Внеписанная окружность

А.БЛИНКОВ, Ю.БЛИНКОВ

Начнем с простого вопроса, который может возникнуть уже на начальном этапе изучения геометрии.

Пусть на плоскости заданы три прямые, которые попарно пересекаются в точках A, B и C (рис.1,*а*). Вопрос: *сколько существует точек, равноудаленных от этих прямых?*

Многие школьники дают немедленный ответ: конечно одна, а именно, центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Как часто бывает в подобных случаях, этот ответ неверен.

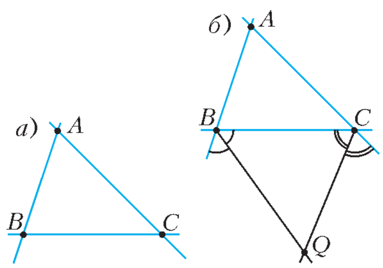

Рис. 1

Действительно, рассмотрим, например, биссектрисы внешних углов B и C треугольника ABC (рис.1,*б*). Так как сумма углов, образованных ими со стороной BC, меньше, чем 180°, то эти биссектрисы пересекутся в некоторой точке Q. Тогда точка Q равноудалена от прямых AB, AC и BC. Аналогично, рассматривая другие пары внешних углов треугольника ABC, получим еще две точки, обладающие требуемым свойством.

Таким образом, помимо центра окружности, вписанной в треугольник ABC, существуют, по крайней мере, *еще три точки*, равноудаленные от заданных прямых. Каждая из этих точек является центром *окружности, касающейся стороны треугольника и продолжений двух других сторон.* Такие окружности называют *вневписанными* для данного треугольника ABC.

Упражнения

1. Докажите, что других точек, равноудаленных от прямых AB, AC и BC, не существует (т.е. их ровно четыре).

2. Докажите, что точка Q лежит на биссектрисе угла BAC (см. рис.1,*б*).

3. Вычислите угол BQC, если $\angle BAC = \alpha$.

Посмотрим, как могут применяться изложенные факты.

Задача 1. *Постройте треугольник ABC, зная положение трех точек A_1, B_1 и C_1, являющихся центрами вневписанных окружностей треугольника ABC.*

Решение. Пусть искомый треугольник ABC построен. Центр каждой его вневписанной окружности лежит на пересечении соответствующих биссектрис внутреннего и внешнего углов. Проведя их, получим точки A_1, B_1 и C_1 (рис.2).

Так как биссектрисы вертикальных углов лежат на одной прямой, то вершины A, B и C искомого треугольника лежат на сторонах треугольника $A_1B_1C_1$. Кроме того, так как биссектриса внешнего угла треугольника перпендикулярна биссектрисе внутреннего угла, проведенной из той же вершины, то $A_1A \perp B_1C_1$, $B_1B \perp A_1C_1$, $C_1C \perp A_1B_1$.

Таким образом, решение задачи сводится к построению треугольника $A_1B_1C_1$ и его высот.

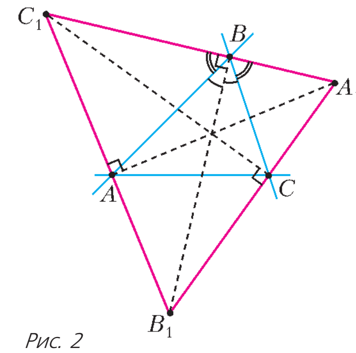

Рис. 2

Используя результат упражнения 3, нетрудно доказать, что задача имеет решение (причем единственное) тогда и только тогда, когда треугольник $A_1B_1C_1$ – остроугольный.

Это позволяет сформулировать полезный факт: *вершины остроугольного треугольника являются центрами вневписанных окружностей для его ортотреугольника* (треугольника, образованного основаниями высот).

Геометрические конфигурации, связанные с вневписанными окружностями, очень содержательны и встречаются во многих задачах. Рассмотрим основные факты, связанные с такими конфигурациями.

Пусть вневписанная окружность касается стороны BC треугольника ABC в точке M, а продолжений сторон AB и AC – в точках P и T соответственно. Вписанная в этот треугольник окружность касается сторон BC, AB и AC в точках K, L и N соответственно (рис.3). Докажем следующие равенства:

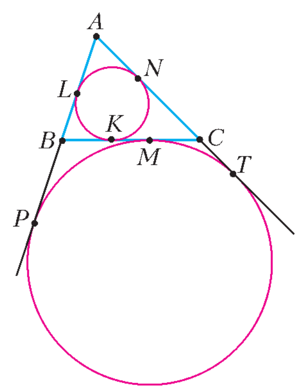

Рис. 3

1. $BK = p - b$, где p – полупериметр треугольника ABC, b – длина стороны AC;

2. $AP = p$;

3. $BK = CM$, т.е. *точки касания вписанной и вневписанной окружностей со стороной треугольника симметричны относительно середины этой стороны*.

Действительно, из равенства отрезков касательных, проведенных к окружности из одной точки, получим: $AN = AL$, $BK = BL$ и $CN = CK$. Сумма этих шести отрезков составляет периметр треугольника ABC, поэтому $AN + BK + CN = p$. Учитывая, что $AN + CN = b$, получаем равенство 1.

Применяя эту же теорему об отрезках касательных к другой окружности, получим: $AP = AT$, $BM = BP$ и $CM = CT$. Тогда $P_{ABC} = AB + AC + BC = AB + AC + BM + CM = AB + AC + BP + CT = AP + AT = 2AP$, откуда следует равенство 2.

Так как $AT = p$, то и $CM = CT = AT - AC = p - b = BK$. Таким образом, доказано равенство 3.

Упражнение 4. Пользуясь обозначениями рисунка 3, докажите, что: а) $PL = BC$; б) *прямая AM делит периметр треугольника ABC пополам*.

Теперь получим соотношения, связывающие *радиусы* вписанной и вневписанной окружностей. Для этого (временно убрав обозначения некоторых точек) дополним рисунок 3, отметив центры вписанной и вневписанной окружностей – точки I и Q соответственно – и проведя радиусы $IL = r$ и $QP = r_a$ этих окружностей (рис.4). Тогда прямоугольные треугольники AIL и AQP подобны (так как у них общий острый угол), поэтому $\frac{IL}{QP} = \frac{AL}{AP} = \frac{AI}{AQ}$. Учитывая, что $AL = p - a$ (см. равенство 1) и $AP = p$ (см. равенство 2), получим, что $\frac{r}{r_a} = \frac{p-a}{p}$. Из этого соотношения, в частности, можно получить формулу, выражающую площадь треугольника

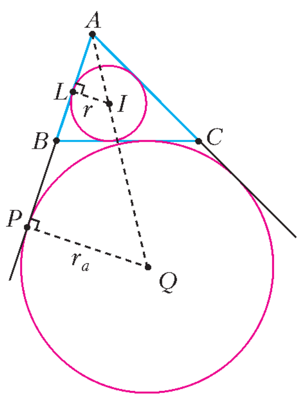

Рис. 4

через радиус вневписанной окружности. Действительно, так как $S_{ABC} = pr$, то $S_{ABC} = (p-a)r_a$.

Тем самым мы доказали еще два полезных равенства:

4. $\dfrac{r}{r_a} = \dfrac{p-a}{p}$;

5. $S_{ABC} = (p-a)r_a$.

Упражнение 5. Докажите, что в любом треугольнике выполняются равенства:

а) $r_a = p\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$, где α – угол треугольника, противолежащий стороне a;

б) $r_a : r_b : r_c = \dfrac{1}{p-a} : \dfrac{1}{p-b} : \dfrac{1}{p-c}$;

в) $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{r_a} + \dfrac{1}{r_b} + \dfrac{1}{r_c}$;

г) $S = \sqrt{rr_ar_br_c}$.

Еще один интересный факт можно получить, решив следующую задачу.

