ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

КМШ

ЗАДАЧИ

(см. «Квант» № 1)

1. Можно. Возьмем, например, кирпич размером $1 \times 2 \times 6$. Две грани 1×2 покроем четырьмя квадратами 1×1. Оставшиеся четыре грани можно покрыть квадратом 6×6.

2. Не может. Докажем это. Очевидно, что среди семи цифр, участвующих в равенстве, нет нуля (иначе одно произведение равно нулю, а другое нет). Нет и цифры 7 (если она присутствует, то одно из произведений делится на 7, а другое нет). По аналогичной причине отсутствует и цифра 5. Остаются семь цифр: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9. Так как в ребусе присутствуют семь разных букв, каждая из указанных цифр встретится по одному разу. Если бы равенство из условия задачи выполнялось, то произведение

$$x = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9 = 2^7 \cdot 3^4$$

было бы квадратом целого числа $\text{С} \times \text{А} \times \text{М}$. Это невозможно, так как в разложение числа x на простые множители двойка входит в нечетной степени.

3. Пусть, например, кузнечики сидят в десяти вершинах правильного 11-угольника, а в 11-й вершине никого нет. Тогда каждый из кузнечиков может перепрыгнуть в незанятую вершину, и мы снова получим ту же самую фигуру.

4. 499.

Заметим сначала, что общее количество денег у зрителей не меняется. Поэтому в итоге у каждого зрителя должно оказаться столько же денег, сколько было вначале. Значит, если зрителю рубли давали, то он их и отдавал. Докажем, что каждый зритель чихнул хотя бы один раз. Предположим, что это не так. Рассмотрим зрителя, который не чихал, а значит, и не отдавал никому денег. Тогда его соседи тоже не отдавали денег, и соседи его соседей также не отдавали денег, и т.д., т.е. никто в кинотеатре никому не отдавал денег. Противоречие с условием – ведь Дима расплачивался со своими соседями. Следовательно, наименьшее количество чиханий не меньше $20 \cdot 25 - 1$ (чихание Димы не считаем).

Покажем, что случай, когда каждый из зрителей чихнул ровно один раз, возможен. Пронумеруем всех зрителей в произвольном порядке, начав с Димы. Пусть они чихают и расплачиваются по очереди в этом порядке. Рассмотрим любых двух соседей. В какой-то момент один из них отдал другому рубль. В некий другой момент времени второй также отдал первому рубль. Можно считать, что рубль этот один и тот же, т.е. они могут друг другу ничего не отдавать. Поэтому можно считать, что никто никому ничего не отдавал, а значит, у всех столько денег, сколько было вначале. Следовательно, после того как все чихнут в этом порядке, у зрителей будет поровну денег.

5. Если настенные часы расположены прямо напротив зеркала, то в зеркале они будут показывать 20:51. Подумайте, как поднести к зеркалу наручные часы, чтобы в зеркале они показывали 15:02. См. также статью А.Толпыго «Что мы видим в зеркале?» в этом номере журнала.

КОНКУРС «МАТЕМАТИКА 6–8»

(см. «Квант» №5 за 2008 г.)

6. Покажем, как проверить правильность всех надписей за 10 взвешиваний. Сравним друг с другом гири с надписями 1 и 2, 2 и 4, …, 512 и 1024. Если результаты всех взвешиваний согласуются с надписями, то все надписи правильные.

Докажем, что за 9 взвешиваний мы не сможем определить, все ли надписи правильные. Выпишем в строчку числа, соответствующие надписям на гирях:

$$1,\ 2,\ \ldots,\ 512,\ 1024.$$

Пусть мы сделали какое-то взвешивание, и максимальное число среди написанных на гирях было 2^k. Назовем гирю с этой надписью *особой*. В силу неравенства $1 + 2 + \ldots + 2^{k-1} < 2^k$ чаша с особой гирей должна перевесить, иначе есть неправильные надписи. Пусть чаша с особой гирей перевесила. Поставим перед числом, написанным на особой гире, вертикальную черту в нашем ряду:

$$1, 2, \ldots, 2^{k-1} \Big| 2^k, \ldots, 512, 1024.$$

Если набор масс гирь слева от черты совпадает с набором надписей на них, то это же свойство выполнено для гирь, расположенных справа от черты. В этом случае результат взвешивания не будет зависеть от порядка гирь по одну сторону от черты (вспомним неравенство $1 + 2 + \ldots + 2^{k-1} < 2^k$). Сделаем 9 взвешиваний и поставим 9 палочек. Тогда между двумя какими-то числами палочки не будет:

$$1|2|\ldots\Big|2^{a-1}, 2^a\Big|\ldots|512|1024.$$

Теперь ясно, что если на гире массой 2^{a-1} будет написано 2^a и наоборот, то результат каждого взвешивания будет такой же, как и при правильных надписях.

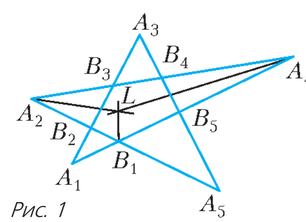

Рис. 1

7. Обозначим вершины звезды через A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, а вершины пятиугольника через B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, как показано на рисунке 1.

Пусть биссектрисы углов звезды пересекаются в точке L. Докажем, что биссектрисы углов пятиугольника $B_1B_2B_3B_4B_5$ проходят через точку L. Рассмотрим треугольник $A_2B_1A_4$, заметим, что биссектриса угла B_1, она же биссектриса в пятиугольнике, проходит через точку L. Аналогично доказывается для других биссектрис пятиугольника.

