметим, что хотя некоторые основы механики изучаются в школьном курсе физики, но сама механика уже давно выделилась в отдельную от физики науку, науку разностороннюю, включающую множество областей. Целью механики является построение математических моделей движения и взаимодействия материальных объектов, т.е. описание этих явлений средствами математики.

В подтверждение всего сказанного рассмотрим ряд примеров. Среди них будут и примеры естественно-научного содержания, которые говорят о вторжении механики в области исследования других наук и об успехе и плодотворности такого вторжения.

Разрушение Такомского моста

Висячие мосты обладают рядом неоспоримых достоинств по сравнению с конструкциями мостов других типов. Однако уже давно было замечено, что висячие



мосты весьма ненадежны при сильном ветре. Одной из крупнейших в истории мостостроения катастроф стало обрушение моста через реку Такома (США) 7 ноября 1940 года. Строительство этого моста (рис.1) было закончено летом 1940 года. Пролет – третий в мире по длине – имел длину 854 м. Большого движения не ожидалось, и мост был построен очень узким – шириной 11,9 м. Проезжая часть была рассчитана на 2 ряда автомобилей. Полотно дороги было подвешено на двух стальных канатах со стрелой провеса 70,7 м.

Сразу после постройки была обнаружена большая чувствительность моста к действию ветра – амплитуды (размахи) колебаний моста достигали 1,5 м. Было сделано несколько попыток устранить эти большие колебания путем введения дополнительных связей и установки гидравлических демпферов (амортизаторов) на пилонах – так называются столбы, поддерживающие основные (несущие) тросы в висячих мостах. Но это не предотвратило катастрофы.

Начиная с 8 часов утра 7 ноября наблюдались не очень сильные вертикальные многоузловые (в форме нескольких волн) изгибные колебания с частотой 0,8 Гц. Примечательно, что ветер имел не очень большую скорость – около 17 м/с, тогда как до этого были случаи, когда мост выдерживал более сильный ветер. Okolo 10 часов утра скорость ветра несколько возросла (до 18,7 м/с), и установились одноузловые (в форме одной волны) изгибо-крутильные колебания со значительно меньшей частотой (0,2 Гц) и весьма большими амплитудами. Когда закрутка достигала максимума, проезжая часть наклонялась к горизонту под углом 45 градусов. Резкое изменение частоты колебаний произошло, по-видимому, вследствие обрыва каких-то важных связей в конструкции. Мост выдерживал эти колебания около часа, после чего большой участок проезжей части полотна отломился и упал в воду. Весь процесс был заснят на кинопленку, что явилось ценным материалом для исследования причин обрушения.

Катастрофа привлекла огромное внимание исследований. Уже через две недели после свершившегося известный механик Т.фон Карман дал объяснение причин катастрофы и даже указал скорость ветра, при которой это может случиться. Разрушение произошло при скорости ветра порядка 18–19 м/с, а Карман расчетом получил 22,2 м/с. Так что даже это можно назвать успехом механики.

Какие выводы отсюда сделали механики? Сейчас через реку Такома построен другой мост. Его ширина увеличена более чем в 1,5 раза и составляет 18 м, изменено также сечение проезжей части. Кроме того, сплошные балки заменены сквозными фермами, что значительно уменьшает силу давления ветра. Современные висячие мосты – это легкие конструкции, подвешенные на стальных канатах, называемых вантами. Они выдерживают большие ветры и прочие нагрузки и нормально функционируют уже много лет. Известно, что таких катастроф, какая была с Такомским мостом, здесь произойти не может. Механики сумели понять, что может произойти и как это предотвратить.



Рис.1. Мост через реку Такома (США)

По прогнозам специалистов, XXI век – это век жестоких техногенных катастроф, стихийных и экологических бедствий. Все чаще приходится слышать сообщения о падении ракет, самолетов, о взрывах на экологически опасных промышленных объектах, об обрушениях зданий. Среди прочих причин трагедий называются ошибки проектирования, связанные с недостаточным знанием законов механики, с использованием неверных математических моделей.

Яркий пример – обрушение в Московском аквапарке. В первоначальных заключениях следственных комиссий обнаруживались и следы терроризма, и плохое качество цемента, и нехватка поддерживающих крышу колонн. И только после обрушения второго здания, спроектированного тем же авторским коллективом (здания Басманного рынка), причины трагедии стали очевидными для всех. Последнюю черту под расследованиями подвело телезаявление руководителя проектов Н.Канчелли, в котором, в частности, говорилось, что во всем виновата компьютерная программа, с помощью которой выполнялись расчеты прочности.

Вообще, надо заметить, что достижения механики в строительстве не всегда освещаются в средствах массовой информации. Например, немногие знают, что самый большой в мире мост Мийо во Франции имеет 7 опор высотой 343 м, длину 2460 м, массу 400000 т (из них 350000 т бетона и 40000 т стали), а в его строительстве стоимостью 500 миллионов долларов участвовали 7 европейских стран. Или, что еще одним примером успешного научного и инженерного решения проблемы взаимодействия конструкций с ветровыми нагрузками является Останкинская телебашня.

Шагающие роботы

Одной из важных разновидностей роботов являются шагающие роботы, предназначенные для перемещения по труднопроходимой местности. В отличие от колесных и гусеничных машин, шагающий аппарат при движении использует для опоры лишь некоторые участки поверхности. Поэтому он существенно меньше повреждает почвенный покров, что может оказаться



важным для экологии некоторых районов (например, тундры).

Однако указанные преимущества шагающего аппарата определяют его высокую сложность и большое энергопотребление. Аппарат имеет большое число управляемых степеней свободы, т.е. количество углов, определяющих положения звеньев всех ног. А это приводит к сложным конструкциям, использованию высокоэффективных приводов, специальному строению стоп, рассеивающих энергию удара, и т.д. Система управления должна обеспечить обработку информации о местности, принятие решений о характере движения, контроль за их выполнением. Именно создание системы управления аппаратом – центральная проблема шагающего робота. Существующие виды приводов по своим качествам все еще уступают двигательным аппаратам животных и человека.

Для одного из первых в мире шагающих аппаратов, созданных в Институте механики МГУ в 70-е годы прошлого столетия, была выбрана схема «шестиножки» (рис.2). В качестве биологического аналога робота

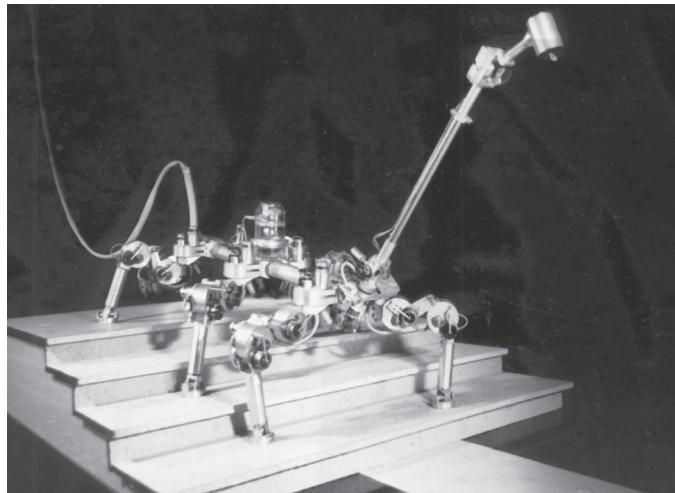


Рис.2. Робот-шестиножка «Маша» с расположенным на штативе «глазом» (системой технического зрения)

использовался рыжий таракан (пруссак). Ноги таракана – это универсальный биологический объект изучения для создания шагающей машины. Бег таракана можно проследить с помощью кинокамеры. Для этого таракана помещают в стеклянную пробирку и, закрепив ее, снимают бегающего таракана кинокамерой. Основным типом походки таракана является походка 3-3 (трешками). Он идет так, что всегда опирается на три ноги, образующие опорный треугольник, внутри которого располагается центр тяжести его тела. Это существенно облегчает проблему устойчивости, так как опор аппарата на три ноги оказывается устойчивым.