Задача 2. *Продолжение биссектрисы угла A треугольника ABC пересекает описанную около него окружность в точке M; I – центр окружности, вписанной в треугольник ABC; Q – центр вневписанной окружности, касающейся стороны BC. Докажите, что точки B, C, I и Q лежат на окружности с центром M.*

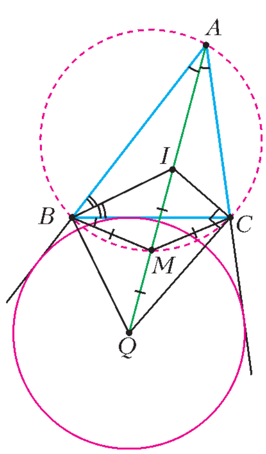

Рис. 5

Решение. По условию, I – точка пересечения биссектрис треугольника ABC, а Q – точка пересечения биссектрисы угла A и биссектрис внешних углов при вершинах B и C (рис.5). Так как $\angle IBQ = \angle ICQ = 90°$, то точки B и C лежат на окружности с диаметром IQ.

Пусть $\angle BAC = \alpha$; $\angle ABC = \beta$. Угол BIM – внешний для треугольника AIB, значит, $\angle BIM = \angle IAB + \angle IBA = \dfrac{1}{2}(\alpha + \beta)$. Кроме того, $\angle IBM = \angle IBC + \angle MBC = \dfrac{1}{2}\alpha + \dfrac{1}{2}\beta$, так как $\angle MBC = \angle MAC = \dfrac{1}{2}\beta$ (вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу окружности, описанной около треугольника ABC). Следовательно, $\angle BIM = \angle IBM$, т.е. $MI = MB$.

Аналогично получим, что $MI = MC$, значит, M – центр окружности, описанной около треугольника BIC, а точка Q лежит на этой окружности, т.е. точки B, C, I и Q лежат на окружности с центром M.

Отметим, что равенство $MB = MC = MI$, являющееся следствием доказанного утверждения, иногда называют *теоремой о «трилистнике»*.

Далее рассмотрим несколько «классических» задач, в которых вневписанная окружность выступает в роли «вспомогательной».

Задача 3. *Постройте прямую, проходящую через данную точку и отсекающую от данного угла треугольник с заданным периметром.*

Решение. Пусть на плоскости даны угол O и точка M. Предположим, что искомая прямая AB построена, т.е. треугольник AOB имеет заданный периметр P. Проведем окружность, касающуюся сторон данного угла и отрезка AB (рис.6). Пусть K и L – точки касания этой окружности со сторонами угла, тогда $OK = OL = \dfrac{1}{2}P$ (см. равенство 2).

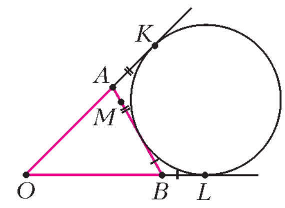

Рис. 6

Таким образом, решение задачи сводится к построению вспомогательного равнобедренного треугольника KOL (сторону KL которого можно не проводить) и окружности, касающейся сторон данного угла в точках K и L. После этого через точку M проводится касательная AB к этой окружности.

Отметим, что в зависимости от расположения точки M задача может иметь два решения, одно решение или не иметь решений.

Задача 4. *В треугольнике ABC с углом B, равным 120°, проведены биссектрисы AA_1, BB_1 и CC_1. а) Докажите, что треугольник $A_1B_1C_1$ – прямоугольный. б) Найдите угол B_1C_1C.*

Решение. а) На продолжении стороны AB (за точку B) отметим точку D, тогда $\angle DBC = 60°$, т.е. луч BC – биссектриса угла DBB_1 (рис.7). Так как AA_1 – биссектриса угла

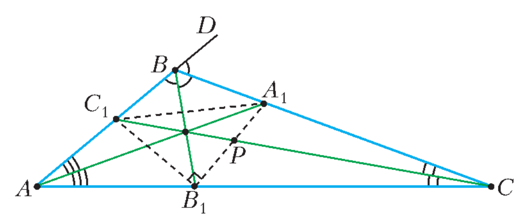

Рис. 7

BAC, то A_1 – центр окружности, касающейся BB_1, BD и B_1C. Такая окружность является вневписанной для треугольника ABB_1, поэтому B_1A_1 – биссектриса угла BB_1C. Аналогично, C_1 – центр вневписанной окружности для треугольника CBB_1, поэтому B_1C_1 – биссектриса угла BB_1A. Следовательно, $\angle A_1B_1C_1 = 90°$.

б) Из доказанного следует, что точка P пересечения CC_1 и B_1A_1 является пересечением биссектрис треугольника BCB_1. Следовательно,

$$\angle B_1PC = 180° - (\angle PB_1C + \angle PCB_1) =$$

$$= 180° - \frac{\angle BB_1C + \angle BCB_1}{2} = 120°.$$

Так как $\angle B_1PC$ – внешний для прямоугольного треугольника PB_1C_1, то $\angle B_1C_1C = \angle B_1PC - 90° = 30°$.

Задача 5. *На стороне BC квадрата ABCD выбрана точка M, а на стороне CD – точка K так, что угол MAK равен 45°. Докажите, что расстояние от вершины A до прямой MK равно стороне квадрата.*

Решение. Пусть точка P – основание перпендикуляра, опущенного из вершины A на прямую MK (рис.8). Проведем диагональ AC квадрата и рассмотрим треугольник CMK. Точка A лежит на биссектрисе угла C этого треугольника и $\angle MAK = 90° - \dfrac{1}{2}\angle C$, следовательно, A является центром вневписанной окружности треугольника CMK (см. упражнение 3). Тогда $AP = AB = AD$ (радиусы этой окружности).

Отметим, что из доказанного следует также, что периметр треугольника CMK равен половине периметра квадрата.

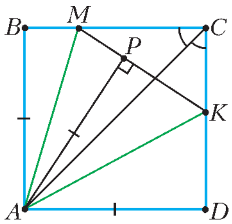

Рис. 8

Заметим также, что эту задачу можно было решить и другим способом: рассмотрев образ треугольника ADK при повороте с центром A на угол 90° (против часовой стрелки).

Упражнение 6. Докажите обратное утверждение: если отрезок MK отсекает от квадрата $ABCD$ треугольник CMK, периметр которого равен половине периметра квадрата, то угол MAK равен 45° (см. рис.8).

Рассмотрим еще несколько любопытных фактов, связанных с вневписанными окружностями. Вернувшись к рисунку 4, отметим, что равенство 4 можно было получить не из подобия треугольников, а из того, что при гомотетии с центром A и коэффициентом $k = \dfrac{AQ}{AI}$ вневписанная окружность переходит во вписанную. Эта же гомотетия позволяет заметить важное утверждение: пусть точка F диаметрально противоположна точке K касания вписанной окружности со стороной BC (рис.9). Тогда *точки A, F и M лежат на одной прямой*.

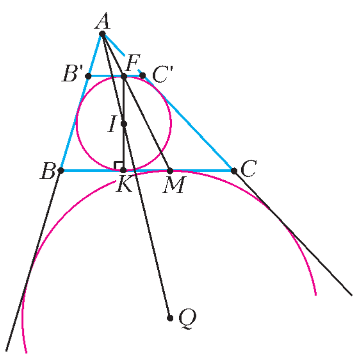

Рис. 9

Действительно, образом касательной BC к вневписанной окружности при указанной гомотетии является касательная $B'C'$ к вписанной окружности, причем $B'C' \parallel BC$ (см. рис.9). Поэтому образом точки M является точка касания $B'C'$ и вписанной окружности, которая совпадает с точкой F, поскольку диаметр FK, перпендикулярный BC, перпендикулярен также и $B'C'$.

Упражнение 7. На рисунке 9 проведем луч AK, который вторично пересечет вневписанную окружность в точке E. Докажите, что $ME \perp BC$.

Задача 6. *Докажите, что середина высоты треугольника, центр вписанной в него окружности и точка касания стороны, на которую опущена высота, с соответствующей вневписанной окружностью лежат на одной прямой.*

Решение. Рассмотрим треугольник ABC, в котором AH – высота, точка D – ее середина, точки I и Q – центры вписанной и вневписанной (касающейся стороны BC) окружностей соответственно, K и M – точки касания этих окружностей со стороной BC (рис.10).

