Пределы изменения величины произведения abc могут определяться двумя обстоятельствами: либо график многочлена $f(t)=(t-a)(t-b)(t-c)$ «зацепится» за ось абсцисс точкой локального минимума или точкой локального максимума, либо одно из чисел a, b, c обратится в ноль. Рассмотрим эти два случая отдельно.

В первом случае можем, не ограничивая общности, считать, что $a = b$, $c = 1 - 2a$. Тогда исходное неравенство запишется в виде $\frac{2}{1-a}+\frac{1}{2a}\ge\frac{4}{1+a}+\frac{2}{2-2a}$, или после преобразований [4] как $9a^2-6a+1=(3a-1)^2\ge 0$. Последнее неравенство очевидно.

Во втором случае можем считать, что $c = 0$. Тогда исходное неравенство перепишется в виде $\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-b}\ge\frac{2}{1+a}+\frac{2}{1+b}$, причем $a + b = 1$. Для доказательства этого неравенства можно вновь применить ту же идею! После приведения к общему знаменателю получим симметрическое неравенство третьей степени, поэтому элементарный симметрический многочлен ab будет входить в него линейно. А значит, неравенство достаточно доказать в двух случаях: когда числа a и b равны (и равны одной второй), или когда одно из чисел равно нулю. В обоих случаях неравенство очевидно. Задача решена, причем почти без вычислений!

Упражнения

9. Докажите, что для любых неотрицательных чисел a, b, c выполняется неравенство

$$4\left(a^3+b^3+c^3+6abc\right)\ge(a+b+c)^3 .$$

10 (American Mathematical Monthly, задача E2284, 1971 г.). Докажите, что если a, b, c – неотрицательные числа и $x = b + c - a$, $y = c + a - b$, $z = a + b - c$, то

$$abc(xy+yz+xz)\ge xyz(ab+bc+ac) .$$

11 (П.Финслер, Г.Хадвигер). Пусть a, b, c, S – соответственно стороны и площадь треугольника. Докажите неравенство

$$a^2+b^2+c^2\ge 4S\sqrt{3}+(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 .$$

Теорема Безу [5]

Вернемся к ключевому примеру. Пришло время раскрыть секрет второго трюка. Напомню, что я «вытащил из рукава» многочлен $g(t)=(t-a)(t-a)(t+2a)$, а потом чудесным образом оказалось, что его график получается из графика многочлена $f(t)$ параллельным переносом. Должен признаться, что на самом деле я действовал в обратном порядке: сначала сделал параллельный перенос графика, а потом разложил соответствующий многочлен на множители. А помогла мне в этом следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть c – корень многочлена $F(t)$. Тогда найдется такой многочлен $G(t)$, что $F(t)=G(t)(t-c)$.*

Доказательство. Пусть $F(t)=a_0t^n+a_1t^{n-1}+\ldots+a_{n-1}t+a_n$ и $F(c)=0$. Тогда

$$F(t)=F(t)-F(c)=a_0t^n+a_1t^{n-1}+\ldots+a_{n-1}t+a_n-$$
$$-\left(a_0c^n+a_1c^{n-1}+\ldots+a_{n-1}c+a_n\right)=$$
$$=a_0\left(t^n-c^n\right)+a_1\left(t^{n-1}-c^{n-1}\right)+\ldots+a_{n-1}(t-c).$$

Правая часть этого равенства делится на $t - c$. Это следует из хорошо известного тождества

$$t^k-c^k=(t-c)\left(t^{k-1}+t^{k-2}c+\ldots+tc^{k-2}+c^k\right),$$

которое в старых книгах называется тождеством Безу.

С его помощью нетрудно найти и коэффициенты многочлена $G(t)$. Коэффициент при t^m равен $a_0c^{n-m-1}+a_1c^{n-m-2}+\ldots$ $\ldots+a_{n-m-2}c+a_{n-m-1}$. Этой формулой иногда удобно пользоваться, выполняя деление. Доказательство завершено.

Итак, как же был сделан второй трюк. Возьмем точку a, в которой многочлен $f(t)$ достигает локального максимума, и рассмотрим многочлен $g(t)=f(t)-f(a)$. Так как $g(a)=0$, по теореме Безу $g(t)=h(t)(t-a)$, где $h(t)$ – некоторый многочлен. Но a – точка локального максимума многочлена $g(t)$, поэтому в этой точке он не меняет знака, оставаясь вблизи нее неположительным. А выражение $(t-a)$ в этой точке меняет знак, значит, должен менять знак и многочлен $h(t)$, а тогда a – его корень. Следовательно, $h(t)=p(t)(t-a)$ и $g(t)=p(t)(t-a)^2$. Слева здесь стоит кубический многочлен, поэтому многочлен $p(t)$ – линейный, и тогда $g(t)=(\alpha t-\beta)(t-a)^2$. Сравнивая коэффициенты при старшем члене в левой и правой частях равенства, находим $\alpha=1$, а сравнение коэффициентов при t^2 дает $\beta=-2a$. Вот и весь секрет.

Та же теорема позволяет объяснить и третий трюк. Казалось бы, нам повезло, что многочлен четвертой степени разложился в произведение двух квадратных трехчленов. На самом деле никакого везения здесь нет. Авторы задачи придумали хорошее неравенство. А хорошее неравенство – это такое неравенство, которое при некоторых значениях переменных обращается в равенство, и потому не может быть усилено. Наше неравенство обращается в равенство при $x = y = -1$; $z = 2$. Поэтому не удивительно, что $a = -1$ – корень многочлена $9a^4+12a^3+3$. Рассуждая как в предыдущем абзаце, приходим к выводу, что $9a^4+12a^3+3=$ $=\left(\alpha a^2+\beta a+\gamma\right)(a+1)^2$. Числа α,β,γ найдем, сравнивая коэффициенты при a^0, a^4 и a^3 в левой и правой частях равенства.

Только что мы столкнулись еще с двумя совпадениями, над которыми советую подумать самостоятельно. Во-первых, оказывается, что хорошее неравенство доказать проще, чем плохое. А во-вторых, хорошее симметрическое неравенство обращается в равенство, когда значения по крайней мере двух переменных совпадают [6]. Во многих случаях это позволяет «угадывать» [7] корни многочленов.

Итак, все секреты раскрыты. Это позволяет говорить не о «трюках», а о шагах алгоритма, доказывающего неравенства. Кстати, этот алгоритм нетрудно реализовать на компьютере. Особенно удобны для этого пакеты символьных вычислений типа Maple, Mathematica, MATLAB. Выходит, что компьютер в состоянии решать олимпиадные задачи, причем «на доказательство». Вот еще один пример работы этого алгоритма.

Задача 3 (Московская олимпиада, 1982 г.). Пусть a, b, c – неотрицательные числа. Докажите, что

$$a^4+b^4+c^4-2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)+abc(a+b+c)\ge 0 .$$

---

[4] *Нам опять «повезло»: получился многочлен второй степени, а не пятой. Подумайте, почему.*

[5] *Этьен Безу (1730–1783) – французский математик, член Парижской академии наук.*

[6] *Строго говоря, это утверждение верно, если степень неравенства не слишком высока по сравнению с числом переменных.*

[7] *Кратные корни не обязательно угадывать. Для их поиска существует регулярная процедура, основанная на поиске наибольшего общего делителя многочлена и его производной с помощью алгоритма Евклида.*

Решение. Неравенство имеет четвертую степень, поэтому произведение abc может входить в разложение левой части по элементарным симметрическим многочленам только в первой степени. Если[8] коэффициент при abc отрицателен, сдвинем график многочлена $f(t)=(t-a)(t-b)(t-c)$ вниз, так, чтобы он зацепился точкой максимума за ось абсцисс. А если этот коэффициент положителен, то будем сдвигать этот график вверх до тех пор, пока не произойдет одно из двух событий: график зацепится за ось абсцисс точкой минимума или один из корней обратится в ноль. В результате мы получим более сильное неравенство. Значит, исходное неравенство достаточно доказать в двух частных случаях: когда два из трех чисел равны, и когда одно из чисел обращается в ноль.

В случае $b=c$ получим $a^4-4a^2b^2+ab^2(a+2b)\geq 0$. Разделив на b^4 и обозначив $t = a/b$, получим равносильное неравенство $t\left(t^3-3t+2\right)\geq 0$. Оно обращается в ноль при $t = 1$, значит, естественно предположить, что $t^3-3t+2 = (\alpha t+\beta)(t-1)^2$. Сравнивая старшие коэффициенты и свободные члены слева и справа, находим $\alpha = 1$ и $\beta = 2$. Теперь нетрудно проверить, что $t^3-3t+2=(t+2)(t-1)^2$. При положительных t это выражение неотрицательно.