8. Обозначим наше число через x. Заметим, что $x = 1$ и $x = 2$ – плохие. Действительно, легко проверить, что 1 и 4 нельзя представить как сумму ненулевых квадратов. Для разности квадратов натуральных чисел a и b, где $a > b$, мы имеем равенство $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$. Сомножители $a + b$ и $a - b$ одинаковой четности, причем первый сомножитель больше 2. Поэтому 1 и 4 нельзя представить и как разность ненулевых квадратов.

Теперь докажем, что любое $x \geq 3$ – хорошее. Пусть сначала x нечетно. Найдем такое a, что $x^2 = (a+1)^2 - a^2$. Имеем $x^2 = 2a + 1$, $a = \dfrac{x^2 - 1}{2}$ – целое. Тогда можно взять треугольник со сторонами x, a и $a + 1$, и он будет прямоугольным. Пусть теперь x – четное. Подберем такое b, что $x^2 = (b+2)^2 - b^2$. Имеем $x^2 = 4b + 4$, $x^2 = 4(b+1)$, $b = \left(\dfrac{x}{2}\right)^2 - 1$ – целое. Тогда можно взять прямоугольный треугольник со сторонами x, b, $b + 2$.

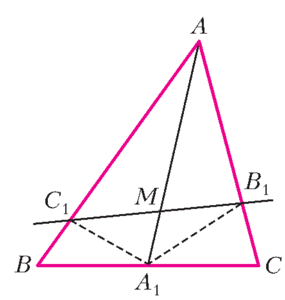

Рис. 2

9. Пусть прямая, проведенная через точку M пересечения медиан треугольника ABC, пересекла стороны AB и AC в точках C_1 и B_1 соответственно (рис. 2). Пусть A_1 – середина стороны BC. Легко видеть, что

$S_{\Delta AB_1M} = \dfrac{2}{3} S_{\Delta AB_1A_1}$, $S_{\Delta AC_1M} = \dfrac{2}{3} S_{\Delta AC_1A_1}$, откуда $S_{\Delta AB_1C_1} =$

$= \frac{2}{3}S_{AB_1A_1C_1} < \frac{2}{3}S_{\Delta ABC}$, и поэтому никакая прямая, проходящая через M, не может отсекать треугольник площади $\frac{2}{3}S_{\Delta ABC}$.

10. Заметим, что длина отрезка равна разности координат его начала и конца. Так как 100 + 99 + … + 51 – 50 – 49 – … … –1 = 2500 – максимальная возможная сумма, то точки 1, 2, …, 50 являются левыми концами отрезков, а 51, …, 100 – правыми.

Рассмотрим все отрезки, концы которых дают остаток 1 от деления на 5. Их ровно 10, а их суммарная длина равна (51 + + 56 + … + 96) – (1 + 6 + … + 46) = 500. Аналогично, суммарная длина отрезков с концами в числах с остатком 2, 3, 4 и 0 равна 500. Таким образом, мы получили нужное нам разбиение.

ЭТОТ ТАИНСТВЕННЫЙ СЛЫШИМЫЙ МИР

1. Квадратное уравнение, которое получается из формулы (1), имеет вид

$$\left(c^2 - v^2\right)\tau^2 - 2c\tau t + c^2t^2 - h^2 = 0 .$$

Из него определяем, как время излучения звука τ зависит от времени его прихода t:

$$\tau = t + \frac{v^2t \pm \sqrt{c^2v^2t^2 + \left(c^2 - v^2\right)h^2}}{c^2 - v^2} .$$

Корень выбираем со знаком «–», так как τ должно быть меньше t (звук сначала был излучен, а потом услышан наблюдателем). Окончательный ответ:

$$\tau = t + \frac{v^2t - \sqrt{c^2v^2t^2 + \left(c^2 - v^2\right)h^2}}{c^2 - v^2} .$$

2. Фразы а), б) и г) определяют одну и ту же точку.

3. Если самолет находится над слухачом, то координата самолета равна нулю: $x_с = vt = 0$. Следовательно, $t = 0$, а время испускания пришедшего в этот момент звука равно

$$\tau(0) = 0 + \frac{v^2 \cdot 0 - \sqrt{c^2v^2 \cdot 0^2 + \left(c^2 - v^2\right)h^2}}{c^2 - v^2} = -\frac{h}{\sqrt{c^2 - v^2}} .$$

Координата изображения в этот момент равна

$$x_{из} = v\tau = -\frac{v}{\sqrt{c^2 - v^2}}h .$$

Можно сказать и так: наблюдатель «видит» звуковое изображение под углом $\gamma = \arcsin\frac{v}{c}$ к горизонтали.

Если же над слухачом находится звуковое изображение, то координата изображения равна нулю: $x_{из} = v\tau(t) = 0$. Следовательно, $\tau = 0$, а $t(0) = h/c$. Координата самолета в этот момент равна

$$x_с = vt = \frac{v}{c}h .$$

Можно сказать и так: наблюдатель видит самолет под углом $\beta = \operatorname{arctg}\frac{v}{c}$ к вертикали.

4. Скорость изображения равна скорости самолета. Минимальное расстояние между изображением и самолетом есть просто координата самолета в этот момент, поэтому

$$L_{\min} = |x_с| = \frac{v}{c}h .$$

5. Координата самолета, согласно закону движения, равна

$$x_с = vt_1 = M\sqrt{1 - \frac{1}{M^2}}h .$$

Координата изображения – это координата самолета в тот момент $\tau(t_1)$, когда был излучен звук:

$$\tau(t_1) = \frac{1}{M^2 - 1}\left(-\sqrt{M^2t^2 - \left(M^2 - 1\right)\frac{h^2}{c^2}} - t\right) = = -\frac{1}{M^2 - 1}t_1 = -\frac{1}{\sqrt{1 - 1/M^2}}\frac{h}{c},$$

и

$$x_{из} = v\tau(t_1) = -\frac{M}{\sqrt{1 - 1/M^2}}h .$$

6. *Указание.* Воспользуйтесь теоремой, обратной теореме о том, что в прямоугольном треугольнике высота, опущенная на гипотенузу, есть среднее геометрическое отрезков, на которые она делит гипотенузу.