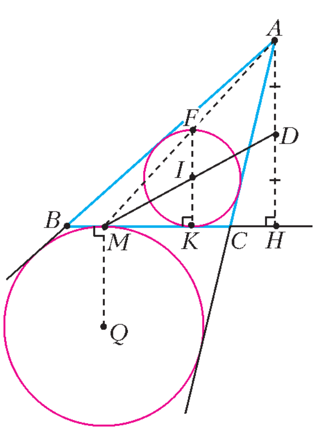

Рис. 10

Проведем KF – диаметр вписанной окружности, тогда точки A, F и M лежат на одной прямой. Так как $KF \parallel AH$, то медиана MD треугольника AMH проходит через середину отрезка KF, т.е. содержит точку I.

Упражнения

8. Докажите, что в прямоугольном треугольнике центр вписанной окружности, середина катета и точка касания другого катета с вневписанной окружностью лежат на одной прямой.

9. Докажите, что точки D, K и Q (см. рис.10) лежат на одной прямой.

Эффективность применения некоторых из полученных ранее соотношений можно показать еще на одном ярком примере. Известно, что *если в треугольник ABC вписана окружность, касающаяся его сторон в точках A', B' и C', то отрезки AA', BB' и CC' пересекаются в одной точке* (называемой *точкой Жергонна*; рис.11,*а*). Для доказательства этого утверждения достаточно использовать то, что $AB' = AC'$, $BC' = BA'$ и $CA' = CB'$. Тогда $\dfrac{AB'}{B'C} \cdot \dfrac{CA'}{A'B} \cdot \dfrac{BC'}{C'A} = 1$, откуда по теореме Чевы и следует, что указанные отрезки пересекаются в одной точке.

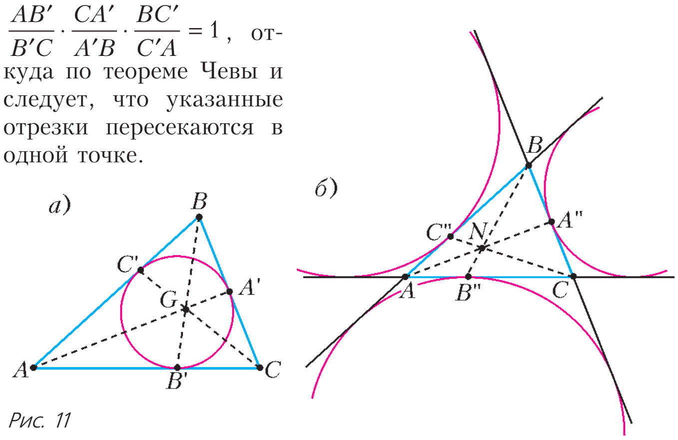

Рис. 11

Аналогичное утверждение верно и для точек касания вневписанных окружностей со сторонами треугольника, т.е. *если A'', B'' и C'' – точки касания вневписанных окружностей со сторонами треугольника ABC, то отрезки AA'', BB'' и CC'' пересекаются в одной точке* (называемой *точкой Нагеля*; рис.11,*б*).

Для того чтобы свести доказательство этого утверждения к предыдущему, достаточно опять использовать теорему Чевы и доказанное равенство 3, заменяя в каждом случае расстояние от вершины до точки касания стороны и вневписанной окружности на равное ему расстояние от вершины до точки касания этой стороны и вписанной окружности.

Приведенный пример иллюстрирует часто встречающуюся *двойственность* утверждений, касающихся вписанной и вневписанной окружностей.

Упражнение 10. Пользуясь обозначениями рисунка 3, докажите, что прямые AM, BT и CP пересекаются в одной точке.

Вневписанная окружность часто «всплывает» и при изучении стереометрии. Рассмотрим, например, треугольник ABC и точку P, не лежащую в его плоскости и равноудаленную от прямых AB, BC и AC. Пусть точка Q – ортогональная проекция точки P на плоскость ABC. Какую роль играет точка Q по отношению к треугольнику ABC?

И в этом случае (так же, как и в планиметрии) некоторые школьники дают неверный ответ: «Q – центр окружности, вписанной в треугольник ABC».

На самом деле, из условия следует только, что точка Q равноудалена от прямых, содержащих стороны треугольника (по теореме о трех перпендикулярах и по свойству равных наклонных, проведенных к плоскости из одной точки). Поэтому точка Q является либо центром окружности, вписанной в треугольник ABC, либо центром одной из вневписанных окружностей этого треугольника (рис.12,*а*,*б*).

Упражнения

11. Для треугольной пирамиды $PABC$ докажите равносильность утверждений а)–г):

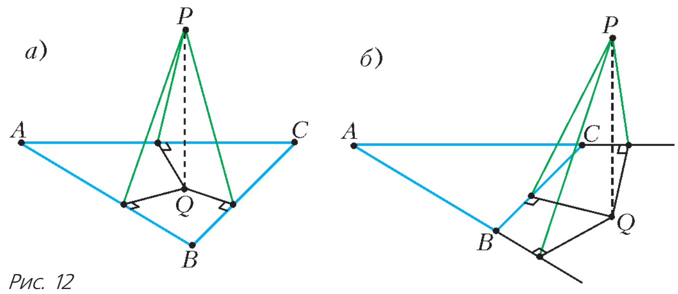

Рис. 12

а) Ортогональной проекцией вершины P на плоскость ABC является либо центр окружности, вписанной в треугольник ABC, либо центр одной из вневписанных окружностей этого треугольника.

б) Высоты боковых граней, проведенные из вершины P, равны.

в) Плоскости боковых граней одинаково наклонены к плоскости основания.

г) Плоскости боковых граней образуют одинаковые углы с высотой пирамиды.

12. В основании пирамиды – правильный треугольник со стороной 1. Каждая боковая грань пирамиды образует с основанием угол 60°. Найдите высоту пирамиды, если известно, что ее длина больше, чем 0,5.

13. Докажите, что в треугольной пирамиде, у которой боковые грани образуют одинаковый угол φ с плоскостью основания, площадь боковой поверхности можно вычислить по формуле: $S_{\text{бок}} = \dfrac{pr}{\cos\varphi}$, где p – полупериметр основания, r – либо радиус окружности, вписанной в основание, либо радиус вневписанной окружности.

В заключение выразим надежду, что рассмотренные утверждения, факты и соотношения, а также упражнения и разобранные задачи, позволят читателю успешно справиться с циклом задач, которые мы предлагаем для самостоятельного решения.

Задачи для самостоятельного решения

1. Докажите, что треугольник является прямоугольным тогда и только тогда, когда:

а) радиус одной из вневписанных окружностей равен полупериметру треугольника;

б) площадь треугольника равна произведению радиусов вписанной и одной из вневписанных окружностей;

в) площадь треугольника равна произведению двух радиусов вневписанных окружностей.

2. Отрезок, отличный от диагонали, разбивает квадрат на два многоугольника, в каждый из которых вписана окружность. Найдите длину этого отрезка, если радиусы окружностей равны R и r $(R > r)$.

3. Постройте треугольник по углу, высоте, проведенной из вершины этого угла, и периметру.

4. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD и BE. Оказалось, что DE – биссектриса треугольника ADC. Найдите угол BAC.

5. Углы, прилежащие к одной из сторон треугольника, равны 15° и 30°. Какой угол образует с этой стороной проведенная к ней медиана?

6. Точка E на стороне AD квадрата $ABCD$ такова, что $\angle AEB = 60^\circ$. Биссектриса угла ABE, отразившись от стороны AD, пересекает отрезок BE в точке F. Докажите, что точка F лежит на диагонали квадрата.

7. На полосу наложили квадрат, сторона которого равна ширине полосы, так, что его граница пересекает границы полосы в четырех точках. Докажите, что две прямые, проходящие крест-накрест через эти точки, пересекаются под углом 45°.

8. Дан треугольник ABC. На лучах AB и AC (вне треугольника) построены точки A_1 и A_2 соответственно так, что $BA_1 = CA_2 = BC$. A_0 – точка пересечения отрезков BA_2 и CA_1. Докажите, что прямая, проходящая через A_0 перпендикулярно прямой BC, содержит центр вневписанной окружности треугольника ABC.

9. Окружность с центром D проходит через вершины A, B и центр Q вневписанной окружности треугольника ABC, касающейся его стороны BC. Докажите, что точки A, B, C и D лежат на одной окружности.