В случае $c = 0$ доказываемое неравенство очевидно.

Упражнения

12 (Международная олимпиада, 1984 г.). Пусть a, b, c – неотрицательные действительные числа такие, что $a + b + c = 1$. Докажите, что $0\leq ab+ac+bc-2abc\leq 7/27$.

13 (М1834). Для действительных чисел x, y, z докажите неравенство $x^6+y^6+z^6+3x^2y^2z^2\geq 2\left(x^3y^3+x^3z^3+y^3z^3\right)$.

14. Пусть x, y, z – произвольные действительные числа, $p = x + y + z$, $q = xy + xz + yz$, $r = xyz$. Докажите неравенство $3(3r-pq)^2\leq 4\left(p^2-2q\right)\left(2q^2-3pr\right)$.

15. а) Пусть a, b и c – длины сторон произвольного треугольника. Докажите, что

$$a\left(b^2+c^2-a^2\right)+b\left(a^2+c^2-b^2\right)+c\left(a^2+b^2-c^2\right)\leq 3abc.$$

б) Пусть α,β,γ – углы треугольника. Докажите неравенство $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\leq 3/2$.

16. Пусть r_a,r_b,r_c – радиусы вневписанных окружностей некоторого треугольника, m_a,m_b,m_c – длины его медиан. Докажите неравенство $m_am_bm_c\geq r_ar_br_c$.

[8] *Мне не хочется разбираться, какой из двух случаев на самом деле имеет место. Проще разобрать оба.*

17. Пусть $A=\sin\alpha\sin\beta+\sin\beta\sin\gamma+\sin\alpha\sin\gamma$. Докажите, что

а) $A\leq 9/4$, если α,β,γ – углы произвольного треугольника;

б) $A > 1$, если α,β,γ – углы остроугольного треугольника;

в) $A\leq\frac{1+2\sqrt{2}}{2}$, если α,β,γ – углы неостроугольного треугольника.

18 (Московская олимпиада, 1997 г.). Положительные числа a, b, c таковы, что $abc = 1$. Докажите, что

$$\frac{1}{1+a+b}+\frac{1}{1+a+c}+\frac{1}{1+b+c}\leq 1.$$

19. Пусть r и R – радиусы вписанной и описанной окружностей треугольника, p – его полупериметр. Докажите неравенство $5R-r\geq\sqrt{3}p$.

20. Сумма положительных чисел x, y, z равна $\frac{\pi}{2}$. Докажите, что

$$\cos x+\cos y+\cos z\geq 1+\sin x+\sin y+\sin z.$$

21. Действительные числа x, y, z удовлетворяют условиям $x+y+z=0$, $x^2+y^2+z^2=1$. Найдите наибольшее значение суммы $x^3+y^3+z^3$.

22 (олимпиада США, 2001 г.). Неотрицательные числа a, b, c удовлетворяют условию $a^2+b^2+c^2+abc=4$. Докажите, что $0\leq ab+bc+ac-abc\leq 2$.

23 (М1364). Пусть $a + b + c = 1$, $a\geq 0$, $b\geq 0$, $c\geq 0$. Докажите неравенство

$$a^3+b^3+c^3+abcd\geq\min\left\{\frac{1}{4},\frac{1}{9}+\frac{d}{27}\right\}.$$

24. Пусть a, b, c – неотрицательные числа. Докажите, что

$$a^4+b^4+c^4-2\left(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2\right)+3(abc)^{4/3}\geq 0.$$

25. Правильный треугольник ABC вписан в окружность единичного радиуса. Точка X лежит на этой окружности.

а) Какое наибольшее значение может иметь произведение расстояний $AX\cdot BX\cdot CX$?

б) Найдите наибольшее и наименьшее значения суммы $AX + BX + CX$.

26 (Всесоюзная олимпиада, 1980 г.). Пусть длины ребер прямоугольного параллелепипеда равны a, b и c сантиметров ($a < b < c$), а $p = 4(a + b + c)$, $s = 2(ab + bc + ac)$ и $d=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ – соответственно его периметр, площадь поверхности и длина диагонали. Докажите, что

$$a<\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}p-\sqrt{d^2-\frac{1}{2}s}\right),\quad c>\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}p+\sqrt{d^2-\frac{1}{2}s}\right).$$

Вневписанная окружность

(Начало см. на с. 34)

Список литературы

1. Р.К.Гордин. *Геометрия. Планиметрия*. Задачник для 7 – 9 классов. – М.: МЦНМО, 2004.
2. И.А.Кушнир. *Триумф школьной геометрии. Учебное пособие для 7 – 11 классов*. – Киев: Наш час, 2005.
3. Л.М.Лоповок. *Факультативные задания по геометрии для 7 – 11 классов*. – Киев: Радянская школа, 1990.
4. *Математические турниры имени А.П.Савина* / Сост. А.В. Спивак, С.И. Токарев: в 2 ч. – М.: Бюро Квантум, 2003 и 2006.
5. *Московские математические регаты* / Сост. А.Д.Блинков, Е.С.Горская, В.М.Гуровиц. – М.: МЦНМО, 2007.
6. Я.П.Понарин. *Элементарная геометрия*: в 2 т. – М.: МЦНМО, 2004 и 2006.
7. В.В.Прасолов. *Задачи по планиметрии*: в 2 ч. – М.: Наука, 1995.
8. В.В.Произволов. *Задачи на вырост*. – М.: Бюро Квантум, 2003.
9. В.Ю.Протасов. *Касающиеся окружности: от Тебо до Фейербаха*. «Квант», №4, 2008.
10. И.Ф.Шарыгин, Р.К.Гордин. *Сборник задач по геометрии. 5000 задач с ответами*. – М.: Астрель, 2001.

Список веб-ресурсов

1. *www.problems.ru* – база задач по математике.
2. *www.geometry.ru* – всероссийская олимпиада по геометрии имени И.Ф.Шарыгина.
3. *olympiads.mccme.ru/ustn* – устные геометрические олимпиады.

Авторы благодарны П.А.Кожевникову и В.Ю.Протасову за ценные замечания по тексту и Е.С.Горской за выполнение чертежей.

«Подводные камни» силы Архимеда

М.РОМАШКА

Закон Архимеда – один из первых в истории человечества физических законов, имеющих четкую формулировку, дожившую до наших дней без изменений. Словесно закон Архимеда обычно формулируют так: *на тело, погруженное в жидкость, действует выталкивающая сила, равная по модулю весу вытесненной им жидкости.* Математически он выражается простой формулой

$$F_А = \rho_ж g V , \qquad (*)$$

где $F_А$ – сила Архимеда, V – объем погруженной части тела, $\rho_ж$ – плотность жидкости, g – ускорение свободного падения. Произведение $\rho_ж V$ равно массе $m_ж$ вытесненной жидкости, а $\rho_ж g V = m_ж g$ – это вес вытесненной жидкости (жидкости, на место которой помещено тело).

Однако за этой, простой на первый взгляд, формулировкой скрывается несколько «подводных камней». В ней не сказано, например, будет ли выполняться закон Архимеда, если тело движется в жидкости или если весь сосуд с жидкостью движется относительно земли. В этой статье мы обсудим некоторые особенности силы Архимеда и решим несколько интересных задач.

Для начала – немного теории. По сути, сила Архимеда (выталкивающая сила) – это равнодействующая сил давления жидкости на погруженное в нее тело (рис.1). Она обусловлена разностью давлений жидкости на разной глубине. Поэтому формулу (*), выражающую закон Архимеда, легко доказать. В большинстве учебников приводится ее вывод для случая, когда погруженное тело имеет форму

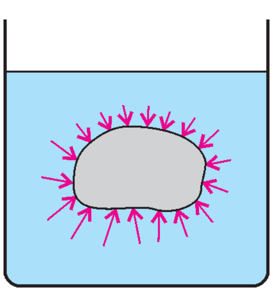

Рис. 1

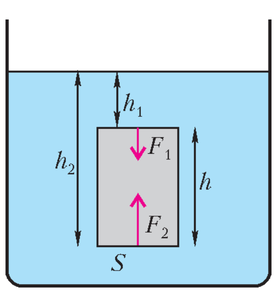

Рис. 2

параллелепипеда, или цилиндра, или тела с вертикальными стенками и произвольной формой основания. Напомним этот вывод.

