Региональный этап XXXV Всероссийской олимпиады школьников по математике

С 2008/09 года Всероссийская олимпиада школьников проводится согласно новому Положению об олимпиадах, принятому в 2007 году. Региональный этап стал отборочным к участию в Заключительном этапе Всероссийской олимпиады для всех регионов страны. Олимпиада проводилась в январе по единым заданиям, подготовленным Методической комиссией по математике. Впервые региональный этап в данном формате проводился в Москве и Санкт-Петербурге. Среди задач олимпиады наиболее сложными оказались задача 8 в 9 классе и задача 4 в 11 классе.

ЗАДАЧИ

9 класс

Первый день

1. Гриб называется *плохим*, если в нем не менее 10 червей. В лукошке 90 плохих и 10 хороших грибов. Могут ли все грибы стать хорошими после того, как некоторые черви переползут из плохих грибов в хорошие?

А.Канель

2. Рациональные числа a и b удовлетворяют равенству

$$a^3b + ab^3 + 2a^2b^2 + 2a + 2b + 1 = 0 .$$

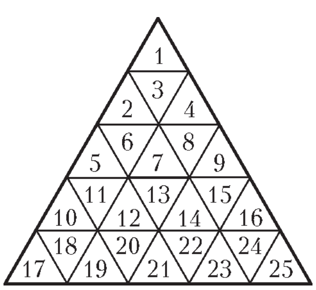
Докажите, что число $1 - ab$ является квадратом рационального числа.

Р.Женодаров

3. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1. Прямая, перпендикулярная стороне AC и проходящая через точку A_1, пересекает прямую B_1C_1 в точке D. Докажите, что угол ADC прямой.

Д.Скробот

4. На рисунке показан треугольник, разбитый на 25 меньших треугольников, занумерованных числами от 1 до 25. Можно ли эти же числа расставить в клетках квадрата 5×5 так, чтобы любые два числа, записанные в соседних треугольниках, были записаны и в соседних клетках квадрата? (Треугольники, так же, как и клетки квадрата, считаются соседними, если имеют общую сторону.)



А.Грибалко

Второй день

5. На 11 листках бумаги написаны 11 фраз (по одной на листке):

1) Левее этого листка нет листков с ложными утверждениями.

2) Ровно один листок левее этого содержит ложное утверждение.

3) Ровно 2 листка левее этого содержат ложные утверждения

…

11) Ровно 10 листков левее этого содержат ложные утверждения.

Листки в некотором порядке выложили в ряд, идущий слева направо. После этого некоторые из написанных утверждений стали верными, а некоторые – неверными. Каково наибольшее возможное число верных утверждений?

И.Рубанов

6. Натуральное число m таково, что сумма цифр в десятичной записи числа 8^m равна 8 .Может ли при этом последняя цифра числа 8^m быть равной 6?

В.Сендеров

7. Дан параллелограмм $ABCD$, в котором угол ABC тупой. Прямая AD пересекает второй раз окружность ω, описанную вокруг треугольника ABC, в точке E. Прямая CD пересекает второй раз окружность ω в точке F. Докажите, что центр описанной окружности треугольника DEF лежит на окружности ω.

Т.Емельянова

8. В шахматном турнире участвовали 8 шахматистов, причем каждый сыграл с каждым ровно по одной партии. Известно, что любые два шахматиста, сыгравшие между собой вничью, набрали в итоге разное число очков. Найдите наибольшее возможное число ничьих в этом турнире. За выигрыш партии шахматисту начисляется 1 очко, за ничью – $\frac{1}{2}$ очка, за поражение – 0.

С.Токарев

10 класс

Первый день

1. Квадратный трехчлен $f(x)$ таков, что многочлен $(f(x))^3 - f(x)$ имеет ровно три вещественных корня. Найдите ординату вершины графика этого трехчлена.

И.Богданов

2. Докажите, что найдется такое натуральное число $n > 1$, что произведение некоторых n последовательных натуральных чисел равно произведению некоторых $n + 100$ последовательных натуральных чисел.