10. $ABCD$ – параллелограмм. Вневписанные окружности треугольников ABC и ACD касаются сторон BC и CD соответственно. Докажите, что точки их касания с прямой AC совпадают.

11. Дан параллелограмм $ABCD$. Вневписанная окружность треугольника ABD касается продолжений сторон AD и AB в точках M и N. Докажите, что точки пересечения отрезка MN со сторонами BC и CD лежат на вписанной окружности треугольника BCD.

12. Постройте четырехугольник $ABCD$ по двум сторонам AB и AD и двум углам B и D, если известно, что в него можно вписать окружность.

13. а) Докажите, что произведение расстояний от вершины треугольника до центра вписанной окружности и до центра соответствующей этой вершине вневписанной окружности равно произведению сторон треугольника, сходящихся в этой вершине.

б) Через две вершины треугольника и центр вписанной в него окружности проведена окружность. Докажите, что отрезок касательной, проведенной к этой окружности из третьей вершины, есть среднее геометрическое между сторонами треугольника, сходящимися в этой вершине.

14. Окружность, вписанная в прямоугольный треугольник, касается катета BC и гипотенузы AB в точках P и Q соответственно. Вневписанная окружность, касающаяся катета BC, касается продолжения катета AC в точке T. Докажите, что точки P, Q и T лежат на одной прямой.

15. а) Через середину D стороны BC треугольника ABC и центр I окружности, вписанной в этот треугольник, проведена прямая, пересекающая высоту AH в точке E. Докажите, что отрезок AE равен радиусу вписанной окружности.

б) Биссектриса угла A пересекает окружность, описанную около треугольника ABC, в точке W. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается стороны BC в точке K, P – точка пересечения прямой WK с высотой AH. Докажите, что отрезок HP равен радиусу вписанной окружности.

16. а) Через середину D стороны BC треугольника ABC и центр Q вневписанной окружности, касающейся этой стороны, проведена прямая, пересекающая высоту AH в точке T. Докажите, что отрезок AT равен радиусу этой вневписанной окружности.

б) Биссектриса угла A пересекает окружность, описанную около треугольника ABC, в точке W, M – точка касания вневписанной окружности со стороной BC, Z – точка пересечения прямой WM с высотой AH. Докажите, что отрезок HZ равен радиусу этой вневписанной окружности.

17. Вневписанная окружность треугольника ABC касается его стороны BC в точке K, а продолжения стороны AB – в точке L. Другая вневписанная окружность касается продолжений сторон AB и AC в точках M и N соответственно. Прямые KL и MN пересекаются в точке X. Докажите, что CX – биссектриса угла ACN.

18. Равнобедренные треугольники ABC и $A'B'C'$ лежат в параллельных плоскостях. Известно, что точка C' равноудалена от вершин треугольника ABC, а каждая из точек B' и C' находится на таком же расстоянии от прямых AB, BC и AC. Найдите отношение площадей данных треугольников.

(Продолжение см. на с. 45)

Прыгучий шарик

В.МАЙЕР

Широко известен опыт, в котором два лежащих друг на друге шарика одновременно падают на твердую поверхность, при этом после удара верхний шарик меньшей массы подскакивает на высоту, превышающую ту, с которой он начал падать. Рассмотрим теорию этого явления в системах отсчета, связанных с поверхностью Земли и со свободно падающим в поле тяжести Земли массивным шариком.

Мы привыкли систему отсчета, связанную с поверхностью Земли, считать *инерциальной* и все механические задачи решать именно в этой системе отсчета. На самом деле, безупречно доказать инерциальность какой бы то ни было системы отсчета невозможно, а систему отсчета, связанную с Землей, можно считать инерциальной лишь с известной степенью приближения.

Мы уверенно называем *неинерциальной* систему отсчета, связанную со свободно падающим в поле тяжести Земли телом и, следовательно, движущуюся относительно нее с ускорением свободного падения. (В действительности, как раз такая система отсчета, если она ограничена небольшими размерами, и является инерциальной, точнее – локально инерциальной. Но это – разговор особый.)

Попробуем показать, насколько эффективно бывает использование неинерциальной системы отсчета, связанной со свободно падающим телом.

Эксперимент. Возьмите каучуковый шарик диаметром 30–50 мм и шарик для пинг-понга. В каучуковом шарике сверлом сделайте углубление и вставьте в него полиэтиленовый стержень от шариковой ручки. В шарике для пинг-понга просверлите диаметральные отверстия диаметром на 2–3 мм больше, чем диаметр стержня. Вместо пинг-понгового шарика можно использовать второй каучуковый шарик, масса которого значительно меньше массы первого; в таком случае в нем нужно просверлить сквозное отверстие. Наденьте шарик для пинг-понга на стержень и обрежьте стержень так, чтобы удобно было брать его пальцами (рис.1).

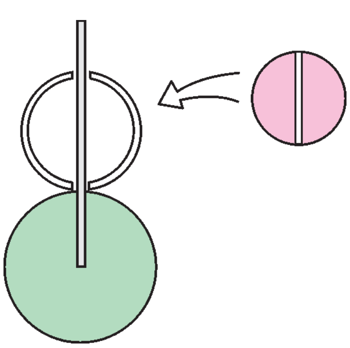

Рис. 1

Теперь – опыты. С высоты 10–20 см на твердую массивную столешницу отпустите снятый со стержня пинг-понговый шарик. Он отскочит и поднимется почти на ту же высоту, с которой падал. Возьмите за стержень каучуковый шарик и отпустите его с той же высоты, что и шарик для пинг-понга, – он отскочит и поднимется почти до той же высоты, с которой падал. Результаты этих опытов очевидны: шарики испытывают близкое к упругому соударение с поверхностью стола, поэтому энергии почти не теряют и подскакивают на высоту, лишь чуть-чуть меньшую той, с которой падали.

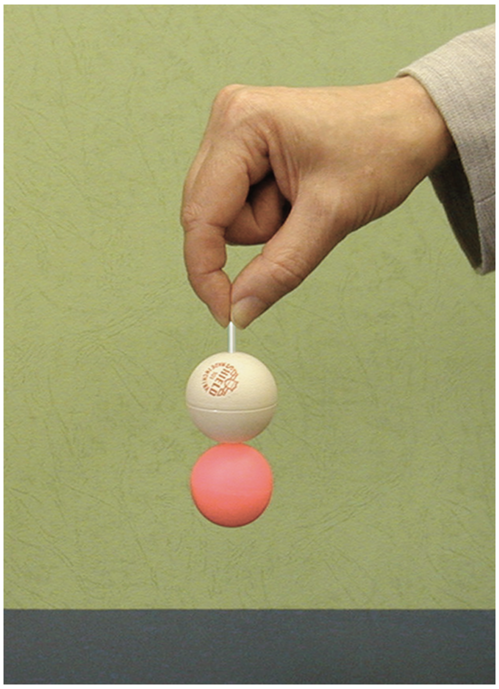

Рис. 2

Снова наденьте шарик для пинг-понга на стержень, возьмите выступающий конец стержня пальцами и отпустите оба шарика с той же высоты, что и раньше (рис.2). Вы с изумлением обнаружите, что пинг-понговый шарик при этом подскакивает на значительно бóльшую высоту, чем раньше! В чем дело? Неужели легкий шарик приобретает откуда-то дополнительную энергию? Давайте разберемся.

Явление в системе отсчета, связанной с поверхностью Земли. Шарики разной массы, практически не взаимодействуя друг с другом, подлетают с одной и той же скоростью $\vec{v}$ к твердой горизонтальной поверхности (рис.3). Первый

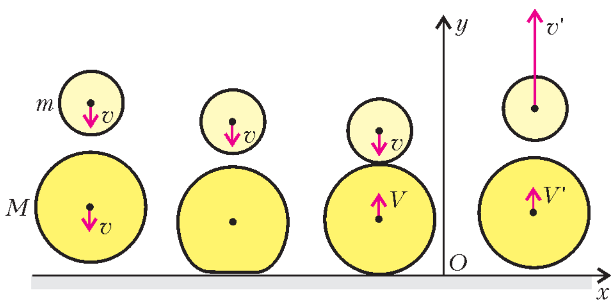

Рис. 3

(нижний) шарик, ударившись о поверхность, деформируется и на мгновение останавливается. Считая удар упругим, получаем, что после удара массивный шарик отскакивает со скоростью $\vec{V}$, по модулю равной скорости $\vec{v}$, которой он обладал в начале удара: $V = v$. В этот момент легкий шарик все еще продолжает падать вниз с прежней скоростью $\vec{v}$.