Представим себе, что твердый цилиндр погрузили в жидкость и удерживают в ней (рис.2). На боковую поверхность цилиндра действуют силы давления со стороны жидкости, но их равнодействующая равна нулю, так как цилиндр симметричен. Рассмотрим силы давления, действующие на верхнее и нижнее основания цилиндра:

$$F_1 = p_1 S , \quad F_2 = p_2 S ,$$

где S – площадь основания цилиндра, $p_1 = \rho_ж g h_1$ и $p_2 = \rho_ж g h_2$ – давления в жидкости на уровне верхнего и нижнего основания соответственно, $\rho_ж$ – плотность жидкости. Атмосферное давление не учитываем, поскольку оно, по закону Паскаля, передается на верхнее и нижнее основания одинаково. Имеем

$$F_1 = \rho_ж g h_1 S , \quad F_2 = \rho_ж g h_2 S .$$

Так как $h_2 > h_1$, то $F_2 > F_1$. Равнодействующая этих сил направлена в сторону большей из них, т.е. F_2, и равна их разности:

$$F = F_2 - F_1 = \rho_ж g h_2 S - \rho_ж g h_1 S = $$

$$= \rho_ж g S \left(h_2 - h_1\right) = \rho_ж g S h = \rho_ж g V .$$

Вот мы и получили формулу (*).

Впрочем, существует более простой, красивый и универсальный способ вычисления силы Архимеда, применимый для тела любой формы. Пусть имеется сосуд с жидкостью, и мы хотим поместить в этот сосуд тело сложной формы. Выделим мысленно объем жидкости V, на место которого мы

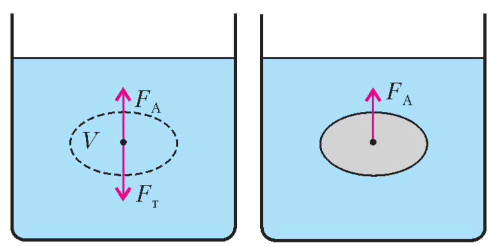

Рис. 3 *а)* *б)*

затем поместим тело (рис.3,*а*). Так как этот объем покоится (находится в равновесии), то сила тяжести, действующая на него, равна силе Архимеда: $F_т = F_А$. Силу тяжести мы вычислим легко: $F_т = m_ж g = \rho_ж g V$, значит, $F_А = \rho_ж g V$. Теперь представим, что мы убрали объем жидкости V, а на его место поместили тело (рис.3,*б*). Давление в каждой точке на границе тела не изменилось. Поэтому равнодействующая сил давления жидкости на поверхность, ограничивающую тело, не изменилась и осталась равной

$$F_А = \rho_ж g V .$$

Эта формула справедлива для тела любой формы, включая и те случаи, когда тело плавает на поверхности жидкости и погружено в жидкость лишь частично. В последнем случае V – это объем той части тела, которая находится ниже уровня жидкости.

Однако если часть поверхности тела плотно прилегает к стенке или дну сосуда так, что между ними нет прослойки жидкости, то закон Архимеда неприменим. Иллюстрацией к этому служит опыт, когда одну грань деревянного кубика натирают парафином и плотно приставляют ко дну сосуда, а затем осторожно наливают в сосуд воду (рис.4). Кубик не всплывает, так как на его нижнее основание сила давления воды не действует, а сила, действующая на верхнее основание, лишь прижимает кубик ко дну.

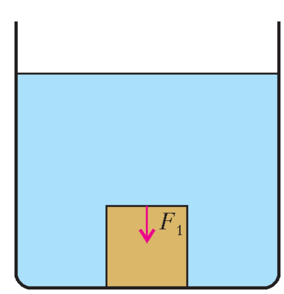

Рис. 4

Заметим, что закон Архимеда справедлив также и для тела, помещенного в газ. Сила Архимеда – это та сила, благодаря которой плавают корабли и поднимаются в воздух воздушные шары и аэростаты.

Теперь решим несколько задач.

Задача 1. *В озере плавает льдина. Плотность воды* $\rho_в = 1000$ *кг/м*^{3}, *а плотность льда* $\rho_л = 900$ *кг/м*^{3}. *Докажите, что 9/10 объема льдины находится под водой. Изменится ли уровень воды в озере, если льдина растает?*

Решение. Сила тяжести, действующая на льдину, уравновешивается силой Архимеда, поскольку льдина плавает. Обозначим весь объем льдины через V, а объем подводной части льдины – через V_1. Тогда $F_т = mg = \rho_л gV$, а $F_А = \rho_в g V_1$. Приравняем эти силы друг другу и выразим из полученного равенства нужное нам отношение V_1/V:

$$\rho_л gV = \rho_в gV_1, \text{ и } \frac{V_1}{V} = \frac{\rho_л}{\rho_в} = 0{,}9,$$

что и требовалось доказать.

Теперь ответим на второй вопрос задачи. Рассмотрим полный объем содержимого озера ниже начального уровня воды. В этот объем входит и подводная часть льдины объемом V_1. Когда льдина растает, объем V_1 будет вычтен из полного объема, но зато добавится объем воды, образовавшейся при таянии льдины. Обозначим объем этой воды через V_2 и сравним объемы V_1 и V_2. Пусть m – масса льдины. Тогда

$$V_2 = \frac{m}{\rho_в}.$$

Массу можно связать с объемом погруженной части льдины, приравняв силу тяжести силе Архимеда:

$$mg = F_А = \rho_в gV_1, \text{ откуда } m = \rho_в V_1.$$

Подставляя это в формулу для V_2, получаем

$$V_2 = \frac{\rho_в V_1}{\rho_в}, \text{ т.е. } V_2 = V_1.$$

Мы видим, что объем воды, образовавшейся при таянии льдины, равен объему подводной части льдины до таяния. Можно представить, что при таянии льдина «сжалась» (ведь плотность воды больше плотности льда) и образовавшаяся вода сосредоточилась в объеме погруженной части льдины до таяния. Поэтому уровень воды в озере не изменился.

Ответ на второй вопрос можно было получить и более простым и универсальным способом – через давление. Сила Архимеда, как мы знаем, связана с давлением жидкости, и при решении задач с плавающими телами часто есть выбор: пользоваться законом Архимеда или формулой для гидростатического давления. В этой задаче второе оказывается даже проще. Будем рассуждать так. Когда льдина растаяла, полная масса озера не изменилась, следовательно, вес содержимого озера также не изменился. А это значит, что давление воды на дно озера в каждой точке дна не изменилось. Пусть уровень воды в озере, отсчитываемый от какой-то точки дна (от какой – не важно), равен h, а гидростатическое давление в этой точке равно p. По формуле для гидростатического давления,

$$p = \rho gh,$$

где ρ – плотность воды. Ответ очевиден: если p не изменилось, то и h не изменилось.

Задача 2. *В цилиндрическую кастрюлю радиусом* $r = 10$ *см налита вода до уровня* $h = 15$ *см. В кастрюлю бросили губку (кусок поролона) массой* $m = 60$ *г. Губка впитала в себя часть воды, но продолжала плавать на поверхности. Найдите установившийся уровень воды в кастрюле. Плотность воды* $\rho = 1000$ *кг/м*^{3}.

Решение. Мы не знаем, сколько воды впитала губка и на сколько при этом изменился ее объем. Можно обозначить объем впитавшейся воды через V и решать задачу, причем в ходе решения этот неизвестный объем сократится. Однако можно пойти более простым путем и решать задачу через давление.

Давление на дно кастрюли, по определению, равно

$$p = \frac{F}{S},$$

где F – вес содержимого кастрюли, S – площадь ее дна. Вес содержимого, после того как в кастрюлю бросили губку, стал равен $(m_в + m)g$, где $m_в$ – общая масса воды в кастрюле. Найдем эту массу: $m_в = \rho V = \rho Sh$. Таким образом,

$$F = (m_в + m)g = (\rho Sh + m)g.$$

Отсюда получим, что давление после бросания губки стало

$$p = \frac{(\rho Sh + m)g}{S} = \rho gh + \frac{mg}{S}.$$

Осталось выразить S через радиус r, и давление найдено:

$$p = \rho gh + \frac{mg}{\pi r^2}.$$

С другой стороны, по формуле для гидростатического давления,

$$p = \rho gh_1,$$

где h_1 – новый установившийся уровень воды в кастрюле. Приравнивая два полученных выражения для p, имеем

$$\rho gh_1 = \rho gh + \frac{mg}{\pi r^2},$$

откуда получаем ответ:

$$h_1 = h + \frac{m}{\rho \pi r^2} = 15{,}3 \text{ см}.$$

Задача 3. *На рисунке 5 изображен проект «вечного двигателя». Цепь с поплавками проходит через сосуд с водой. На поплавки в сосуде действует сила Архимеда, которая, по задумке автора, должна вечно вращать цепь в направлении, показанном стрелкой. В чем ошибка автора проекта?*

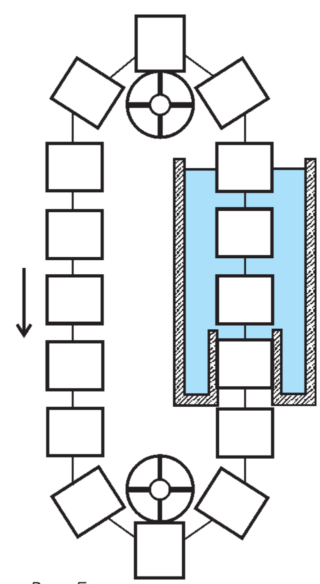

Рис. 5

Решение. На самый нижний из находящихся в сосуде с водой поплавков действует сила давления воды сверху. Она будет больше всех сил Архимеда вместе, действующих на погруженные в воду поплавки (сделайте расчет и убедитесь в этом). Поэтому на самом деле цепь будет вращаться не в том направлении, которое показано стрелкой, а в противоположном, и вода быстро выльется из сосуда. А чтобы снова налить воду в сосуд, нужно совершить работу, т.е. затратить энергию. Поэтому «вечный двигатель» не получится.