7. Точки максимума надо трактовать как аннигиляцию (исчезновение) двух движущихся навстречу друг другу слуховых образов.

РАЗРЕЗАНИЯ НА ТРЕУГОЛЬНИКИ

1. База очевидна: для разрезания треугольника не нужно ни одной диагонали, а 3 – 3 = 0. Пусть n-угольник разрезан диагональю на k-угольник и m-угольник, причем для чисел k и m утверждение о количестве диагоналей верно. Тогда $k + m = n + 2$ и количество диагоналей, разбивающих n-угольник, равно $(k - 3) + (m - 3) + 1 = k + m - 5 = n - 3$.

2. Аналогично первому упражнению, только вместо формул $3 - 3 = 0$ и $(k - 3) + (m - 3) + 1 = k + m - 5 = n - 3$ используем формулы $3 - 2 = 1$ и $(k - 2) + (m - 2) = k + m - 4 = n - 2$.

3. Пересчитывая у каждого из треугольников разбиения его стороны, получаем число $3(n - 2) = 3n - 6$. Поскольку каждая из n сторон многоугольника входит в состав только одного треугольника, то на долю диагоналей остаются $(3n - 6) - n = 2n - 6$ сторон. Учитывая, что каждая из диагоналей, участвующих в разрезании n-угольника на треугольники, является общей стороной двух треугольников, получаем количество диагоналей, по которым проведены разрезы: $(2n - 6) : 2 = n - 3$.

«ПОДВОДНЫЕ КАМНИ» СИЛЫ АРХИМЕДА

1. Ниже уровня смолы находится объем $V_1 = \frac{\rho_2}{\rho_1}V = 9$ см^3, а выше – объем $V_2 = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1}V = 3$ см^3. При плавлении парафина уровень жидкости не изменится.

2. $m = \rho\pi r^2h = 40$ г.

3. Уровень воды понизился на $\Delta h = \frac{m}{\rho_в S}\frac{\rho_ж - \rho_в}{\rho_ж}$, где $\rho_в$ – плотность воды, $\rho_ж$ – плотность железа.

4. $F = mg + \rho_в g\left(\frac{\pi d^2h}{4} - \frac{m}{\rho_с}\right) = 8{,}7$ Н.

5. $F = g\left|m\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2} - \rho_1 h\pi r^2\right|$.

6. $h = H\frac{\rho_2 - \rho}{\rho_1 - \rho_2} = 1$ см.

7. Трос отклонится назад по ходу поезда на угол $\gamma = \operatorname{arctg}\frac{a}{g}$ от вертикали. Сила натяжения станет равной

$$T_1 = T\frac{\sqrt{a^2 + g^2}}{g} .$$

8. В первом случае перевесит левый сосуд. Плотность свинца больше плотности алюминия, поэтому объем свинцовой гири меньше алюминиевой. Уровень воды в сосудах установится одинаковый, но в левом сосуде будет больше воды, потому что свинцовая гиря занимает меньше места, чем алюминиевая. Во втором случае будет равновесие. Бруски, в отличие от гирь, плавают и не касаются дна. На дно действует только сила давления воды, а это давление у дна везде одинаковое. Ответ не зависит не только от положения центров масс, но и от самих масс брусков.

9. $\rho_в - \frac{\mu\rho_в h}{\sqrt[3]{V}} \le \rho \le \rho_в + \frac{\mu\rho_в h}{\sqrt[3]{V}}$, где $\rho_в$ – плотность воды.

10. Сила равна $F = \rho g R h\sqrt{\left(\frac{\pi R}{2}\right)^2 + 4H^2}$ и направлена под углом $\gamma = \operatorname{arctg}\frac{4H}{\pi R}$ к вертикали.

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП XXXV ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

1. Могут.
Пусть в каждом плохом грибе ровно 10 червей, а в хорошем червей нет. Далее, пусть из каждого плохого гриба по одному червяку переползут в хорошие, по 9 в каждый. В результате в каждом грибе окажется по 9 червей, и все грибы будут хорошими.

2. *I решение*. Преобразуем исходное выражение:

$$0 = a^3b + ab^3 + 2a^2b^2 + 2a + 2b + 1 = ab(a+b)^2 + 2(a+b) + 1 =$$
$$= (ab-1)(a+b)^2 + (a+b)^2 + 2(a+b) + 1 =$$
$$= (ab-1)(a+b)^2 + (a+b+1)^2 .$$

Заметим, что $a + b \ne 0$, ибо в противном случае 1 = 0. Значит, $1 - ab = \left(\frac{a+b+1}{a+b}\right)^2$; поскольку числа a и b рациональны, то и $\frac{a+b+1}{a+b}$ – рациональное число, и утверждение задачи доказано.

II решение. Умножим данное равенство на ab и преобразуем:

$$a^2b^2(a+b)^2 + 2ab(a+b) + ab = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a^2b^2(a+b)^2 + 2ab(a+b) + 1 = 1 - ab \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1 - ab = (ab(a+b)+1)^2 .$$

Из последнего равенства следует утверждение задачи.