Таким образом, в нашей модели упруго взаимодействуют два шарика с массами M и m, движущиеся навстречу друг другу со скоростями $\vec{V}$ и $\vec{v}$ соответственно. Обозначим скорости первого и второго шариков после их соударения $\vec{V}'$ и $\vec{v}'$ соответственно. По закону сохранения импульса система тел после взаимодействия имеет тот же импульс, что и до взаимодействия:

$$M\vec{V} + m\vec{v} = M\vec{V}' + m\vec{v}' .$$

Переходя от векторов к их проекциям на вертикальную ось Oy, получаем

$$(M - m)v = MV' + mv'$$

(здесь индексы y у проекций скоростей опущены). Согласно закону сохранения энергии,

$$\frac{MV^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = \frac{MV'^2}{2} + \frac{mv'^2}{2} ,$$

или, учитывая, что $V = v$,

$$(M + m)v^2 = MV'^2 + mv'^2 .$$

Исключим из формул скорость V'. Для этого выразим эту скорость из закона сохранения импульса:

$$V' = \frac{(M - m)v - mv'}{M} = v - \frac{m}{M}(v + v')$$

и возведем ее в квадрат:

$$V'^2 = v^2 - 2\frac{m}{M}(v + v')v + \frac{m^2}{M^2}(v + v')^2 .$$

Масса шарика для пинг-понга значительно меньше массы каучукового шарика, поэтому членом, содержащим m^2/M^2, можно пренебречь по сравнению с остальными членами последней формулы. Тогда, подставляя значение V'^2 в закон сохранения энергии, получаем

$$(M + m)v^2 = Mv^2 - 2m(v + v')v + mv'^2 ,$$

или

$$3v^2 = -2vv' + v'^2 .$$

Добавив слева и справа в последнем равенстве по v^2, находим

$$4v^2 = (v - v')^2 , \text{ или } 2v = v' - v .$$

Таким образом, приходим к заключению, что скорость шарика меньшей массы после соударения в три раза больше скорости этого шарика до соударения:

$$v' = 3v .$$

Кинетическая энергия тела, упавшего с высоты h, равна начальной потенциальной энергии: $mv^2/2 = mgh$. Аналогичное равенство можно записать для тела, поднявшегося на высоту h' после удара о столешницу: $mv'^2/2 = mgh'$. Тогда окончательно получаем, что высота, на которую подскакивает легкий шарик, в 9 раз больше высоты, с которой он падает:

$$\frac{h'}{h} = \frac{v'^2}{v^2} = 9 .$$

Конечно, такого большого подскока мы не увидим. Во-первых, потому – не будем забывать этого – что наш результат приближенный, так как при выводе мы допустили упрощения. Во-вторых, потому что удары, конечно, далеко не упругие.

Большего эффекта можно добиться, если вместо рекомендованных выше шариков взять стальные: один диаметром 30–50 мм, а второй диаметром 5–10 мм. В этом случае высота подскока маленького шарика будет приближаться к вычисленному значению. Однако сам опыт, как нетрудно сообразить, станет гораздо более капризным.

Явление в системе отсчета, связанной со свободно падающим шариком. Вначале еще раз напомним, как происходит явление в системе отсчета xOy, связанной с поверхностью Земли. Для удобства векторы скоростей, совпадающие по направлению с осью y, будем считать положительными, а противоположные ей – отрицательными.

Подлетая к поверхности стола, шарики имеют одинаковые скорости $-v$ (рис.4,*а*). При ударе нижнего шарика о стол он испытывает упругое соударение и отскакивает вверх со

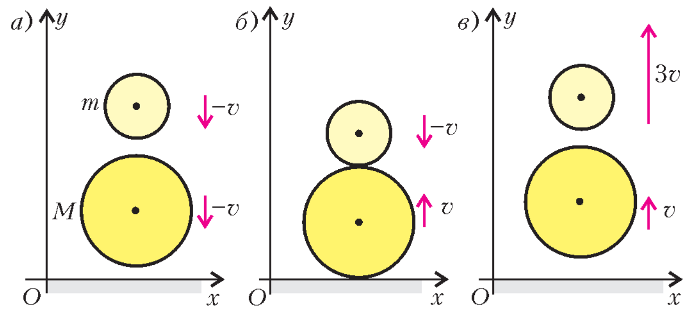

Рис. 4

скоростью v, а верхний шарик в этот момент продолжает двигаться со скоростью $-v$ относительно стола (рис.4,*б*). Далее верхний шарик сталкивается с движущимся навстречу ему нижним. Проведенный выше расчет показывает, что если считать это соударение упругим, а массу нижнего шарика существенно превышающей массу верхнего, то после соударения верхний шарик приобретает скорость, примерно равную $3v$ (рис.4,*в*).

Теперь это же явление рассмотрим в системе отсчета $x'O'y'$, связанной с нижним шариком. Подлетая к столу, оба шарика в этой системе отсчета имеют нулевую скорость, а стол движется навстречу им со скоростью v (рис.5,*а*). После упругого удара стола по нижнему шарику стол получает скорость $-v$, а верхний шарик, который продолжает двигаться относительно стола со скоростью $-v$, приобретает

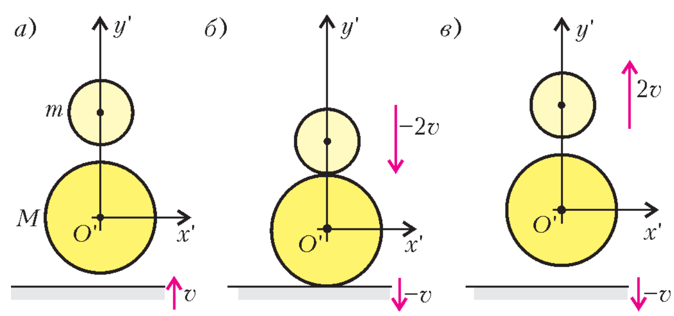

Рис. 5

скорость $-2v$ (рис.5,*б*). С этой скоростью он налетает на массивный нижний шарик и после упругого соударения с ним получает скорость, примерно равную $2v$, если $m \ll M$ (рис.5,*в*). Значит, относительно стола, который движется со скоростью $-v$, верхний шарик после удара начнет двигаться со скоростью приблизительно $3v$ и подскочит на высоту, примерно в 9 раз превышающую ту, с которой он начал падать. Именно это и требовалось доказать.

Заметим, что решение нашей задачи в неинерциальной системе отсчета, связанной со свободно падающим шариком, оказалось гораздо проще решения в инерциальной системе отсчета, связанной с поверхностью Земли.

Рекомендация. Проведите такой опыт в школе и выясните, кто из ваших товарищей сможет сразу объяснить явление, быстро перейдя в «страшную» неинерциальную систему отсчета, движущуюся с ускорением свободного падения. Если такие ребята обнаружатся, значит, дела с физикой в вашей школе обстоят нормально.

Разрезания на треугольники

А.СПИВАК

Леонард Эйлер (1707–1783) был первым, кто столкнулся с последовательностью, ныне носящей имя Эжена Шарля Каталана (1814–1894). Он спросил себя, сколькими способами можно выпуклый n-угольник разрезать на треугольники диагоналями, не пересекающимися внутри него. Ответ для $n = 3$ тривиален: один способ, так как никаких диагоналей проводить не надо. В четырехугольнике можно провести любую из двух диагоналей, так что способов два. В пятиугольнике – из любой вершины две диагонали, 5 способов.

При $n = 6$ – первый не вполне очевидный ответ: 14 способов (рис.1); чтобы не запутаться, сторона BC выделена и отдельно нарисованы разрезания, в которых к ней примыкают соответственно треугольники BCA, BCF, BCE и BCD.

