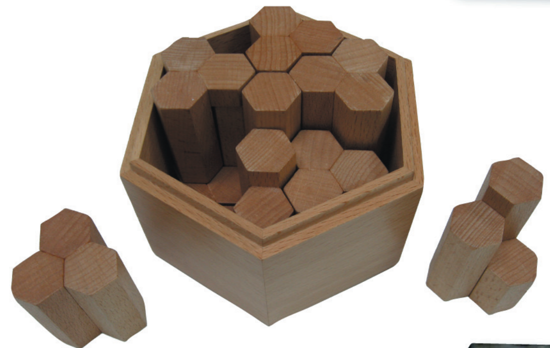
РИЖСКИЕ БАШНИ



В Риге есть двенадцать старых башен. Основание каждой составляют три правильных шестиугольника, из которых любые два имеют общую сторону; на этих шестиугольниках стоят прямые шестиугольные призмы разной высоты (рис. 1; цифрами обозначено количество этажей в каждой призме).

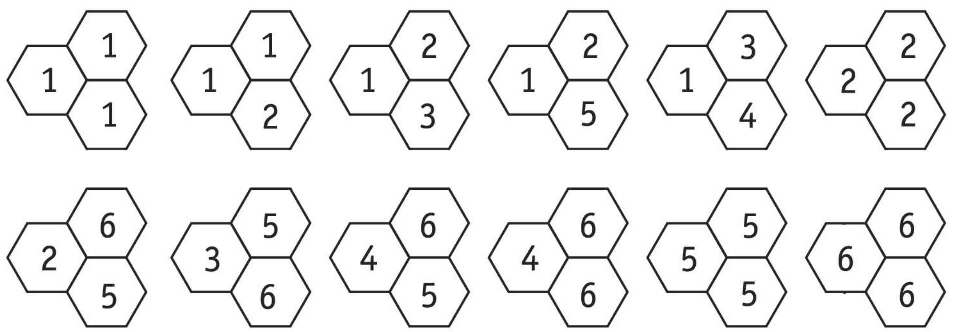


рис. 1

На рисунке 2 – изображение одной из башен (высота составляющих призм равна 1, 3 и 4 этажа).

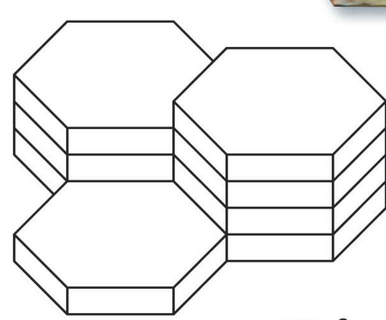


рис. 2

В одном из архитектурных проектов предлагается из этих башен составить современный музей в 7 этажей так, чтобы в основании получился один из узоров, изображенных на рисунке 3. Затененный центральный шестиугольник изображает шахту лифта. Ясно, что шесть башен придется перевернуть, чтобы их плоские основания составили плоскую крышу музея. В предположении, что все практические сложности преодолимы, возникает естественный вопрос – подходят ли друг к другу формы этих башен. Другими словами, есть ли математическое решение у этой задачи?

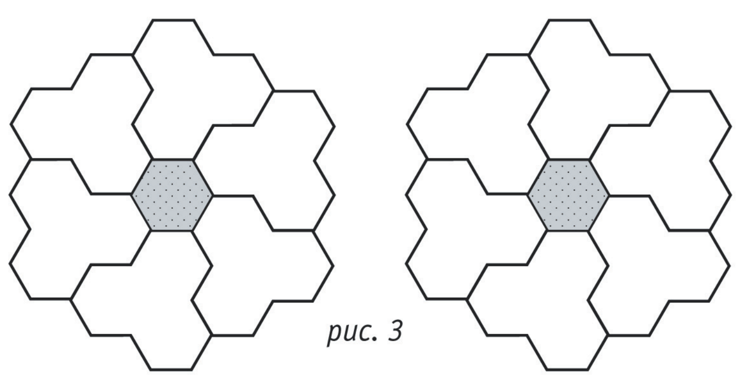


рис. 3

(Подробнее – на странице 28 внутри журнала)

Задача Успенского решена

В шахматной математике весьма популярна задача о расстановке наименьшего числа одноименных фигур (коней, ладей, ферзей, королей и слонов), которые держат под обстрелом все свободные поля шахматной доски.

Коней достаточно иметь 12 (рис.1), причем существуют всего две необходимые расстановки – вторая получается из данной при зеркальном отражении (относительно вертикальной или горизонтальной прямых, делящих доску пополам). Ладей требуется 8, и нетрудно убедиться, что общее число расстановок составляет $2\times2^8-8$! На рисунке 2 показана самая популярная из них. Ферзей хватает 5 (рис.3), существует 4860 способов расставить их нужным образом. Наименьшее число королей, которые держат все свободные поля доски, равно 9 (рис.4), всего имеется 3600 расстановок. Наконец, достаточно поставить на доску 8 слонов, и все остальные поля будут под контролем (рис.5). Подсчитано, что всего необходимых расстановок 20736.

