

журнал©
Квант МАРТ 2009 №2
АПРЕЛЬ 2009

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

Квант

Учредители — Российская академия наук, Фонд поддержки фундаментальной науки и образования (Фонд Осипьяна), ИФТТ РАН

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

С.С.Кротов

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

А.Я.Белов, Ю.М.Брук, А.А.Варламов, А.Н.Виленин, В.И.Голубев, С.А.Гордюнин, Н.П.Долбиллин (заместитель главного редактора), В.Н.Дубровский, А.А.Егоров, А.В.Жуков, А.Р.Зильберман, В.В.Кведер (заместитель председателя редколлегии), П.А.Кожевников, В.В.Козлов (заместитель председателя редколлегии), С.П.Коновалов, А.А.Леонович, Ю.П.Лысов, В.В.Произволов, Н.Х.Розов, А.Б.Сосинский, А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин, В.М.Тихомиров, В.А.Тихомирова, В.М.Уроев, А.И.Черноуцан (заместитель главного редактора)

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

А.В.Анджанс, В.И.Арнольд, М.И.Башмаков, В.И.Берник, В.Г.Болтянский, А.А.Боровой, Н.Н.Константинов, Г.Л.Коткин, С.П.Новиков, Л.Д.Фаддеев

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
1970 ГОДА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

И.К.Кикоин

ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

А.Н.Колмогоров

Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков, В.Г.Болтянский, И.Н.Бронштейн, Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург, В.Г.Зубов, П.Л.Капица, В.А.Кириллин, Г.И.Косоуров, В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский, А.И. Маркушевич, М.Д.Миллионщиков, Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов, А.П.Савин, И.Ш.Слободецкий, М.Л.Смолянский, Я.А.Сморodinский, В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер

Бюро  **Квантум**

© 2009, РАН,
Фонд Осипьяна, «Квант»

- 2 Электрические узоры. *А.Снарский, К.Слипченко, А.Пальти*
6 Задача Эрдеша – Секереша о выпуклых многоугольниках.
В.Кошелев, А.Райгородский
14 Этот таинственный слышимый мир. *Е.Соколов*

НОВОСТИ НАУКИ

- 19 Устроители столкновений

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 21 Задачи М2124–М2130, Ф2130–Ф2137
22 Решения задач М2101–М2110, Ф2118–Ф2122

К М Ш

- 29 Задачи
30 Что мы видим в зеркале? *А.Толпыго*

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

- 32 Замощения плоскости

ШКОЛА В «КВАНТЕ»

- 34 Вневыписанная окружность. *А.Блинков, Ю.Блинков*

ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»

- 38 Прыгучий шарик. *В.Майер*

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

- 40 Разрезания на треугольники. *А.Спивак*
41 Неравенства и ... параллельный перенос. *М.Горелов*

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

- 46 «Подводные камни» силы Архимеда. *М.Ромашка*
50 ЕГЭ-2009 по физике. *М.Демидова, А.Черноуцан*

ОЛИМПИАДЫ

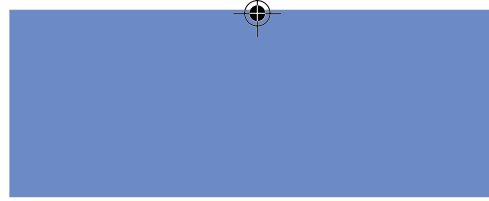
- 54 Региональный этап XXXV Всероссийской олимпиады школьников по математике
55 Региональный этап XLIII Всероссийской олимпиады школьников по физике
59 Ответы, указания, решения

НА ОБЛОЖКЕ

- I *Иллюстрация к статье «Электрические узоры»*
II *Коллекция головоломок*
III *Шахматная страничка*
IV *Прогулки с физикой*

TENEX

В издании журнала «Квант» финансовое участие принимает
ОАО «ТЕХСНАБЭКСПОРТ»



Электрические узоры

А.СНАРСКИЙ, К.СЛИПЧЕНКО, А.ПАЛЬТИ

Взвод! Спиной друг к другу в шахматном порядке по диагонали становись.

ЧЕЛОВЕКА ИЗДАВНА ПРИВЛЕКАЛИ РАЗНООБРАЗНЫЕ узоры и орнаменты, которые отражают красоту и определенный порядок в природе. Восхищенный формой снежинок, И.Кеплер посвятил им целую книгу. Изучение узоров привело к понятию симметрии – одному из важных понятий математики. Подробное исследование симметрии различных систем дало начало теории групп в математике, кристаллографии в физике.

А что если каждому элементу симметричного геометрического узора или структуры приписать определенное физическое свойство, например сопротивление? Рассмотрим один из простейших вариантов – двухцветные узоры на плоскости. Хорошо проводящий участок, будем называть его хорошо проводящей фазой, с удельным сопротивлением ρ_1 будем закрашивать синим цветом, а плохопроводящую фазу с удельным сопротивлением ρ_2 – желтым цветом. Таким образом, под фазой будем понимать совокупность участков одного цвета, или одного и того же удельного сопротивления. Можно задаться вопросом: каково сопротивление такого узора? К примеру, каково сопротивление шахматной доски из синих и желтых клеток?