III решение. Если $ab = 0$, то утверждение верно: $1 - ab = 1^2$. Если же $ab \ne 0$, то квадратное уравнение $abx^2 + 2x + 1 = 0$ имеет рациональный корень $(a + b)$ и рациональные коэффициенты. Из формулы корней квадратного уравнения следует, что его дискриминант является квадратом рационального числа. Но $D = 4(1 - ab)$, и утверждение доказано.

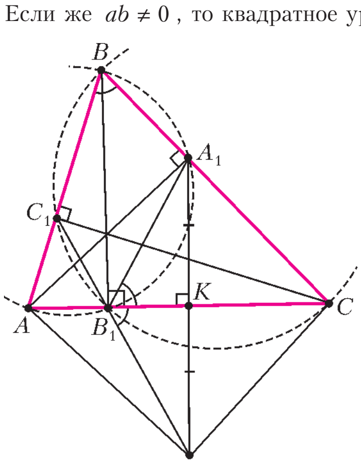

Рис. 3

3. Пусть K – точка пересечения отрезков A_1D и AC (рис.3). Из равенства $\angle AB_1B = \angle AA_1B = 90°$ вытекает, что четырехугольник AB_1A_1B вписан в окружность (с диаметром AB), поэтому $\angle A_1B_1K = 180° - \angle A_1B_1A = \angle ABC$. Аналогично, четырехугольник BC_1B_1C вписан в окружность (с диаметром BC); следовательно, $\angle DB_1K = 180° - \angle C_1B_1C = \angle ABC$. Получаем, что $\angle A_1B_1K = \angle DB_1K$. Из условия следует, что $\angle A_1KB_1 = \angle DKB_1 = 90°$; значит, прямоугольные треугольники A_1B_1K и DB_1K равны (по катету и острому углу), откуда $A_1K = DK$. Последнее равенство означает, что точки A_1 и D симметричны относительно прямой AC; следовательно, треугольники A_1AC и DAC симметричны относительно этой же прямой. Тогда $\angle ADC = \angle AA_1C = 90°$, что и требовалось доказать.

4. Нет.
Раскрасим треугольники и ячейки квадрата в черный и белый цвета так, как это показано на рисунке 4.

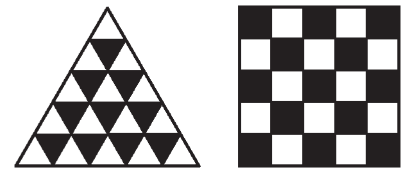
Рис. 4

Заметим, что из любого треугольника можно пройти в любой другой, причем в цепочке треугольников, образующих этот путь, каждые два соседних треугольника окрашены различно. То же верно и для клеток квадрата. Отсюда следует, что каждые два числа, записанные в треугольниках одного цвета, должны быть записаны и в клетках одного цвета. Но у нас имеется 15 белых треугольников, что больше как количества черных (13) клеток, так и количества белых (12) клеток. Поэтому числа в квадрате 5×5 расставить требуемым образом невозможно.

5. 6.
Если листки лежат в следующем порядке:

$$\boxed{0}\,\boxed{10}\,\boxed{1}\,\boxed{9}\,\boxed{2}\,\boxed{8}\,\boxed{3}\,\boxed{7}\,\boxed{4}\,\boxed{6}\,\boxed{5}$$

(для краткости на каждом листке указано число ложных утверждений левее него), то будет 6 верных утверждений. Покажем, что больше быть не может. Предположим, что два листка с верными утверждениями расположены рядом; тогда число листков с ложными утверждениями левее каждого из них одно и то же; это невозможно, так как на этих листках написаны разные числа. Значит, на двух подряд идущих листках одно из утверждений ложное. Поэтому всего листков с ложными утверждениями не менее пяти, так как в каждой из пяти первых пар есть ложное.

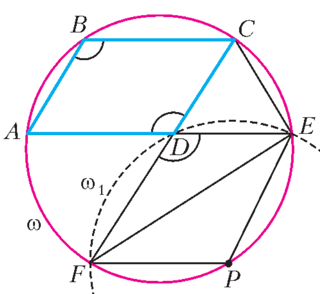

Рис. 5

6. Утверждение задачи – это частный случай задачи 5 для 10 класса.

7. Пусть $\angle ABC = \angle ADC = \angle EDF = \alpha$; по условию, $\alpha > 90°$ (рис.5). Так как $BC \parallel AD$, то $ABCE$ – равнобокая трапеция, откуда

$$\angle ECF = \angle BCE - \angle BCD = \alpha - (180° - \alpha) = 2\alpha - 180° .$$

Далее, пусть P – центр описанной окружности ω_1 треугольника DEF. Поскольку $\angle EDF > 90°$, точка P лежит внутри угла EDF, причем точки D и P лежат по разные стороны от прямой EF. В окружности ω_1 дуга EDF дополняет дугу величины 2α, на которую опирается угол EDF, до полной окружности, поэтому центральный угол EPF равен $360° - 2\alpha$. Получаем, что $\angle ECF + \angle EPF = (2\alpha - 180°) + (360° - 2\alpha) = 180°$; значит, четырехугольник $CEPF$ вписанный, т.е. точка P лежит на окружности ω, что и требовалось доказать.

