ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 июля 2009 года по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №2–2009» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М2124» или «Ф2130». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений). Решения задач по математике и физике можно присылать также по электронным адресам math@kvant.info и phys@kvant.info соответственно.

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задача М2126 предлагалась на региональном этапе XXXV Всероссийской олимпиады школьников по математике, задача М2129 – на I Президентской олимпиаде Казахстана. Задача М2130 была напечатана в болгарском журнале «Математика» и публикуется в «Кванте» в рамках сотрудничества с коллегами из Болгарии.

Задачи Ф2130–Ф2132 и Ф2137 предлагались на первом туре Московской городской олимпиады школьников по физике.

Задачи М2124–М2130, Ф2130–Ф2137

М2124. Пусть $n \geq 3$ – натуральное число, а $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – положительные числа, удовлетворяющие равенствам

$$x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 = x_2^2 - x_2x_3 + x_3^2 = \ldots$$
$$\ldots = x_{n-1}^2 - x_{n-1}x_n + x_n^2 = x_n^2 - x_nx_1 + x_1^2 .$$

При каких n можно утверждать, что числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ равны?

В.Сендеров

М2125. Вписанная в треугольник ABC окружность ω касается сторон CA и AB в точках B_1 и C_1 соответственно. Точка D, отличная от B_1 и C_1, находится на расстоянии AC_1 от точки A. Прямые DB_1 и DC_1 пересекают второй раз окружность ω в точках B_2 и C_2. Докажите, что B_2C_2 – диаметр окружности ω, перпендикулярный отрезку DA.

Р.Женодаров

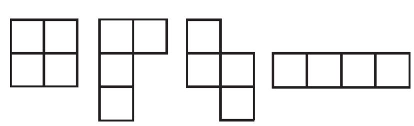
М2126. На вечеринке компанию из 20 человек требуется усадить за 4 стола. Рассадка называется *удачной*, если любые два человека, оказавшиеся за одним столом, являются друзьями. Выяснилось, что удачные рассадки существуют, причем при любой удачной рассадке за каждым столом сидят ровно по 5 человек. Каково наибольшее возможное количество пар друзей в этой компании?

П.Кожевников

М2127. Внутри ветви гиперболы $x = \sqrt{y^2 + 1}$ расположены окружности $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots$ так, что при каждом $n > 1$ окружность ω_n касается гиперболы в двух точках и касается окружности ω_{n-1}, а окружность ω_1 имеет радиус 1 и касается гиперболы в точке $(1, 0)$. Докажите, что для любого n радиус окружности ω_n равен натуральному числу.

В.Расторгуев

М2128. Вася отметил 10 клеток в клетчатой таблице 10×10 клеток. Всегда ли Петя может вырезать из этой таблицы по линиям сетки 19 фигурок вида



так, чтобы фигурки не содержали отмеченные клетки?

И.Богданов, О.Подлипский

М2129. Найдите все пары натуральных чисел $n > 1$ и k, для которых $1^n + 2^n + \ldots + (n-1)^n = n^k$.

В.Сендеров

М2130. Дан плоский (невыпуклый) шестиугольник $ABCDEF$, в котором $AB = DE$, $BC = EF$, $CD = FA$, $\angle FAB = 3\angle CDE$, $\angle BCD = 3\angle EFA$, $\angle DEF = 3\angle ABC$ (здесь имеются в виду внутренние углы многоугольника, некоторые из которых могут быть больше 180°). Известно, что никакие две стороны шестиугольника не параллельны. Докажите, что прямые AD, BE и CF пересекаются в одной точке.

Н.Белухов (Болгария)

Ф2130. Удав решил установить мировой рекорд в прыжках в высоту среди удавов. Удав может из положения «свернувшись лежа» выпрямиться почти вертикально и разогнаться до скорости v. Длина Удава L. Каким может быть рекорд? Как должен двигаться Удав, чтобы установить рекорд? Масса Удава распределена по его длине равномерно.

С.Варламов

Ф2131. Горизонтальная платформа, на которую положили без начальной скорости груз массой m, совершает f раз в секунду такие колебания: сначала она движется вправо с постоянным ускорением a, потом мгновенно останавливается и возвращается в начальное положение с постоянным ускорением $a/2$. Коэффициент трения между грузом и платформой $\mu < 1$, ускорение $a \gg g$, частота $f \gg 1$ Гц. В каком направлении и по какому закону будет двигаться груз, и будет ли он вообще двигаться? Считать, что скорость движения груза всегда много меньше максимальной скорости движения платформы.

А.Андрианов

Ф2132. Один из концов U-образной трубки постоянного сечения с налитой в нее ртутью наглухо закрыли. Воздух в закрытом конце трубки стали медленно нагревать, измеряя зависимость его давления p от температуры T. Как оказалось, эта зависимость в начале нагревания приближенно является линейной: $p = p_0\left(1 + \alpha\left(T/T_0 - 1\right)\right)$, где p_0 = 760 мм рт. ст. – атмосферное давление, T_0 – температура окружающей среды, коэффициент α = 0,5. Найдите высоту столба воздуха в закрытом конце трубки в начале процесса.

О.Шведов

Ф2133. Проводящие концентрические сферы имеют радиусы R и $3R$, на расстоянии $2R$ от их общего центра находится точечный заряд Q. Сферы соединяют между собой тонким проводом, и получившийся проводник заземляют тонким проводником, имеющим большое сопротивление. Какой заряд протечет по этому проводнику? Какое количество теплоты выделится в системе за большое время?

А.Теплов

Ф2134. Обычный «мостик» собран из трех резисторов сопротивлением 100 Ом каждый и одного резистора сопротивлением 20 Ом. В одну из диагоналей мостика включен амперметр, он показывает 0,1 А. Какой ток течет через батарейку, подключенную к другой диагонали мостика? Амперметр считать идеальным.

О.Простов

Ф2135. Конденсатор емкостью C = 100 мкФ соединен последовательно с катушкой индуктивностью L = = 1 Гн. К выводам получившейся цепи подключают батарейку напряжением U_0 = 1 В, и ток в цепи начинает увеличиваться. В тот момент, когда ток максимален, параллельно катушке подключают резистор сопротивлением R = 10 кОм. Какой заряд протечет через резистор и сколько тепла в нем выделится за большой интервал времени? Элементы цепи считать идеальными.

А.Повторов

Ф2136. Для передачи не очень высокоскоростной информации используется витая пара, состоящая из двух тонких изолированных проводов большой длины. Индуктивность проводов в расчете на 1 сантиметр длины пары равна 1 мкГн, емкость между проводами составляет 1 пФ на сантиметр. С какой скоростью бежит электромагнитная волна вдоль такой пары?

З.Рафаилов

Ф2137. Тонкая плосковогнутая рассеивающая линза прижата плоскостью к торцу цилиндрической трубки. В трубку вставлена плосковыпуклая собирающая линза так, что главные оптические оси линз совпадают с осью трубки, а собирающая линза обращена к рассеивающей плоской стороной. Собирающую линзу можно перемещать вдоль оси трубки. Если на первую (рассеивающую) линзу вдоль оси направить узкий параллельный пучок света, то при некотором расстоянии между линзами из системы выйдет также параллельный пучок. Если же пространство между линзами заполнить жидкостью, то для получения на выходе параллельного пучка расстояние между линзами необходимо увеличить в 1,5 раза. Найдите показатель преломления жидкости.

В.Погожев

Решения задач М2101–М2110, Ф2118–Ф2122

М2101. *Дан квадратный трехчлен $f(x) = x^2 + ax + b$. Известно, что для любого действительного числа x найдется такое действительное число y, что $f(y) = f(x) + y$. Найдите наибольшее возможное значение a.*

Ответ: $a = \frac{1}{2}$.

Из условия следует, что квадратное уравнение $f(y) - y - f(x) = 0$ разрешимо относительно y при любом значении x. Подставив $x = -\frac{a}{2}$, получаем уравнение $y^2 + (a-1)y + \frac{a^2}{4}$, дискриминант которого равен $D = (a-1)^2 - a^2 = 1 - 2a \geq 0$, откуда $a \leq \frac{1}{2}$.

С другой стороны, если $a = \frac{1}{2}$, то при любом x можно положить $y = -x$; тогда имеем

$$f(y) - y - f(x) = \left(x^2 - \frac{1}{2}x + b\right) + x - \left(x^2 + \frac{1}{2}x + b\right) = 0,$$

что и требовалось.

Д.Терёшин

М2102. *По кругу расставлены красные и синие числа. Каждое красное число равно сумме соседей, а каждое синее – полусумме соседей. Докажите, что сумма красных чисел равна нулю.*

Пусть a, b, c – три числа, стоящие подряд. Если b – красное, то $b = a + c$, а если b – синее, то $2b = a + c$.

Запишем такие равенства для всех троек последовательных чисел и сложим их. Тогда, если R – сумма всех красных чисел, а B – сумма всех синих, то мы получим равенство $R + 2B = 2(R + B)$, откуда $R = 0$.

И.Богданов

М2103. *Дана таблица $n \times n$, столбцы которой пронумерованы числами от 1 до n. В клетки таблицы расставляются числа 1, 2, …, n так, что в каждой строке и в каждом столбце все числа различны. Назовем клетку хорошей, если число в ней больше номера столбца, в котором она находится. При каких n существует расстановка, в которой во всех строках одинаковое количество хороших клеток?*

Ответ: при нечетных n.