Каждая конечность робота имеет три степени свободы и приводится в движение с помощью трех двигателей с редукторами. На конечностях установлены позиционные датчики, измеряющие углы поворота звеньев ноги друг относительно друга. Система управления двигателями шагающего аппарата построена по иерархическому принципу. Она создает управляющие сигна-

лы, обеспечивающие движение аппарата с автоматической приспособляемостью к малым неровностям поверхности по командам оператора (или верхнего уровня), задающего основные характеристики ходьбы и движения корпуса аппарата (например, ходьба вперед, назад, вбок, разворот на месте и т.п.).

После появления «шестиножки» в Институте механики МГУ, которая получила имя «Маша» (МАшина ШАгающая), началось своего рода соревнование между США и СССР, что было нормально для того времени. В ответ на «Машу» американцы предложили свою версию шестиногого робота. Позже стали появляться и другие шестиногие роботы, например построенные в Германии.

«Маша» содержала много пионерских научных решений, опередивших свое время, и дала начало созданию умных роботов с иерархической системой управления. Она может действовать самостоятельно, выбирая себе путь по пересеченной местности. Оказалось, что без информации о силах и моментах сил, возникающих между ногами и подстилающей поверхностью, организовать «гладкое» управление ходьбой практически невозможно. С этой целью была разработана система так называемых тактильных датчиков, которые снимают информацию о возникающих силах и посыпают ее в систему управления робота. Только благодаря этому можно организовать плавное, а не толчками, движение робота.

Американцы официально объявили, что к 2050 году в их действующих войсках не будет людей. В 2005 году в США был создан четырехногий робот «БигДог» (Большая собака) (рис.3). Этот робот может ходить, бегать и прыгать, преодолевать пересеченную местность, он прекрасно перемещается и по снегу, и по камням, и по грязи. За счет хорошо организованной системы управления он очень устойчив: если его толкнуть, то он, подобно человеку или животному, переставит ноги и не упадет. Энергию роботу дает бензиновый мотор, приводящий в действие гидравлическую систему. Ноги робота в точности скопированы с конечностями животных. В их конструкцию включены амортизаторы



Рис.3. Навьюченный четырехногий робот «БигДог»

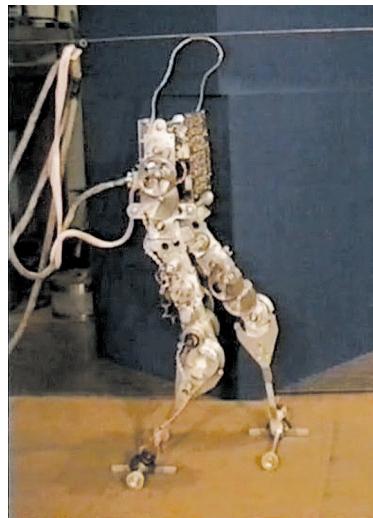


Рис.4. Макет пятизивенного антропоморфного шагающего аппарата

рая будет «служить» в морской пехоте США, может идти со скоростью 5 км/ч и преодолевать подъемы и спуски до 35 градусов. Она может нести вооружение или иной полезный груз общей массой свыше 40 кг.

Не менее богатую историю, по сравнению с другими шагающими механизмами, имеют и двуногие машины. Так, в 1972 году в Институте механики МГУ разработали модель робота, которая получила имя «Рикша». В движение она приводилась с помощью двух ног и одновременно имела еще и два колеса сзади (отсюда и произошло название робота). Но главной задачей было создание человекоподобного (антропоморфного) робота. Основная проблема и сложность управления двуногой ходьбой заключается в необходимости придания устойчивости неустойчивой конфигурации, которая при выключенном управлении не может быть реализована. Например, «выключение» вестибулярного аппарата человека даже на одну секунду приводит к его падению.

В 1976–82 годах в Институте механики МГУ исследовали механико-математическую модель двуногого робота, представляющего собой плоский пятизивенный механизм, который состоит из корпуса и двух идентичных двухзвенных ног. Ходьба аппарата, как и человека, представляет собой последовательность чередующихся одноопорной и двухопорной фаз. В одноопорной фазе аппарат опирается на одну ногу (опорную), другая нога при этом переносится. В двухопорной фазе он опирается на обе ноги. Одноопорное движение считается баллистическим (пассивным), т.е. это движение происходит по инерции. На аппарат действуют только сила тяжести и, разумеется, силы реакции опоры. А вот приложение каких-либо активных воздействий (моментов сил) в шарнирах («суставах») механизма происходит в двухопорной фазе. При ходьбе человека фаза двойной опоры занимает примерно 20% времени всего шагового цикла, в рассмотренной же модели робота двухопорная фаза считается мгновенной. В 1990-х годах были сконструированы два

ры, гасящие энергию удара. Длина робота 1 м, рост 70 см, вес 75 кг, что соответствует размерам крупной собаки. Робот снабжен бортовым компьютером, управляющим его передвижением в соответствии с окружающей обстановкой. Многочисленные датчики позволяют оператору робота отслеживать его местоположение, расположение своих и вражеских сил, контролировать состояние бортовых систем робота. «Киберсобака»,

макета двуногого шагающего робота: один с двумя телескопическими ногами, другой – антропоморфный (рис.4), и разработаны алгоритмы управления ими на основе предложенного метода баллистического управления ходьбой.

Японцы объявили, что к 2050 году они намерены создать команду полностью самостоятельных человекоподобных роботов, способную выиграть у чемпиона мира по футболу среди людей.

Биомехатроника

В настоящее время среди новых технологий, сулящих огромные изменения нашему обществу, важное место занимает биомехатроника. Это – новая наука, целью которой является изучение взаимодействия биологических организмов со встроенными мехатронными системами.

История появления термина «биомехатроника» обычно связывается с исследованиями по разработке протезов нижних конечностей группой биомехатроники Массачусетского технологического института в США. Созданный этой группой так называемый магнитореологический протез обеспечивает требуемую походку пациента благодаря использованию информации о силах и моментах, возникающих между протезом и примыкающей к нему оставшейся частью ампутированной конечности.