В.Сендеров

3. У Кости было два набора по 17 монет: в одном наборе все монеты настоящие, а в другом наборе ровно 5 фальшивых. Все монеты выглядят одинаково; все настоящие монеты весят одинаково, все фальшивые тоже весят одинаково, но неизвестно, легче или тяжелее настоящих. Один из наборов Костя отдал другу, а впоследствии забыл, какой именно из двух наборов у него остался. Может ли Костя при помощи двух взвешиваний на чашечных весах без гирь выяснить, какой именно из двух наборов он отдал?

К.Кноп

4. Окружности ω_1 и ω_2 касаются внешним образом в точке O. Точки A и B на окружности ω_1 и точки C и D на окружности ω_2 таковы, что AC и BD – общие внешние касательные к окружностям. Прямая AO пересекает отрезок CD в точке M, а прямая CO пересекает вторично окружность ω_1 в точке N. Докажите, что точки B, M и N лежат на одной прямой.

П.Кожевников

Второй день

5. Натуральное число m таково, что сумма цифр в десятичной записи числа 2^m равна 8. Может ли при этом последняя цифра числа 2^m быть равной 6?

В.Сендеров

6. Вписанная в треугольник ABC окружность ω касается сторон BC, CA, AB в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. На продолжении отрезка AA_1 за точку A взята точка D такая, что $AD = AC_1$. Прямые DB_1 и DC_1 пересекают второй раз окружность ω в точках B_2 и C_2. Докажите, что B_2C_2 – диаметр окружности ω.

Р.Женодаров

7. Положительные числа $x_1, x_2, \ldots, x_{2009}$ удовлетворяют равенствам

$$x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 = x_2^2 - x_2x_3 + x_3^2 = x_3^2 - x_3x_4 + x_4^2 = \ldots$$
$$\ldots = x_{2008}^2 - x_{2008}x_{2009} + x_{2009}^2 = x_{2009}^2 - x_{2009}x_1 + x_1^2 .$$

Докажите, что числа $x_1, x_2, \ldots, x_{2009}$ равны.

В.Сендеров

8. См. задачу М2126 «Задачник «Кванта».

11 класс

Первый день

1. Квадратный трехчлен $f(x)$ таков, что многочлен $(f(x))^5 - f(x)$ имеет ровно три вещественных корня. Найдите ординату вершины графика этого трехчлена.

И.Богданов

2. В некоторых клетках таблицы 10×10 расставлены несколько крестиков и несколько ноликов. Известно, что нет линии (строки или столбца), полностью заполненной одинаковыми значками (крестиками или ноликами). Однако если в любую пустую клетку поставить любой значок, то это условие нарушится. Какое минимальное число значков может стоять в таблице?

И.Богданов

3. Докажите, что $x \cos x \le \dfrac{\pi^2}{16}$ при $0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$.

В.Сендеров

4. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC проведена высота AA' и отмечены точки H и O – точка пересечения высот и центр описанной окружности. Докажите, что точка, симметричная центру описанной окружности треугольника HOA' относительно прямой HO, лежит на средней линии треугольника ABC.

Д.Прокопенко

Второй день

5. На плоскости провели несколько прямых и отметили все их точки пересечения. Сколько прямых могло быть проведено, если на одной из проведенных прямых отмечена одна точка, на другой – три, а на третьей – пять? Найдите все возможные варианты и докажите, что других нет.

И.Богданов

6. Точка D на стороне BC остроугольного треугольника ABC такова, что $AB = AD$. Окружность, описанная около треугольника ABD, пересекает сторону AC в точках A и K. Прямая DK пересекает перпендикуляр, опущенный из B на AC, в точке L. Докажите, что $CL = BC$.

И.Богданов

7. Даны натуральные числа a, b, c, взаимно простые в совокупности. Верно ли, что обязательно существует такое натуральное n, что число $a^k + b^k + c^k$ не делится на 2^n ни при одном натуральном k?