Найдем общее количество хороших клеток. В первом столбце их $n - 1$ (все, кроме клетки с числом 1), во втором их $n - 2$ (все, кроме клеток с числами 1 и 2) и т.д., в последнем столбце таких клеток нет. Значит, всего их $(n-1) + (n-2) + \ldots + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$. Поэтому в каждой строке их должно быть по $\frac{n-1}{2}$, следовательно, n должно быть нечетным.

Приведем пример расстановки при нечетном n. Пусть в первой строке записаны числа в порядке 1, n, $n - 1$, $n - 2$, …, 2, а каждая следующая строка является циклическим сдвигом предыдущей строки на 1 клетку (см. рисунок).

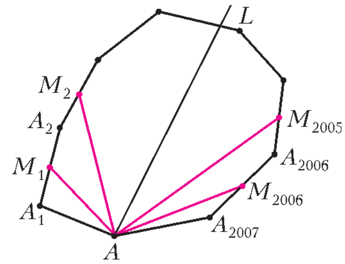
1	n	$n-1$	$\cdots$	2
2	1	n	$\cdots$	3
3	2	1	$\cdots$	4
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$n-1$	$n-2$	$n-3$	$\cdots$	n
n	$n-1$	$n-2$	$\cdots$	1

Очевидно, в любой строке и в любом столбце каждое из чисел $1, 2, \ldots, n$ встречается по одному разу. Рассмотрим m-ю строку $(m \in \{1, 2, \ldots, n\})$. В ее первых m клетках стоят числа 1, 2, …, m в обратном порядке, поэтому среди этих клеток ровно $\left[\frac{m}{2}\right]$ хороших. В ее последних $n - m$ клетках (т.е. в столбцах с номерами $m + 1$, $m + 2$, …, n) стоят числа $m + 1$, $m + 2$, …, n в обратном порядке, поэтому среди этих клеток ровно $\left[\frac{n-m}{2}\right]$ хороших. Так как числа m и $n - m$ разной четности, то в m-й строке ровно $\left[\frac{m}{2}\right] + \left[\frac{n-m}{2}\right] = \frac{m}{2} + \frac{n-m}{2} - \frac{1}{2} = \frac{n-1}{2}$ хороших клеток.

К.Чувилин

М2104. *Фокусник отгадывает площадь выпуклого 2008-угольника $A_1A_2 \ldots A_{2008}$, находящегося за ширмой. За один вопрос он называет две точки на периметре многоугольника; зрители отмечают эти точки, проводят через них прямую и сообщают фокуснику меньшую из двух площадей частей, на которые 2008-угольник разбивается этой прямой. При этом в качестве точки фокусник может назвать либо вершину, либо точку, делящую указанную им сторону в численном отношении. Докажите, что за 2006 вопросов фокусник сможет отгадать площадь многоугольника.*

Пусть $A = A_{2008}$. Диагонали, выходящие из вершины A, делят его на 2006 треугольников $AA_1A_2, \ldots$ $\ldots, AA_{2006}A_{2007}$ (см. рисунок). Пусть $AM_1, \ldots, AM_{2006}$ – медианы этих треугольников. Покажем, что называя все пары точек (A, M_k), $k = 1, 2, \ldots$ …, 2006, фокусник сможет отгадать площадь многоугольника. Пусть S_k – площадь, сообщаемая фокуснику для прямой AM_k, а $2T_k$ – площадь треугольника AA_kA_{k+1}. Так как медиана делит треугольник на две равновеликие части, то



$$S_k = \min\left\{2\left(T_1 + \ldots + T_{k-1}\right) + T_k, T_k + 2\left(T_{k+1} + \ldots + T_{2006}\right)\right\}.$$

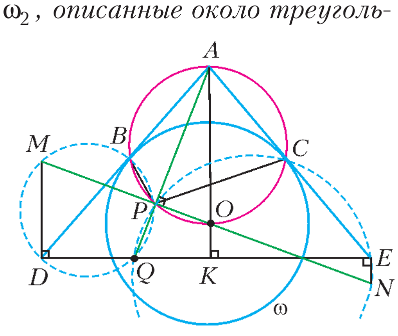
При этом ясно, что $S_1 = T_1$ и $S_{2006} = T_{2006}$. Заметим, что фокуснику достаточно найти все T_k.

Пусть AL – прямая, делящая площадь многоугольника пополам. Если отрезки $AM_1, \ldots, AM_t$ расположены по одну сторону от прямой AL, а отрезки $AM_{t+1}, \ldots, AM_{2006}$ – по другую, то фокуснику будут сообщать площадь многоугольника $AA_1 \ldots A_kM_k$ при $k = 1, \ldots, t$ и многоугольника $AA_{2007} \ldots A_{k+1}M_k$ при $k = t + 1, \ldots, 2006$. Поэтому $S_1 < \ldots < S_t$ и $S_{t+1} > \ldots > S_{2006}$. Таким образом, если фокусник обнаружил, что $S_1 < \ldots$ $\ldots < S_n \geq S_{n+1} > \ldots > S_{2006}$, то $t = n$ или $t = n - 1$. Следовательно, при $k = 1, \ldots, n - 1$ имеем $S_k =$ $= 2\left(T_1 + \ldots + T_{k-1}\right) + T_k$, откуда находятся $T_1, \ldots, T_{n-1}$, а при $k = n + 1, \ldots, 2006$ имеем $S_k = T_k + 2\left(T_{k+1} + \ldots\right.$ $\left.\ldots + T_{2006}\right)$, откуда находятся $T_{2006}, \ldots, T_{n+1}$. Остается найти T_n, которое вычисляется из равенства

$$S_n = 2\min\left\{T_1 + \ldots + T_{n-1}, T_{n+1} + \ldots + T_{2006}\right\} + T_n.$$

Н.Агаханов

М2105. *Окружность ω с центром O вписана в угол BAC и касается его сторон в точках B и C. Внутри угла BAC выбрана точка Q. На отрезке AQ нашлась такая точка P, что $AQ \perp OP$. Прямая OP пересекает окружности ω_1 и ω_2, описанные около треугольников BPQ и CPQ, вторично в точках M и N. Докажите, что OM = ON.*



Пусть описанные окружности треугольников BPQ и CPQ пересекают лучи AB и AC в точках D и E соответственно (см. рисунок).

Из теоремы о произведении отрезков секущих получаем $AB \cdot AD = AP \cdot AQ$ и, аналогично, $AC \cdot AE =$ $= AP \cdot AQ$, откуда $AB \cdot AD = AC \cdot AE$. Так как $AB =$ $= AC$ (отрезки касательных к ω), то $AD = AE$, и треугольник ADE – равнобедренный. Пусть K – середина DE. Тогда прямая AK является медианой, высотой и биссектрисой равнобедренного треугольника ADE, в частности, AK проходит через O.

Так как $\angle ABO = \angle ACO = \angle APO = 90°$, то точки A, B, C, P, O лежат на окружности с диаметром AO. Из вписанных четырехугольников $ABPC$, $BPQD$, $CPQE$ имеем

$$\angle PQD = 180° - \angle PBD = \angle ABP =$$
$$= 180° - \angle ACP = \angle PCE = 180° - \angle PQE,$$

поэтому точка Q лежит на отрезке DE.

Так как четырехугольник $PQDM$ вписанный, то $\angle MDQ = \angle MPQ = 90°$, откуда $MD \perp DE$. Аналогично, $NE \perp DE$. Таким образом, $MD \parallel OK \parallel NE$ и $DK = KE$. Отсюда вытекает, что $OM = ON$.

А.Акопян, П.Кожевников

М2106. *При каких натуральных $n > 1$ существуют такие натуральные $b_1, \dots, b_n$ (не все из которых равны), что при всех натуральных k число $(b_1 + k)(b_2 + k)\dots(b_n + k)$ является степенью натурального числа? (Показатель степени может зависеть от k, но должен быть всегда больше 1.)*

Ответ: при составных n.

Все числа в решении считаются натуральными, если не оговорено противное.

Пусть n – составное число, т.е. $n = r \cdot s$, где $r > 1$, $s > 1$. Тогда достаточно рассмотреть числа $b_1 = \dots = b_r = 1$, $b_{r+1} = \dots = b_n = 2$. Очевидно, что при всяком k число $(b_1 + k)\dots(b_n + k)$ – r-я степень.

Пусть теперь n – простое число и $b_1, \dots, b_n$ – произвольные натуральные числа, не все из которых равны. Без ограничения общности можно считать, что $b_1, \dots, b_l$ – попарно различные числа, а каждое из чисел $b_{l+1}, \dots, b_n$ равно одному из $b_1, \dots, b_l$. Пусть среди чисел $b_1, \dots, b_n$ имеется s_i равных b_i, где $1 \le i \le l$; $s_1 + \dots + s_l = n$.

Воспользуемся **китайской теоремой об остатках**: каковы бы ни были натуральные попарно взаимно простые числа $a_1, a_2, \dots, a_l$ и целые неотрицательные числа $r_1, r_2, \dots, r_l$ ($r_1 < a_1$, $r_2 < a_2, \dots, r_l < a_l$), существует такое натуральное число m, которое при делении на числа $a_1, a_2, \dots, a_l$ дает остатки $r_1, r_2, \dots, r_l$ соответственно.