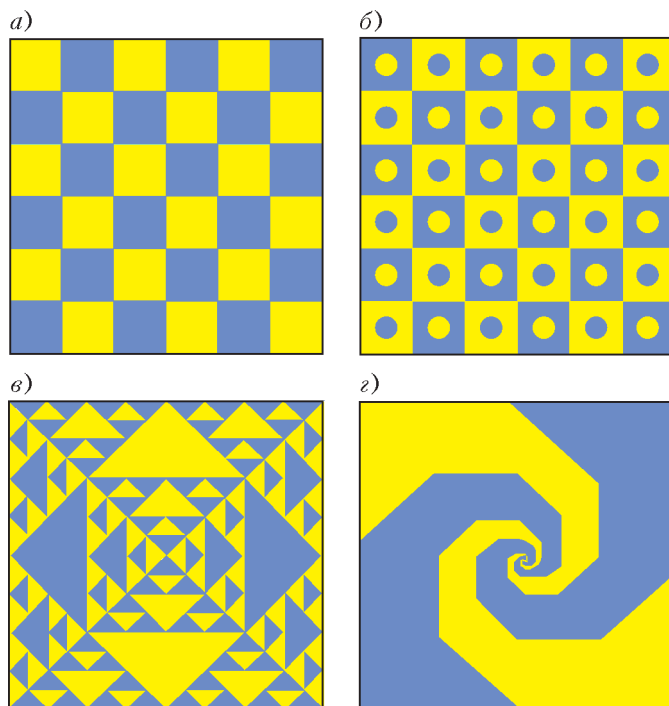


Рис. 1

Мы рассмотрим геометрические узоры, обладающие вполне определенной симметрией. А именно – при повороте узора на угол $\pi/2$ и замене синей фазы желтой (т.е. взаимной замены сопротивлений разного типа) должна сохраняться его геометрическая структура и должно оставаться неизменным его сопротивление. Ниже мы расскажем о способе, который позволяет удивительно просто определить сопротивление как угодно сложной структуры, обладающей именно такой симметрией.

Когда речь идет только о геометрии, то все ясно. Например, нужной нам симметрией обладают узоры, изображенные на рисунке 1. Но как только речь заходит об электрических свойствах, возникает проблема контакта. Ток должен где-то как-то входить и где-то как-то выходить. Где и как – определяют контакты. Мы будем рассматривать два типа контактов: идеальные проводящие контакты, сопротивление которых равно нулю, – будем закрашивать их черным цветом и непроводящие контакты с бесконечным сопротивлением (т.е. просто изоляторы) – будем закрашивать их белым цветом.

Опишем преобразования, которые в конечном счете оставляют полное сопротивление среды с определенным образом расположенными сопротивлениями тем же самым. Обратимся к рисунку 2. Первое преобразование – переход от позиции 1 к позиции 2 – состоит во взаимной замене желтого и синего (удельных сопротивлений ρ_1 на ρ_2 и наоборот), а также черного и белого. Последнее означает, что это преобразование меняет местами не только желтую и синюю фазы, но одновременно и контакты. Следовательно, если говорить об электрической задаче, то при этом преобразовании меняются и направления токов. Например, если раньше токи в целом текли слева направо, то теперь новое положение контактов заставляет токи в целом течь снизу вверх. Среду, получаемую таким преобразованием, будем называть дуальной. Повернем теперь,

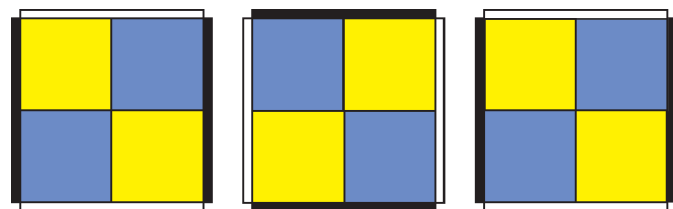


Рис. 2

ничего не меняя, дуальную среду на угол $\pi/2$ – перейдем от позиции 2 к позиции 3 – и сравним между собой первую и последнюю позиции. Будем рассматривать такие узоры (расположения проводящих фаз), для которых начальная и конечная позиции тождественны. Заметим, что узоры могут не совпадать, а являться зеркальными отображениями друг друга. Ничего страшного в этом нет, поскольку сопротивление зеркально отображенного образца точно такое же.

Для того чтобы подсчитать сопротивление неоднородной среды, необходимо решить систему уравнений, которые выражают закон сохранения заряда и потенциальность электрического поля в стационарном случае. Эти уравнения, определяющие плотность тока и напряженность электрического поля в каждой точке среды, являются дифференциальными уравнениями в частных производных, и их изучение выходит за рамки не только школьной программы, но и первого курса университетов. Однако есть возможность, не теряя общности и строгости, воспользоваться существенно более простой математикой.

Сделаем то, что называют дискретизацией задачи. Вместо непрерывной среды рассмотрим сетку. И если раньше каждой точке отвечало определенное удельное сопротивление ρ_1 или ρ_2 , то теперь определенное сопротивление r_1 или r_2 будем приписывать связям сетки. (Именно так и поступают, когда решают дифференциальные уравнения на компьютере.) Те законы, которые раньше записывались в виде дифференциальных уравнений, примут вид системы линейных алгебраических уравнений, которые хорошо известны школьникам как уравнения Кирхгофа. Первое из них –

$$\sum I_i = 0 \quad (1)$$

– есть следствие закона сохранения заряда, а второе –

$$\sum U_i = \sum \mathcal{E}_i, \text{ где } U_i = I_i r_i, \quad (2)$$

записанное для замкнутого контура, содержащего источник ЭДС, – является следствием закона Ома. Поскольку в нашем случае источники ЭДС внутри сетки отсутствуют, то $\sum \mathcal{E}_i = 0$.