В.Сендеров

8. По кругу стоят 11 натуральных чисел. Известно, что любые два соседних числа различаются хотя бы на 20, а сумма любых двух соседних чисел не меньше ста. Найдите минимальную возможную сумму всех чисел.

И.Богданов

Публикацию подготовили Н.Агаханов, И.Богданов, П.Кожевников, О.Подлипский, Д.Терёшин

Региональный этап XLIII Всероссийской олимпиады школьников по физике

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

7 класс

Задача 1. Две шкалы. Когда в доме включили отопление, температура в комнате стала медленно расти и за 45 минут увеличилась на 5 °С. Найдите, с какой средней скоростью (в мм/ч) поднимался верхний край столбика ртути (рис.1). Для удобства слева от шкалы термометра приложили линейку.

М.Замятнин

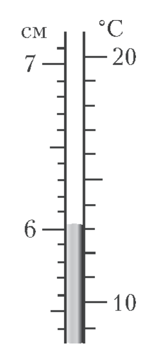


Рис. 1

Задача 2. Винни-Пух и точное время. Отправляясь навестить Кролика, Винни-Пух заметил, что его настенные часы стоят, показывая 10 часов 35 минут. Он их завел и пошел в гости. Войдя в дом к Кролику, первым делом Винни посмотрел на часы. На них было 10 часов 10 минут. Через 3 часа, после того как весь мед был съеден, медвежонок отправился в обратный путь. Когда он вернулся, его часы показывали 2 часа 5 минут. Винни немедленно перевел стрелки на точное время. Какое время он выставил на своих часах? Известно, что все путешествие заняло меньше шести часов.

И.Бушмин

Задача 3. Обманчивый куб. В мастерской изготовили из алюминия плотностью $\rho_1 = 2{,}70$ г/см^3 куб с ребром $a = 10$ см. Внутри куба осталась полость, которую потом залили свинцом плотностью $\rho_2 = 11{,}30$ г/см^3. В результате измерений неопытный лаборант подумал, что перед ним куб из латуни плотностью $\rho = 8{,}72$ г/см^3. Определите объем полости в кубе.

Фольклор

Задача 4. Стыдно! Честный мальчик Петя вышел из дома в школу. По дороге он нашел велосипед и, поскольку опаздывал, решил воспользоваться находкой и доехать на нем, подумав, что потом обязательно вернет велосипед на место. В результате вся дорога в школу заняла 10 минут. Возвращаясь обратно, он вспомнил о своем намерении только подъезжая к дому. Пете стало стыдно, и он вернулся к месту находки, оставил там велосипед и пешком дошел до дома. Таким образом, дорога из школы заняла у него 18 минут. Как далеко от дома лежал велосипед, если на нем Петя мчался со скоростью 15 км/ч?

И.Ерофеев

8 класс

Задача 1. Скорый поезд и электричка. Экспериментатор Глюк наблюдал за встречным движением скорого поезда и электрички. Оказалось, что каждый из поездов прошел мимо Глюка за одно и то же время $t_1 = 23$ с. А в это время друг Глюка теоретик Баг ехал в электричке и определил, что скорый поезд прошел мимо него за $t_2 = 13$ с. Во сколько раз скорый поезд длиннее электрички?

В.Слободянин

Задача 2. Определение плотности. Экспериментатор Глюк проводил исследования с телами равного объема. С помощью динамометра он удерживал каждое тело полностью погруженным в воду и обнаружил, что во всех опытах показания динамометра составляли либо $F_1 = 1$ Н, либо $F_2 = 2$ Н. Плотность самого тяжелого тела Глюк определил экспериментально: $\rho_m = 1{,}4$ г/см^3. 1) Определите объем V одного тела. 2) Найдите все возможные для описанного опыта плотности других тел.

Примечание. Плотность воды $\rho_0 = 1$ г/см^3, $g = 9{,}8$ Н/кг.