Возьмем l различных простых чисел $p_1, \dots, p_l$, которые больше всех b_i, и положим $a_i = p_i^2$, $r_i = p_i - b_i$ при $1 \le i \le l$. Числа p_i^2 попарно взаимно просты и $0 < r_i < p_i < p_i^2$, таким образом, выполняются условия китайской теоремы об остатках. Рассмотрим существующее вследствие этой теоремы число m и докажем, что если $(b_1 + m)\dots(b_n + m) = u^v$, то $v = 1$.

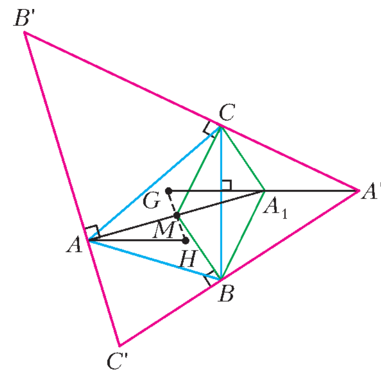
Возьмем произвольное число i, $1 \le i \le l$. Число $b_i + m$ при делении на p_i^2 дает остаток $r_i + b_i = p_i$. Отсюда ясно, что $b_i + m$ делится на p_i и не делится на p_i^2. При $j \ne i$ имеем $0 < |b_i - b_j| < p_i$, поэтому $b_j + m$ на p_i не делится.

Таким образом, в каноническом разложении числа $(b_1 + m)\dots(b_n + m)$ на простые множители каждое число p_i содержится ровно в степени s_i.

Значит, число v является делителем всех s_i, а следовательно, и делителем их суммы n. При этом $v < n$, поэтому $v = 1$.

В.Произволов, В.Сендеров

М2107. *В неравнобедренном треугольнике ABC точки H и M – точки пересечения высот и медиан соответственно. Через вершины A, B и C проведены прямые, перпендикулярные прямым AM, BM, CM соответственно. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника, образованного проведенными прямыми, лежит на прямой MH.*



Пусть $A'B'C'$ – треугольник, образованный проведенными прямыми (см. рисунок), и G – точка пересечения его медиан. Мы докажем, что M является серединой отрезка GH.

Достроим треугольник BMC до параллелограмма $BMCA_1$. Отрезок MA_1 делит сторону BC пополам, поэтому A_1 лежит на прямой AM, причем $AM = A_1M$ (поскольку точка M делит медиану в отношении 2:1). Кроме того, $BA_1 \parallel MC \perp A'B'$ и $CA_1 \parallel MB \perp A'C'$, поэтому BA_1 и CA_1 – высоты треугольника $BA'C$, значит, A_1 является ортоцентром треугольника $BA'C$, и $A'A_1 \perp BC$. Стороны треугольника BA_1M перпендикулярны сторонам треугольника $A'B'C'$ соответственно, поэтому эти треугольники подобны, причем соответствующие прямые BC и $A'G$, содержащие медианы этих треугольников, перпендикулярны. Значит, прямая $A'G$ совпадает с прямой $A'A_1$. Пусть G' – точка, симметричная точке H относительно M. Треугольники AHM и $A_1G'M$ симметричны относительно M, поэтому $A_1G' \parallel AH \perp BC$. Отсюда следует, что G' лежит на прямой $A'G$. Аналогично, получаем, что G' лежит на прямой $B'G$, т.е. G' совпадает с G.

Л.Емельянов, П.Кожевников

М2108. *Дано конечное множество простых чисел P. Докажите, что найдется натуральное число x такое, что оно представляется в виде $x = a^p + b^p$ (с натуральными a, b) при всех $p \in P$ и не представляется в таком виде для любого простого $p \notin P$.*

Лемма. Пусть p – простое число. Тогда число 2^n представляется в виде $a^p + b^p$ в том и только том случае, когда $n - 1 \vdots p$.

Доказательство. Если $n - 1 = kp$, то представление существует: $2^n = \left(2^k\right)^p + \left(2^k\right)^p$. Предположим, что при некотором n такое представление нашлось: $2^n = a^p + b^p$. Пусть $a = 2^s k$, $b = 2^t l$, где k, l нечетны. Если, скажем, $s > t$, то $a^p + b^p = 2^{pt}\left(2^{p(s-t)}k^p + l^p\right)$, и число 2^n имеет нечетный делитель $2^{p(s-t)}k^p + l^p$, больший единицы; это невозможно. Значит, $s = t$, и тогда $a^p + b^p = 2^{pt}\left(k^p + l^p\right)$.

Если $p = 2$, то число $k^p + l^2$ имеет остаток 2 при делении на 4, и если оно больше 2, то 2^n имеет нечетный делитель $\frac{k^p + l^p}{2}$, больший 1; это невозможно, поэтому $k = l = 1$, $2^n = 2 \cdot 2^{pt}$, и $n = pt + 1$, что и требовалось. Если же $p > 2$, то оно нечетно, и

$$k^p + l^p = (k + l)\left(k^{p-1} - k^{p-2}l + \ldots + l^{p-1}\right).$$

Вторая скобка нечетна и является делителем числа 2^n, поэтому она равна 1; значит, $k^p + l^p = k + l$, что возможно лишь при $k = l = 1$, и тогда опять получаем $n = pt + 1$. Лемма доказана.

Перейдем к решению задачи. Пусть $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$. Положим $x = 2^{p_1 p_2 \ldots p_n + 1}$. Тогда по лемме это число является искомым.

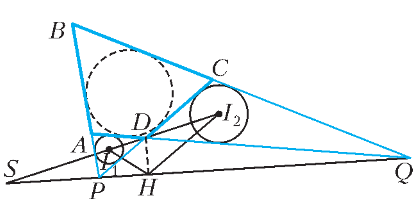
Замечание. Легко видеть, что существует бесконечно много таких чисел; подходят, например, все числа вида $2^{p_1^k p_2 \ldots p_n + 1}$.

В.Сендеров

M2109. *Дан выпуклый четырехугольник ABCD. Пусть P и Q – точки пересечения лучей BA и CD, BC и AD соответственно, а H – проекция D на PQ. Докажите, что четырехугольник ABCD является описанным тогда и только тогда, когда вписанные окружности треугольников ADP и CDQ видны из точки H под равными углами.*

Пусть ω_1 и ω_2 – вписанные окружности треугольников ADP и CDQ, I_1 и I_2 – их центры, r_1 и r_2 – их радиусы. Так как окружности ω_1 и ω_2 гомотетичны с центром D, то $\frac{r_1}{r_2} = \frac{DI_1}{DI_2}$.

1. Пусть $r_1 \neq r_2$, и пусть S – центр гомотетии с положительным коэффициентом, переводящей ω_1 в ω_2 (т.е. точка пересечения общих внешних касательных к окружностям; см. рисунок).



Второе условие равносильно тому, что $\frac{HI_1}{HI_2} = \frac{r_1}{r_2}$. Известно, что множество всех точек X таких, что $\frac{XI_1}{XI_2} = \frac{DI_1}{DI_2} = \frac{SI_1}{SI_2}$, есть окружность с диаметром SD (она называется *окружностью Аполлония*). Поэтому последнее условие равносильно тому, что $\angle DHS = 90^\circ$, т.е. тому, что S лежит на прямой PQ. Остается доказать, что условие $S \in PQ$ равносильно описанности четырехугольника $ABCD$.

Пусть четырехугольник $ABCD$ описан вокруг некоторой окружности ω. Из теоремы о трех центрах гомотетии следует, что точки S, P и Q лежат на одной прямой (как центры гомотетий с положительными коэффициентами, переводящих ω_1 в ω_2, ω в ω_1, ω_2 в ω).

Наоборот, предположим, что S лежит на PQ. Пусть ω – вневписанная окружность треугольника CDQ, касающаяся его стороны CD. Пусть T – центр гомотетии с положительным коэффициентом окружностей ω и ω_1 (точка пересечения их общих внешних касательных). Из теоремы о трех центрах гомотетии следует, что T, Q и S лежат на одной прямой, т.е. T лежит на прямой PQ. С другой стороны, T лежит на прямой PC, поэтому T совпадает с P. Тогда прямая PB касается ω, т.е. четырехугольник $ABCD$ описан вокруг ω.

2. Пусть $r_1 = r_2$, тогда ω_1 и ω_2 симметричны относительно биссектрисы l угла ADC. Второе условие равносильно тому, что

$$HI_1 = HI_2 \Leftrightarrow DH \perp I_1 I_2 \Leftrightarrow I_1 I_2 \parallel PQ.$$

Если четырехугольник $ABCD$ описан около ω, то ω симметрична относительна l. Тогда прямые BA и BC, DC и DA симметричны относительно l (как общие касательные к ω и ω_1, ω и ω_2), а значит, P и Q также симметричны, и $PQ \parallel I_1 I_2$.

Наоборот, если $I_1 I_2 \parallel PQ$, то прямые DA и DC симметричны относительно прямой DH (как касательные к ω_1 и ω_2). Тогда точки P и Q симметричны относительно DH; значит, прямые BA и BC симметричны относительно прямой DH. Поэтому четырехугольник $ABCD$ симметричен относительно прямой DH, следовательно, он описан.