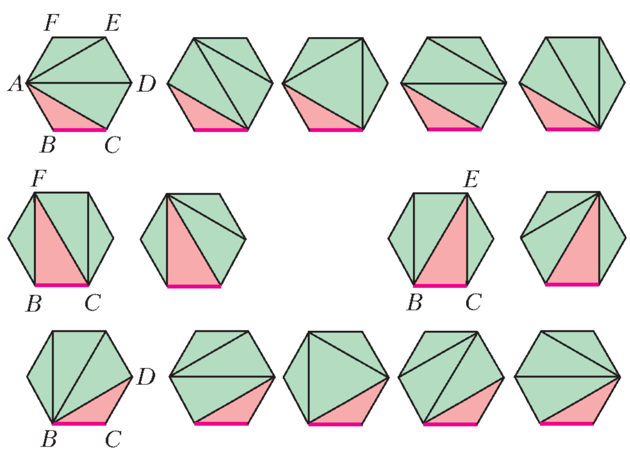

Рис. 1

В статье «Числа Каталана» («Квант» № 3 за 2004 год) приведено много других определений этой последовательности и тремя способами выведена явная формула

$$P_n = \frac{(2n-5)!!}{(n-1)!} \cdot 2^{n-2} \qquad (*)$$

для количества P_n разрезаний выпуклого n-угольника на треугольники. В этой формуле $(n-1)! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1)$ – произведение первых $n - 1$ натуральных чисел, а $(2n-5)!! = 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-5)$ – произведение первых $n - 3$ нечетных натуральных чисел. Например, $P_3 = \frac{1!!}{2!} \cdot 2^1 = 1$ и $P_4 = \frac{3!!}{3!} \cdot 2^2 = 2$.

Предлагаю вашему вниманию довольно простое доказательство формулы $(*)$. Его основная идея содержится в письме Ламэ Лиувиллю, которое было опубликовано в журнале «Journal de math. pures et appl.» в 1838 году.

Воспользуемся индукцией по n. База индукции (при $n = 3$) уже проверена.

Рассмотрим выпуклый n-угольник, разрезанный диагоналями на треугольники. Легко доказать, что количество диагоналей равно $n - 3$.

Упражнения

1. Докажите это утверждение по индукции.

2. Докажите по индукции, что количество треугольников разбиения равно $n - 2$.

3. Подсчитывая количества сторон треугольников, выведите формулу для количества диагоналей из формулы для количества треугольников.

Теперь – основная идея. Рассмотрим выпуклый n-угольник, разрезанный на треугольники диагоналями, не пересекающимися внутри многоугольника. Любая из $n - 3$ диагоналей, осуществляющих это разрезание, может двумя способами, как показано на рисунках 2 и 3 для $n = 4$ и $n = 5$

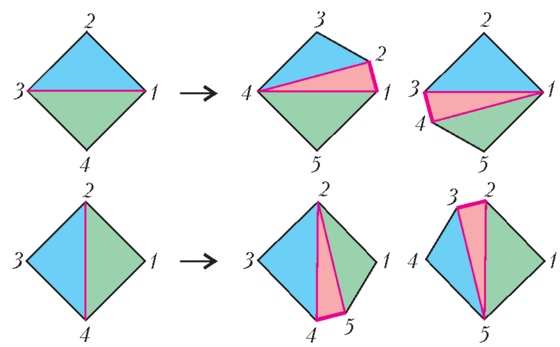

Рис. 2

соответственно, превратиться в треугольник и тем самым превратить разрезание n-угольника в разрезание $(n + 1)$-угольника $A_1A_2 \ldots A_nA_{n+1}$.

Таким образом P_n разрезаний выпуклого многоугольника $A_1A_2 \ldots A_n$ превращаются в $2(n-3)P_n$ разрезаний выпуклого $(n + 1)$-угольника $A_1A_2 \ldots A_nA_{n+1}$. На каждом таком разрезании выделена одна сторона (возникшая при «раздувании» диагонали в треугольник и выделенная на рисунках 2 и 3 красным цветом). Любая сторона, кроме $A_{n+1}A_1$, может быть выделенной.

Посмотрим на это с другой точки зрения. Пусть в выпуклом $(n + 1)$-угольнике $ABCD\ldots$ выделена сторона BC; выясним, сколько существует разрезаний на треугольники (как всегда, диагоналями, не пересекающимися внутри многоугольника). По определению, способов разрезать $(n + 1)$-угольник всего P_{n+1}. Однако не во всех таких способах сторона BC может быть выделенной: не годятся те способы, когда одним из треугольников, на которые разрезан $(n + 1)$-угольник, является треугольник ABC или BCD. Отрезая от $(n + 1)$-угольника треугольник ABC, мы получаем выпуклый n-угольник; для него по определению существует P_n разрезаний. То же самое происходит при отрезании от $(n + 1)$-угольника треугольника BCD: получаем выпуклый n-угольник, для которого количество разрезаний равно P_n.

Вернемся к подсчету количества «раздутых» n-угольников. Поскольку любая из сторон $(n + 1)$-угольника $A_1A_2 \ldots A_nA_{n+1}$, кроме $A_{n+1}A_1$, может быть выделенной, то

$$(2n-6)P_n = n\left(P_{n+1} - 2P_n\right),$$

откуда

$$nP_{n+1} = (4n-6)P_n.$$

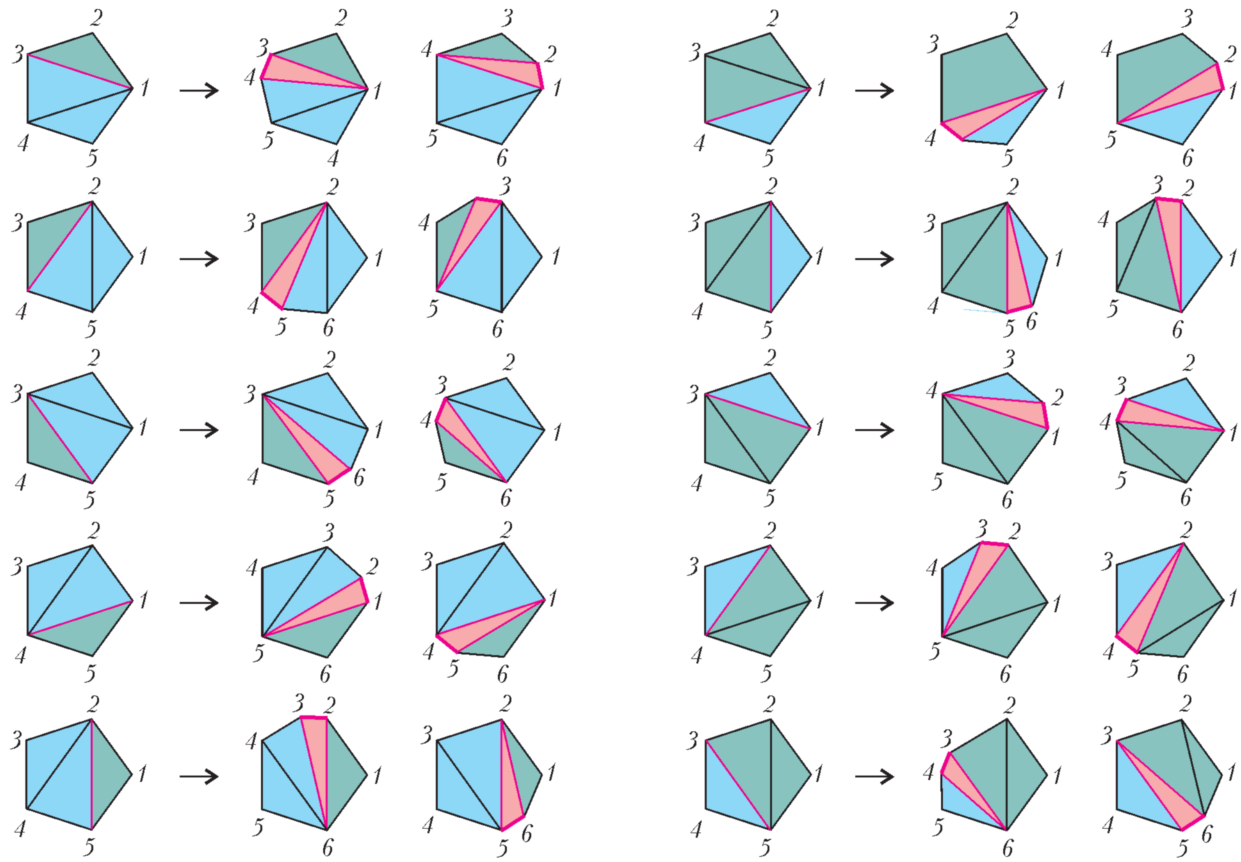

Рис. 3

Следовательно, если для некоторого натурального n верна формула $(*)$, то

$$P_{n+1} = \frac{4n-6}{n} \cdot \frac{(2n-5)!!}{(n-1)!} \cdot 2^{n-1} = \frac{(2n-3)!!}{n!} \cdot 2^{n-1},$$

так что формула $(*)$ верна в таком случае и для следующего за числом n натурального числа $n+1$. Индукционный переход обоснован, формула $(*)$ доказана!