А.Сеитов

Задача 3. Что такое psi? Теоретику Багу подарили английский барометр, который измеряет давление в необычных для нас (и обычных для англичан) единицах psi (от англ. **p**ound-force per **s**quare **i**nch – давление, которое оказывает вес одного фунта на квадратный дюйм). Багу захотелось перевести показания 15,0 psi в паскали. К сожалению, у него не оказалось таблиц для перевода единиц измерения давления, но он обнаружил финансовый журнал, в котором нашел статью, посвященную стоимости золота в России и в Англии. Вот выдержка из нее:

	В России	В Англии
Слитки	522,0 тыс. руб./кг	5413 J/фунт
Проволока	10,07 тыс. руб./метр	5,845 J/дюйм

Золото можно было купить либо в слитках, либо в проволоке стандартного сечения. Помогите Багу понять, сколько паскалей все-таки показывает барометр, если реальная стоимость золота в России и в Англии одинакова, а по данным Центробанка фунт стерлингов J стоит 43 рубля 78 копеек. Принять $g = 9{,}8$ Н/кг.

М.Осин, И.Ерофеев

Задача 4. «Джоулеметр». Экспериментатор Глюк создал «джоулеметр». Прибор состоял из алюминиевого стаканчика, частично заполненного водой. Стаканчик был обернут пенопластом (для исключения теплообмена с окружающей средой). Через небольшое отверстие в пенопластовой крышке Глюк опустил в стакан термометр, позволяющий измерять температуру в диапазоне от $+10$ до $+90\,^\circ$C. Цена деления термометра $1\,^\circ$C. Масса стаканчика $m = 50$ г. Рядом со шкалой термометра Глюк поместил подвижную шкалу с ценой деления 1 кДж. Перед началом эксперимента он откалибровал «энергетическую» шкалу так, чтобы ее ноль совпал с начальной температурой воды в «джоулеметре». Затем экспериментатор поместил в прибор испытуемое тело (горячее или холодное) и после установления теплового равновесия определил по энергетической шкале, сколько джоулей отдало (получило) тело в результате теплообмена с прибором. 1) Сколько воды было в приборе, если одному делению шкалы термометра соответствует одно деление шкалы «джоулеметра»? 2) В каком диапазоне можно измерять количество теплоты, отданное или полученное исследуемым телом, если начальная температура «джоулеметра» была $+20\,^\circ$C? Удельная теплоемкость алюминия $c = 920$ Дж/(кг·°C), воды $c_0 = 4200$ Дж/(кг·°C).

М.Замятнин

9 класс

Задача 1. Табурет. Толщина сидения деревянного табурета «Лакк» равна толщине ножек. Основными стандартными показателями табуретов «Лакк» являются давление $p_0 = 2{,}8$ кПа, которое он оказывает на пол, стоя на ножках, и коэффициент $\beta_0 = 1{,}6$, равный отношению площади сидения к площади поверхности одной из боковых сторон. Экспериментатору Глюку привезли бракованный табурет: у него не хватает двух противоположных ножек (рис.2). Какими показателями p_1 и β_1 будет довольствоваться экспериментатор?

И.Ерофеев

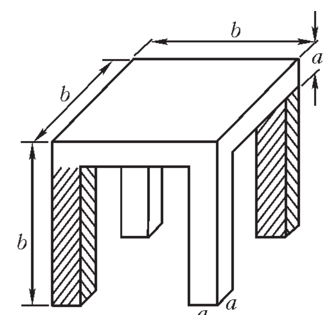


Рис. 2

Задача 2. Вода и масло. Два стакана высотой $4H$ заполнены до уровня $3H$ водой и маслом соответственно (рис.3). Плотность воды $\rho_0 = 10^3$ г/см^3, а плотность масла $\rho_м = 0{,}8 \cdot 10^3$ г/см^3. Сверху стаканы соединены заполненной водой тонкой трубочкой с краном. Открытые концы трубки погружены на $2H$ в каждую из жидкостей. Какие уровни установятся в стаканах, если кран открыть?