Подберем теперь такое расположение сопротивлений r_1 и r_2 в сетке, что поворот ее на угол $\pi/2$ и взаимная замена r_1 на r_2 ничего не меняет. Рассмотрим то, что мы в шутку будем называть электрическим квадратом, – квадратную сетку из сопротивлений r_1 и r_2 с контактами, изображенную на рисунке 3,а. Здесь проводящие связи и контакты, как и в непрерывном случае, показаны черным цветом, а связи

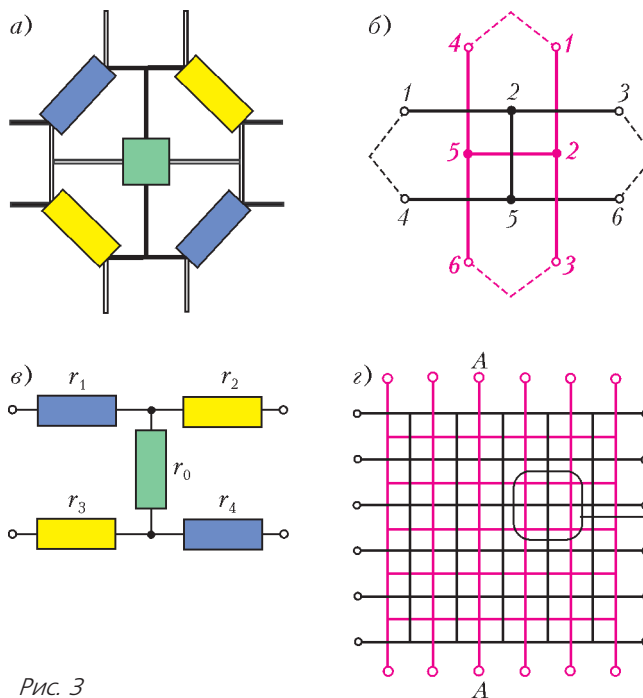


Рис. 3

и контакты другого типа – белым. Те же преобразования, которые в непрерывном случае переводили изначальную среду в дуальную с тем же сопротивлением (см. рис.2, позиция 2), точно так же переводят наш простейший электрический квадрат в дуальный с тем же самым сопротивлением. На рисунке 3,б показаны одновременно изначальная сетка и дуальная к ней (нарисована красным цветом). Чтобы не загромождать рисунок, сами сопротивления (желтые и синие) на нем не приведены. Однако из рисунка видно соответствие сопротивлений изначальной и дуальной сеток. Например, желтому сопротивлению 1–2 в изначальной сетке соответствует синее сопротивление 1–2 в дуальной сетке. Расположение сопротивлений в изначальной сетке должно быть таким, чтобы при повороте красной сетки на угол $\pi/2$ (аналог перехода от позиции 2 к позиции 3 на рисунке 2) она совпала с изначальной. Для простейшего электрического квадрата такое расположение сопротивлений показано на рисунке 3,в.

Обратим внимание на то, что на рисунках 3,а и 3,в присутствует особое сопротивление, которое переходит само в себя и которое мы закрасили зеленым цветом. В непрерывной среде тоже обязательно есть как минимум одна такая точка. Например, для узора на рисунке 2 это центральная точка – она и не желтая, и не синяя. При замене желтого цвета на синий она своего цвета не меняет. В сетке с конечным числом связей таким сопротивлением пренебречь нельзя, и нам придется найти, как это сопротивление выражается через r_1 и r_2 .

Итак, каждой связи в исходной черной сетке соответствует связь в красной и, согласно описанной выше симметрии, сопротивлению одной связи соответствует вполне определенное сопротивление другой связи. Возникает вопрос: нельзя ли установить соответствие

между токами и падениями напряжения на данной связи в черной сетке и токами и падениями напряжения на дуальной связи красной сетки? Другими словами, существует ли преобразование, которое взаимно переводит токи и напряжения в указанных сетках? Такие преобразования возможны в двумерном случае. Они были найдены российским физиком А.М.Дыхне и американским физиком Дж.Келлером. Вот эти преобразования (мы, конечно, приводим их сеточный вариант):

$$u_{\alpha\beta} = \Lambda \tilde{i}_{\gamma\delta}, \quad i_{\alpha\beta} = \frac{1}{\Lambda} \tilde{u}_{\gamma\delta}, \quad (3)$$

где Λ – некоторая константа, которая будет определена позднее, а буквы с тильдой соответствуют дуальной среде.

Как видно из приведенных преобразований (3), например, току в горизонтальной связи исходной (черной) сетки, соответствует падение напряжения на вертикальной связи дуальной (красной) сетки. Для однозначности преобразований необходимо задать направление полного тока в черной и красной сетках. Будем считать, что в черной сетке полный ток заходит в левый контакт, а в красной – в нижний контакт. Естественно в этом случае в качестве положительного направления тока для каждой горизонтальной связи черной сетки выбрать направление слева направо, а для вертикальной связи выберем направление сверху вниз. Пользуясь теми же соображениями, выберем за положительное направление тока в вертикальной связи дуальной сетки направление снизу вверх, а в горизонтальной – слева направо. Такое взаимное соответствие направлений тока в сетках означает, что для нахождения положительного направления тока в дуальной связи нужно просто повернуть ток в изначальной связи на угол $\pi/2$ против часовой стрелки. Падение напряжения будем полагать, как обычно, происходящим вдоль тока.

Неожиданным является тот факт, что если преобразовать уравнения (1) с помощью формул (3) (т.е. заменить токи в изначальной сетке на напряжения в дуальной), то получится система уравнений (2) в дуальной сетке. Это можно показать строго, но мы ограничимся только примером.