Сейчас разрабатываются (в частности, в Институте механики МГУ) системы так называемых тактильных роботов. Врач при ряде заболеваний первым делом производит ощупывание пальцами и на основании ощущений делает медицинские выводы о состоянии того или иного органа. Тактильные роботы снабжены тактильными датчиками (подобными тем, которые стоят на обычных шагающих роботах), с помощью которых они могут «ощупывать» разные органы, в том числе места, недоступные для человеческих пальцев (внутри желудка, бронха, кишок, малого таза, брюшной полости, грудной клетки). Полученная информация преобразуется в электронный вид, обрабатывается и анализируется на компьютере. В дальнейшем сигнал может передаваться на другой компьютер по сети Интернет и восприниматься специальным устройством. Это устройство передает ощущение на руку исследователя или врача. Таким образом, наблюдатель, находящийся в непосредственной близости от предмета исследования или же удаленный от него на любое расстояние, в реальном или усиленном (увеличенном) виде будет ощущать то, что робот ощупывает там, внутри пациента. Ну разве это не удивительно?! Ощупывает там и другое устройство, а чувствуете вы и здесь.

На основе тактильных роботов могут быть разработаны и внедрены медицинские лечебные и диагностические аппараты, такие как прибор для использования во время хирургической операции или снабженные тактильными датчиками эндоскопы (гастроскоп, колоноскоп, бронхоскоп), позволяющие определить свойства стенки полого органа, плотность прилегающих тканей и т.д. Кроме того, становится возмож-



ным использование целого ряда инструментов с новыми лечебными возможностями (массажер для внутренних органов, проведение «под контролем пальца» лазерного световода для разрушения ощуполи).

Механика материалов

Сейчас модно говорить и писать о нанотехнологиях. Объекты изучения с пространственным наномасштабом имеются во многих науках – в физике, химии, биологии и медицине. В традиционных задачах механики этот масштаб очень мал, если не сказать пренебрежимо мал, а в ряде задач физики, химии, биологии наномасштаб, наоборот, весьма велик.

В подходах к изучению частиц и процессов наномасштаба у физиков и механиков есть существенное различие. Физики хотят изучать соответствующие процессы, исходя из «основных» принципов – атомно-молекулярной структуры вещества и законов взаимодействия между ними (метод молекулярной динамики). Механики же продолжают рассматривать поведение материалов сnanoструктурой как объект механики сплошной среды – науки, которая изучает сплошные среды (твердые, жидкые и газообразные), исходя из специфических для них определяющих соотношений, т. е. связей между деформационными характеристиками и механическими напряжениями. Эти связи всегда заимствуются из соответствующих экспериментов или специально развивающихся теорий. Простейший пример определяющего соотношения – знаменитый закон Гука в теории упругости. Впрочем, этого закона недостаточно, поскольку он относится только к статическим деформациям и не учитывает сил, которые возникают в результате изменения деформаций со временем, например в результате изменения длины пружины. Итак, механики рассматривают наноматериалы как сплошные среды, но с новыми, специфическими для них определяющими соотношениями.

Эти два подхода можно продемонстрировать на примере образования в материале дефектов – наномасштабных трещин – явления, очень важного при разработке теории прочности материалов, одного из важнейших разделов механики твердых деформируемых сред.

Физикам пока удалось решить следующую задачу – сформулировать ее для простоты достаточно приближенно. Допустим, две противоположные грани кубика из твердого материала начинают раздвигаться, сохраняя свою форму. В одной из боковых граней кубика в направлении, перпендикулярном направлению растяжения, сделан надрез – зачаток или зародыш трещины. Кубик заполнен достаточно большим числом взаимодействующих атомов вещества. Нужно определить минимальную силу растяжения, при которой конец трещины стронется с места – трещина начнет расти. Максимальное число атомов, при котором авторам удалось провести расчеты на современных суперкомпьютерах, равнялось 32 миллионам. С учетом того, что расстояние между атомами в кристалле находится обычно в диапазоне 1,5–3 Å (один ангстрем равен одной десятимиллийной доле милли-

метра), размер грани кубика составлял всего-навсего около $5 \cdot 10^{-5} - 10^{-4}$ мм. Например, для кристалла поваренной соли, решетка которого имеет кубическую форму с расстоянием 2,8 Å между соседними атомами, получим длину ребра, равную $8,9 \cdot 10^{-5}$ мм. При этом развитие трещины удалось рассчитать лишь на первоначальной стадии, когда трещина еще очень мала по сравнению с размером кубика.

В связи с решением этой задачи были предприняты исследования возможностей применения методов механики сплошных сред либо непосредственно, либо в сочетании с методами типа молекулярной динамики для расчета деформирования и разрушения nanoструктурных объектов. Моделирование проводилось для слоистых элементов, а также для элементов в форме нанотрубок. Оказалось, что коэффициенты упругости (модули упругости) пакета, содержащего 10–12 атомных слоев, рассчитанные методом молекулярной динамики, уже практически совпадают с модулями упругости макроскопического объема того же материала.

Удалось разработать подход к моделированию и расчету деформирования nanoструктурных объектов, в частности нанотрубок и нанослоев. Этот подход основан на замене (моделировании) исходной атомной системы, образующей рассматриваемый nanoструктурный объект, конструкцией из стержней (стержневой системой). Коэффициенты упругости стержней определяются из условия совпадения энергий деформации атомной модели и ее стержневого аналога. Указанный подход применим, поскольку возможно построение такой стержневой системы, эквивалентной по энергии деформации исходной атомной системе. Преимущество подобных моделей в том, что они позволяют при сравнительно маломощных вычислительных средствах проводить расчеты для весьма сложных систем с элементами разных масштабов. В частности, можно выполнить моделирование поведения материала, наполненного нанотрубками.

Механика деформируемого твердого тела и механика материалов все в большей мере становятся фундаментальной основой проектирования материалов с повышенными характеристиками деформирования, прочности и сопротивления развитию трещин. Модели механики позволяют понять причины влияния структуры материала на процессы его деформирования и разрушения. Поэтому они позволяют рассчитать зависимости свойств материала от структуры и механических свойств элементов структуры. Появляется возможность создавать материалы с желаемыми свойствами, подбирая нужные характеристики их структуры. А переход к нанотехнологиям открывает новые возможности для создания материалов с заданной структурой и приводит к необычным эффектам в их механическом поведении.

До сих пор речь шла о возможностях применения моделей и методов механики сплошных сред для моделирования механического поведения nanoструктурных объектов. Однако взаимосвязи механики сплошных сред с наноматериалами и нанотехнология-



ми этим не ограничиваются. Имеются экспериментальные (а в некоторых случаях и теоретические) данные, свидетельствующие о влиянии механических воздействий на электромагнитные и оптические свойства наноструктурных и (или) наномасштабных объектов. Например, показано, что механические напряжения растяжения или сжатия существенно влияют на электропроводимость в полупроводниковых приборахnano- и микромасштаба, в частности – на характеристики работы полевого транзистора. Эти эффекты требуют исследования и разработки соответствующих физико-механических моделей, что позволит прогнозировать работу тех или иных изделий наноэлектроники. Использование механических воздействий весьма перспективно для некоторых областей техники.