Задача 4. *На рисунке 6 представлен еще один проект «вечного двигателя». В стенку сосуда с водой встроен барабан, который может вращаться на оси. Сила Архимеда будет вечно вращать его по часовой стрелке. В чем ошибка автора этого проекта?*

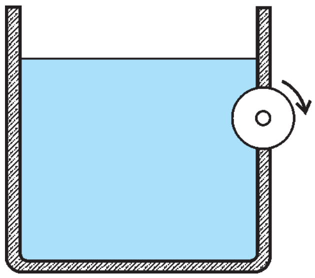

Рис. 6

Решение. Во-первых, закон Архимеда и формула (∗) здесь неприменимы, поскольку барабан не погружен в воду полностью и не плавает. На барабан, конечно, действует некоторая сила со стороны воды, но простое рассуждение показывает, что линия действия этой силы проходит через ось барабана. В таком случае ее плечо равно нулю, а значит, и ее момент равен нулю. Действительно, сила давления жидкости перпендикулярна поверхности. На каждый маленький участок барабана действует сила, перпендикулярная поверхности. Линия действия каждой такой силы проходит через ось барабана, поэтому момент силы равен нулю. Значит, момент равнодействующей всех этих сил тоже равен нулю. Кстати, равнодействующая всех этих сил направлена не вертикально, а под некоторым углом к вертикали (объясните, почему).

Мы столкнулись здесь с одним из «подводных камней» силы Архимеда: если тело погружено в жидкость не полностью (имеется непогруженная часть или поверхность), то формула (∗) может оказаться неприменимой. Эти случаи требуют особого внимания. Чтобы понять, применима формула (∗) или нет, можно мысленно проделать тот универсальный вывод этой формулы, который мы приводили выше. Если вывод проходит – значит, формула справедлива.

Задача 5. *Бревно имеет диаметр $d = 20$ см. Часть бревна длиной $H = 2$ м вертикально опустили в воду (рис.7). Разделим погруженную часть бревна условно на две части: верхнюю и нижнюю длиной $h = 1$ м. С какой силой верхняя часть действует на нижнюю? Плотность воды $\rho_в = 1000$ кг/м^3, плотность бревна $\rho_б = 680$ кг/м^3. Атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па.*

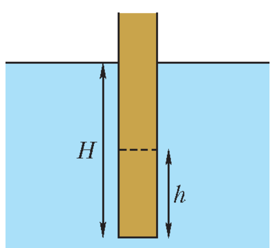

Рис. 7

Решение. Первое, что приходит в голову, это применить условие равновесия нижней части бревна. Для этого найдем соответствующие силу тяжести и силу Архимеда и посмотрим, какой силы не хватает для равновесия. Однако, эта задача – с ловушкой. Здесь нельзя применять закон Архимеда и формулу (∗). Это как раз тот случай, когда тело погружено в жидкость неполностью.

Сила Архимеда обусловлена разностью давлений воды на разной глубине, но на верхний конец нижней части бревна вода не действует, а действует только на нижний конец бревна. Поэтому действующая сила – это сила полного давления воды, которое равно сумме гидростатического давления воды и атмосферного давления. Таким образом, на нижнюю часть бревна действуют три силы: сила тяжести, сила полного давления воды и сила F со стороны верхней части бревна. Записывая условие равновесия нижней части бревна (подробные выкладки проделайте сами, мы здесь для краткости не будем их писать) и выражая нужную нам силу F, получим ответ:

$$F = \left(\left(\rho_в H - \rho_б h\right) g + p_0\right) \frac{\pi d^2}{4} = 3544 \text{ Н}.$$

Задача 6. *Тело объемом $V = 2$ дм^3 из материала плотностью $\rho = 900$ кг/м^3 плавает на границе раздела двух жидкостей с плотностями $\rho_1 = 800$ кг/м^3 и $\rho_2 = 1000$ кг/м^3 (рис.8,а). Найдите объемы частей тела, находящихся выше и ниже границы раздела. Можно ли в этой задаче применять формулу (∗)?*

Решение. Легко показать, что в этой задаче закон Архимеда и формулу (∗) применять можно. Для этого выделим мысленно объем на границе раздела двух жидкостей, в котором в дальнейшем будет плавать тело (рис.8,*б*).

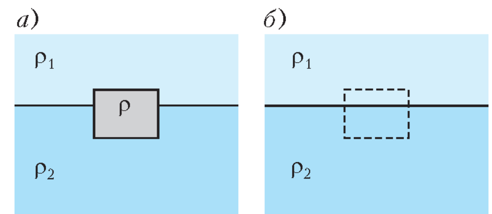

Рис. 8

Сила тяжести, действующая на выделенный объем, уравновешивается силой Архимеда. Если жидкость из выделенного объема заменить реальным телом, то давление в каждой точке на границе выделенного объема не изменится. Следовательно, сила Архимеда тоже не изменится. Это означает, что справедлива формула (∗).

Пусть объем части тела, находящейся в верхней жидкости, равен V_1, а в нижней – V_2. Сила Архимеда равна

$$F_А = \rho_1 g V_1 + \rho_2 g V_2,$$

а сила тяжести равна

$$F_т = mg = \rho g V.$$

Приравнивая эти силы, получаем

$$\rho_1 g V_1 + \rho_2 g V_2 = \rho g V.$$

С другой стороны,

$$V = V_1 + V_2.$$

Имеем систему двух уравнений с двумя неизвестными V_1 и V_2. Решим ее методом подстановки. Из второго уравнения выразим объем нижней части тела: $V_2 = V - V_1$ и подставим в первое уравнение. Получим

$$\rho_1 g V_1 + \rho_2 g \left(V - V_1\right) = \rho g V.$$

Отсюда найдем объем V_1 верхней части тела:

$$V_1 = V \frac{\rho - \rho_2}{\rho_1 - \rho_2} = 1 \text{ дм}^3.$$

Зная V_1, легко найти и V_2:

$$V_2 = V \frac{\rho_1 - \rho}{\rho_1 - \rho_2} = 1 \text{ дм}^3.$$

Отметим, что если положить $\rho_1 = 0$, то получается частный случай, когда тело плавает в одной жидкости, а сверху находится воздух, плотностью которого можно пренебречь, или вакуум. Так мы заодно доказали справедливость формулы (∗) для случая плавания тела на поверхности жидкости.

В следующей задаче рассматривается случай, когда жидкость вместе с погруженным в нее телом движется относительно земли с ускорением.

Задача 7. *К дну сосуда с жидкостью плотностью $\rho_ж$ за нить привязан поплавок объемом V, плотность которого $\rho_п$ ($\rho_п < \rho_ж$), полностью погруженный в жидкость. На какой угол отклонится нить от вертикали, если сосуд будет двигаться*

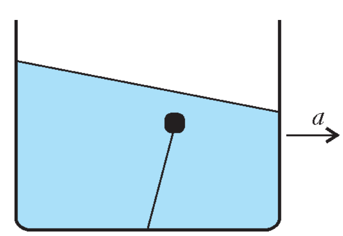

Рис. 9

с постоянным ускорением a в горизонтальном направлении (рис.9)? Чему будет равна сила натяжения нити?