В.Шмаров

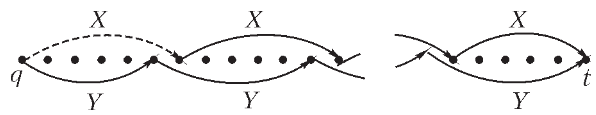
M2110. *В блицтурнире принимали участие 2n + 3 шахматистов. Каждый сыграл с каждым ровно по одному разу. Для турнира был составлен такой график, чтобы игры проводились одна за другой и чтобы каждый игрок после сыгранной партии отдыхал не менее n игр. Докажите, что один из шахматистов, игравших в первой партии, играл и в последней.*

Назовем *шагом* шахматиста количество партий между двумя его соседними играми (включая вторую из них). Тогда все шаги не меньше $n + 1$.

Рассмотрим любые $n + 3$ последовательные игры $g_1, \ldots, g_{n+3}$; в них $2n + 6$ участников. Заметим, что только три шахматиста могли участвовать в этих партиях дважды. Действительно, это могло произойти только в парах партий (g_1, g_{n+2}), (g_1, g_{n+3}), (g_2, g_{n+3}), и в каждой паре может быть только один такой участник (иначе два шахматиста сыграют дважды). Значит, чтобы набралось $2n + 6$ участников, для каждой из пар должен найтись шахматист, участвовавший в обеих партиях этой пары; остальные $2n$ шахматистов должны участвовать ровно в одной из партий $g_1, \ldots, g_{n+3}$. (В частности, каждый из $2n + 3$ шахматистов участвует хотя бы в одной из партий $g_1, \ldots, g_{n+2}$.) Мы получили, что шаги шахматистов из партии g_1 равны $n + 1$ и $n + 2$ (а шаг одного участника партии g_2 также равен $n + 1$). Значит, любой шаг любого шахматиста равен $n + 1$ или $n + 2$.

Если найдется шахматист Z, все шаги которого равны $n + 2$, то сумма $2n + 1$ его шагов будет равна $(n + 2)(2n + 1) = 2n^2 + 5n + 2$; поскольку всего игр было $\frac{(2n + 3)(2n + 2)}{2} = 2n^2 + 5n + 3$, это означает, что Z обязан участвовать и в первой, и в последней играх, что и требовалось.

Предположим противное: пусть каждый шахматист делал шаг $n + 1$. Рассмотрим шахматиста X, который сделал первый такой свой шаг последним; пусть в результате этого шага он встретился с шахматистом Y в t-й игре. Тогда Y делал шаг $n + 1$ до этого; пусть последний такой его шаг (до t-й партии) был из q-й партии в $(q + (n + 1))$-ю (см. рисунок). Тогда все его последующие шаги (до t-й партии) были по $n + 2$, поэтому $t = q + (n + 1) + k(n + 2)$. С другой стороны, все предыдущие шаги X были по $n + 2$; поэтому если он сделал хотя бы k таких шагов, то за $k + 1$ шаг до t-й партии он участвовал в партии с номером $t - (n + 1) - k(n + 2) = q$; следовательно, он встречался с Y



дважды. Если же X сделал до t-й партии меньше $k + 1$ шагов, то его первая партия имела номер, не меньший $t - (n+1) - (k-1)(n+2) = q + (n+2) \geq n+3$; этого также не может быть, так как по доказанному все шахматисты участвовали в первых $n + 2$ партиях. Полученное противоречие завершает доказательство.

И.Богданов

Ф2118. *Тележка едет по горизонтальному столу под действием привязанной к ней нерастяжимой нити. Нить переброшена через маленький блок, закрепленный на высоте H над плоскостью. Свободный конец нити вытягивают с постоянной скоростью v_0, направленной горизонтально. Найдите скорость тележки и ее ускорение в тот момент, когда угол между нитью и горизонтом составляет 45°.*

Скорость тележки находится просто:

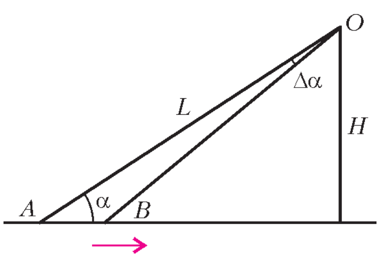
$$v = \frac{v_0}{\cos\alpha} = v_0\sqrt{2}\,.$$

Для нахождения ускорения можно записать длину горизонтального участка пути как функцию времени и взять вторую производную, но можно поступить немного проще. Зададим малый интервал времени Δt и выразим приращение скорости тележки:

$$\Delta v = v_0\left(\frac{1}{\cos(\alpha+\Delta\alpha)} - \frac{1}{\cos\alpha}\right) = \frac{v_0\Delta\alpha\sin\alpha}{\cos^2\alpha}\,.$$

Из «узкого» треугольника AOB (см. рисунок) легко выразить синус угла $\Delta\alpha$ – практически сам этот малый угол:

$$\Delta\alpha = \frac{v_0\Delta t\,\mathrm{tg}\,\alpha}{L} = \frac{v_0\Delta t\,\mathrm{tg}\,\alpha}{H/\sin\alpha}\,.$$



Тогда для ускорения тележки получаем

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_0^2\,\mathrm{tg}^3\,\alpha}{H}\,.$$

При угле между нитью и горизонтом $\alpha = 45°$ ускорение тележки равно

$$a = \frac{v_0^2}{H}\,.$$

М.Учителев

Ф2119. *В длинной трубе, наполненной водой, сделана поперечная перегородка из пробки толщиной 1 см, перегородка делит трубу на две части. Если температуры воды в частях трубы отличаются на 1 градус, поток тепла через перегородку составляет 2 Дж/с. Добавим еще одну перегородку – толщиной 2 см, теперь перегородки «выделяют» в трубе цилиндрическую полость. Слева от этой полости будем поддерживать температуру воды +50 °С, справа – температуру +20 °С. Определите установившуюся температуру воды в полости. Определите тепловые потоки через каждую перегородку. Теплопроводность стенок трубы пренебрежимо мала.*

Для определенности предположим, что температура +20 °С поддерживается около более толстой перегородки (противоположный случай так же прост). При стационарном состоянии системы поток тепла от горячей воды в полость равен потоку тепла из полости в холодную воду. Будем считать, что поток тепла пропорционален разности температур с двух сторон перегородки и обратно пропорционален ее толщине. Тогда для установившейся температуры T внутри полости получим соотношение

$$(50 - T) = 0{,}5(T - 20)\text{, откуда } T = 40\ ^\circ\text{C}\,.$$

Поток тепла через тонкую перегородку при разности температур 10 градусов в 10 раз больше заданной в условии величины 2 Дж/с, следовательно, потоки тепла в полость и из полости составят по 20 Дж/с.

А.Перегородцев

Ф2120. *В сосуде находится порция гелия при температуре 100 К и давлении 1000 Па. Сосуд двигают поступательно со скоростью 1000 м/с. Какой станет температура газа в сосуде через некоторое время после его мгновенной остановки? Стенки сосуда не проводят тепла. Теплоемкость самого сосуда пренебрежимо мала.*

При установившемся движении частицы относительно сосуда двигаются хаотически, и их скорости $\vec{v}_i$ определяются «в среднем» температурой газа. Суммарная энергия частиц после остановки сосуда не изменяется. С учетом скорости сосуда $\vec{v}_0$ ($v_0 = 1000$ м/с) скорости частиц будут $\vec{v}_0 + \vec{v}_i$, и суммарную энергию частиц запишем, усредняя энергии:

$$U = N\varepsilon_{\text{ср}} = N\left(v_0^2 + \left(v_i^2\right)_{\text{ср}}\right)$$

– слагаемое $2\vec{v}_0\vec{v}_i$ при усреднении дает ноль. Средний квадрат скорости хаотического движения частиц равен

$$\left(v_i^2\right)_{\text{ср}} = \frac{3}{2}\frac{kT}{m} = \frac{3}{2}\frac{RT}{\mathrm{M}} =$$

$$= \frac{3}{2}\frac{8{,}3\cdot 100}{0{,}004}\ \text{м}^2/\text{с}^2 \approx 3{,}1\cdot 10^5\ \text{м}^2/\text{с}^2\,.$$

Это означает, что температура газа после установления равновесия в сосуде будет определяться «новой» средней энергией хаотического движения частиц и станет больше начальной в

$$1+\frac{v_0^2}{\left(v_i^2\right)_{\text{ср}}}\approx 4{,}2 \text{ раза}.$$

Итак, через некоторое время после резкой остановки сосуда температура в нем будет примерно 400 К. Подумайте сами, что было бы после МЕДЛЕННОГО торможения сосуда вместо его мгновенной остановки.