8. 20.
Мы будем оценивать число S – сумму количеств ничьих всех 8 шахматистов. Эта сумма ровно в 2 раза больше числа ничьих в турнире (каждую ничью посчитали 2 раза – у обоих игроков). Докажем, что $S \le 41$ – тогда число ничейных партий в турнире не превосходит 20, так как оно целое. Это число и будет ответом, поскольку пример с 20 ничьими существует (рис.6; шахматисты обозначены буквами A, B, C, D, E, F, G и H).
Заметим сразу, что если два человека никому не проиграли,

	A	B	C	D	E	F	G	H
A		1/2	1/2	1	1/2	1	1/2	1/2
B	1/2		1	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2
C	1/2	0		1/2	1/2	1	1/2	1
D	0	1/2	1/2		1	1/2	1/2	1/2
E	1/2	1/2	1/2	0		1/2	1/2	1
F	0	1/2	0	1/2	1/2		1	1/2
G	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	0		1/2
H	1/2	1/2	0	1/2	0	1/2	1/2	

Рис. 6

то они сыграли друг с другом вничью и потому, по условию, имеют разное число очков; то же самое верно, если они ни у кого не выиграли. Отсюда сразу следует, что есть не больше одного человека с 7 ничьими и не больше двух человек с 6 ничьими (такой человек либо никому не проиграл, либо ни у кого не выиграл). Кроме того, людей с 5 ничьими, у которых обе результативные партии выиграны или обе проиграны, – тоже не больше чем по одному. Заметим, что все остальные игроки с 5 ничьими имеют по $3\frac{1}{2}$ очка.

Пусть есть человек X с 7 ничьими; тогда других игроков с 5 ничьими быть не может, ибо у них будет столько же очков, сколько у X, причем они с X сыграют вничью. Значит, людей с 5 ничьими в этом случае не больше 2, и $S \le 7 + 2\cdot 6 + 2\cdot 5 + 3\cdot 4 = 41$.

Пусть теперь человека с 7 ничьими нет. Оценим в этом случае количество игроков с 5 ничьими и $3\frac{1}{2}$ очками. Каждый из них должен был сыграть с каждым не вничью; однако у них всего по 2 результативных партии – значит, их не больше 3, а всего игроков с 5 ничьими не больше 3 + 2 = 5. Следовательно, и в этом случае $S \le 2\cdot 6 + 5\cdot 5 + 4 = 41$, что и требовалось.

10 класс

1. 0.

Так как $g(x) = (f(x))^3 - f(x) = f(x)(f(x)-1)(f(x)+1)$, то корнями многочлена $g(x)$ являются корни трехчленов $f(x)$, $f(x) - 1$ и $f(x) + 1$. Ясно, что любое число может быть корнем только одного из них.

Пусть y_0 – искомая ордината вершины. Предположим, что $y_0 \ne 0$. Будем считать, что старший коэффициент в $f(x)$ положителен (иначе заменим $f(x)$ на $-f(x)$, при этом y_0 заменится на $-y_0$). Предположим, что $y_0 > 0$; тогда $f(x) > 0$ и $f(x) + 1 > 0$ при всех x, значит, корни многочлена $g(x)$ являются корнями $f(x) - 1$, а их не больше двух. Если же $y_0 < 0$, то трехчлены $f(x)$ и $f(x) - 1$ имеют по два корня, значит, $g(x)$ имеет хотя бы 4 корня. Оба случая невозможны; значит, $y_0 = 0$.

Замечание. При $y_0 = 0$ $f(x)$ имеет один корень, $f(x) + 1$ – ни одного, а $f(x) - 1$ – два, поэтому $g(x)$ как раз имеет три корня.

2. Например, при $n = 101! - 101$ произведение первых $n + 100$ натуральных чисел равно произведению n подряд идущих чисел, начиная с 102 и заканчивая $n + 101$. Действительно, после сокращения равенство $1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n+100) = 102\cdot 103\cdot \ldots \cdot (n+101)$ принимает вид $1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 101 = n + 101$, что верно.

Замечание. Существует бесконечная серия подобных примеров.

3. Может.

Назовем набор из 17 настоящих монет *хорошим*, а набор из 12 настоящих и 5 фальшивых монет – *плохим*. Опишем возможные действия Кости.

Разобьем 17 монет из оставшегося у него набора на четыре группы A, B, C, D, содержащие 2, 3, 5 и 7 монет соответственно. При первом взвешивании на одну чашу весов положим группы A и B, а на другую – C. При втором взвешивании на одну чашу весов положим группы A и C, а на другую – D. Если в одном из взвешиваний весы не показали равновесие, то оставшийся у Кости набор плохой. Покажем, что если весы в обоих случаях показали равновесие, то оставшийся у Кости набор хороший. Пусть это не так, и количества фальшивых монет в группах A, B, C, D равны a, b, c, d соответственно. Тогда $a + b + c + d = 5$. Из равновесия при двух взвешиваниях следует $a + b = c$ и $a + c = d$, откуда $5 = a + b + c + d = a + b + (a + b) + (2a + b) = 4a + 3b$. В случаях $a = 0$ или $b = 0$ получаем $b = \frac{5}{3}$ или $a = \frac{5}{4}$ соответственно, что невозможно. Если же $a \ge 1$ и $b \ge 1$, то $4a + 3b \ge 7 > 5$. Противоречие.

4. Из симметрии относительно линии центров l имеем: $AB \parallel CD \perp l$, $OA = OB$, $\angle OAB = \angle OBA = \alpha$, $\angle OCD = \angle ODC = \beta$ (рис.7). По теореме об угле между касательной и хордой, $\angle OAC = \angle OBA = \alpha$, $\angle OCA = \angle ODC = \beta$. Так как $AB \parallel CD$, то $\angle OMC = \angle OAB = \alpha$; значит, и $\angle AOC = 180° - \alpha - \beta = \angle MOC$. Треугольники OAC и OMC равны по стороне (OC – общая) и двум углам, поэтому $OA = OM$ и $\angle AOC = \angle MOC = 90°$.