Решение. На первый взгляд может показаться, что все элементарно: перейдем в систему отсчета, связанную с сосудом, и все будет происходить так же, как в неподвижном сосуде. Но тогда почему нить должна отклониться от вертикали? Дело в том, что система отсчета, связанная с сосудом, неинерциальная (она движется относительно земли с ускорением), поэтому в ней не выполняется второй закон Ньютона. Нужно производить расчет в системе отсчета, связанной с землей. Но это еще не все «подводные камни». Поверхность движущейся жидкости (см. рис.9) не горизонтальна, а это подсказывает нам, что распределение давлений в жидкости будет уже не таким, как в покоящейся жидкости. Поэтому силу, действующую на поплавок со стороны жидкости, нельзя искать по формуле ($*$). Нужно найти другую, обобщенную формулу для силы Архимеда, годящуюся в случае ускоренно движущейся жидкости.

Выведем эту обобщенную формулу с помощью того же универсального способа, которым мы выводили формулу ($*$). Пусть имеется сосуд с жидкостью, и мы хотим поместить в этот сосуд тело сложной формы. Выделим мысленно объем жидкости V, на место которого мы затем поместим тело (рис.10,*а*). Запишем второй закон Ньютона для выделенного участка жидкости:

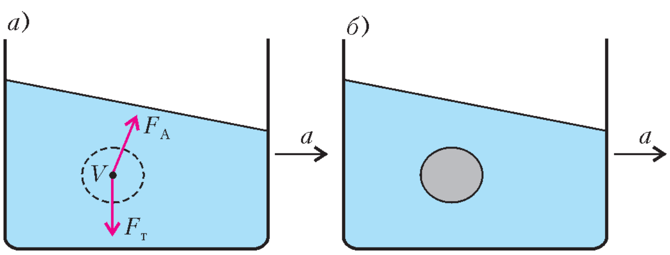

Рис. 10

$$\vec{F}_т + \vec{F}_A = m\vec{a}\text{, или } \rho_ж V\vec{g} + \vec{F}_A = \rho_ж V\vec{a}\text{,}$$

откуда найдем

$$\vec{F}_A = \rho_ж V(\vec{a} - \vec{g})\text{.}$$

Если жидкость убрать, а на ее место поместить какое-либо тело (рис.10,*б*), то распределение давлений не изменится, а значит, и сила Архимеда не изменится. Поэтому полученное нами последнее выражение – это и есть обобщенная формула для силы Архимеда.

Теперь закончим решение задачи. Для удобства сразу разложим обобщенную силу Архимеда на вертикальную и горизонтальную составляющие. Перечислим силы, действующие на поплавок: это направленная вниз сила тяжести $\rho_п Vg$, направленная вверх вертикальная составляющая силы Архимеда $\rho_ж Vg$, направленная вдоль нити сила натяжения T и направленная вправо горизонтальная составляющая силы Архимеда $\rho_ж Va$ (под действием этой силы двигалась бы с ускорением a жидкость, занимающая объем поплавка, если бы его не было). Обозначим угол отклонения нити от вертикали через α. Запишем второй закон Ньютона в проекциях на горизонтальную ось:

$$\rho_п Va = \rho_ж Va - T\sin\alpha\text{, или } T\sin\alpha = (\rho_ж - \rho_п)Va\text{,}$$

и на вертикальную ось:

$$\rho_ж Vg = \rho_п Vg + T\cos\alpha\text{, или } T\cos\alpha = (\rho_ж - \rho_п)Vg\text{.}$$

Отсюда найдем угол отклонения нити от вертикали:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{g}$$

и силу натяжения нити:

$$T = (\rho_ж - \rho_п)V\sqrt{a^2 + g^2}\text{.}$$

Упражнения

1. В цилиндрический сосуд налита жидкая смола плотностью $\rho_1 = 1200$ кг/м^3. В смоле плавает кусок парафина объемом $V = 12$ см^3 и плотностью $\rho_2 = 900$ кг/м^3. Какой объем парафина находится ниже уровня смолы, а какой – выше? Изменится ли уровень жидкости в сосуде, если парафин расплавить?

2. В цилиндрическую кастрюлю радиусом $r = 8$ см налили воду. Потом туда опустили сжатую резиновую грушу. Груша вобрала в себя часть воды, но продолжала плавать на поверхности, а уровень воды в кастрюле увеличился на $h = 2$ мм. Чему равна масса груши? Плотность воды $\rho = 1000$ кг/м^3.

3. В кастрюле с водой плавает пластмассовая мыльница, в которой лежит железный предмет. Вовочка вынул предмет из мыльницы и бросил его на дно кастрюли. Изменился ли уровень воды в кастрюле, и если да, то в какую сторону и на сколько? Площадь дна кастрюли S, масса предмета m, плотности воды и железа известны.

4. В ванну налили воду до уровня $h = 40$ см и положили на сливное отверстие стеклянный брусок, масса которого $m = 640$ г (рис.11). Диаметр сливного отверстия $d = 4$ см. Вода подтекает под брусок, покрывая все дно ванны, но очень медленно (уровень воды можно считать постоянным и гидродинамическими эффектами пренебречь). С какой силой брусок давит на дно ванны? Плотность воды $\rho_в = 1000$ кг/м^3, плотность стекла $\rho_с = 2500$ кг/м^3.

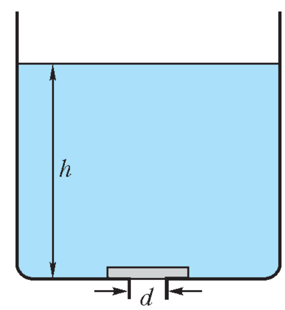

Рис. 11

5. К одному концу тонкостенной трубочки для питья радиусом r прилепили кусок пластилина массой m. Трубочку в вертикальном положении, пластилином вниз, опустили в жидкость на глубину h, много большую размеров куска пластилина. С какой силой кусок пластилина действует на трубочку, если плотность жидкости ρ_1, а плотность пластилина ρ_2? Верхний конец трубочки открыт и находится в воздухе.

6. Малый сосуд расположен внутри большого так, как показано на рисунке 12. В дне малого сосуда есть отверстие, в которое вставлен сосновый цилиндр. Высота цилиндра $H = 21$ см. В малом сосуде находится вода, а в большом – спирт, и при этом цилиндр покоится. На какой глубине под водой (отсчитывая от дна малого сосуда) находится верхнее основание цилиндра? Плотность воды $\rho_1 = 1000$ кг/м^3, плотность спирта $\rho_2 = 790$ кг/м^3, а плотность сосны $\rho = 600$ кг/м^3. Трением между цилиндром и малым сосудом пренебречь.

7. К дну вагона-цистерны, заполненной жидкостью, привязан тросом шар, плотность которого меньше плотности жидкости (рис.13). Когда вагон движется

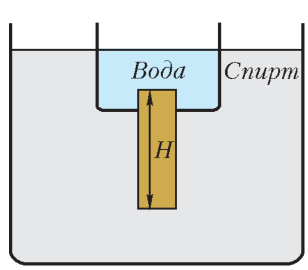

Рис. 12

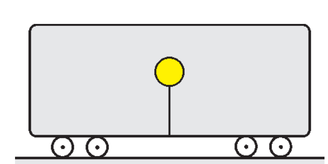

Рис. 13

равномерно, сила натяжения троса равна T. Чему будет равна сила натяжения троса при торможении поезда с постоянным ускорением a в установившемся режиме (когда шар установится неподвижно относительно цистерны)? В какую сторону от вертикали и на какой угол отклонится трос?

8. Система, изображенная на рисунке 14, состоит из двух сообщающихся сосудов и симметрична относительно вертикальной плоскости. Система наполнена водой и уравновешена на тонкой опоре. В сосуды опускают гири одинаковой массы: в левый сосуд – свинцовую, а в правый – алюминиевую. Центры масс гирь равноудалены от плоскости симметрии. Сохранится ли равновесие, и если нет, то какой сосуд перевесит? Плотность алюминия $\rho_а = 2700$ кг/м^3, плотность свинца $\rho_с = 11300$ кг/м^3.

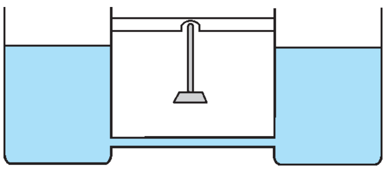

Рис. 14

Теперь из сосудов достали гири и опустили туда деревянные бруски: в левый сосуд – дубовый, а в правый – сосновый. Сохранится ли равновесие, и если нет, то какой сосуд перевесит? Зависит ли ответ от положения центров масс брусков? Плотности сосны и дуба равны $\rho_с = 680$ кг/м^3 и $\rho_д = 800$ кг/м^3 соответственно.