Неравенства и ... параллельный перенос

М. ГОРЕЛОВ

В СТАТЬЕ РАССКАЗЫВАЕТСЯ О МЕТОДЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА неравенств, основанном на качественном рассмотрении графиков многочленов. Говоря о методе, я имею в виду стандартную последовательность шагов, позволяющую решать достаточно широкий круг задач, опираясь на знания и умения, а не на изобретательность и удачу. Конечно, роль изобретательности в математическом творчестве трудно переоценить. Но она дает тем больший эффект, чем шире технический арсенал, на который она опирается. Итак, поговорим о методе.

Основная идея

Докажем неравенство Коши[1] для двух неотрицательных чисел: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

Для этого рассмотрим квадратный трехчлен $f(t) = (t-a)(t-b)$. Его график – парабола «ветвями вверх» (рис.1). Среднее арифметическое $\frac{a+b}{2}$ – это абсцисса вершины параболы, а квадрат среднего геометрического $\sqrt{ab}$ равен ординате точки пересечения параболы с осью ординат.

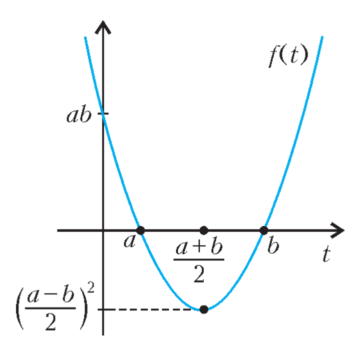

Рис. 1

Рассмотрим еще многочлен $g(t) = f(t) + \delta$, где δ – некоторое положительное число. Его график получается из графика многочлена $f(t)$ параллельным переносом на расстояние δ вверх (рис.2). Если число δ не очень велико, то многочлен $g(t)$ тоже имеет

[1] *Огюстен Луи Коши (1789–1857) – один из крупнейших французских математиков.*

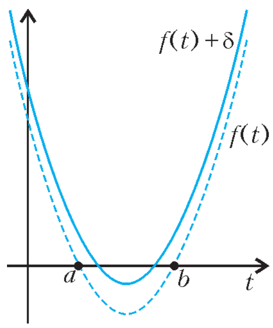

Рис. 2

два корня c и d, и мы можем написать аналогичное неравенство $\frac{c+d}{2} \ge \sqrt{cd}$.

Какое из этих двух неравенств сильнее? Конечно второе, так как левые части у этих неравенств равны (график-то мы сдвигали вверх, значит, абсцисса вершины не изменилась), а правая часть у второго неравенства больше, так как новый график пересекает ось ординат выше старого. Очевидно, что чем больше δ, тем более сильное неравенство мы будем получать.

Зададимся теперь вопросом, а при каких δ наши рассуждения справедливы? Очевидно, они проходят, пока получающийся многочлен имеет корни. Значит, самое сильное неравенство мы получим при $\delta = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$. Его нам *достаточно* доказать. Но при таком δ неравенство очевидно: в этом случае парабола касается оси абсцисс, корни нашего квадратного трехчлена совпадают, а среднее арифметическое и среднее геометрическое двух равных чисел равны между собой. Задача решена.

Конечно, у этой задачи есть другие, наверное, более естественные решения. И все сказанное выше не имело бы смысла, если бы аналогичные соображения не проходили и в других, более сложных случаях. Данную идею можно развивать в разных направлениях. Одно из них уже появлялось в «Кванте» (см. статью Л. Курляндчика «Приближение к экстремуму» в №1 за 1981 г.). Мы пойдем другим путем.[2]

Упражнения

1 (олимпиада мехмата МГУ, 1999 г.). Для положительных чисел a и b рассмотрим среднее гармоническое $H = \frac{2ab}{a+b}$, среднее геометрическое $G = \sqrt{ab}$, среднее арифметическое $A = \frac{a+b}{2}$ и среднее квадратическое $Q = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$. Что больше: HQ или AG?

2 (М483). Найдите наибольшее значение отношения квадрата радиуса вписанной окружности прямоугольного треугольника к сумме квадратов длин медиан, проведенных из острых углов.

Ключевой пример

Решим задачу, предлагавшуюся на олимпиаде 239 школы Санкт-Петербурга в 1995 году.

Задача 1. Сумма чисел x, y и z равна 0. Докажите, что $x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + 3 \ge 6xyz$.

Решение. Проделаем несколько трюков.

Трюк первый. Преобразуем неравенство. Заметим, что

$$(xy+yz+zx)^2 = x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + 2x^2yz + 2xy^2z + 2xyz^2 =$$
$$= x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + 2xyz(x+y+z).$$

С учетом того, что $x + y + z = 0$, неравенство перепишется в виде $(xy+yz+zx)^2 + 3 \ge 6xyz$.

Рассмотрим многочлен

$$f(t) = (t-x)(t-y)(t-z) =$$
$$= t^3 - (x+y+z)t^2 + (xy+yz+zx)t - xyz.$$

Его график приведен на рисунке 3. Очевидно, в некоторой точке a, лежащей между меньшим и средним своим корнем, этот многочлен достигает локального максимума.

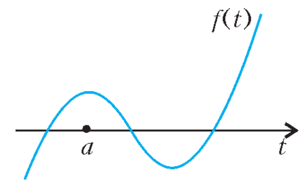

Рис. 3

А сейчас второй трюк. Рассмотрим еще многочлен

$$g(t) = (t-a)(t-a)(t+2a) =$$
$$= t^3 - (a+a-2a)t^2 + (aa-2aa-2aa)t - aa(-2a).$$

Сравним коэффициенты многочленов $f(t)$ и $g(t)$. Коэффициенты при t^3 и t^2 у них одинаковые: при t^3 – единица, при t^2 – нуль. Следовательно, производные этих многочленов отличаются на константу. Но при $t = a$ обе они обращаются в нуль (у многочлена $f(t)$ в этой точке локальный максимум, а у многочлена $g(t)$ – кратный корень). Поэтому $f'(t) = g'(t)$, т.е. коэффициенты при t у многочленов $f(t)$ и $g(t)$ тоже равны. Значит, график многочлена $g(t)$ получается из графика многочлена $f(t)$ параллельным переносом в вертикальном направлении. Но в точке a значение одного из них равно нулю, а другого – положительно. Значит, этот перенос осуществляется вниз. Стало быть, $g(0) \le f(0)$, или $aa(-2a) \ge xyz$.

Запишем интересующее нас неравенство для трех чисел a, a, $-2a$: $(aa-2aa-2aa)^2 + 3 \ge -12a^3$. Сказанное выше позволяет заключить, что новое неравенство сильнее исходного (левые части у них равны, а правая больше у нового), поэтому нам *достаточно* доказать, что $9a^4 + 12a^3 + 3 \ge 0$.

Теперь третий трюк:

$$9a^4 + 12a^3 + 3 = (9a^2 - 6a + 3)(a^2 + 2a + 1)$$

– и проверка неравенства уже не составляет труда. Задача решена.

Непосвященному может показаться, что это решение основано на цепи случайных совпадений. Чтобы показать, что это не так, раскроем секрет фокуса.