Подчеркнем, что изделия nano- и микроэлектроники представляют собой, с точки зрения механики, весьма сложные конструкции. Поэтому используемые для расчетов модели также сложны.

В заключение отметим, что развитие нанотехнологий приводит к необходимости экспериментального

контроля не только физико-химических, но и механических свойств наноизделий. Возникла новая область механики, связанная с разработкой и моделированием схем, методов и устройств для проведения испытаний по определению деформационных, прочностных свойств и сопротивления разрушению наноструктурных и наномасштабных объектов. Ввиду сложности осуществления самих испытаний, стало актуальным новое направление – компьютерное моделирование механических испытаний (виртуальные механические испытания). Заметим, что этот метод давно используется почти во всех традиционных областях техники. Так, прежде чем строить и испытывать самолет, что обходится очень дорого, проводят компьютерное моделирование его испытаний.

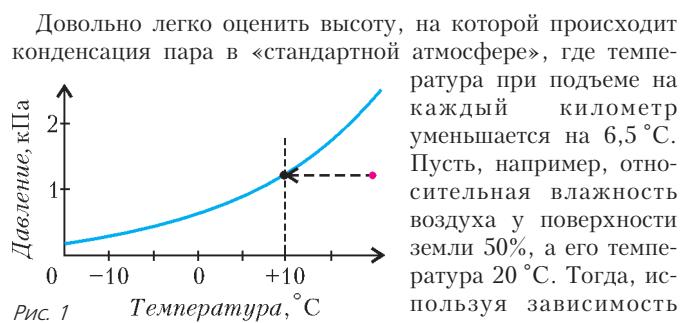
Можно утверждать, что механика займет достойное место в ряду фундаментальных наук, которые обеспечивают прогресс в развитии общества, основанный на использовании нанотехнологий.

(Продолжение следует)

ПРОГУЛКИ С ФИЗИКОЙ

Кучевые облака

(Начало см. на 4-й странице обложки)



Очевидно, что чем «влажнее» воздух, тем ниже будут образоваться кучевые облака.

Из всех этих рассуждений следует, что кучевое облако должно иметь форму плоского слоя, например блина. Однако при конденса-

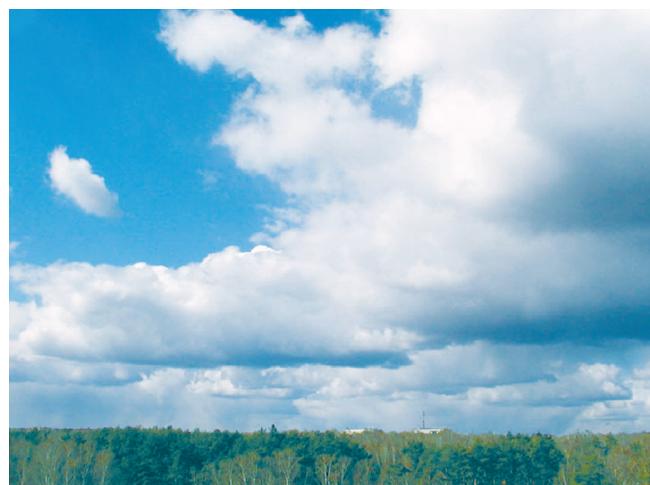


Рис.3

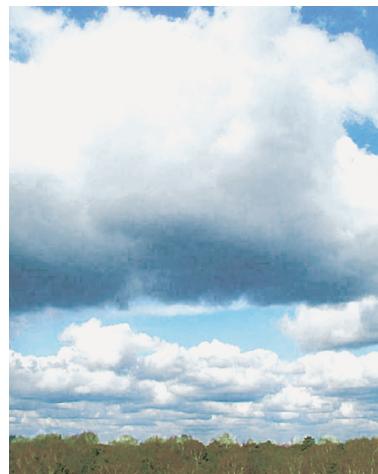


Рис. 2

ции пара на высоте, которую мы оценили выше, происходит выделение огромного количества тепла. Это тепло нагревает окружающий воздух и содержащийся в нем пар, временно прекращая процесс его конденсации. Нагретый воздух, содержащий значительный процент пара, продолжает подниматься вверх, и конденсация его паров происходит на большей высоте. И так далее. В результате над плоским основанием кучевого облака образуется шапка, которая, как правило, имеет форму «кучи», откуда и происходит название этого типа облаков.

Заметим, что кучевые облака могут иметь самые различные формы (рис.2). Когда усиливается ветер и сталкиваются массы воздуха различной влажности и температуры, форма облаков и их размер изменяются (рис.3).

К.Богданов



Теорема Хелли и вокруг нее

В. ПРОТАСОВ

Трудно с тремя... Потом число уже не имеет значения.

В.Черных. Москва слезам не верит

Некоторые математические объекты имеют собственные имена. Теорема Виета, прямая Эйлера... Любой студент-математик к моменту окончания университета знает их столько, что вполне мог бы сдавать специальный экзамен: какое имя что означает. Если Йенсен – то неравенство, если Фредгольм – то альтернатива, а если Грёбнер – то базис. Австрийский математик Хелли оставил после себя три великие теоремы. Одна из них является теперь неотъемлемой частью выпуклой геометрии, две другие прочно легли в фундамент теории функций. Все три одинаково важны и полезны. Поэтому математики, не вдаваясь в подробности, так и называют их по номерам: первая, вторая и третья теоремы Хелли. Случай, насколько нам известно, уникальный. Об удивительной судьбе автора трех теорем мы еще поговорим, а пока – о математическом содержании. Статья посвящена первой теореме Хелли. Эта теорема относится к красивейшей области математики – выпуклой геометрии.

Неужели выпуклые множества так интересны, что для них создано отдельное направление математики? Да, хотя поняли это люди не сразу. Один из первых результатов выпуклой геометрии – теорема Коши о жесткости выпуклых многогранников, открытая в 1813 году (о ней можно прочитать, например, в статье Н.Долбилина в «Кванте» № 5–6 за 2001 г.). К середине XX века было установлено множество интересных геометрических свойств, присущих только выпуклым фигурам. Свойства эти касаются объемов, сечений, особых точек, общей структуры выпуклых тел. Так усилиями Минковского, Радона, Фенхеля, Александрова, Крейна, Шнирельмана, Болтянского, Рокафеллара, Грюнбаума и многих других математиков выпуклая геометрия оформилась в отдельную дисциплину (см. об этом статью В.Тихомирова в «Кванте» № 4 за

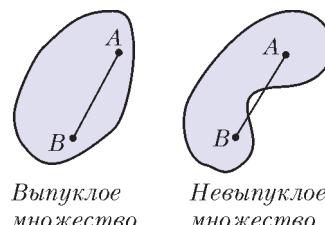


Рис. 1

2003 г.). И первая теорема Хелли заняла в ней достойное место.