9. Имеется куб объемом V. Одну из граней куба натирают парафином и приставляют к вертикальной стенке сосуда. Затем сосуд заполняют водой так, что куб полностью находится под водой, но под грань, натертую парафином, вода не подтекает, а центр этой грани находится на глубине h. Коэффициент трения между парафином и стенкой сосуда μ. Куб отпускают. При каких значениях плотности материала куба ρ он останется неподвижным?

10. В задаче 4 про вечный двигатель, разобранной в статье, вычислите силу, действующую на барабан со стороны воды, если известно, что барабан представляет собой цилиндр радиусом R и высотой h, а его ось находится на глубине H под водой. Под каким углом к вертикали направлена эта сила? Плотность воды ρ известна.

Подсказки. Задачи 5 и 10 можно решить просто, воспользовавшись приемом под названием «прибавить ноль». Представим, что в телах, фигурирующих в задачах, сделали тонкие разрезы, куда затекает вода. В первом случае кусок пластилина разрезается горизонтальной плоскостью вблизи места соединения пластилина с трубочкой. Во втором случае барабан разрезается вертикальной плоскостью вдоль стенки, в которую он встроен. Силы давления воды действуют на обе стороны разреза (вверх и вниз в первом случае и влево и вправо во втором случае), поэтому сумма этих сил равна нулю. Значит, произведение разреза не меняет полной суммы сил, действующих на тело. Но после разреза мы имеем тело, полностью погруженное в жидкость, и рассчитывать нужные силы становится проще.

ЕГЭ-2009 по физике

М.ДЕМИДОВА, А.ЧЕРНОУЦАН

В этом году ЕГЭ по физике будут сдавать значительно больше школьников, чем в предыдущие годы. Хотя в школе физика является экзаменом по выбору, ее захотят сдавать те школьники, которым физика нужна для участия в конкурсе на выбранную специальность в вузе. А это – большинство технических и естественно-научных специальностей.

Как показывает анализ результатов ЕГЭ в предыдущие годы, наибольшую трудность вызывают те вопросы и задачи (даже базового уровня), формулировка которых отличается от стандартной и является неожиданной для ученика. Например, на вопрос А17 приведенного ниже варианта экзамена правильно ответили меньше половины школьников. Единственный способ подготовиться к экзамену так, чтобы избежать ошибок в ответе на неожиданные вопросы и правильно решить задачи повышенного и высокого уровня, – это глубокое изучение теории, сопровождаемое решением достаточно большого числа задач разного уровня.

В 2009 году структура экзамена по физике несколько изменилась. Первые 25 задач группы А содержат 4 варианта ответа, один из которых правильный. Каждая из этих задач оценивается в один балл. Задачи В1 и В2 относятся к задачам на установление соответствия. Ответом к ним является последовательность двух или трех цифр. Если все цифры правильные, за задачу начисляется два балла, если одна цифра неправильная – то один балл. Задачи В3–В5 относятся к задачам на получение численного ответа, они оцениваются в один балл каждая. К задачам С1–С6 необходимо дать развернутые ответы, они оцениваются экспертами; за каждую задачу можно получить максимум три балла. При этом задача С1 является качественной, она требует развернутого описания явления, процесса или зависимости, во многих случаях без применения формул. Задачи С2–С6 представляют собой обычные задачи на применение нескольких формул и законов. Всего за выполнение варианта можно получить 50 первичных баллов, которые затем переводятся в 100-балльную шкалу.

Для знакомства со структурой ЕГЭ-2009 по физике рекомендуем изучить демонстрационный вариант, который можно найти в Интернете, и решить приведенный ниже вариант, составленный из задач открытого сегмента банка экзаменационных задач прошлых лет.

Вариант

А1. На рисунке 1 приведен график зависимости проекции скорости тела от времени. Какой из графиков на рисунке 2 представляет проекцию ускорения тела в интервале времени от 3 с до 5 с?

1); 2); 3); 4).

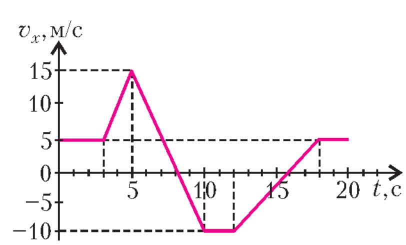

Рис. 1

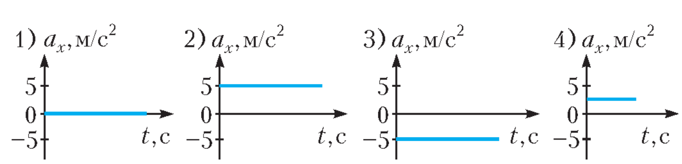

Рис. 2

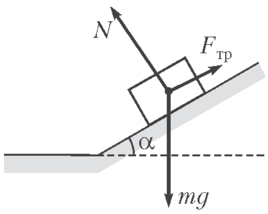

Рис. 3

A2. Брусок лежит на шероховатой наклонной опоре (рис.3). На него действуют 3 силы: сила тяжести $m\vec{g}$, сила упругости опоры $\vec{N}$ и сила трения $\vec{F}_{тр}$. Если брусок покоится, то модуль равнодействующей сил $\vec{F}_{тр}$ и $m\vec{g}$ равен:

1) N; 2) $N\cos\alpha$; 3) $N\sin\alpha$; 4) $mg + F_{тр}$.

A3. Во сколько раз сила притяжения Земли к Солнцу больше силы притяжения Меркурия к Солнцу? Масса Меркурия составляет $\frac{1}{18}$ массы Земли, а расположен он в 2,5 раза ближе к Солнцу, чем Земля.

1) В 2,25 раза; 2) в 2,9 раза; 3) в 7,5 раз; 4) в 18 раз.

A4. Масса планеты Плюк в 2 раза меньше массы Земли, а период обращения спутника, движущегося вокруг Плюка по низкой круговой орбите, совпадает с периодом обращения аналогичного спутника Земли. Отношение средних плотностей Плюка и Земли равно:

1) 1; 2) 2; 3) 0,5; 4) 0,7.

A5. Четыре одинаковых листа фанеры толщиной L каждый, связанные в стопку, плавают в воде так, что уровень воды приходится на границу между двумя средними листами (рис.4). Если в стопку добавить еще один такой же лист, то глубина ее погружения увеличится на:

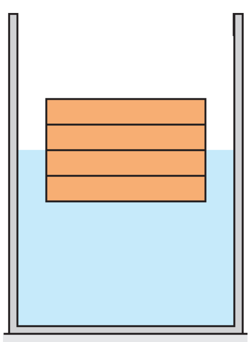

Рис. 4

1) $L/4$; 2) $L/3$; 3) $L/2$; 4) L.

A6. Как изменится период колебаний математического маятника, если его длину уменьшить в 4 раза?

1) Увеличится в 4 раза; 2) увеличится в 2 раза; 3) уменьшится в 4 раза; 4) уменьшится в 2 раза.

A7. Сани с охотником стоят на очень гладком льду. Охотник стреляет из ружья в горизонтальном направлении. Масса заряда 0,03 кг. Скорость саней после выстрела 0,15 м/с. Общая масса охотника с ружьем и саней 120 кг. Какова скорость заряда при выстреле?

1) 0,54 м/с; 2) 4 м/с; 3) 240 м/с; 4) 600 м/с.

A8. Закрепленный пружинный пистолет стреляет вертикально вверх. Какова масса пули m, если высота ее подъема в результате выстрела равна h, жесткость пружины k, а деформация пружины перед выстрелом Δl? Трением и массой пружины пренебречь, считать $\Delta l \ll h$.

1) $\frac{k(\Delta l)^2}{4gh}$; 2) $\frac{k(\Delta l)^2}{gh}$; 3) $\frac{2k(\Delta l)^2}{gh}$; 4) $\frac{k(\Delta l)^2}{2gh}$.

A9. Воздух в комнате состоит из смеси газов: водорода, кислорода, азота, водяных паров, углекислого газа и др. При тепловом равновесии у всех этих газов одинаковое (-ая):

1) давление; 2) температура; 3) концентрация молекул; 4) теплоемкость.

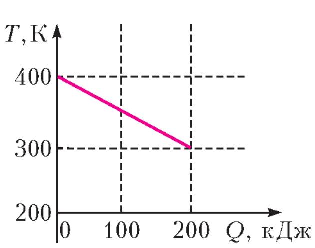

Рис. 5

A10. На рисунке 5 приведен график зависимости температуры твердого тела от отданного им количества теплоты. Масса тела 4 кг. Какова удельная теплоемкость вещества этого тела?

1) 0,002 Дж/(кг · К);
2) 0,5 Дж/(кг · К);
3) 500 Дж/(кг · К);
4) 40000 Дж/(кг · К).