Эта задача допускает множество обобщений. Самые известные из них – переход к произвольным доскам размера $n\times n$ или рассмотрение различных наборов фигур, необязательно одноименных. Вот еще один весьма оригинальный подход, придуманный известным математиком профессором В.А.Успенским, заведующим кафедрой математической логики и теории алгоритмов мехмата МГУ.

Напомним, что в русских шашках на 64-клеточной доске три дамки при правильной игре всегда ловят одну неприятельскую, если она не стоит на «большой дороге», т.е. на диагонали a1-h8. В.А.Успенский предложил следующее шахматно-математическое обобщение этой шашечной ситуации.

Какое наименьшее число одноименных фигур данного цвета могут поймать одну такую же фигуру противоположного цвета (все эти фигуры ходят по шахматным правилам, а других на доске нет)?

Рассмотрим эту задачу для каждой из пяти фигур, предполагая, что сильнейшая сторона – белые и ход всегда их (исходное положение произвольное).

Ферзи. Пять белых ферзей, помогая друг другу, всегда могут занять положение на рисунке 3, и черному ферзю некуда скрыться. Однако, оказывается, что достаточно и 4 ферзей (рис. 6). Эту симпатичную позицию указал А.Ханян – ферзи здесь расположены в вершинах параллелограмма, напоминающего стрелку компаса, вписанную в квадрат. Можно убедиться, что, взаимодействуя друг с другом, белые ферзи легко располагаются указанным образом. После этого в распоряжении черного ферзя останутся три свободных поля – b4, f1 и g6, не связанных между собой ходом ферзя. Значит, на каком бы из них черный ферзь ни находился, при своем ходе он не может перескочить на безопасное поле и сразу же попадает под бой.

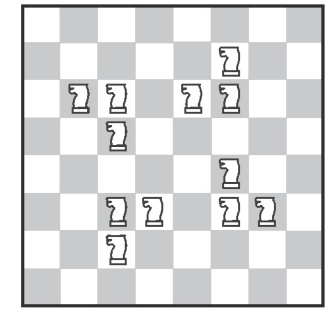


Рис.1

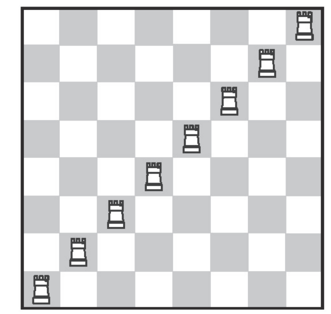


Рис.2

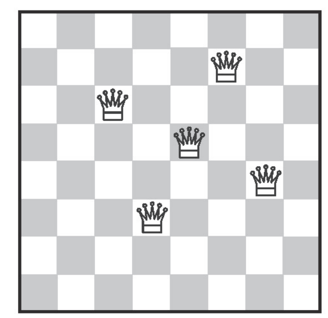


Рис.3

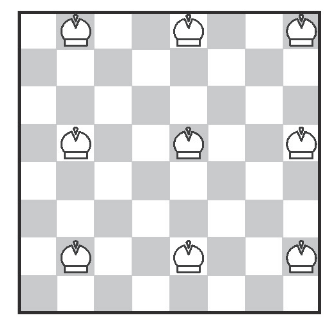


Рис.4

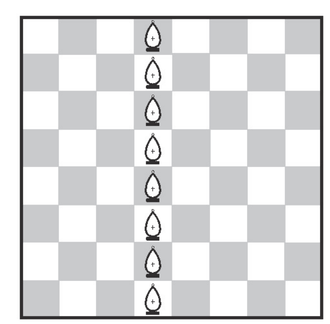


Рис.5

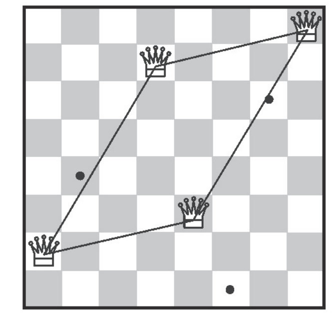


Рис.6

Ладьи. Шесть белых ладей (а тем более меньшее количество) не могут справиться с одной черной. Действительно, где бы они ни находились, найдутся две свободные горизонтали и две свободные вертикали. Четыре поля на пересечении этих линий образуют прямоугольник и не атакованы. При своем ходе черная ладья всегда может перескочить с одного из безопасных полей на другое. А вот 7 ладей без труда ловят неприятельскую. Например, если на рисунке 2 снять любую белую ладью, то в распоряжении черной будет только это поле и, делая ход, она встанет под удар. (Очевидно, что одна черная ладья не помешает семи белым, действующим сообща, занять семь разных вертикалей и горизонталей.)

Слоны. Пусть фигуры белопольные; тогда четыре белых слона, помогая друг другу, занимают поля d1, d3, d5 и d7. В результате для белопольного черного слона на доске не остается свободных полей.

Короли. Два белых короля легко оттесняют неприятельского на край доски, а затем в угол. У того не остается пространства, и он вынужден встать под бой (в данном случае математические правила важнее шахматных).

Кони. Для этого случая составлена компьютерная программа, позволяющая трем белым коням всегда справиться с одним черным. Конечно, белый конь e5 один «обыгрывает» коня h8 при ходе черных; но это исключение из правила.

Похоже, проблема Успенского полностью решена!

Е. Гик