Множество называется **выпуклым**, если для любой пары его точек оно целиком содержит отрезок между этими точками (рис.1). Выпуклые множества мы также будем называть выпуклыми фигурами или выпуклыми телами. Одна точка, круг, треугольник, полу-

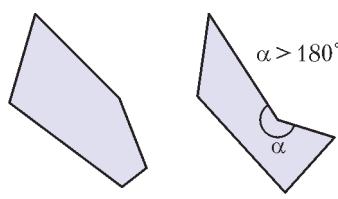
Московский государственный университет, механико-математический факультет, e-mail: v-protassov@yandex.ru

плоскость, вся плоскость – выпуклые фигуры. Четырехугольник – выпуклый, если все его внутренние углы меньше 180° (это, впрочем, верно и для любого многоугольника; рис.2). Докажите (это совсем легкое упражнение), что пересечение любого, даже бесконечно-го, числа выпуклых множеств – выпукло. Для множеств в пространстве определение выпуклости остается таким же. Шар, тетраэдр, полупространство – выпуклы. Надеемся, это не очень усложнит восприятие статьи, если мы будем формулировать все результаты в общем случае, для пространства \mathbb{R}^d , где $d = 1, 2$ или 3 – его размерность. Так, \mathbb{R}^1 – прямая, \mathbb{R}^2 – плоскость, а \mathbb{R}^3 – пространство. Мы ограничимся только этими случаями, хотя читатель, знакомый с понятием d -мерного евклидова пространства (это – материал первого курса института), легко перенесет все доказательства и на общий случай.

Первая теорема Хелли

Теорема 1 (Хелли, 1913). *В пространстве \mathbb{R}^d дано конечное семейство выпуклых множеств. Известно, что любые $d + 1$ множеств пересекаются. Тогда все они пересекаются.*

Итак, если любые, какие ни взять, $d + 1$ множества нашего семейства имеют общую точку, то и все множества имеют общую точку. Если $d = 1$, то \mathbb{R}^1 – прямая линия. Любое выпуклое множество на прямой – это числовой промежуток, либо конечный (отрезок $[a;b]$), интервал $(a;b)$ или полуинтервал: $[a;b)$ или $(a;b]$, либо бесконечный: луч или вся прямая. Теорема Хелли в этом случае утверждает, что если на прямой дано конечное семейство промежутков, причем любые два пересекаются, то и все они пересекаются. Доказать это несложно. Пусть, для простоты, все наши промежутки – отрезки $[a_i; b_i]$, $i = 1, \dots, n$. Среди всех левых концов a_i этих отрезков возьмем наибольший, пусть это будет a_k . Среди всех правых концов возьмем наименьший, пусть это будет b_m . Если $a_k \leq b_m$, то каждый из данных отрезков $[a_i; b_i]$ содержит отрезок $[a_k; b_m]$, и все доказано. Ну а случай $a_k > b_m$ невозможен: тогда отрезки $[a_k; b_k]$ и $[a_m; b_m]$ не пересекаются.



Выпуклый многоугольник Невыпуклый многоугольник
Рис. 2



Упражнение 1. Докажите теорему Хелли в случае $d = 1$ для любых промежутков.

Сложности начинаются с размерности $d = 2$. В этом случае теорема Хелли утверждает, что если на плоскости дано конечное семейство выпуклых множеств, причем любые три пересекаются, тогда и все они пересекаются.

Доказательство теоремы Хелли мы проведем для случая $d = 2$, а случай $d = 3$ оставим в качестве упражнения. Итак, на плоскости даны выпуклые множества A_1, \dots, A_n , любые три из них пересекаются. Надо доказать, что все они пересекаются. Применим метод математической индукции по числу множеств n . Если $n = 3$, то доказывать нечего. Пусть $n \geq 4$, и дано, что любые $n - 1$ множеств пересекаются (это – предположение индукции, примененное к любым $n - 1$ множествам нашего семейства). Докажем, что пересекаются все n . Предположим обратное: они не пересекаются. Тогда для любого i найдется точка M_i , принадлежащая всем множествам A_1, \dots, A_n , кроме A_i . Нам понадобятся только первые четыре из этих точек: M_1, M_2, M_3 и M_4 . Если эти точки являются вершинами выпуклого четырехугольника $M_1M_2M_3M_4$, то возьмем точку пересечения его диагоналей M_1M_3 и M_2M_4 и обозначим ее через M (рис.3). Для каждого k , отличного от 1 и 3, точки M_1 и M_3 принадлежат множеству A_k , значит (в силу выпуклости!), и весь отрезок M_1M_3 лежит в A_k , поэтому $M \in A_k$. Итак, $M \in A_k$ для всех k , отличных от 1 и 3. Так же рассматриваем вторую диагональ M_2M_4 , и получаем, что $M \in A_k$ для всех k , отличных от 2 и 4. Итак, точка M принадлежит всем A_k . Если же точки не являются вершинами выпуклого четырехугольника, то одна из них лежит внутри треугольника с вершинами в трех других (почему?). Пусть точка M_4 принадлежит треугольнику $M_1M_2M_3$ (рис.4). Множество A_4 содержит все три вершины $M_1M_2M_3$, а значит, содержит весь треугольник (вновь пользуясь выпуклостью). Следовательно, $M_4 \in A_4$. Но, с другой стороны, по определению $M_4 \in A_k$ при всех $k \neq 4$. Поэтому M_4 – общая точка всех множеств A_1, \dots, A_n . Это завершает доказательство индуктивного перехода от $n - 1$ к n , а значит, и всей теоремы при $d = 2$.

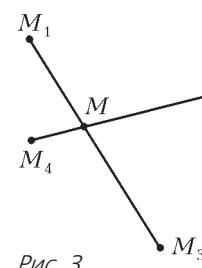


Рис. 3

Множество A_4 содержит все три вершины $M_1M_2M_3$, а значит, содержит весь треугольник (вновь пользуясь выпуклостью). Следовательно, $M_4 \in A_4$. Но, с другой стороны, по определению $M_4 \in A_k$ при всех $k \neq 4$. Поэтому M_4 – общая точка всех множеств A_1, \dots, A_n . Это завершает доказательство индуктивного перехода от $n - 1$ к n , а значит, и всей теоремы при $d = 2$.

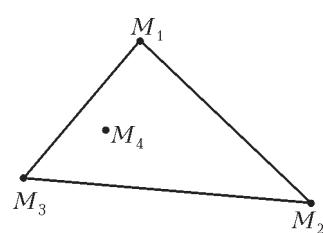


Рис. 4

Упражнения

2. Примените то же рассуждение для доказательства теоремы Хелли в \mathbb{R}^3 .

3. Приведите пример, показывающий, что теорема Хелли не выполняется для невыпуклых множеств.

Эта теорема верна и для бесконечного семейства выпуклых множеств. Правда, с одним дополнитель-

ным условием: все множества должны быть не только выпуклы, но еще и ограничены и замкнуты. С ограниченностью все понятно: множество ограничено, если оно содержится в некотором шаре. А что значит замкнутость? Множество A называется замкнутым, если оно содержит все свои предельные точки. Это означает, что если последовательность точек x_k , $k \in \mathbb{N}$, каждая из которых принадлежит A , стремится (т.е. неограниченно приближается) к некоторой точке x , то предельная точка x также принадлежит A . Например, одна точка – замкнутое множество. Круг без границы (открытый круг) не замкнут, а с границей – замкнут. Но если выколоть из круга любую точку, он перестает быть замкнутым. Для выпуклых множеств можно сказать проще: замкнутые – это множества, взятые со своей границей. Итак,

Теорема Хелли верна и для бесконечных семейств выпуклых множеств, если все множества ограничены и замкнуты.