A11. Какую работу совершает газ при переходе из состояния *1* в состояние *4* (рис.6)?

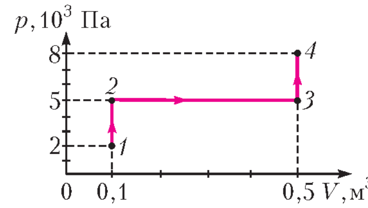

Рис. 6

1) 2 Дж; 2) 2 кДж; 3) 2,5 кДж; 4) 5 кДж.

A12. В процессе эксперимента внутренняя энергия газа уменьшилась на 40 кДж, при этом он совершил работу 35 кДж. Следовательно, в результате теплообмена газ отдал окружающей среде количество теплоты:

1) 75 кДж; 2) 40 кДж; 3) 35 кДж; 4) 5 кДж.

A13. В субботу температура воздуха была выше, чем в воскресенье. Парциальное давление водяного пара в атмосфере в эти дни оставалось постоянным. В какой из дней относительная влажность воздуха была больше? Учтите, что давление насыщенного пара увеличивается с ростом температуры.

1) В субботу; 2) в воскресенье; 3) влажность воздуха в эти дни была одинаковой; 4) недостаточно данных для ответа на вопрос.

A14. Расстояние между двумя точечными электрическими зарядами увеличили в 3 раза, и один из зарядов увеличили в 3 раза. Сила взаимодействия между ними:

1) не изменилась; 2) уменьшилась в 27 раз; 3) увеличилась в 3 раза; 4) уменьшилась в 3 раза.

A15. Отрицательный заряд перемещается в однородном электростатическом поле из точки A в точку B по траекториям I, II, III (рис.7). В каком случае работа сил электростатического поля наименьшая?

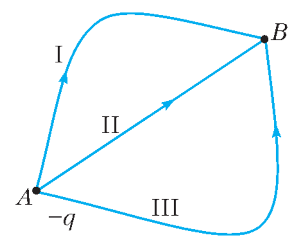

Рис. 7

1) Только II; 2) только III; 3) I и III; 4) работа сил электростатического поля на траекториях I, II, III одна и та же.

A16. Если площадь поперечного сечения однородного цилиндрического проводника и электрическое напряжение на его концах увеличатся в 2 раза, то сила тока, протекающего по нему:

1) не изменится; 2) увеличится в 2 раза; 3) увеличится в 4 раза; 4) уменьшится в 4 раза.

A17. Как изменится сопротивление участка цепи AB, изображенного на рисунке 8, если ключ K разомкнуть? Сопротивление каждого резистора равно 4 Ом.

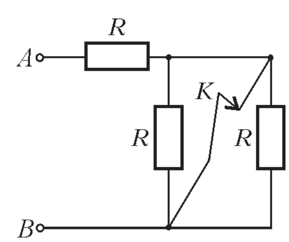

Рис. 8

1) Уменьшится на 4 Ом; 2) уменьшится на 2 Ом; 3) увеличится на 2 Ом; 4) увеличится на 4 Ом.

A18. Электрон e^-, влетевший в зазор между полюсами электромагнита, имеет горизонтальную скорость $\vec{v}$, перпендикулярную вектору индукции $\vec{B}$ магнитного поля (рис.9). Куда направлена действующая на электрон сила Лоренца $\vec{F}$?

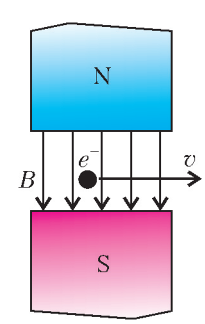

Рис. 9

1) От нас перпендикулярно плоскости рисунка; 2) к нам из-за плоскости рисунка; 3) горизонтально вправо в плоскости рисунка; 4) вертикально вверх в плоскости рисунка.

A19. Один раз полосовой магнит падает сквозь неподвижное металлическое кольцо южным полюсом вниз, второй раз – северным полюсом вниз. Ток в кольце:

1) возникает в обоих случаях; 2) не возникает ни в одном из случаев; 3) возникает только в первом случае; 4) возникает только во втором случае.

А20. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью C и катушки индуктивностью L. Как изменится период электромагнитных колебаний в этом контуре, если емкость конденсатора увеличить в 2 раза, а индуктивность катушки в 2 раза уменьшить?

1) Не изменится; 2) увеличится в 2 раза; 3) увеличится в 4 раза; 4) уменьшится в 4 раза.

А21. Емкость конденсатора, включенного в цепь переменного тока, равна 6 мкФ. Уравнение колебаний напряжения на конденсаторе имеет вид $U = 50\cos\left(1\cdot 10^3 t\right)$, где все величины выражены в единицах СИ. Найдите амплитуду силы тока.

1) 0,003 А; 2) 0,3 А; 3) 0,58 А; 4) 50 А.

А22. На рисунке 10 показан ход лучей от точечного источника света A через тонкую линзу. Какова приблизительно оптическая сила линзы?

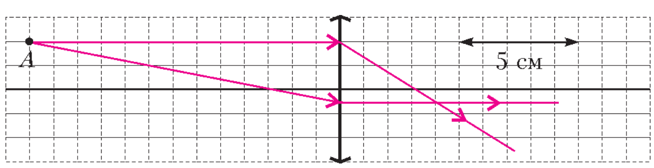

Рис. 10

1) 7,7 дптр; 2) –33,3 дптр; 3) 33,3 дптр; 4) 25,0 дптр.

А23. Торий $^{232}_{90}\mathrm{Th}$, испытав два электронных β-распада и один α-распад, превращается в элемент:

1) $^{236}_{94}\mathrm{Pu}$; 2) $^{228}_{90}\mathrm{Th}$; 3) $^{228}_{86}\mathrm{Rh}$; 4) $^{234}_{86}\mathrm{Rh}$.

А24. Исследовалась зависимость растяжения жгута от приложенной силы. Погрешности измерения силы и величины растяжения жгута составляли 0,5 Н и 0,5 см соответственно. Результаты измерений с учетом их погрешности представлены на рисунке 11. Согласно этим измерениям, жесткость жгута приблизительно равна:

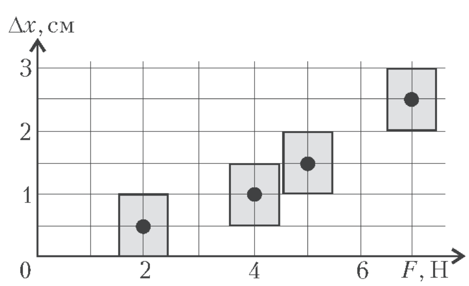

Рис. 11

1) 110 Н/м; 2) 200 Н/м; 3) 300 Н/м; 4) 500 Н/м.

А25. Была выдвинута гипотеза, что размер мнимого изображения предмета, создаваемого рассеивающей линзой, зависит от оптической силы линзы. Необходимо экспериментально проверить эту гипотезу. Какие два опыта, представленные на рисунке 12, можно провести для такого исследования?

1) *А* и *Б*; 2) *А* и *В*; 3) *Б* и *В*; 4) *В* и *Г*.

В1. Плоский воздушный конденсатор зарядили до некоторой разности потенциалов и отключили от источника тока. Как изменятся перечисленные в первом столбце физические величины, если пластины конденсатора раздвинуть на некоторое расстояние? К каждой позиции первого столбца под-

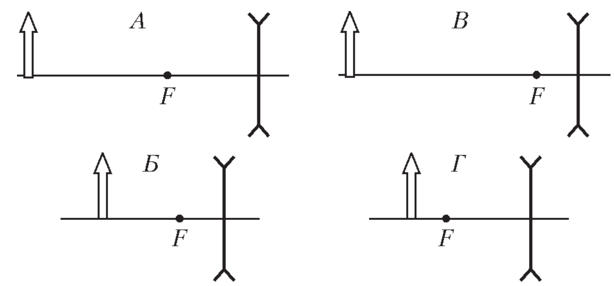

Рис. 12

берите соответствующую позицию второго и запишите в таблицу выбранные цифры под соответствующими буквами.

Физические величины	*Их изменения*
А) Заряд на обкладках конденсатора	1) Увеличится
Б) Электроемкость конденсатора	2) Уменьшится
В) Энергия электрического поля конденсатора	3) Не изменится

А	*Б*	*В*

В2. Ядро атома некоторого элемента претерпевает β-распад. Как изменяются перечисленные в первом столбце характеристики ядра? К каждой позиции первого столбца подберите соответствующую позицию второго и запишите в таблицу выбранные цифры под соответствующими буквами.