З.Повторов

Ф2121. *К выводам катушки индуктивностью $L = 2$ Гн подключают заряженный конденсатор емкостью $C = 100$ мкФ, начальное напряжение конденсатора $U_0 = 100$ В. Напряжение конденсатора начинает уменьшаться, и в тот момент, когда оно падает до половины начального значения, параллельно подключают еще один такой же конденсатор и еще одну такую же катушку (все четыре элемента оказываются соединенными параллельно). Найдите максимальное значение тока через вторую катушку. Сопротивление соединяющих элементы проводников довольно мало. Катушки и конденсаторы считать идеальными.*

Ток I_0 через первую катушку перед подключением других элементов найдем из закона сохранения энергии:

$$\frac{CU_0^2}{2}=\frac{C\left(U_0/2\right)^2}{2}+\frac{LI_0^2}{2},\quad I_0=\sqrt{\frac{3CU_0^2}{4L}}\approx 0{,}61\text{ А}.$$

Сразу после подключения еще одной катушки и дополнительного конденсатора токи катушек не изменятся, а напряжение конденсаторов быстро (это время определяется их емкостями и малым сопротивлением проводов) уменьшится вдвое – будем считать для простоты, что это произойдет мгновенно. Тогда энергия системы сразу после подключения дополнительных элементов составит

$$2\frac{C\left(U_0/4\right)^2}{2}+\frac{LI_0^2}{2}=\frac{7CU_0^2}{16}.$$

В тот момент, когда ток I второй катушки будет максимальным, ЭДС индукции обратится в ноль, энергии конденсаторов будут нулевыми, и энергия системы будет равна суммарной энергии магнитного поля катушек. За небольшое время (меньше периода колебаний в системе) в тепло перейдет малая часть общей энергии, будем считать для простоты, что энергия в тепло вообще не переходит. Полный магнитный поток катушек не меняется («сверхпроводящий» контур из двух катушек), изменения токов катушек при этом одинаковы, и ток первой катушки будет равен $I_0 - I$. Еще раз запишем закон сохранения энергии:

$$\frac{7}{16}CU_0^2=\frac{L\left(I_0-I\right)^2}{2}+\frac{LI^2}{2}.$$

Получим квадратное уравнение относительно I:

$$I^2-\sqrt{\frac{3CU_0^2}{4L}}I-\frac{1}{16}\frac{CU_0^2}{L}=0.$$

У этого уравнения два корня, один из них соответствует минимуму, другой максимуму. Максимальный ток через вторую катушку равен

$$I_{\max}=I_0\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\approx 0{,}66\text{ А}.$$

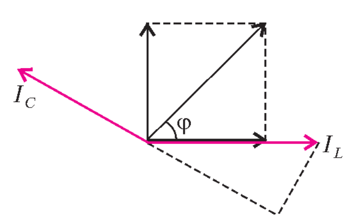
Р.Александров

Ф2122. *Лампа дневного света включена в сеть 220 В, 50 Гц последовательно с катушкой индуктивности, причем в горящем состоянии напряжение на катушке в 3 раза больше напряжения на лампе. Во сколько раз можно увеличить «косинус фи» такой цепи, включив параллельно в сеть конденсатор? Как выбрать емкость такого конденсатора?*

В исходной схеме тангенс угла сдвига фаз между напряжением и током цепи (катушка и лампа, соединенные последовательно) равен 3 – лампу можно считать обычным резистором, сопротивление которого в 3 раза меньше индуктивного сопротивления катушки на частоте сети. Тогда косинус угла сдвига фаз в этой цепи равен $\cos\varphi = 1/\sqrt{10}\approx 0{,}32$. Эту величину можно довести до 1, подобрав емкость параллельно подключенного конденсатора – его ток может скомпенсировать перпендикулярную составляющую тока цепи катушка–лампа. Таким образом можно увеличить «косинус фи» примерно в 3 раза.

Разумеется, мы хотим увеличить не просто тригонометрическую величину $\cos\varphi$, исходная цепь потребляет от сети лишнюю мощность – максимальное значение потребляемой мощности существенно превышает среднее значение, а сеть должна выдерживать именно максимальное значение. Да и потери в сопротивлении проводов получаются больше, чем надо.

Для нахождения емкости конденсатора удобно нарисовать векторную диаграмму (или провести расчет с комплексными числами). Изобразим ток через катушку (и через лампу) I_L горизонтальным отрезком (красный вектор на рисунке). Напряжение катушки опережает ток на 90°, напряжение резистора совпадает с током по фазе. Черным нарисованы векторы, изображающие напряжения резистора (лампы), катушки и суммарное напряжение – это и есть напряжение сети. На этой же диаграмме нарисован вектор I_C (красный) – он изображает ток конденсатора, который опережает на 90° напряжение сети. Нам нужно сделать равной нулю величину проекции суммарного тока на перпендикулярное вектору напряжения сети направление, для этого нужно выполнить условие



$$I_C = I_L\sin\varphi.$$

Обозначим напряжение сети U (мы можем всюду писать условия для амплитудных величин, а можем и для действующих, пусть это будут амплитуды – для определенности). Тогда получим

$$U\omega C=\frac{U}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\sin\varphi,\ \text{или}\ \ \omega^2LC=\frac{9}{10}.$$

Отсюда для индуктивности катушки, например, 2 Гн найдем

$$C \approx 4{,}6\ \text{мкФ}\,.$$

Такие конденсаторы часто включают параллельно лампам дневного света, причем один конденсатор (разумеется, с пересчетом емкости) можно использовать с несколькими лампами.

А.Зильберман

КОЛЛЕКЦИЯ ГОЛОВОЛОМОК

Рижские башни

(Начало см. на 2-й странице обложки)

Мы покажем, что задача о рижских башнях имеет единственное решение. Если и основание, и крыша музея образуют один и тот же узор из двух, изображенных на рисунке 3 (см. 2-ю страницу обл.), то двенадцать башен разбиваются на шесть пар, состоящих из дополняющих друг друга башен, как, например, (1,1,1) и (6,6,6). Однако легко видеть, что это невозможно. Действительно, у нас есть башня (4,6,6), но нет башни (1,1,3).

Предположим, что основание здания соответствует левому изображению на рисунке 3, а крыша – правому. Тогда двенадцать башен образуют шесть перекрывающихся пар, в каждой из которых ровно одна башня перевернута, причем она стоит двумя своими призмами на двух призмах неперевернутой башни так, что сумма высот примыкающих друг к другу призм из разных башен равна 7. Пример показан на рисунке 4.

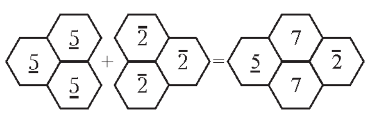


Рис. 4

Заметим, что (2,2,2) обязательно образует пару с (5,5,5). На первый взгляд, (1,1,1) и (6,6,6) тоже образуют естественную пару, но нужно учесть, что (1,1,1) может также сочетаться с (4,6,6), а для (6,6,6) подходит и (1,1,2). Создается впечатление, что для остальных, несимметричных, башен нужно рассмотреть много вариантов. На самом деле оказывается, что (1,3,4) сочетается только с (4,6,6), а (3,5,6) – только с (1,1,2). Таким образом, (1,1,1) и (6,6,6) все же должны быть вместе. Эти три пары показаны на рисунке 5.

Рассмотрим пары (2,2,2)+(5,5,5), (1,3,4)+(4,6,6), (1,1,2)+(3,5,6) и (1,1,1)+(6,6,6) как кости домино [2,5], [4,6], [1,3] и [1,6] соответственно. Мы хотим разбить оставшиеся четыре башни на пары и сделать из них домино. Если мы сложим из шести домино кольцо так, чтобы сумма примыкающих чисел в соседних домино была равна 7, то мы решим задачу о рижских башнях.

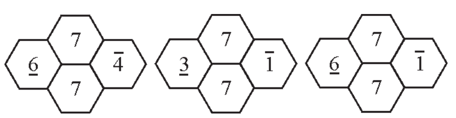


Рис. 5

Чтобы соединить домино [2,5] с остальными тремя, каждое из оставшихся двух домино должно иметь одно число 2 или 5, а другое – ни 2, ни 5. Имея это в виду, рассмотрим оставшиеся четыре башни. Возможны два способа разбить их на пары.

Мы можем соединить (1,2,3) с (4,6,5), а (1,2,5) – с (2,6,5). Оказывается, каждое из этих соединений можно осуществить тремя разными способами. Однако полученные домино имеют вид [1,6], [2,5] и [3,4]. Это совсем не то, что нам надо. Поэтому мы должны разбить башни на пары другим образом, т.е. соединить (1,2,3) с (2,6,5) в домино [2,3], а (1,2,5) с (4,6,5) – в домино [4,5].

Эти шесть домино образуют кольцо с нужным нам свойством, а именно, [2,5], [2,3], [4,6], [1,6], [1,3] и [4,5]. По этому кольцу строится единственное решение задачи о рижских башнях, показанное на рисунке 6.

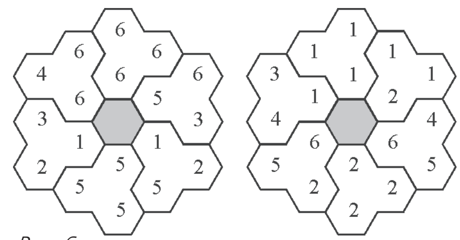


Рис. 6

Стоит отметить, что единственность решения имеет место только с точностью до симметрии. Если бы мы предположили, что основание музея соответствует правому изображению на рисунке 3, а крыша – левому, мы получили бы решение, изображенное на рисунке 7. Мы не считаем эти два решения различными.