Доказывать мы этого не будем, отметим только, что ограниченность и замкнутость существенны. Например, в семействе лучей $A_k = [k; +\infty)$, $k \in \mathbb{N}$, на прямой \mathbb{R} все множества выпуклы и замкнуты, и любые два пересекаются, но все они не имеют общей точки. Здесь не выполнено условие ограниченности. А если не выполнено условие замкнутости, контрпример дает семейство интервалов $A_k = \left(0; \frac{1}{k}\right)$, $k \in \mathbb{N}$.

Кто вы, мистер Хелли?

Жизнь Эдварда Хелли – столь же яркая и необычная, как и его теоремы. Казалось бы, злая судьба сделала все, чтобы не дать ему заниматься наукой. Хотя начало жизни обещало блестательную карьеру. Защищив в 1907 году диссертацию в Венском университете, 23-летний ученик был направлен на годовую стажировку в Германию, в Геттингенский университет – центр мировой математики того времени. Его учителями стали Гильберт, Минковский, Клейн. Вернувшись в Вену, он занялся новым передовым направлением – теорией функций. В 1912 году Хелли публикует работу «Über lineare Funktionaloperationen» (О линейных функциональных операторах), где доказывает две фундаментальные теоремы, которые стали потом называться второй и третьей теоремами Хелли, а кроме того, доказывает один из основополагающих результатов теории функций – теорему Хана–Банаха (за 15 лет до Хана и за 20 – до Банаха!). Хелли осознает исключительную важность выпуклой геометрии и через год доказывает « первую теорему Хелли ». Да, да, первая теорема Хелли появилась на год позже второй и третьей! Но опубликовать он ее не успел. В 1914 году грянула первая мировая война, и подданный Австро-Венгерской империи Эдвард Хелли был призван на восточный фронт – воевать с Россией. После года тяжелых боев лейтенант Хелли получил смертельное ранение: пуля прошла через легкое. Он чудом выжил, попал в русский плен, несколько лет провел в русских госпиталях, а затем в лагерях для военнопленных в Сибири. В 1918 году война закончилась. Для всех, но



не для пленных на территории России. Поскольку, как писали западные историки, «русские армии, вместо того чтобы сложить оружие, начали воевать друг с другом». В России началась гражданская война, голод, неразбериха. Хелли добрался до Владивостока, оттуда – в Японию, через всю Азию – домой. Лишь в 1920 году ему удалось вернуться в Вену, где он (после шестилетнего перерыва!) возвращается к научным занятиям и получает ряд сильных результатов. Несмотря на это, устроиться на преподавательскую работу он не смог: все места в университетах были заняты молодыми, и тридцатисемилетний инвалид войны оказался никому не нужным. Но Хелли не сдается: зарабатывает репетиторством, пишет «решебники», даже работает в банке, а после – в страховой компании. Постепенно его жизнь устраивается, служба в страховой компании приносит хороший доход, оставляя время для научных исследований, которые он не прекращает ни на день. Казалось бы – черная полоса в жизни прошла. Но в 1938 году в Вену входят нацисты (печально известный «аншлюс Австрии»), и еврея Хелли увольняют, подвергают преследованиям. Он принимает решение эмигрировать с семьей в США. Если бы он этого не сделал, то, вероятно, оказался бы в газовой камере. Жизнь в Америке поначалу была нелегкой: страна переполнена учеными из Европы, бежавшими от фашизма. Лишь поддержка и помощь Альберта Эйнштейна позволили Хелли получить работу в университете, где он наконец-то смог полностью сконцентрироваться на научной работе.

Приложения теоремы Хелли

Мы начнем с применений теоремы Хелли к задачам элементарной геометрии.

Задача 1. На плоскости дано произвольное множество точек. Любые три из них можно накрыть кругом радиуса 1. Тогда¹ и все множество можно накрыть кругом радиуса 1.

Решение. Применим теорему Хелли к семейству замкнутых кругов единичного радиуса с центрами в точках данного множества. Любые три круга пересекаются (их общая точка – центр единичного круга, который покрывает три соответствующие точки). Значит, все круги имеют некоторую общую точку O . Тогда единичный круг с центром O содержит все точки нашего множества.

Решение задачи 1 с применением теоремы Хелли появилось впервые в 1941 году в работе Блюменталя и Валина. Однако в том же году его независимо получил ученик 182 московской школы Миша Бонгард. Случилось это так. Задача 1 была предложена на седьмой Московской математической олимпиаде школьников весной 1941 года. Ее авторы предполагали другое решение. Однако М.Бонгард свел задачу к теореме Хелли, которую, конечно же, не знал, но достаточно быстро доказал для случая, когда все выпуклые фигуры – одинаковые круги. В том же году талантливый

школьник поступил в университет, но начавшаяся война прервала все жизненные планы. Он ушел на фронт, был ранен. После войны Михаил Моисеевич Бонгард стал крупнейшим математиком, одним из основоположников математического моделирования и теории распознавания образов.

Вот еще одно применение теоремы Хелли к геометрической задаче. Дан произвольный выпуклый семиугольник. Рассмотрим всевозможные выпуклые пятиугольники с вершинами в вершинах семиугольника. Сколько всего таких пятиугольников? Ровно 21. В самом деле, каждому пятиугольнику соответствует пара вершин (семиугольника), которые он не содержит. Поэтому пятиугольников столько, сколько пар вершин у семиугольника, что равно числу сочетаний из 7 по 2, а это $\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$. Оказывается, все эти пятиугольники имеют общую точку!

Задача 2. Для произвольного выпуклого семиугольника все выпуклые пятиугольники с вершинами в вершинах семиугольника имеют общую точку.

Решение. Каждый пятиугольник не содержит ровно две вершины семиугольника, поэтому любые три пятиугольника имеют общую вершину, а значит – пересекаются. Остается применить теорему Хелли.

Следующий пример – из алгебры. Напомним, что линейным неравенством с двумя переменными называется неравенство вида $ax + by + c < 0$ (строгое неравенство) или $ax + by + c \leq 0$ (нестрогое).

Задача 3. Данна система из 100 линейных неравенств. Если любые три из них имеют общее решение, то и вся система имеет решение.

Решение. Множество точек $(x; y)$, удовлетворяющих линейному неравенству, является полуплоскостью, либо, в исключительном случае, когда $a = b = 0, c < 0$ (или $c \leq 0$), плоскостью. В любом случае это множество выпукло. Теперь применяем теорему Хелли.

Задача 4. На плоскости даны несколько параллельных отрезков. Известно, что для любых трех отрезков найдется прямая, их пересекающая. Тогда существует прямая, пересекающая все эти отрезки.