Физические величины	*Их изменения*
А) Порядковый номер ядра	1) Увеличится
Б) Массовое число ядра	2) Уменьшится
В) Число нейтронов в ядре	3) Не изменится

А	*Б*	*В*

В3. Небольшой камень, брошенный с ровной горизонтальной поверхности земли под углом к горизонту, упал обратно на землю в 20 м от места броска. Чему была равна скорость камня через 1 с после броска, если в этот момент она была направлена горизонтально?

В4. В калориметр с водой бросают кусочки тающего льда. В некоторый момент кусочки льда перестают таять. Первоначальная масса воды в сосуде была 330 г, а в конце процесса таяния масса воды увеличилась на 84 г. Какой была начальная температура воды в калориметре? Ответ выразите в градусах Цельсия (°С).

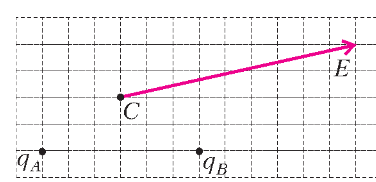

Рис. 13

В5. На рисунке 13 изображен вектор напряженности $\vec{E}$ электрического поля в точке C, которое создано двумя точечными зарядами q_A и q_B. Чему равен заряд q_B, если заряд q_A равен +2 мкКл? Ответ выразите в микрокулонах (мкКл).

С1. В электрической цепи, изображенной на рисунке 14, ползунок реостата перемещают вправо. Как изменяются при этом показания вольтметра и амперметра?

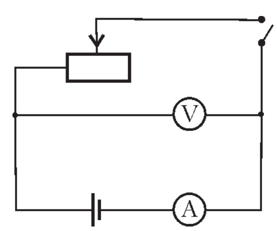

Рис. 14

С2. Начальная скорость снаряда, выпущенного из пушки вертикально вверх, равна 200 м/с. В точке максимального подъема снаряд разорвался на два одинаковых осколка. Первый упал на землю вблизи точки выстрела со скоростью 250 м/с. Через какое время после этого упадет на землю второй осколок? Сопротивлением воздуха пренебречь.

С3. Один моль идеального одноатомного газа сначала нагрели, а затем охладили до первоначальной температуры 300 К, уменьшив давление в 3 раза (рис.15). Какое количество теплоты сообщено газу на участке *1–2*?

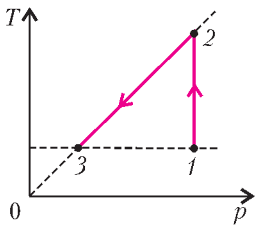

Рис. 15

С4. В сосуде с небольшой трещиной находится воздух, который может просачиваться сквозь трещину. Во время опыта давление воздуха в сосуде возросло в 2 раза, а его абсолютная температура уменьшилась в 4 раза при неизменном объеме. Во сколько раз изменилась внутренняя энергия воздуха в сосуде? (Воздух считать идеальным газом.)

С5. На экране с помощью тонкой линзы получено изображение предмета с пятикратным увеличением. Экран передвинули на 30 см вдоль главной оптической оси линзы. Затем при неизменном положении линзы передвинули предмет, чтобы изображение снова стало резким. В этом случае получилось изображение с трехкратным увеличением. На сколько пришлось передвинуть предмет относительно его первоначального положения?

С6. Препарат активностью $1{,}7\cdot10^{11}$ частиц в секунду помещен в медный контейнер массой 0,5 кг. За какое время температура контейнера повышается на 1 К, если известно, что данное радиоактивное вещество испускает α-частицы с энергией 5,3 МэВ? Считать, что энергия всех α-частиц полностью переходит во внутреннюю энергию. Теплоемкостью препарата и теплообменом с окружающей средой пренебречь.

Ответы к задачам групп А и В

А1	А2	А3	А4	А5	А6	А7	А8	А9	А10
2	1	2	1	3	4	4	4	2	3
А11	А12	А13	А14	А15	А16	А17	А18	А19	А20
2	4	2	4	4	3	2	2	1	1
А21	А22	А23	А24	А25	В1	В2	В3	В4	В5
2	3	2	3	2	321	132	10	20	−1

Краткие решения избранных задач

В3. Скорость камня в верхней точке траектории направлена горизонтально. Время от броска до падения в 2 раза больше данного времени, т.е. $t = 2t_1 = 2$ с. Следовательно, скорость в верхней точке равна $v_1 = v_x = s/t = 10$ м/с.

В4. Лед перестанет таять, когда температура воды опустится до температуры плавления льда $t_{\text{пл}} = 0\ ^\circ\text{C}$. Масса растаявшего льда равна увеличению массы воды: $m_{\text{л}} = 84$ г. Уравнение теплового баланса приобретает вид

$$c_{\text{в}}m_{\text{в}}\left(t_{\text{пл}} - t_{\text{в}}\right) + \lambda m_{\text{л}} = 0\text{, откуда } t_{\text{в}} = 20\ ^\circ\text{C}.$$

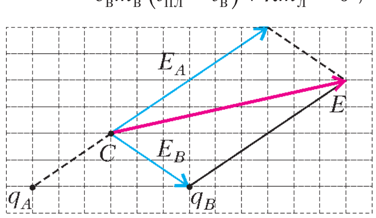

Рис. 16

В5. Векторы $\vec{E}_A$ и $\vec{E}_B$ находятся построением (рис.16). Поскольку расстояния от точки C до зарядов одинаковы, то $|q_B|/|q_A| = E_B/E_A = 1/2$. Получаем

$$q_B = -1\ \text{мкКл}.$$

С1. Сила тока в цепи и напряжение на реостате даются выражениями

$$I = \frac{\mathcal{E}}{r+R},\quad U = IR = \frac{\mathcal{E}R}{r+R} = \frac{\mathcal{E}}{\frac{r}{R}+1}.$$

При увеличении сопротивления R реостата сила тока уменьшается, а напряжение возрастает.

С2. Максимальная высота подъема снаряда равна

$$h = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Скорость снаряда в верхней точке равна нулю, поэтому из закона сохранения импульса $0 = mv_1 - mv_2$ следует, что начальные скорости осколков равны:

$$v_1 = v_2 = v.$$

Поскольку первый осколок упал рядом с местом выстрела, скорости осколков направлены по вертикали: у первого осколка вниз, у второго – вверх. Скорости осколков при падении на землю также равны и связаны с их начальной скоростью законом сохранения энергии

$$mgh + \frac{mv^2}{2} = \frac{mu^2}{2}.$$

Отсюда получаем

$$v = \sqrt{u^2 - 2gh} = \sqrt{u^2 - v_0^2} = 150\ \text{м/с}.$$

Времена падения найдем из кинематических соотношений

$$u = v + gt_1,\quad u = -v + gt_2,$$

откуда

$$t_1 = 10\ \text{с},\quad t_2 = 40\ \text{с},\quad t_2 - t_1 = 30\ \text{с}.$$

С3. Процесс *2–3* изохорный, поэтому

$$\frac{T_2}{T_3} = \frac{p_2}{p_3} = \frac{1}{3}\text{, т.е. } T_2 = 3T_1.$$

Процесс *1–2* изобарный, следовательно,

$$Q_{12} = \Delta U + A = \frac{3}{2}\nu R\left(T_2 - T_1\right) + \nu R\left(T_2 - T_1\right) =$$

$$= \frac{5}{2}\nu R\left(T_2 - T_1\right) = 5\nu RT_1 \approx 12{,}5\ \text{кДж}.$$

С4. Внутренняя энергия идеального газа пропорциональна νR, т.е. пропорциональна pV. Значит, внутренняя энергия воздуха возросла в 2 раза. Как часто бывает в вопросах и задачах ЕГЭ, не все данные из условия входят в ответ.

С5. Из уравнений

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}\quad\text{и}\quad\frac{f}{d} = \Gamma$$

выразим d и f через увеличение Γ для случая действительного изображения:

$$d = \left(1 + \frac{1}{\Gamma}\right)F,\quad f = \left(1 + \Gamma\right)F.$$

Поскольку $\Gamma_2 < \Gamma_1$, то $f_2 < f_1$ и $d_2 > d_1$. Получаем

$$d_2 - d_1 = \left(\frac{1}{\Gamma_2} - \frac{1}{\Gamma_1}\right)F,\quad f_1 - f_2 = \left(\Gamma_1 - \Gamma_2\right)F,$$

откуда находим

$$d_2 - d_1 = \frac{f_1 - f_2}{\Gamma_1\Gamma_2} = 2\ \text{см}.$$

С6. Из закона сохранения энергии $EAt = cm\Delta T$, где E – энергия α-частицы и A – активность, найдем искомое время:

$$t \approx 23\ \text{мин}.$$