Рассмотрим выделенный участок на рисунке 3,г. Первый закон Кирхгофа (1) для черного узла, согласно выбранным положительным направлениям токов, можно записать так:

$$i_{\alpha\beta} + i_{\lambda\beta} - i_{\beta\tau} - i_{\beta\eta} = 0.$$

Заменяем токи в соответствии с преобразованиями (3):

$$i_{\alpha\beta} = \frac{1}{\Lambda} u_{\delta\gamma}, \quad i_{\lambda\beta} = \frac{1}{\Lambda} u_{\gamma\nu}, \quad i_{\beta\tau} = \frac{1}{\Lambda} u_{\mu\nu}, \quad i_{\beta\eta} = \frac{1}{\Lambda} u_{\delta\mu}$$

и получим

$$u_{\delta\gamma} + u_{\gamma\nu} - u_{\mu\nu} - u_{\delta\mu} = 0.$$

Слева стоит не что иное как сумма напряжений по замкнутому красному контуру $\delta\mu\nu\gamma$, взятая с учетом выбранного правила знаков. Эта сумма, как следует

из второго закона Кирхгофа, равна нулю. Для участка цепи, связывающего между собой контакты, в правую часть последнего равенства войдет внешняя разность потенциалов. Мало того, можно показать, что полное количество независимых уравнений Кирхгофа для обеих сеток одинаково.

Интересно посмотреть, во что превращается под действием преобразований (3) закон Ома. Рассмотрим какую-нибудь одну связь. Из равенства

$$u_{\alpha\beta} = r_{\alpha\beta} i_{\alpha\beta}$$

получаем

$$\tilde{u}_{\gamma\delta} = \frac{\Lambda^2}{r_{\alpha\beta}} \tilde{i}_{\gamma\delta}.$$

С другой стороны, последнее выражение есть не что иное как закон Ома для связи $\gamma\delta$ дуальной сетки:

$$\tilde{u}_{\gamma\delta} = \tilde{r}_{\gamma\delta} \tilde{i}_{\gamma\delta}.$$

Сравнивая между собой последние два равенства, обнаруживаем, что преобразование (3) приводит к тому, что сопротивления изначальной и дуальной сред связаны друг с другом через пока еще не определенную нами константу Λ :

$$\tilde{r}_{\gamma\delta} = \frac{\Lambda^2}{r_{\alpha\beta}}.$$

Вспомним теперь о нашей симметрии, согласно которой если $r_{\alpha\beta} = r_1$, то $\tilde{r}_{\gamma\delta}$ должно равняться r_2 и наоборот – если $r_{\alpha\beta} = r_2$, то $\tilde{r}_{\gamma\delta}$ должно равняться r_1 . Легко сообразить, что если константу Λ выбрать равной $\sqrt{r_1 r_2}$, то требование симметрии будет выполнено.

Вернемся к нашей исходной задаче – вычислить сопротивление всего узора. Для этого запишем законы Ома в черной и красной сетках:

$$U = RI, \quad \tilde{U} = \tilde{R}\tilde{I},$$

где U и \tilde{U} – те внешние разности потенциалов, о которых шла речь выше, а I и \tilde{I} – полные токи, протекающие через сетки. Конечно, в силу выбранной симметрии, у нас $R = \tilde{R}$. Запишем преобразования (3) для полного тока, проходящего через изначальную сетку, и для полного падения напряжения:

$$I = \frac{1}{\Lambda} \tilde{U}, \quad U = \Lambda \tilde{I}.$$

Здесь ток I есть сумма токов, проходящих по связям через сечение AA , а преобразования переводят токи в сумму падений напряжения вдоль сечения AA на дуальной (красной) сетке. В итоге получим

$$\tilde{R} = \frac{\Lambda^2}{R}.$$

Поскольку Λ уже известно ($\Lambda = \sqrt{r_1 r_2}$) и $R = \tilde{R}$, отсюда сразу же следует выражение для сопротивле-

ния всего узора:

$$R = \sqrt{r_1 r_2} . \quad (4)$$

Рассмотрим теперь неоднородный образец, удельные сопротивления которого ρ_1 и ρ_2 образуют симметричный узор такой, что отдельные его большие части одинаковы (как, например, узоры на рисунках 1,а и 1,б; узоры на рисунках 1,в и 1,г не подходят).

В этом случае говорят, что образец однороден в среднем. Для такого образца, как и для однородного, можно ввести характеристику, которая называется эффективным удельным сопротивлением, и записать

$$R = \rho_{\text{эфф}} \frac{L}{S}, \quad S = Ld,$$

где d – толщина, а L – длина стороны квадратного образца. В терминах удельных сопротивлений, как легко видеть, формула (4) принимает такой вид (формула Дыхне):

$$\rho_{\text{эфф}} = \sqrt{\rho_1 \rho_2} .$$

Если бы фазы располагались слоями и ток тек поперек этих слоев, то удельное сопротивление такой среды выражалась бы как хорошо известное среднее арифметическое: $\rho_{\text{эфф}} = (\rho_1 + \rho_2)/2$. При течении тока в такой «полосатой» среде вдоль слоев удельное сопротивление имело бы вид $\rho_{\text{эфф}} = 2\rho_1\rho_2/(\rho_1 + \rho_2)$, т.е. вид среднего гармонического. А для сопротивления например, шахматной доски, как мы теперь знаем, годится среднее геометрическое: $\rho_{\text{эфф}} = \sqrt{\rho_1\rho_2}$.