Теорема о симметрических многочленах

Первый раз нам повезло в том, что сумму $x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2$ удалось выразить через коэффициенты многочлена $f(t)$. Этот трюк основан на весьма важной теореме, значение которой выходит далеко за границы рассматриваемого нами круга вопросов. Поэтому сформулируем и докажем ее в общем виде.

Будем рассматривать многочлены от n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Они по-разному ведут себя при перестановках переменных. Например, многочлен $x_1^2x_2 + x_2^2x_3 + x_3^2x_1$ превратится в многочлен $x_2^2x_1 + x_1^2x_3 + x_3^2x_2$, если мы поменяем местами переменные x_1 и x_2, а многочлен $x_1^2x_2^2 + x_2^2x_3^2 + x_1^2x_3^2$ при той же перестановке переменных переходит в многочлен $x_2^2x_1^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2$, т.е. сам в себя.

Упражнение 3. Сколько разных многочленов можно получить перестановками переменных из многочленов, рассмотренных выше?

Многочлены, которые не меняются при *любых* перестановках переменных, называются симметрическими.

Упражнение 4. Докажите, что сумма, разность и произведение двух симметрических многочленов будут снова симметрическими многочленами.

[2] *Много интересного получается при синтезе этих двух направлений, но рамки статьи слишком узки, чтобы изложить соответствующие результаты. Оставим это читателям для самостоятельного исследования.*

Вот несколько важных примеров симметрических многочленов:

$$p_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 + x_2 + \dots + x_n,$$
$$p_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{n-1}x_n,$$
$$p_3(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \dots + x_{n-2}x_{n-1}x_n,$$
$$\dots$$
$$p_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1x_2\dots x_n$$

(во второй строчке стоит сумма всевозможных попарных произведений, в третьей – сумма всех произведений по три и так далее). Эти многочлены называются элементарными симметрическими. С точностью до знаков они равны коэффициентам при степенях t в стандартной записи многочлена

$$f(t) = (t - x_1)(t - x_2)\dots(t - x_n).$$

Теорема 1. *Для всякого симметрического многочлена* $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ *существует такой многочлен* Φ, *что при всех значениях* $x_1, x_2, \dots, x_n$ *выполняется равенство*

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \Phi\left(p_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, p_n(x_1, x_2, \dots, x_n)\right).$$

Доказательство. Фиксируем некоторое число q и докажем теорему для всех многочленов, степень которых меньше q. (Напомним, что степенью одночлена $Ax_1^{m_1}x_2^{m_2}\dots x_n^{m_n}$ называется число $m_1 + m_2 + \dots + m_n$. Степенью многочлена называется наибольшая из степеней входящих в него одночленов.) Поскольку число q может быть выбрано произвольно, тем самым теорема будет доказана для всех многочленов.

Весом одночлена $Ax_1^{m_1}x_2^{m_2}\dots x_n^{m_n}$ будем называть сумму $m_1q^{n-1} + m_2q^{n-2} + \dots + m_{n-1}q + m_n$. *Весом многочлена* будем называть максимальный из весов входящих в него одночленов.

Утверждение 1. Многочлен степени, меньшей q, не содержит членов равного веса.

Утверждение 2. Вес произведения двух многочленов равен сумме весов сомножителей, причем «самый тяжелый» член произведения равен произведению «самых тяжелых» членов сомножителей.

Упражнение 5. Докажите утверждения 1 и 2.

Воспользуемся индукцией по весу многочлена. Многочлен веса 0 – это просто константа, и для него утверждение теоремы очевидно.

Предположим, теорема уже доказана для всех многочленов, вес которых меньше w. Пусть симметрический многочлен $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ имеет вес w, и $Ax_1^{m_1}x_2^{m_2}\dots x_n^{m_n}$ – входящий в него одночлен максимального веса.

Утверждение 3. Верно неравенство $m_1 \ge m_2 \ge \dots \ge m_n$.

Упражнение 6. Докажите это.

Рассмотрим многочлен

$$\Psi(x_1, x_2, \dots, x_n) =$$
$$= A \cdot (p_1(x_1, x_2, \dots, x_n))^{m_1-m_2} p_2(x_1, x_2, \dots, x_n))^{m_2-m_3}\dots$$
$$\dots\ (p_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n))^{m_{n-1}-m_n}(p_n(x_1, x_2, \dots, x_n))^{m_n}.$$

Утверждение 4. Одночлен $Ax_1^{m_1}x_2^{m_2}\dots x_n^{m_n}$ входит в многочлен Ψ, а веса всех остальных одночленов, входящих в него, меньше w.

Упражнение 7. Докажите это.

Тогда разность $F(x_1, x_2, \dots, x_n) - \Psi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ имеет вес, меньший w, и к ней можно применить предположение индукции. Для завершения доказательства остается воспользоваться равенством

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) =$$
$$= \Psi(x_1, x_2, \dots, x_n) + \left(F(x_1, x_2, \dots, x_n) - \Psi(x_1, x_2, \dots, x_n)\right).$$

Мне не удалось выяснить, когда впервые появилась эта теорема. Приведенные выше рассуждения с небольшими изменениями воспроизводят доказательство Гаусса[3].

Этот метод доказательства конструктивен: применяя описанную в нем процедуру, можно за конечное число шагов получить разложение произвольного симметрического многочлена через элементарные симметрические. Однако на практике такой способ не всегда является самым экономичным. Чаще эта теорема используется как чистая теорема существования. Обычно это позволяет найти необходимое разложение, а иногда можно обойтись и без этого.

Упражнение 8. Докажите, что если в условиях теоремы 1 многочлен F имеет целые коэффициенты, то и многочлен Φ имеет целые коэффициенты.

Теперь первый трюк при рассмотрении ключевого примера может быть сделан так. По теореме 1 сумма $x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2$ может быть записана в виде

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 =$$
$$= \alpha(x + y + z)^4 + \beta(xy + xz + yz)(x + y + z)^2 +$$
$$+ \gamma xyz(x + y + z) + \delta(xy + xz + yz)^2,$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ – некоторые числа. Коэффициент δ можно легко найти, положив $x = 1$, $y = -1$, $z = 0$. Значения же остальных коэффициентов для нас не важны, поскольку по условию $x + y + z = 0$. Отсюда и получаем равенство $x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 = (xy + xz + yz)^2$.

Приведем еще один пример использования теоремы 1.

Задача 2 (заключительный тур Всероссийской олимпиады, 2003 г.). Пусть $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ и $a + b + c = 1$. Докажите неравенство

$$\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c} \ge \frac{2}{1+a} + \frac{2}{1+b} + \frac{2}{1+c}.$$

Решение. Это неравенство симметрично. Тождественные преобразования никогда не нарушают симметрии, поэтому, если мы умножим его на $(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)$ и соберем все слагаемые в левой части, то получим неравенство вида $F(a,b,c) \ge 0$, где F – некоторый симметрический многочлен. Удобнее доказать, что это неравенство выполняется для всех *неотрицательных* значений a, b, c.

Степень этого многочлена не превосходит пяти. По теореме о симметрических многочленах его можно разложить через элементарные симметрические многочлены. А поскольку его степень достаточно мала, элементарный симметрический многочлен abc будет входить в это разложение в степени, не превышающей первую.

Будем рассматривать числа a, b, c как корни многочлена $f(t) = (t-a)(t-b)(t-c)$. Можно считать, что они различны: случай совпадения хотя бы двух чисел a, b, c будет разобран далее; поэтому график многочлена $f(t)$ имеет вид, изображенный на рисунке 3. Сдвигая этот график вдоль оси ординат, т.е. прибавляя к $f(t)$ константу, мы меняем числа a, b, c так, что значения симметрических многочленов $a + b + c$ и $ab + bc + ca$ остаются неизменными, а произведение abc меняется в известных пределах (напомним, что с точностью до знака это коэффициенты многочлена f). Значит, $F(a,b,c)$ имеет вид $\alpha abc + \beta$, где числа α и β не меняются при наших сдвигах. Но линейная функция $\alpha abc + \beta$ от произведения abc обязательно достигает своего наименьшего значения на отрезке в одном из концов этого отрезка.

[3] *Карл Фридрих Гаусс (1777–1855) – крупнейший немецкий математик.*