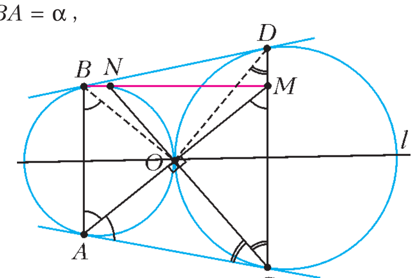

Рис. 7

В треугольнике ABM имеем $AO = OM = OB$; следовательно, он прямоугольный, т.е. $\angle ABM = 90°$. Так как $\angle AON = \angle MOC = 90°$, то AN – диаметр окружности ω_1, откуда $\angle ABN = 90°$. Итак, $\angle ABM = \angle ABN = 90°$, значит, точки B, M, N лежат на перпендикуляре к AB, проведенном через точку B.

5. Не может.

I решение. При m = 1, 2, 3 последняя цифра числа 2^m не равна 6. Предположим, что сумма цифр числа 2^m при некотором $m > 3$ равна 8, и оно оканчивается на 6. Число 2^m не может оканчиваться на 06 или на 26, так как в этом случае оно не делится на 4. Следовательно, оно оканчивается на 16 (иначе сумма цифр будет больше 8), и поэтому имеет десятичную запись $\underbrace{1000\ldots016}_{k\text{ цифр}}$. Тогда $2^m = 10^k + 16$, т.е. число $10^k + 16$ – степень двойки.

Но если $k \ge 5$, то $10^k + 16 = 2^4\left(2^{k-4}\cdot 5^k + 1\right)$, и в скобках получаем нечетный множитель, больший 1. Остается рассмотреть случаи $k = 2$, $k = 3$, $k = 4$: $10^2 + 16 = 4\cdot 29$, $10^3 + 16 = 8\cdot 127$, $10^4 + 16 = 32\cdot 313$. Таким образом, $10^k + 16$ не является степенью двойки ни при каком натуральном k, что и требовалось доказать.

II решение. Предположим противное, и пусть 2^m оканчивается на 6 и имеет сумму цифр, равную 8.

Заметим, что 2^1 оканчивается на 2, 2^2 оканчивается на 4, 2^3 оканчивается на 8, 2^4 оканчивается на 6, 2^5 оканчивается на 2. Далее последняя цифра степени двойки повторяется с периодом 4, поскольку последняя цифра числа 2^m определяется однозначно последней цифрой числа 2^{m-1}. Таким образом, 2^m оканчивается на 6 тогда и только тогда, когда m делится на 4.

Сумма цифр имеет тот же остаток при делении на 3, что и само число, поэтому 2^m должно иметь остаток 2 при делении на 3. Заметим, что 2^1 имеет остаток 2 при делении на 3, 2^2 имеет остаток 1 при делении на 3, 2^3 имеет остаток 2 при делении на 3, и далее остатки степени двойки повторяются с периодом 2. Таким образом, 2^m имеет остаток 2 при делении на 3 тогда и только тогда, когда m нечетно. Это противоречит тому, что m должно делиться на 4.

6. Решение будет опубликовано в «Задачнике «Кванта» (задача является частным случаем задачи М2125).

7. Решение будет опубликовано в «Задачнике «Кванта» (решение задачи следует из решения задачи М2124).

11 класс

1. 0.

Так как

$$g(x) = (f(x))^5 - f(x) = f(x)(f(x)-1)(f(x)+1)\left((f(x))^2+1\right),$$

то корнями нашего многочлена являются корни трехчленов $f(x)$, $f(x)-1$ и $f(x)+1$ (поскольку многочлен $(f(x))^2+1$ всюду положителен). Ясно, что любое число может быть корнем только одного из них.

Далее см. решение задачи 1 для 10 класса.

2. 98.

Пусть мы заполнили таблицу согласно условию, а клетка A свободна. Так как при постановке в нее любого значка должна получаться линия из одинаковых значков, то существует линия, содержащая ее, в которой все остальные клетки заполнены крестиками, и то же самое верно для ноликов (эти линии должны быть, естественно, строкой и столбцом). В частности, все свободные клетки стоят в разных строках и столбцах.

Предположим, что пустых клеток больше двух. Тогда для двух из них, скажем для A и B, направления линии крестиков совпадают (т.е. либо для обеих крестики стоят в их горизонталях, либо для обеих – в вертикалях; рис.8). Пусть крестики стоят в их столбцах, а нолики – в их строках; тогда в

A	o	o	?	o	o	o	o	o	o
×			×						
?	o	o	B	o	o	o	o	o	o
×			×						
×			×						
×			×						
×			×						
×			×						
×			×						
×			×						

Рис. 8

	o	o	o	o	o	o	o	o	o
×		×	×	×	×	×	×	×	×
×	o	*	*	*	*	*	*	*	*
×	o	*	*	*	*	*	*	*	*
×	o	*	*	*	*	*	*	*	*
×	o	*	*	*	*	*	*	*	*
×	o	*	*	*	*	*	*	*	*
×	o	*	*	*	*	*	*	*	*
×	o	*	*	*	*	*	*	*	*
×	o	*	*	*	*	*	*	*	*

Рис. 9

пересечении строки, содержащей A, со столбцом, содержащим B, должен стоять и крестик, и нолик (ибо это пересечение непусто); противоречие. Значит, пустых клеток не больше двух. Пример с двумя пустыми клетками приведен на рисунке 9 (вместо звездочек могут стоять любые значки).