Читатель, который еще внимательно следит за нашим изложением, вправе возмутиться и напомнить нам о том дуальном сопротивлении, которое переходит само в себя. Например, это сопротивления $r_{25}^{\text{и}}$ и $r_{25}^{\text{д}}$ на рисунке 3,б, где индексы «и» и «д» относятся к исходной и дуальной сеткам. Зная формулу (4), легко разобраться с этим вопросом. Обозначим переходящее само в себя сопротивление через r_0 и подсчитаем сопротивление простейшего электрического квадрата (см. рис.3,в):

$$R = \frac{r_1 r_0 + r_2 r_0 + 2r_1 r_2}{2r_0 + r_1 + r_2} .$$

Приравняв правую часть этого выражения к правой части формулы (4), получим

$$r_0 = \sqrt{r_1 r_2} .$$

Как и должно быть, при замене r_1 на r_2 сопротивление r_0 остается тем же самым. Такой же результат для r_0 можно получить при использовании и более сложных электрических квадратов.

До сих пор мы рассматривали самые простые контакты – такие, что, если среда однородна, плотность тока в каждой ее точке по величине одна и та же и направлена одинаково. Можно обсуждать и другие

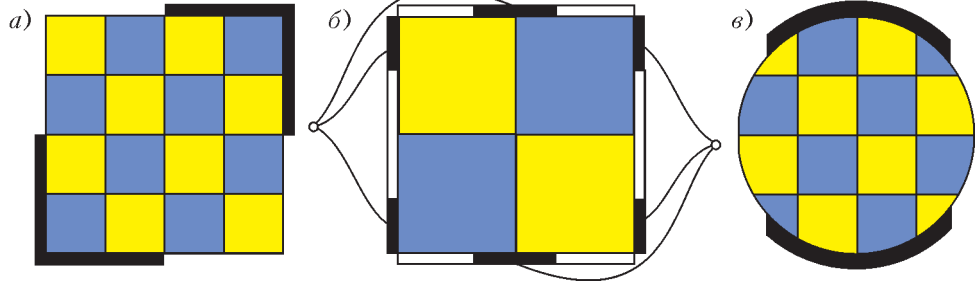


Рис. 4

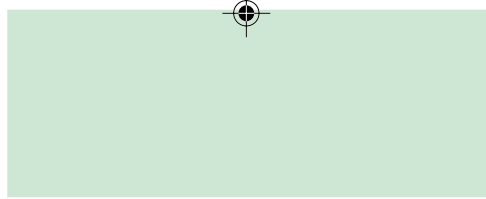
контакты, которые приведут к неоднородному распределению плотности тока, главное – чтобы эти контакты удовлетворяли той же симметрии (рис.4,а, б). Мало того, сам образец не обязательно должен быть квадратным (рис.4,в).

Рассмотренные выше задачи имеют отношение к серьезной и глубокой науке. Английские исследователи С.Бродбент и Дж.Хаммерсли в 1957 году сформулировали основные идеи, которые положили начало активно развивающейся сейчас теории протекания, или теории перколяции.¹

Суть основной задачи теории протекания легко пояснить на примере очень большой (в пределе – бесконечной) проводящей квадратной сетки. Перережем некоторое количество случайно выбранных связей сетки, т.е. часть конечных сопротивлений, которыми обладала каждая связь, заменим на бесконечные сопротивления. Минимальная концентрация неразрывных связей, при которых ток может протечь через всю сетку, называется порогом протекания. Так вот, рассмотренные нами среды, которые являются однородными в среднем, и есть среды на пороге протекания.

Позже выяснилось, что существует глубокая аналогия между теорией протекания и теорией фазовых переходов, и на ее основе была построена удивительно красивая теория критического поведения физических свойств различных систем вблизи порога протекания. Иными словами, с точки зрения физика, перколяция – это геометрический фазовый переход.

¹ Подробно об этой теории можно прочитать, например, в книге А.Л.Эфроса «Физика и геометрия беспорядка» (выпуск 19 Библиотечки «Квант»), а также в статье того же автора «Что такое теория протекания» в журнале «Квант» («Квант» №2 за 1982 г.).



Задача Эрдеша – Секереша о выпуклых многоугольниках

В. КОШЕЛЕВ, А. РАЙГОРОДСКИЙ

Напутствие

Задача, о которой мы хотим поговорить в этой статье, по праву считается одной из жемчужин комбинаторной геометрии. Исключительная простота ее постановки делает рассказ о ней доступным школьнику, а нетривиальность ее решения и многочисленные ее связи с другими областями математики сразу же выводят заинтересованного слушателя на передний край современной комбинаторики. Задача эта возникла в 1934 году, и, хотя умение быстро считать не является, вопреки расхожему мнению, отличительной особенностью математика, каждый из нас моментально сообразит, что в этом году исполняется ровно 75 лет со дня ее рождения. Не правда ли, круглая дата? Что ж, давайте ее отметим.

Первые шаги

Постановка задачи

Рассмотрим какое-нибудь конечное множество точек \mathcal{X} на плоскости и зададимся, например, таким вопросом: верно ли, что в множестве \mathcal{X} всегда найдутся три точки, являющиеся вершинами треугольника? На первый взгляд, вопрос кажется просто нелепым. Ясно же, что если в \mathcal{X} одна или две точки, то и говорить не о чем; если же $|\mathcal{X}| \geq 3$ (мощность \mathcal{X} не меньше тройки), то вроде как любые три элемента в множестве служат вершинами треугольника. Так-то оно так, да не совсем: а что если какие-то три точки из множества \mathcal{X} лежат на одной прямой? Тогда вряд ли уместно говорить о треугольнике с вершинами в них. И уж вовсе никуда не годится ситуация, в которой все точки нашего множества оказываются «нанизанными» на одну прямую. Короче, ответ на вопрос неожиданно отрицательный. Однако если мы с самого начала допустим, что в множестве \mathcal{X} *никакие три точки не лежат на одной прямой*, то сработает естественная логика и при условии $|\mathcal{X}| \geq 3$ мы сможем гарантировать наличие треугольников в \mathcal{X} .