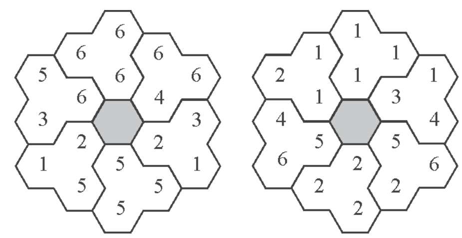


Рис. 7

Идея головоломки «Рижские башни» была найдена в 32-страничной брошюре «Кувшин алмазов», опубликованной украинским изобретателем головоломок Сергеем Грабарчуком в Ужгороде в 1991 году. Там башни несимметричны, но решений много. Латвийский математик Альбертс Ванагс нашел вручную набор башен с тремя возможными решениями. Позднее латвийский физик Атис Блумбергс нашел на компьютере набор с единственным решением. Это достижение повторила Мария Бабича, студентка Латвийского университета. Однако в их наборах много симметричных башен.

В наш набор (найденный Андрисом Цибулисом) входят лишь шесть симметричных башен. Он был представлен на 25 Всемирном съезде любителей головоломок в Хельсинки в июле 2005 года. Демонстрация решения головоломки имеется на сайте: http://www.chiuchang.org.tw/download/catalog/rigatower.ppt

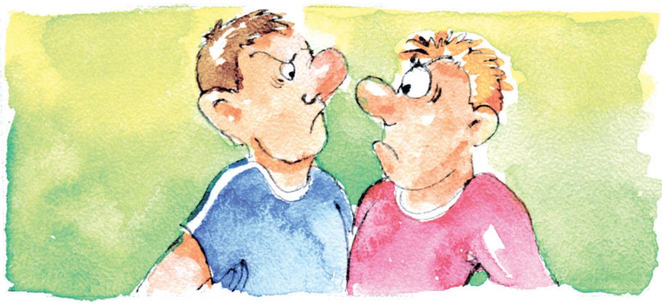
В 2006 году Мария Бабича нашла следующий набор, содержащий только четыре симметричные башни, но допускающий единственное решение: (1,1,1), (3,3,3), (4,4,4), (6,6,6), (1,2,3), (1,3,5), (1,5,6), (1,6,4), (2,3,5), (2,5,4), (2,6,4) и (3,4,6). Используя наш подход, читатель легко найдет решение этой версии головоломки «Рижские башни».

Андрис Цибулис, Энди Лю, Вен-Хсиен Сун

Задачи

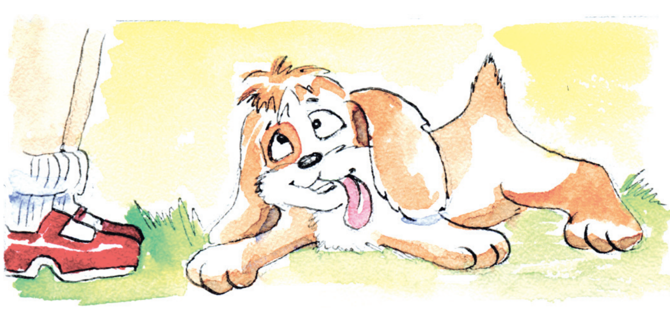
1. В однокруговом турнире по футболу участвовали 4 команды. «Чистое» второе место заняла команда, набравшая 3 очка. Восстановите результаты всех матчей. «Чистое» второе место означает, что больше нет команд, набравших столько же очков, и есть ровно одна команда, набравшая больше очков. За выигрыш дается 3 очка, за ничью – 1 очко, за поражение – 0 очков.

А.Блинков

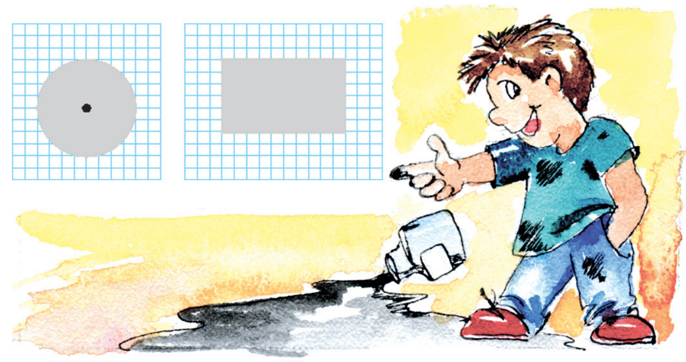


2. Лена пошла выгулять щенка в парк. Как только она оказалась в начале дорожки длиной 41 м, идущей вдоль парка, в конце этой дорожки показалась ее подруга Катя. Щенок от радости стал бегать от Лены к Кате и назад и бегал несколько раз туда-сюда до тех пор, пока подруги не встретились на расстоянии 13 м от начала дорожки. Всего щенок пробежал 85 м. Какое расстояние он пробежал в одну сторону и какое – в другую?

Г.Гальперин



3. Наблюдая за расплыванием чернильных клякс на промокашке, Петя сформулировал закон распространения клякс: *каждая точка, до которой дошла клякса, сама становится источником вторичных круглых клякс (см. рисунок слева), причем скорость роста вторичных клякс равна 1 клетке в минуту.* Считая этот закон справедливым, найдите, какую площадь будет занимать через 4 минуты «прямоугольная клякса» размером 6×10 единичных клеток (см. рисунок справа).



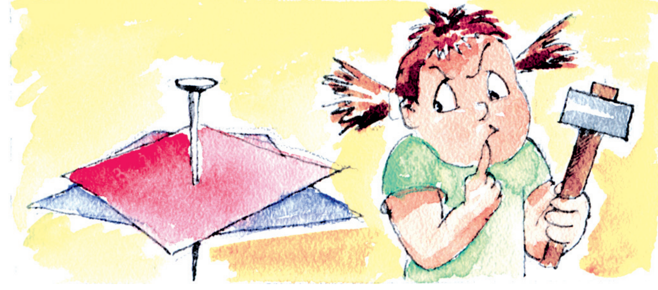
Е.Соколов

4. Фабрика выпускает наборы из пяти белых слоников различной величины и массы. Если расставить слоников по росту, то по стандарту разность масс соседних слоников должна быть одной и той же. Сможет ли контролер это проверить с помощью чашечных весов без гирь? А если бы наборы были из четырех слоников?

А.Шаповалов

5. На плоскости расположены два прямоугольника *P* и *Q*, пересечением которых является равносторонний восьмиугольник (не обязательно правильный). Докажите, что *P* и *Q* – квадраты с общим центром.

К.Матвеев



Иллюстрации Д.Гришуковой

Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6 – 8 классов.

Что мы видим в зеркале?

А.ТОЛПЫГО

Прежде чем читать эту статью, попробуйте решить простенькую задачу.

Я поглядел на электронные часы и увидел, что они показывают время 20:51. Случайно я перевел взгляд на зеркало и заметил, что в нем те же цифры, но «перескочила» единица: зеркальные часы показывали 12:05. Как это могло получиться?

(*Замечание:* так все и было, задача возникла из наблюдения. Добавлю, что никакой сложной системы зеркал не было, часы и зеркало были самые обычные.)

* * *

Все знают, что в зеркале мы видим не совсем то, что есть на самом деле: что-то меняется местами. Но что с чем?

«Правое с левым», — ответят почти все, не задумываясь. Но это всеобщее убеждение ошибочно. Поскольку вектор, перпендикулярный плоскости зеркала, имеет направление «вперед — назад», то на самом деле в зеркале меняются местами не правое и левое, а лоб и затылок. Вы легко в этом убедитесь, попросив кого-нибудь встать между зеркалом и вами (рис.1); тогда перед вами будет затылок вашего друга, тогда как в зеркале вы увидите его лоб (или наоборот). Эту ситуацию мы ниже еще обсудим подробнее.

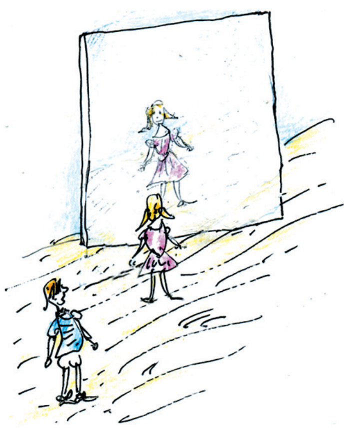


Рис. 1

Или предположим, что вы движетесь из глубины комнаты к зеркалу. Будем, к примеру, считать, что зеркало расположено в плоскости «верх-низ, восток-запад». Тогда вы идете на север, а ваш двойник в зеркале, наоборот, идет на юг (рис.2).

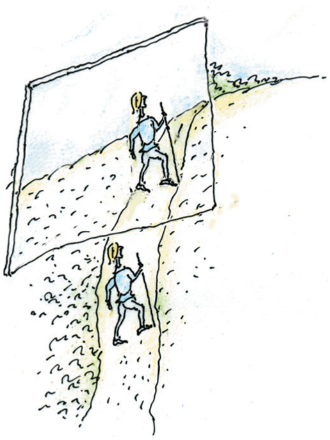


Рис. 2

Если же мы пойдем вдоль зеркала с востока на запад, т.е. справа налево, то и двойник пойдет справа налево.

Точно так же, если вы держите в руке какой-нибудь предмет, у которого явно отличаются «право» и «лево», то ваше отражение будет держать его так же.

Например, если вы берете стрелу острием влево, то в зеркале острие отраженной стрелы также смотрит влево (рис.3).