3. *I решение*. Так как $\sin t \le t$ при $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$, то имеем

$$x\cos x = x\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) \le x\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \frac{\pi^2}{16} - \left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2 \le \frac{\pi^2}{16},$$

что и требовалось.

II решение. Перепишем доказываемое неравенство в виде $\sqrt{x\cos x} \le \frac{\pi}{4}$. По неравенству о средних имеем $\sqrt{x\cos x} \le \frac{x+\cos x}{2}$. В правой части стоит неубывающая функция (так как $(x+\cos x)' = 1-\sin x \ge 0$); значит,

$$x + \cos x \le \frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2},$$ откуда и следует требуемое.

4. Пусть A_0, B_0, C_0 – середины сторон BC, CA, AB соответственно (рис.10). Так как $OA_0 \perp BC$ и $B_0C_0 \parallel BC$, то A_0O – высота треугольника $A_0B_0C_0$. Аналогично, B_0O и C_0O – высоты треугольника $A_0B_0C_0$. Поэтому O является точкой пересечения высот треугольника $A_0B_0C_0$. Треугольник ABC подобен треугольнику $A_0B_0C_0$ с коэффициентом 2, поэтому $\overrightarrow{HA} = 2\overrightarrow{A_0O}$.

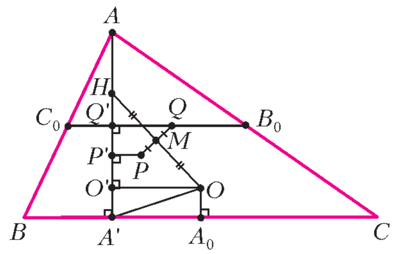

Рис. 10

Обозначим через P, M, Q, соответственно, центр описанной окружности треугольника HOA', середину отрезка HO и точку, симметричную точке P относительно прямой OH. Поскольку точка P равноудалена от точек H и O, точки P и Q лежат на серединном перпендикуляре к отрезку HO, следовательно, точки P и Q симметричны относительно M. Так как O и H также симметричны относительно M, получаем, что $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{PH}$.

Пусть O', P', Q' – проекции точек O, P, Q на высоту AA'. Проецируя равенство векторов, получаем, что

$\overrightarrow{O'Q'} = \overrightarrow{P'H} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A'H}$ (так как P' – середина $A'H$). Значит,

$\overrightarrow{A'Q'} = \overrightarrow{A'O'} + \overrightarrow{O'Q'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{A'H} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A'A}$. Это и означает, что Q' совпадает с серединой высоты AA', поэтому Q' и Q лежат на средней линии B_0C_0.

5. 8 прямых.

Пусть l_1, l_3, l_5 – прямые, на которых отмечены одна, три и пять точек соответственно, а A – единственная отмеченная точка на l_1. Тогда все остальные прямые проходят через эту точку – назовем эти прямые *меридианами*, или параллельны l_1 – назовем их *параллелями*. Заметим, что каждый меридиан пересекается с каждой параллелью, и все такие точки пересечения различны; более того, этими точками исчерпываются все точки пересечения, кроме A. Значит, на каждом меридиане отмечено поровну точек, и на каждой параллели –

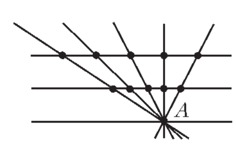

Рис. 11

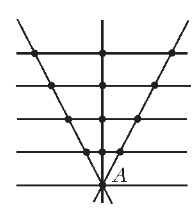

Рис. 12

тоже. Тогда из условия следует, что либо на каждом меридиане по три точки, а на каждой параллели – по 5 (а значит, есть 2 параллели и 5 меридианов; рис.11), либо наоборот (а значит, есть 4 параллели и 3 меридиана; рис.12). В обоих случаях получилось 8 прямых.

6. Поскольку треугольник ABD равнобедренный, получаем $\angle ADB = \angle ABD$. Так как четырехугольник $ABDK$ вписан, то $\angle AKB = \angle ADB$ и $\angle ABD = 180° - \angle AKD = \angle LKA$ (рис.13). Значит, в треугольнике BKL высота KA является биссектрисой, а следовательно, и медианой; тогда точки L и B симметричны относительно AC, поэтому отрезки CL и CB также

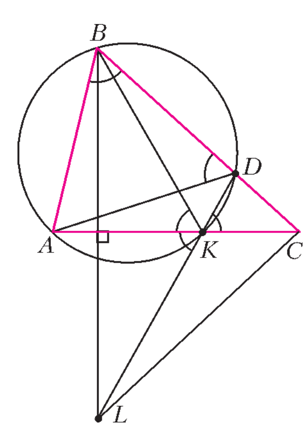

Рис. 13

симметричны. Значит, их длины равны.

7. Верно.

Обозначим через $\alpha_2(d)$ степень, с которой входит 2 в разложение числа d на простые множители.

Если среди чисел a, b и c есть одно или три нечетных числа, то при любом натуральном k число $a^k + b^k + c^k$ нечетно, т.е. можно положить $n = 1$. Все три числа четными быть не могут. Пусть теперь среди них ровно одно четное – скажем, a. Исследуем, чему может быть равно число $\alpha_2\left(b^k + c^k\right)$.

При четном k каждое из чисел b^k и c^k при делении на 4 дает остаток 1, поэтому $\alpha_2\left(b^k + c^k\right) = 1$. Пусть k нечетно. Тогда $b^k + c^k = (b+c)\left(b^{k-1} - b^{k-2}c + \ldots + c^{k-1}\right)$. Во второй скобке стоит сумма нечетного количества (k) нечетных слагаемых, т.е. нечетное число. Таким образом,

$\alpha_2\left(b^k + c^k\right) \le \alpha_2(b+c)$ для любого k.