Хорошо, с треугольниками разобрались. А как тогда обстоят дела с выпуклыми¹ четырехугольниками, вы-

¹ Множество называется выпуклым, если вместе с любыми двумя своими точками оно содержит и весь отрезок, их соединяющий.

пуклыми пятиугольниками и т.д.? Хочется, по идее, получить ответ в той же форме, что и в случае треугольников, а именно: для каждого $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, желательно отыскать такую «пограничную» величину $g(n) \in \mathbb{N}$, чтобы в каждом множестве \mathcal{X} , не содержащем троек точек на одной прямой и имеющем не менее $g(n)$ элементов, нашлись n вершин выпуклого n -угольника и чтобы для $g(n) - 1$ описанное свойство не выполнялось. Вот $g(3) = 3$, а чему равны $g(4)$, $g(5)$ и пр.? Вообще, существуют ли (вернее, конечны ли) эти величины? Ведь вполне может статься, что, скажем, для любого m найдется множество \mathcal{X} размера m , в котором нет вершин выпуклых десятиугольников. Кто знает?

Проблема Эрдеша – Секереша, к изучению которой мы теперь переходим, как раз и состоит в отыскании величин $g(n)$. Ниже мы расскажем много интересного о ней, а сейчас сделаем небольшое замечание. Для постановки задачи оказалось очень важно предположить, что множества \mathcal{X} не содержат троек точек на одной прямой. В действительности, такое свойство очень часто работает в геометрии, и потому для него придуман специальный термин: говорят, что множество \mathcal{X} с этим свойством *находится в общем положении*. Происхождение термина связано с тем, что в некотором естественном смысле «почти все» множества на плоскости находятся в общем положении, — отсюда и общность. Впрочем, мы не станем здесь давать более подробные комментарии, иначе мы уйдем слишком далеко в сторону от нашего основного маршрута. Главное, что отныне, рассматривая множества точек на плоскости, мы будем подразумевать, что они находятся в общем положении: иные множества нас просто не волнуют.

Разберемся с четырехугольниками

Очевидно, что $g(4) > 3$ (на трех точках четырехугольнику взяться неоткуда). Может быть, $g(4) = 4$? Разумеется, нет. Достаточно посмотреть на рисунок 1, чтобы понять это: изображенные на картинке точки находятся в общем положении, и, тем не менее, среди них нет вершин выпуклых четырехугольников. Итак, $g(4) \geq 5$.

Покажем, что $g(4) = 5$, т.е. убедимся, что в любом

множестве из пяти точек на плоскости есть выпуклые четырехугольники. Тут нам понадобится понятие выпуклой оболочки множества точек. Грубо говоря, *выпуклая оболочка* (конечного) множества \mathcal{X} – это «наименьший» выпуклый многоугольник, внутри или на границе которого лежат все точки из \mathcal{X} . На рисунке 2 показаны примеры выпуклых оболочек. Существует и более строгое определение, но нам кажется, что интуитивного понимания

Рис.1. Четыре точки без выпуклых четырехугольников



Рис.2. Выпуклые оболочки

вполне достаточно, а заинтересованный читатель может обратиться, например, к книге [1].

Пусть даны произвольные пять точек на плоскости. Рассмотрим их выпуклую оболочку. Либо внутри нее наших точек нет, либо внутри нее одна точка, либо внутри нее две точки (рис.3). В первых двух случаях

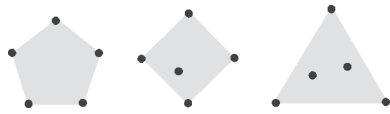


Рис.3. Варианты взаимного расположения пяти точек

все очевидно, а в третьем случае аккуратное рассуждение устроено так: проведем через две внутренние точки

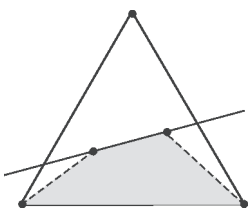


Рис.4. Случай двух внутренних точек

прямую; ввиду общности положения, эта прямая не пройдет ни через одну вершину треугольника (рис.4), но «зацепит» сразу две его стороны; возьмем две внутренние точки и две вершины оставшейся стороны треугольника; их выпуклая оболочка и есть искомым четырехугольник.

Небольшое лирическое отступление

Как-то мало мы до сих пор говорили об истории проблемы... А она очень даже романтическая. Наблюдение о том, что $g(4) = 5$, сделала Эстер Кляйн. И она, и Дьёрдь Секереш, и Пол Эрдеш были тогда еще очень молодыми людьми, студентами. Именно Кляйн в 1934 году предложила искать выпуклые четырехугольники в множествах точек на плоскости. В 1935 году Эрдеш и Секереш опубликовали статью, которая стала впоследствии классической и в которой доказывались многие результаты относительно величины $g(n)$ (см. [2]). А в 1936 году Кляйн и Секереш поженились. В связи с этим Эрдеш назвал проблему, о которой мы сейчас говорим, «Happy End Problem». И действительно, прямо как в сказке, Секереш и Кляйн прожили вместе без малого 70 лет и умерли в один день 28 августа 2005 года.

И Кляйн, и Секереш, и Эрдеш – венгры по происхождению. Кляйн и Секереш жили после войны в Австралии. Эрдеш же стал одним из самых продуктивных математиков XX века. Ему принадлежит около полутора тысяч статей по комбинаторике, геометрии, теории чисел и др. Он несколько раз в год объезжал земной шар, путешествуя с конференции на конференцию.