Формулировка этой задачи вполне элементарна, а вот решение – нет. Нужно будет рассмотреть выпуклые множества, состоящие не из точек, а из прямых. С этим приемом мы встретимся и в дальнейшем.

Решение. Введем систему координат так, что ось Oy параллельна данным отрезкам. Любой из отрезков состоит из точек $(x; y)$, для которых $x = x_0, y_1 \leq y \leq y_2$, где x_0, y_1, y_2 – некоторые числа. Прямая $y = kx + b$ пересекает этот отрезок, если $y_1 \leq kx_0 + b \leq y_2$. Поставим этой прямой в соответствие точку $(k; b) \in \mathbb{R}^2$. Множество точек-прямых $(k; b)$, пересекающих данный отрезок, удовлетворяет двум линейным неравенствам, а значит – выпукло. Любые три таких множества пересекаются, поскольку существует прямая, пересекающая три отрезка. Поэтому все множества имеют общую точку, т.е. существует прямая, пересекающая все отрезки.

¹ В формулировках задач и упражнений мы будем опускать слова «Докажите, что...»



Упражнения

4. Сформулируйте и докажите аналог задачи 1 в пространстве \mathbb{R}^3 .

5. На координатной плоскости дано несколько вертикальных отрезков. Если для любых трех отрезков существует парабола $y = x^2 + px + q$, которая их пересекает, то найдется такая парабола, пересекающая сразу все отрезки.

Теорема Минковского–Радона

Теперь перейдем к более значимым приложениям теоремы Хелли, составляющим вполне самостоятельные и важные теоремы. Первая из них была доказана в 1911 году великим немецким математиком Германом Минковским (1864–1909), одним из основателей выпуклой геометрии и выпуклого анализа, а затем усиlena его учеником Иоганнесом Радоном (1887–1956). Эта теорема устанавливает одно общее геометрическое свойство всех выпуклых множеств.

Теорема 2 (Минковский, 1911; Радон, 1916). *Внутри произвольного ограниченного выпуклого множества в пространстве \mathbb{R}^d найдется точка M , обладающая следующим свойством: для любой хорды AB , проходящей через M , имеем $\frac{AM}{BM} \leq d$.*

Для данного ограниченного выпуклого множества \mathbf{G} наименьшее число γ , для которого найдется точка M такая, что $\frac{AM}{BM} \leq \gamma$ для любой хорды AB , проходящей через M , называется константой Минковского–Радона. Мы будем обозначать эту константу $\gamma(\mathbf{G})$. Ясно, что всегда $\gamma(\mathbf{G}) \geq 1$. В самом деле, для произвольной хорды можем считать, что $\frac{AM}{BM} \geq 1$, иначе поменяем местами точки A и B . С другой стороны, например, для круга на плоскости $\gamma(\mathbf{G}) = 1$, то же – для шара в пространстве \mathbb{R}^3 . Это же верно для любой центрально-симметричной выпуклой фигуры, поскольку, поместив точку M в центр симметрии, получим $\frac{AM}{BM} = 1$ для любой хорды. Поэтому для прямоугольника или для куба константа Минковского–Радона равна 1. Верно и обратное: если $\gamma(\mathbf{G}) = 1$, то фигура G имеет центр симметрии (упражнение 6). Таким образом, константа Минковского–Радона – это своего рода мера несимметричности фигуры. Теорема 2 утверждает, что «слишком несимметричных» выпуклых фигур не бывает, для каждой из них $\gamma \leq d$. Так, у любой плоской фигуры $\gamma \leq 2$, а у любой пространственной $\gamma \leq 3$.

Доказательство проведем для плоскости ($d = 2$). Для каждой точки $A \in \mathbf{G}$ обозначим через \mathbf{G}_A фигуру, гомотетичную \mathbf{G} с коэффициентом $\frac{2}{3}$ относительно точки A . Иными словами, \mathbf{G}_A получается из фигуры \mathbf{G} сжатием относительно точки A с коэффициентом $\frac{2}{3}$. Для любых трех точек $A_1, A_2, A_3 \in \mathbf{G}$ фигуры $\mathbf{G}_{A_1}, \mathbf{G}_{A_2}$ и \mathbf{G}_{A_3} имеют общую точку K – точку пересечения медиан треугольника $A_1A_2A_3$ (рис.5). В самом деле, если P – середина отрезка A_2A_3 , то по свойству медиан $\frac{A_1K}{A_1P} = \frac{2}{3}$, а так как $P \in \mathbf{G}$ (выпуклость!), то $K \in \mathbf{G}_{A_1}$.

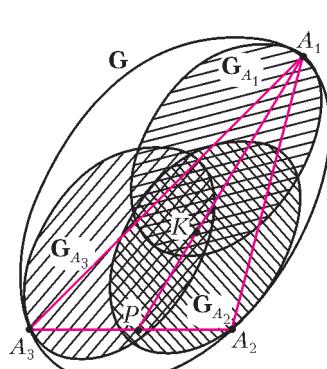


Рис. 5

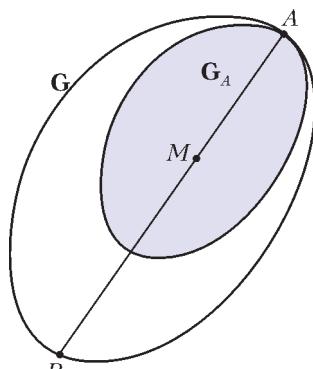


Рис. 6

Аналогично, $K \in \mathbf{G}_{A_2}$ и $K \in \mathbf{G}_{A_3}$. Применив теорему Хелли, получаем, что все фигуры \mathbf{G}_A , $A \in \mathbf{G}$, пересекаются в некоторой точке M (рис.6). Если провести через M произвольную хорду AB , то $\frac{AM}{AB} \leq \frac{2}{3}$, поскольку $M \in \mathbf{G}_A$, а значит, $\frac{AM}{BM} \leq 2$.

Какая же фигура является самой несимметричной, т.е. у какой фигуры $\gamma = d$? Ответ вполне ожидаем: на плоскости – это треугольник, причем любой, а в пространстве – тетраэдр (упражнение 8). Удивительно другое. Оказывается, это – единственные фигуры (в размерностях 2 и 3), для которых константа Минковского–Радона равна d , у всех остальных фигур она меньше!

Упражнения

6. Если константа Минковского–Радона замкнутого выпуклого множества равна 1, то множество имеет центр симметрии.

7. Докажите теорему Минковского–Радона в \mathbb{R}^3 .

8. Для любого треугольника $\gamma = 2$, а для любого тетраэдра $\gamma = 3$.

9. Вычислите константу Минковского–Радона

- для трапеции со сторонами 1, 1, 1 и 2;
- для прямого кругового конуса;
- для правильной треугольной призмы.

10. Приведите пример плоской фигуры, у которой $\gamma = \frac{3}{2}$.

11*. Если для плоской фигуры $\gamma = 2$, то это треугольник. Если для выпуклого тела в \mathbb{R}^3 $\gamma = 3$, то это тетраэдр. (Фигуру и тело считаем замкнутыми.)