М.Замятнин

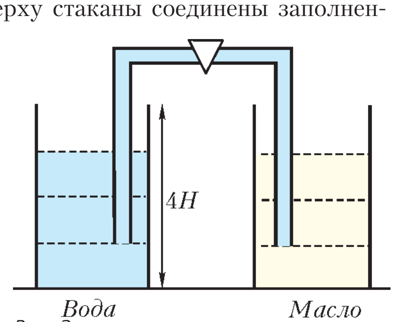


Рис. 3

Задача 3. Электронный ключ. В электрической цепи (рис.4) сопротивления резисторов $R_0 = 15$ Ом, $r = 16$ Ом. Параллельно резистору сопротивлением r подсоединен электронный ключ D (диод). Вычислите сопротивление резистора R_1,

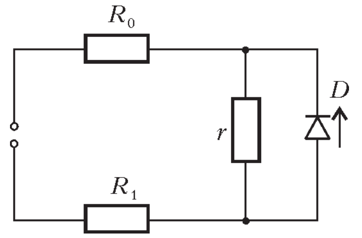


Рис. 4

если суммарная мощность, выделяемая на резисторах сопротивлениями R_1 и r, не зависит от полярности приложенного напряжения.

Примечание. Полупроводниковый диод – это электронное устройство, которое пропускает электрический ток только в одном направлении (по стрелке на рисунке). При этом сопротивление диода пренебрежимо мало.

Фольклор

Задача 4. Старый график. В архивах экспериментатора Глюка нашли график (рис.5) изменения со временем проекции на вертикальную ось скорости шарика, который был выпущен из пневматического пистолета вертикально вверх с балкона 17 этажа. Масштаб на оси скорости от времени выцвел, а на оси времени частично сохранился. Определите начальную скорость шарика и скорость, с которой шарик упал на землю. Ветра в день эксперимента не было.

Рис. 5

М.Замятнин

10 класс

Задача 1. Два против одного. Три одинаковые длинные «резинки», которые при растяжении подчиняются закону Гука, уложили параллельно друг другу и совместили концы, которые с одной стороны связали узлом. Два свободных конца взял в руки Вася, а третий свободный конец – Петя. Вася, держа концы резинок, бежит на север со скоростью 8 м/с, а Петя, держа свою резинку, бежит на восток со скоростью 9 м/с. В тот момент когда резинки выпрямились и совсем немного растянулись, они расположились в направлении восток–запад. С какой по модулю скоростью двигался в этот момент узел?

С.Варламов

Рис. 6

Задача 2. Динамометр. В установке (рис.6) масса динамометра M, а массы грузов m_1 и m_2. Коэффициент трения между динамометром и поверхностью стола μ. Участки AB и CD нити горизонтальны. Массами обеих нитей, блоков, а также пружины динамометра можно пренебречь. Найдите показания динамометра, если они постоянны.

И.Алескеров

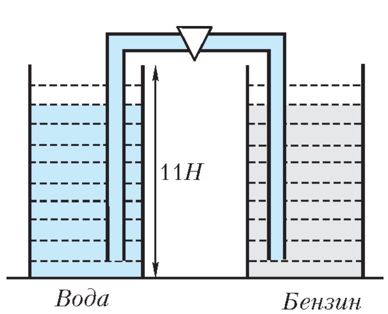


Рис. 7

Задача 3. Вода и бензин. Два стакана высотой $11H$ заполнены до уровня $9H$ водой и бензином соответственно (рис.7). Плотность воды $\rho_0 = 1$ г/см^3, а плотность бензина $\rho_б = 0{,}72$ г/см^3. Сверху стаканы соединены заполненной водой тонкой трубочкой с краном. Открытие концы трубки погружены на $8H$ в каждую из жидкостей. Какие уровни установятся в стаканах, если кран открыты?

М.Замятнин

Задача 4. В поисках максимума. Электрическая цепь (рис.8) подключена к сети постоянного напряжения. При изменении сопротивления R переменного резистора на нем выделяется мощность $P_0 = 16$ Вт при токах $I_1 = 1$ А и $I_2 = 4$ А. Определите наибольшую мощность P_{max}, которая может выделяться на этом резисторе.