А что с пятиугольниками?

Как говорится, чем дальше в лес, тем больше дров. Разумеется, отыскание величины $g(5)$ – это куда более сложная задача, нежели те, которыми мы до сих пор занимались. Сходу не вполне понятно даже, чего от этой величины ожидать. Тем не менее, есть сразу два примера, которые показывают, что $g(5) \geq 9$. Это примеры из восьми точек в общем положении и без выпуклых пятиугольников. Они изображены на рисунке 5. Ниже мы покажем, что на самом деле $g(5) = 9$.

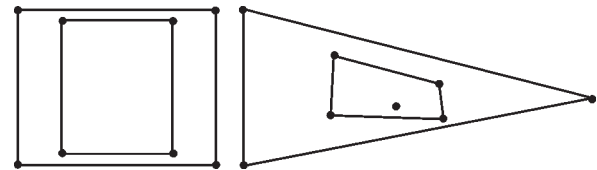


Рис.5. Примеры из восьми точек без выпуклых пятиугольников

Это старый результат, и его история немного туманна. Впервые он упоминается еще в 1935 году в статье [2], где он приписывается Э.Макаи. В 1961 году Эрдеш и Секереш опубликовали работу [3], и там уже говорится о двух авторах – все том же Макаи и П. Туране. Однако печатный вариант доказательства появился только в 1970 году. Потом были всяческие упрощения, и здесь мы приводим одно из простейших рассуждений.

Итак, пусть даны девять точек, образующих множество \mathcal{X} общего положения на плоскости. Рассмотрим выпуклую оболочку \mathcal{I} множества \mathcal{X} . Ввиду общности положения у \mathcal{I} не может быть меньше трех вершин. Если у \mathcal{I} пять или более вершин, то выпуклый пятиугольник найден, и дальше говорить не о чем. Иначе у \mathcal{I} три или четыре вершины. Остальные шесть или пять точек из множества \mathcal{X} находятся строго внутри \mathcal{I} . Возьмем теперь их выпуклую оболочку и назовем ее \mathcal{J} . Снова: либо у \mathcal{J} пять и более вершин, и тогда пятиугольник у нас получился, либо у \mathcal{J} три или четыре вершины... Стоп: а почему, например, не две? Мешает общность положения. Где тогда разместятся недостающие точки из \mathcal{X} (рис.6)? На внутреннем отрезке ведь их быть не может.

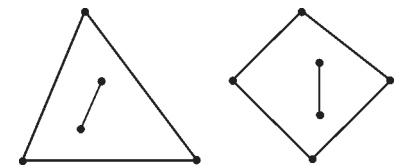


Рис.6. Почему у \mathcal{J} не две вершины

Давайте переведем дух. На данном этапе мы имеем следующую картину. Если в процессе построения выпуклых оболочек пятиугольник еще не найден, то у нас таких вложенных друг в друга оболочек уже две – \mathcal{I} и \mathcal{J} , и каждая из них есть либо треугольник, либо четырехугольник. А

всего-то точек девять. Значит, процесс можно продолжить.

Посмотрим внутрь J . Там, очевидно, одна, две или три точки из X . Обозначим через i количество вершин многоугольника q , через j – количество вершин многоугольника J , а через k – количество точек внутри J . Понятно, что их выпуклая оболочка K – это точка, отрезок или треугольник. В итоге остается изучить лишь четыре случая, и все они изображены на рисунке 7. По естественным причинам, назовем их случаями

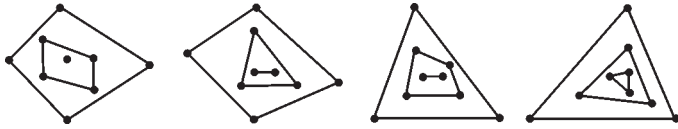


Рис.7. Случаи $(4, 4, 1)$, $(4, 3, 2)$, $(3, 4, 2)$ и $(3, 3, 3)$

(или еще конфигурациями вида) $(4, 4, 1)$, $(4, 3, 2)$, $(3, 4, 2)$ и $(3, 3, 3)$.

Вообще, выражение «конфигурация вида (i, j, k) » весьма удобно, и нас никто не заставляет использовать его только для наших девятиточечных множеств. Например, конфигурация вида $(3, 3, 2)$, соответствующая

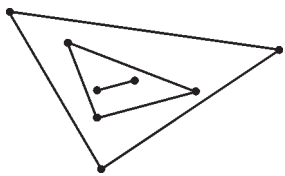


Рис.8. Конфигурация вида $(3, 3, 2)$

восемиточечному множеству, изображена на рисунке 8.

Допустим, мы доказали, что в любых конфигурациях вида $(3, 3, 2)$, $(4, 3, 1)$ и $(3, 4, 2)$ все-таки есть выпуклый пятиугольник. Что ж, это победа, ведь совсем легко

видеть, что каждая из конфигураций рисунка 7 в свою очередь содержит одну из указанных конфигураций (в $(3, 3, 3)$ таится $(3, 3, 2)$; в $(4, 3, 2)$ и $(4, 4, 1)$ угнездилась $(4, 3, 1)$; с $(3, 4, 2)$ все и так ясно).