Неравенство Юнга

Возьмем произвольное множество на плоскости, конечное или бесконечное, выпуклое или нет. Известно, что расстояние между любыми двумя его точками не превосходит 1. Интересно, кругом какого радиуса можно накрыть это множество? Чтобы строго поставить задачу, мы ограничимся замкнутыми множествами (это сделано для удобства и, вообще говоря, несущественно) и введем два обозначения.

Диаметром ограниченного замкнутого множества называется наибольшее расстояние между двумя его точками. Диаметр множества мы будем обозначать буквой D , а наименьший радиус круга (в \mathbb{R}^3 – шара), в котором помещается это множество, – через R . Ясно, что всегда $R \leq D$. В самом деле, круг (шар) радиуса



D с центром в любой из точек данного множества содержит все множество. Можно ли обойтись меньшим радиусом – вот вопрос. Для некоторых множеств – да. Например, прямоугольник диаметра D можно накрыть кругом радиуса $D/2$. Действительно, диаметр прямоугольника равен его диагонали, а радиус описанного круга равен ее половине. Так что для прямоугольника $R = D/2$. На самом деле это верно для любого множества, имеющего центр симметрии (упражнение 12). А вот для равностороннего треугольника радиус накрывающего круга чуть больше: $R = \frac{\sqrt{3}}{3}D$. Оказывается, что такого радиуса хватит не только для треугольника, но и для любого плоского множества. Эта теорема была доказана в 1901 г. немецким математиком Генрихом Юнгом.

Теорема 3 (Юнг, 1901). *Любое ограниченное замкнутое множество $A \subset \mathbb{R}^d$ диаметра D можно поместить в шар радиуса $\sqrt{\frac{d}{2(d+1)}}D$.*

Итак, $R \leq \sqrt{\frac{d}{2(d+1)}}D$. Это – неравенство Юнга между диаметром множества и радиусом накрывающего шара. Так, для любого плоского множества $R \leq D\sqrt{\frac{2}{2(2+1)}} = \frac{\sqrt{3}}{3}D$. Как мы видели, равенство достигается для правильного треугольника. А для любого множества в \mathbb{R}^3 получаем $R \leq D\sqrt{\frac{3}{2(3+1)}} = \frac{\sqrt{3}}{8}D$, что в точности соответствует правильному тетраэдру.

Неравенство Юнга доказано за 12 лет до появления теоремы Хелли. Но математика не всегда подчиняется хронологии. И неравенство Юнга – естественное следствие теоремы Хелли. А увидеть это нам поможет задача 1 (см. выше). Мы докажем теорему 3 пока только для плоских множеств, т.е. при $d = 2$.

Доказательство теоремы 3. Обозначим $R_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}D$ и докажем, что любые три точки множества A можно накрыть кругом радиуса R_2 . Воспользовавшись задачей 1, получим, что множество A целиком накрывается кругом радиуса R_2 , что и нужно. Возьмем любые три точки множества A . Они являются вершинами треугольника Δ , все стороны которого не превосходят D . Если Δ – прямоугольный или тупоугольный (включая вырожденный случай, когда вершины лежат на одной прямой), то круг, построенный на его наибольшей стороне как на диаметре, содержит Δ . Радиус этого круга не превосходит $D/2$, что даже меньше, чем нужно. Если же Δ – остроугольный, то наибольший из его углов $\geq 60^\circ$, и по теореме синусов радиус его

описанного круга не превосходит $\frac{D}{2 \sin 60^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{3}D$.

Теперь вполне ожидаемо было бы упражнение для читателя «докажите теорему 3 в пространстве \mathbb{R}^3 ».

Однако, в отличие от предыдущих примеров, сделать это не так просто, трехмерный случай здесь сильно отличается от плоского. Причем начало доказательства совпадает почти дословно: с помощью теоремы Хелли теорема 3 сводится к четырем точкам (упражнение 4), т.е. к следующему утверждению:

Тетраэдр, все ребра которого не превосходят D , содержится в круге радиуса $R_3 = \sqrt{\frac{3}{8}}D$.

Осталось «всего лишь» это доказать. Здесь, однако, нас подстерегают трудности. Наше рассуждение с треугольником нельзя прямо перенести на тетраэдр. Неясно, что значит «тупоугольный тетраэдр», и нет теоремы синусов, с помощью которой можно было бы найти радиус описанной сферы через длину ребра. Придется идти другим, более длинным путем.

Читатель может пропустить это рассуждение и сразу перейти к упражнениям или к следующему разделу. А для тех, кто все же хочет разобраться с трехмерным неравенством Юнга, мы наметим контуры доказательства.

1) Возьмем шар наименьшего радиуса, содержащий данный тетраэдр Δ . Это, невинное на первый взгляд, предположение вызовет протест у всякого математика. А почему такой шар существует, почему наименьший радиус достигается? Этот факт требует объяснения! В данном случае наименьший шар действительно существует, и математик скажет, что «это следует из соображений компактности». Мы не будем приводить строгого доказательства, это завело бы нас слишком далеко в область математического анализа. Поверим, что наименьший шар существует.

2) Итак, у каждого тетраэдра Δ есть шар наименьшего радиуса, его содержащий. Обозначим радиус этого шара как $R(\Delta)$. Среди всех тетраэдров, у которых длины ребер не превосходят D , найдется тетраэдр с наибольшим значением $R(\Delta)$. Мы вновь опустим доказательство того, что этот тетраэдр существует, скажем только, что это опять «следует из соображений компактности». Назовем этот тетраэдр $A_1A_2A_3A_4$. Нам нужно доказать, что $R(\Delta) \leq R_3$.

3) Если ни одна из вершин тетраэдра не лежит на поверхности наименьшего шара, то радиус шара можно уменьшить так, чтобы он по-прежнему содержал тетраэдр. Значит, шар – не наименьший. То же, если только одна вершина лежит на поверхности шара. Если ровно две вершины, например A_1 и A_2 , лежат на поверхности шара, то A_1A_2 – его диаметр, иначе радиус шара вновь можно уменьшить. Следовательно, в этом случае $R(\Delta) = \frac{1}{2}A_1A_2 \leq \frac{1}{2}D < R_3$. Наконец, если ровно три вершины, например, A_1, A_2 и A_3 , лежат на поверхности шара, то его центр лежит в плоскости $A_1A_2A_3$, а сечение шара этой плоскостью есть круг наименьшего радиуса, содержащий треугольник $A_1A_2A_3$, в противном случае опять радиус шара можно уменьшить. Согласно доказанному нами неравенству Юнга для плоскости, радиус круга, а значит и равный ему радиус шара, не превосходит R_2 , что меньше R_3 . Итак, остался последний случай: все четыре вершины тетраэдра лежат на поверхности шара, т.е. он является описанным шаром тетраэдра.

4) Если тетраэдр Δ – правильный с длиной ребра D , то радиус его описанного шара как раз равен R_3 . Если же тетраэдр не правильный, то одно из его ребер, например A_3A_4 , меньше D . Зафиксируем грань $A_1A_2A_3$, а грань $A_1A_2A_4$ будем поворачивать относительно ребра A_1A_2 . Таким образом, мы меняем двугранный угол между гранями, а