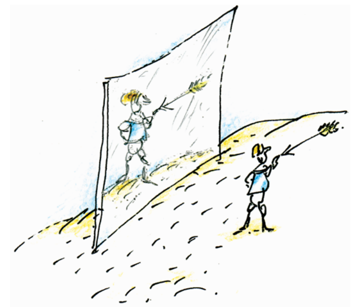


Рис. 3

Понять, почему в зеркале меняются местами «лоб-затылок», нетрудно. Гораздо интереснее понять, на чем основано всеобщее представление о том, что в нем меняются правое и левое. Ведь большинство, даже посмотрев на приведенные примеры, возразит: тут, мол, какое-то непонятное, но очевидное жульничество — мы прекрасно знаем, что на самом деле все-таки меняется левое с правым. Взгляните, — скажет всякий, — если я что-то делаю правой рукой, мой двойник делает то же самое левой рукой. Или возьмите книгу (текст идет слева направо) и посмотрите, как идет текст в отраженной книге.

Начнем именно с текста, потому что здесь легче всего опровергнуть привычное заблуждение.

Возьмите в руки какой-нибудь текст — но прозрачный текст, т.е. текст, исполненный на прозрачном материале. (Очень хорошо для такого опыта годятся гардеробные номерки — например, театральные; их часто делают из прозрачной пластмассы.) Покажите этот текст (этот номерок) сами себе в зеркале (рис.4). Получится то же самое, что было на рисунке 1, — отраженный текст вовсе не идет «справа налево», местами поменялись передняя и задняя стороны номерка (его «лоб» и «затылок»).

Конечно, если мы поставим зеркало иначе, то плоскость отражения будет иной. К примеру, если зеркало прикреплено к потолку, то меняются местами верх и

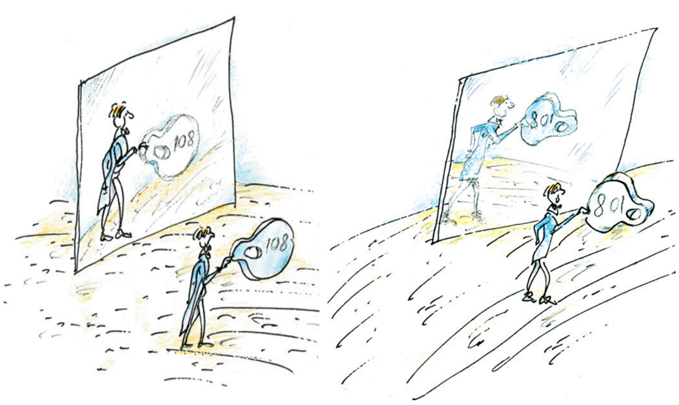


Рис. 4

низ: в зеркале пол окажется наверху, выше всего, а люди будут по нему ходить вверх ногами.

Если же вы хотите, чтобы поменялись местами именно правое и левое, это тоже можно сделать: поставьте зеркало сбоку. Именно так обстояло дело в задаче, с которой началась статья: я ехал поздно вечером в автобусе, и роль зеркала играло боковое стекло автобуса. При этом цифры пошли в обратном порядке: 2051 → 1502. При отражении двойка превратилась в пятерку, и наоборот, и на часах в зеркале я увидел 12:05.

А если бы зеркало стояло перед часами (рис.5)? В этом случае, чтобы увидеть и электронные часы, и изображение в зеркале одновременно, необходимо,

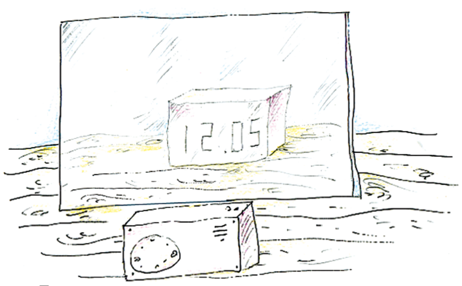


Рис. 5

чтобы часы были прозрачными. Но тогда бы и на часах, и в зеркале были одни и те же цифры. Если же часы непрозрачны, то я либо вообще не увидел бы, что они показывают, либо (если бы я сам сидел между часами и зеркалом) мне пришлось бы выворачивать голову, чтобы поглядеть на них с другой стороны. Между тем, в условии сказано только «перевел взгляд».

А что же происходит с книгой? И что происходит с человеком «в зазеркалье»?

Здесь надо учитывать два фактора: (1) симметрия в пространстве невыполнима, (2) а вот две симметрии одновременно выполнить можно. И настоящая симметрия «лицо-затылок» путем выполнения двух симметрий сразу превращается в симметрию «право-лево», которую мы якобы наблюдаем. Вот как это происходит.

Книга, в отличие от номерка, непрозрачна. Для того чтобы показать себе в зеркале ее текст, вы должны повернуть ее текстом к зеркалу, т.е. поменять местами ее «перед» и «зад» (вы держите книгу к себе уже не так, как при чтении: не текстом, а раскрытым переплетом). Но мы не можем поменять только перед и зад: в нашем трехмерном пространстве нельзя сделать отражение только в одной плоскости, зато можно сделать его одновременно в двух плоскостях. Отражение сразу в двух, перпендикулярных друг другу, плоскостях есть поворот на 180°.

Итак, вместо того чтобы отразить книгу (что невозможно), вы поворачиваете книгу на 180°, причем меняются, во-первых, перед и зад, а во-вторых, правое и левое. В результате человек, который смотрит на текст в зеркало, видит, что перед и зад книги в зеркале расположены нормальным образом: раскрытая страница перед глазами, как ей и положено, — а вот правое и левое в самом деле поменялись местами. Можно

Рис. 6

было бы повернуть книгу и иначе, так чтобы правое осталось справа, но поменялись бы верх и низ (рис.6), однако обычно никто не держит ее вверх ногами. Войди это у нас в привычку, мы бы, пожалуй, склонны были думать, что в зеркале переворачиваются верх и низ.

Но — вряд ли. Ведь есть еще главный аргумент: человек в зеркале. У него-то, вроде бы, действительно правая рука оказывается слева?

Но и здесь та же история, что с книгой. Человек не может оказаться в зазеркалье. Зато легко себе представить, как обойти зеркало и встать с той стороны. Дальше начинается психология.

Человек почти симметричен относительно плоскости, делящей его на правую и левую половины. И несимметричен относительно плоскости, делящей его на переднюю и заднюю половины. Затылок расположен симметрично лицу, но совершенно на него не похож. А вот левая рука достаточно похожа на правую.

Представим себе, что Витя стоит перед некой плоскостью, которую мы будем условно называть «зеркалом», но сквозь которую можно пройти, а его брат-близнец Митя прошел через эту плоскость. Он стоит точно так же, как Витя (носом на север, затылком к югу).

«Но, — думает Витя, — он совершенно не похож на мое отражение: ведь в зеркале я вижу свой нос, а вовсе не затылок». — А ну-ка, повернись! — командует он Мите.

Митя поворачивается...

Здесь-то и происходит самое главное. Человек не может совершить отражение (так, чтобы сердце оказалось справа), но легко может совершить разом два отражения: ведь результат (композиция) двух отражений и есть поворот, в данном случае — поворот на 180°. Итак, Митя поворачивается, т.е. отражается одновременно в двух плоскостях: «перед-зад» (север и юг меняются местами) и «право-лево» (меняются запад и восток).

«Вот теперь, — думает Витя, — Митя встал правильно, точно так, как мое отражение. Только правая рука у него находится против моей левой — в зеркале было бы не так. Значит, у моего зеркального двойника меняются местами именно правое и левое».

Нет, дорогой Витя! У зеркального двойника меняются местами лоб и затылок; ты же, сравнивая его с Митей, не заметил, что Митя совершил двойное отражение. Отсюда и идет твоя ошибка.

Замощения плоскости

Легко замостить плоскость паркетом из правильных треугольников, квадратов или шестиугольников (рис. 1, 2 и 3).

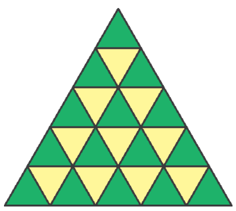


Рис. 1

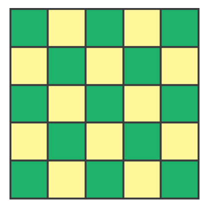


Рис. 2

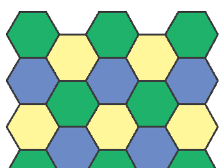


Рис. 3

Можно замостить плоскость и плитками другой формы, например уголками (рис. 4).

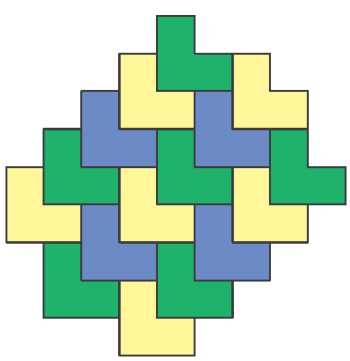


Рис. 4

Но не всякие плитки годятся: скажем, правильными пятиугольниками замостить плоскость нельзя. Причина простая: трех углов недостает, чтобы составить 360°, но четыре уже не поместятся (рис. 5).