Заметим теперь, что если $k > \alpha_2(b+c)$, то $\alpha_2\left(a^k\right) \ge k > \alpha_2(b+c) \ge \alpha_2\left(b^k + c^k\right)$. Значит, $\alpha_2\left(a^k + b^k + c^k\right) \le \alpha_2(b+c)$ при всех $k > \alpha_2(b+c)$. Тогда ясно, что можно выбрать $n > \alpha_2(b+c)$ так, что и при $k \le \alpha_2(b+c)$ число $a^k + b^k + c^k$ не будет делиться на 2^n, что и требовалось.

Замечание. Аналогично $\alpha_2(d)$ можно определить $\alpha_p(d)$ для любого простого p. Можно показать, что при любом нечетном простом p последовательность $\left\{\alpha_p\left(a^k + b^k + c^k\right)\right\}$ может оказаться неограниченной.

8. 580.

I решение. Рассмотрим расстановку, удовлетворяющую условию, и соединим каждые два соседних числа стрелкой от меньшего к большему. Так как общее количество стрелок нечетно, найдутся две подряд идущие стрелки, направленные в одну сторону: $a \to b \to c$. Значит, $b \le c - 20$, $a \le b - 20 \le c - 40$, поэтому $100 \le a + b \le 2c - 60$, откуда $c \ge 80$. Все числа, кроме c, можно разбить на 5 пар соседних чисел; значит, сумма всех чисел не меньше $80 + 5 \cdot 100 = 580$.

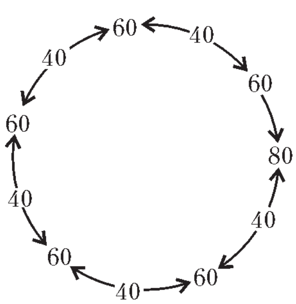

Рис. 14

Один из примеров расстановки, в которой эта оценка достигается, приведен на рисунке 14.

II решение. Приведем другое доказательство того, что сумма не меньше 580. Заметим, что в любой паре соседних чисел одно из них не меньше 60 (если большее из них меньше 60, то второе меньше 40, а их сумма меньше 100). Рассмотрим максимальное число c. Разобьем остальные числа на пары соседних (сумма в каждой паре не меньше 100, значит, сумма всех этих 10 чисел не меньше 500). Далее, в каждой паре отметим число, не меньшее 60; также отметим число c. Мы отметили 6 чисел из 11, значит, два из них – соседние. Тогда большее из них не меньше 60 + 20 = 80, поэтому и $c \ge 80$. Значит, сумма всех чисел не меньше 80 + 500 = 580.

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП XLIII ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО ФИЗИКЕ

7 класс

1. $v_{ср} = 10$ мм/ч. **2.** 13 часов 25 минут.

3. $V_п = \dfrac{\rho - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1} a^3 = 700$ см^3. **4.** $l = 1$ км.

8 класс

1. В 1,3 раза.

2. 1) $V = 0{,}51$ л или $V = 0{,}255$ л. 2) $\rho_i = 1{,}4$; 0,6; 0,2 г/см^3 или $\rho_i = 1{,}4$; 1,2; 0,8; 0,6 г/см^3.

3. 15,0 psi = 103,3 кПа.

4. 1) $m_0 \approx 227$ г. 2) -10 кДж $< Q <$ 70 кДж.

9 класс

1. $p_1 = 4{,}4$ кПа; $\beta_1 = \dfrac{16}{7}$. **2.** $h_в = 2\dfrac{7}{9}H$, $h_м = 3\dfrac{2}{9}H$.

3. $R_1 = 9$ Ом. **4.** $v_0 = 35$ м/с; $v = 20$ м/с.

10 класс

1. $v = 5$ м/с. **2.** $F = \dfrac{M(1+\mu) + 2m_2}{m_1 + m_2 + M} m_1 g$.

3. $h_в = 7\dfrac{37}{50}H$, $h_б = 10\dfrac{13}{50}H$.

4. $P_{\max} = P_0 \dfrac{(I_1 + I_2)^2}{4 I_1 I_2} = 25$ Вт. **5.** $C = -R$.

11 класс

1. 1) Это процессы *1–2*, *2–3*, *4–5* и *5–6*. 2) $\Delta U_{12} = 3pV$, $\Delta U_{23} = 9pV$, $\Delta U_{45} = -9pV$, $\Delta U_{56} = -3pV$. 3) Это процессы *3–4* и *6–1*.

2. $h \approx 280$ км. **3.** $L = l\sqrt{2}$. **4.** $Q = \dfrac{L\mathcal{E}^2}{8r^2}$.

5. Прямое и увеличенное в 2 раза изображение золотой рыбки карась видит на расстоянии $3R$.

журнал Квант ©

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

С.А.Дориченко, А.А.Егоров, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

Д.Н.Гришукова, В.В.Иванюк, А.Е.Пацхверия, М.В.Сумнина, В.М.Хлебникова

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:

119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»
Тел.: 930-56-48
E-mail: admin@kvant.info, math@kvant.info, phys@kvant.info
Сайт: kvant.info

Отпечатано в ОАО ордена Трудового Красного Знамени «Чеховский полиграфический комбинат»
142300 г.Чехов Московской области,
Сайт: www.chpk.ru E-mail: marketing@chpk.ru
Факс: 8(49672) 6-25-36, факс: 8(499) 270-73-00
Отдел продаж услуг многоканальный: 8(499) 270-73-59