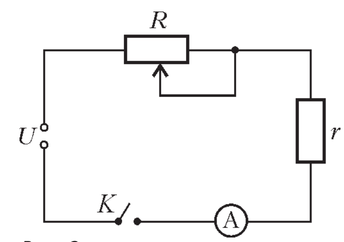


Рис. 8

Фольклор

Задача 5. Необычная теплоемкость. Идеальный одноатомный газ расширился в политропном процессе. При этом оказалось, что отношение совершенной газом работы к подведенному к нему количеству теплоты составило $\alpha = 2{,}5$. Вычислите молярную теплоемкость C газа в этом процесс.

Примечание. Политропным называется процесс, протекающий с постоянной теплоемкостью.

В.Слободянин

11 класс

Задача 1. Неплоский процесс. Над одноатомным идеальным газом производят сложный процесс, показанный на рисунке 9, который состоит из шести простых процессов. У точки *1* координаты p, V, T, а у точки *4* координаты $3p$, $3V$, $3T$. График каждого из простых процессов параллелен одной из координатных осей. 1) Среди простых процессов найдите все изотермические. 2) Определите в каждом из них изменение внутренней энергии газа. 3) Найдите все процессы, изменение внутренней энергии в которых $\Delta U = 0$.

И.Ерофеев, Г.Тарнопольский

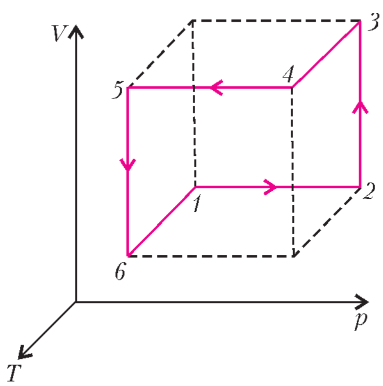


Рис. 9

Задача 2. Космическая станция. На большом экране в Центре управления полетами отображается траектория Международной космической станции (МКС) – след от пересечения поверхности Земли прямой, проведенной от центра Земли к станции (рис.10). Станция движется по круговой

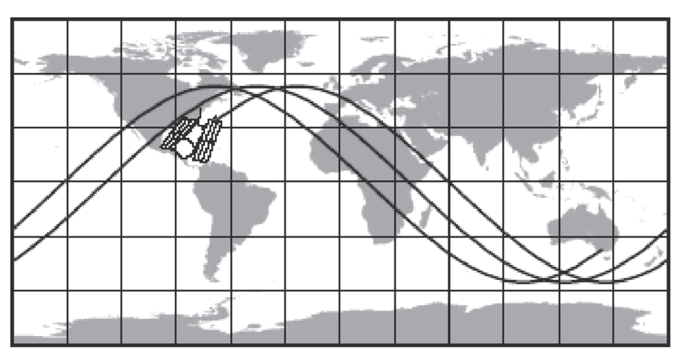


Рис. 10

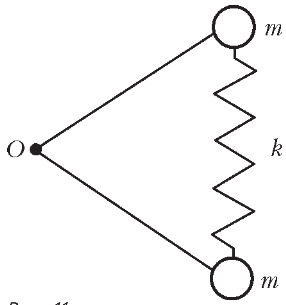


Рис. 11

орбите. Оцените с помощью данного рисунка высоту h космической станции над поверхностью Земли. Считайте, что радиус Земли R = 6380 км, ускорение свободного падения на поверхности Земли $g = 9{,}81$ м/с^2 .

Я.Калда

Задача 3. Колебания системы. Период малых колебаний системы (рис.11) около положения равновесия равен $T = 2\pi\sqrt{m/k}$, где m – масса каждого из шариков, а k – жесткость пружины. Соединение легких стержней шарнирное и закреплено в точке O. Найдите длину L пружины в нерастянутом состоянии.