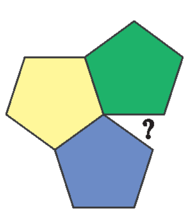


Рис. 5

Оказывается, что четырехугольники годятся любые, даже и невыпуклые. Почему? Приложим к желтому четырехугольнику (рис. 6) еще один такой же (зеленый), получится (невыпуклый) шестиугольник. У этого шестиугольника противоположные стороны параллельны и равны, и можно сложить шестиугольники в полоску. Верхний и нижний края этой полоски одинаковы, и такими полосками можно выложить всю плоскость.

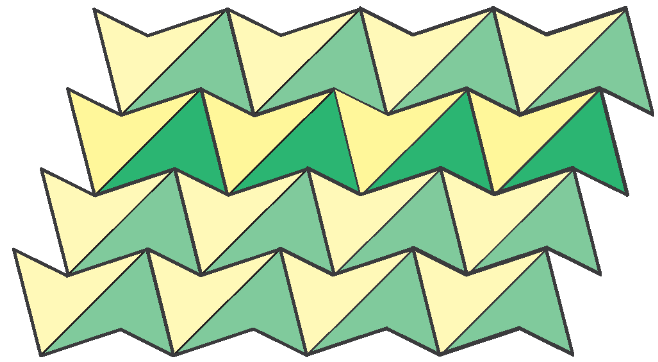


Рис. 6

Все эти замощения периодичны: одна и та же конфигурация плиток повторяется в них со сдвигом.

Заметим, что правильный треугольник и квадрат допускают также и непериодические замощения (рис. 7), а правильный шестиугольник – нет.

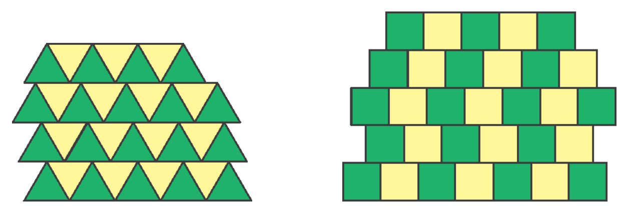


Рис. 7

Отразив вершину *E* правильного пятиугольника *ABCDE* относительно диагонали *AD*, получим невыпуклый пятиугольник (рис. 8), копиями которого

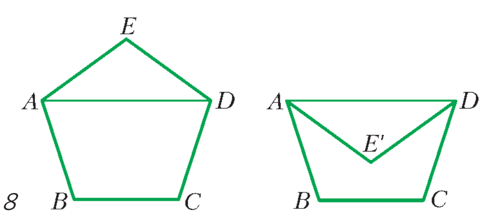


Рис. 8

можно покрыть плоскость как периодически (рис. 9), так и непериодически (рис. 10).

Рассмотрим девятиугольник с равными сторонами и специально подобранными углами (рис. 11). Из таких девятиугольников можно составить непериодическую спираль (рис. 12). Продолжается она следующим образом. К очередной стороне предыдущего витка спирали прикладывается зеленый многоугольник, «щель» между соседними зелеными многоугольниками заполняется «перевернутыми» желтыми многоугольниками.

Есть и периодическое замощение плоскости теми же девятиугольниками (рис. 13). Придумать много-

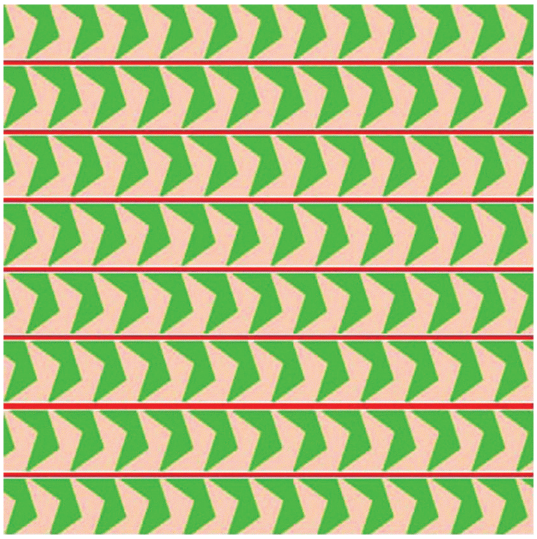


Рис. 9

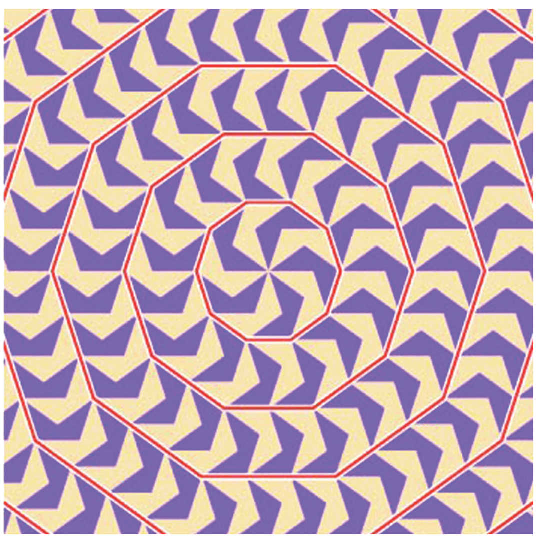


Рис. 10

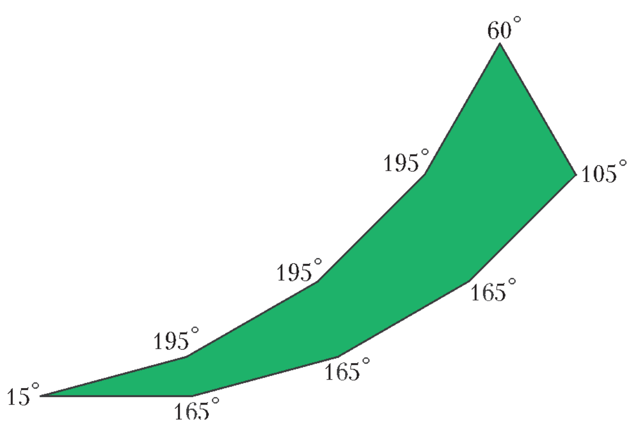


Рис. 11

угольник, который допускал бы только непериодические замощения, до сих пор никому не удалось!

Знаете ли вы, что:

1. Плоскость можно разбить на одинаковые невыпуклые семиугольники.

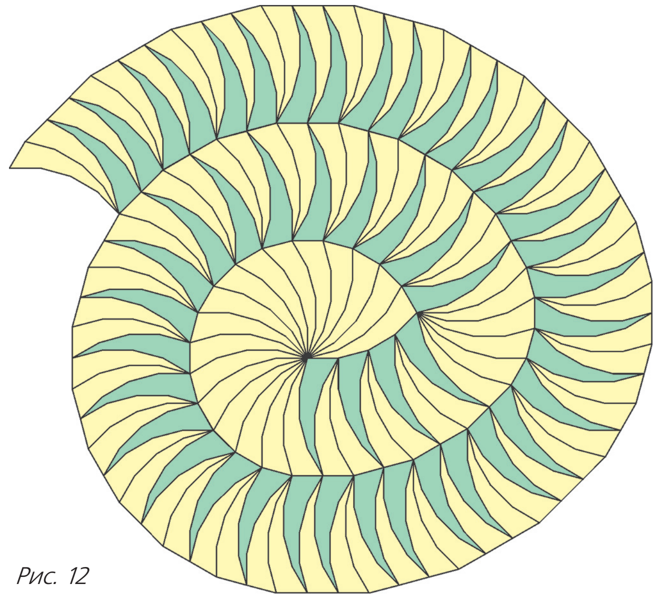


Рис. 12

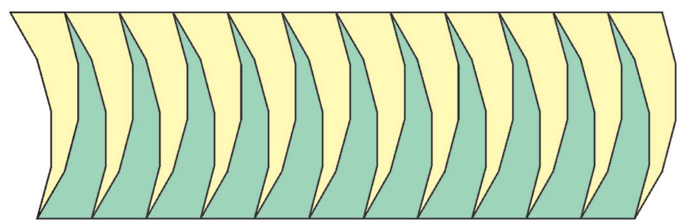


Рис. 13

2. Если плоскость разбита на выпуклые семиугольники, то среди них найдется либо сколь угодно маленький, либо сколь угодно большой.

3. Есть пример разбиения пространства на равные выпуклые 38-гранники, но никто не знает, можно ли число 38 заменить большим.

4. Существует набор из трех выпуклых многоугольников, которым можно замостить плоскость бесконечным числом способов, но каждый из этих способов является непериодическим. При этом никто не знает, можно ли число 3 уменьшить — это открытая проблема. В пространстве задача решена — существует многогранник, которым можно замостить все пространство, но только непериодически.

5. Неизвестно, какими тетраэдрами можно замостить все пространство.

6. Есть 3 типа выпуклых шестиугольников и 14 типов выпуклых пятиугольников, которыми можно замостить всю плоскость. Про невыпуклые проблема открыта.

7. Никто не знает, существует ли алгоритм, который получает на входе многоугольник, а на выходе говорит, можно ли этим многоугольником замостить всю плоскость.

С.Маркелов

Комментарии к статье можно послать автору по адресу markelov@mccme.ru.

Материалы этой статьи доступны по адресу www.mccme.ru/~markelov. Любой желающий может копировать статью или ее часть любым способом без разрешения автора.