Фольклор

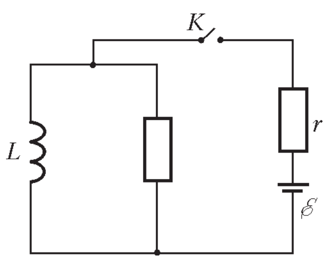


Рис. 12

Задача 4. Цепь с катушкой. Электрическая схема (рис.12) состоит из источника постоянного тока с ЭДС $\mathscr{E}$ и внутренним сопротивлением r, индуктивности L и сопротивления неизвестной величины. Ключ K в схеме сначала замыкают, а затем размыкают в тот момент, когда скорость изменения энергии, запасенной индуктивностью, достигает максимума. Какое количество теплоты выделится в схеме после размыкания ключа?

А.Шеронов

Задача 5. Интересное соседство. В речке поймали карася и посадили в шарообразный аквариум радиусом R, а рядом поставили точно такой же аквариум с золотой рыбкой (рис.13). Карасю такая соседка показалась необычной, и он начал с интересом разглядывать ее, плавая в центре аквариума. Заметив наблюдение, золотая рыбка тоже замерла в центре аквариума и стала вглядываться в своего соседа. 1) На каком расстоянии, с точки зрения карася, плавает золотая рыбка, если показатель преломления воды в аквариумах $n = 4/3$? 2) Во сколько раз видимый поперечный размер золотой рыбки отличается от ее истинного размера? 3) Прямое или перевернутое изображение соседки видит карась?

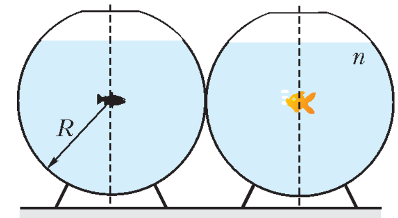


Рис. 13

Примечание. Считайте, что размеры рыбок много меньше R.

В.Слободянин

Публикацию подготовил В.Слободянин

ПРОГУЛКИ С ФИЗИКОЙ

Антибликовые очки и ЖК-дисплей

(Начало см. на 4-й странице обложки)

Блики – отражения света от различных поверхностей – часто мешают увидеть детали интересующего нас объекта. Неполяризованный, т.е. естественный, свет после отражения от плоскости превращается в частично поляризованный. Если угол падения луча близок к 90°, то плоскость поляризации отраженного луча параллельна плоскости, от которой свет отразился. Так, низкое солнце над рекой является источником множества бликов, получающихся в результате отражения от поверхности воды. Плоскость поляризации этих бликов, мешающих, например, рыболову рассмотреть поплавок, горизонтальна. Поляризационные, или антибликовые, очки избавляют нас от бликов, так как они пропускают свет только одной поляризации, как правило вертикальной. Такие очки, надетые на человека, стоящего по стойке «смирно», позволят ему избавиться от бликов, возникающих на горизонтальных поверхностях, например на водной глади. Наверное, поэтому поляризационные очки и продаются в магазинах «Рыболов-спортсмен».

Многие компании (например, *Polaroid*) изготовляют солнцезащитные очки, которые являются одновременно поляризационными. Это позволяет значительно снизить интенсивность неполяризованного света, не искажая его спектр.

Жидкокристаллические дисплеи компьютеров, мобильных телефонов, телевизоров и т.п. являются источниками линейно поляризованного света. В этом легко убедиться, если положить на любой ЖК-дисплей поляризационные очки или посмотреть через них на этот дисплей. Всегда можно подобрать такое положение очков, при котором закрытая ими часть дисплея будет хорошо различима (рис.1). Если после этого повернуть очки на 90°, то они перестанут пропускать свет дисплея (рис.2).


Рис. 1


Рис. 2

Но если через поляризационные очки посмотреть на ЖК-дисплей, то его яркость будет зависеть от того, насколько мы наклонили голову к левому или правому плечу. А если сквозь такие очки смотреть на экран вращающегося перед нами мобильного телефона, то он превращается в «мигалку». Проблемы возникают и у водителей, носящих поляризационные очки, так как некоторые приборы, например GPS-навигаторы, оснащены жидкокристаллическими дисплеями, и, взглянув на дисплей под неудачным углом, водитель может ничего не увидеть.

К.Богданов