Разберемся сперва со случаями $(3, 3, 2)$ и $(4, 3, 1)$. Именно этим случаям посвящен рисунок 9. На нем

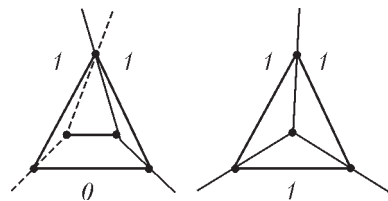


Рис.9. Случаи $(3, 3, 2)$ и $(4, 3, 1)$

изображены две оболочки, которые мы называли J и K . Далее, в первом случае мы покрываем плоскость вокруг треугольника J тремя областями, внутри которых написаны цифры. Область с нулем строго отделена от областей с единицами, а области с единицами между собой пересекаются (у одной граница пунктирная, а у другой – сплошная). Смысл очень простой: если, скажем, в какой-либо из областей с единицей окажется больше одной вершины многоугольника q , то, ввиду его выпуклости, и выпуклый пятиугольник у нас в руках. Иными словами, если мы предположим, что в нашей конфигурации выпуклых пятиугольников нет, то мы окажемся вынужденными признать, что у q не более двух вершин. Однако это неверно, чем и завершается разбор случая. Точно так же действуем во второй ситуации.

Остался случай $(3, 4, 2)$. Тут слегка похитрее. Снова посмотрим на промежуточный четырехугольник и внутренний отрезок. Благодаря общности положения, существуют лишь два варианта их взаимного расположения. А именно, прямая, содержащая отрезок, пересекает либо соседние стороны четырехугольника, либо противоположные. Первый вариант изображен на рисунке 10 слева, и в нем пятиугольник ловится сразу.

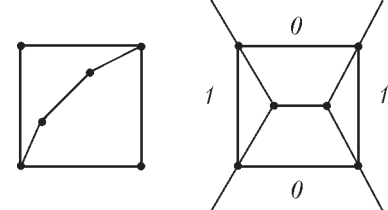


Рис.10. Случай $(3, 4, 2)$

Второй вариант размещен на том же рисунке справа, и в нем мы действуем согласно логике предыдущего абзаца (разрезаем плоскость на части и выписываем, сколько вершин внешнего треугольника могли бы в эти части попасть, не будь в конфигурации выпуклого пятиугольника).

Все, неравенство $g(5) \leq 9$ доказано.

Видна закономерность?

Ну, это такое упражнение на IQ: продолжить последовательность 3, 5, 9, состоящую из значений $g(n)$ при $n = 3, 4, 5$. Видно, что $3 = 2^1 + 1$, $5 = 2^2 + 1$, $9 = 2^3 + 1$. Иными словами, закрадывается подозрение, что $g(n) = 2^{n-2} + 1$. Не правда ли, красивая формула вырисовывается? Вот кабы она еще и верной оказалась!

К сожалению, все не так просто. За прошедшие 75 лет было получено лишь одно дополнительное подтверждение угаданной нами закономерности. Любопытно, что принадлежит этот результат все тому же Секерешу, который в соавторстве с Л.Питерсом установил равенство $g(6) = 17$. Еще более любопытно то, что соответствующая публикация появилась аж в 2006 году, т.е. Секереш не изменял своей задаче на протяжении семидесяти лет, и последняя его статья на эту тему вышла после его смерти. Подход, развитый Секерешем и Питерсом, довольно нетривиален. Им удалось придумать некий алгоритм, который за разумное время перебирает все (существенные) расположения из семнадцати точек на плоскости и в каждом из таких расположений находит вершины выпуклого шестиугольника. Иначе говоря, их доказательство в значительной мере опирается на компьютерный перебор, который, кстати, требует изрядных машинных ресурсов. В любом случае описание метода Секереша – Питерса выходит за рамки этой заметки, и мы лишь можем отослать заинтересованного читателя к оригинальной работе [4].

Саму закономерность Эрдеши и Секереш подметили, конечно, сразу, и в [2] сформулирована их гипотеза.

Гипотеза 1. *Имеет место равенство $g(n) = 2^{n-2} + 1$.*

Это утверждение никем до сих пор не доказано и не опровергнуто, что не может не производить впечатления: 75 лет прошло, а воз и ныне там. К слову, Эрдеши, великий сочинитель самых разнообразных математических задач, прославился еще и тем, что за решение

своих задач он назначал некие суммы денег, ранжируя, тем самым, задачи по «трудности». Кажется, самой большой из когда-либо предложенных им сумм была сумма в 3000 долларов. А о гипотезе 1 он незадолго до своей смерти в 1996 году писал, что, несомненно, заплатил бы за ее доказательство 500 долларов. Забавно и то, что за опровержение гипотезы он денег не предлагал: видимо, свято верил в ее справедливость и не хотел стимулировать движение математической мысли в неверном, с его точки зрения, направлении.

С гипотезы 1, попыток доказать ее и возникающей вокруг этого многогранной проблематики начинается по-настоящему серьезная работа над задачей. И в дальнейшем мы поговорим об этом. Прежде всего: а разве мы где-то, вообще, показали, что $g(n) < \infty$ для каждого n ?

Так почему же $g(n)$ всегда существует?

Несколько слов о теореме Рамсея

В математике все взаимосвязано, и иной раз для решения задачи из одной области приходится применять соображения из областей, которые, на первый взгляд, могут показаться весьма далекими от нее. Так и здесь: мы увидим вскоре, что задача Эрдеша – Секереша имеет непосредственный выход на классическую теорему Рамсея в комбинаторике. Давайте вспомним, что это такое, постепенно переходя от простых частных случаев к несколько более сложным общим ситуациям.

Итак, многие читатели, вероятно, слышали такое классическое школьное утверждение: среди любых шести человек есть либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых людей. Это утверждение очень легко доказать, и соответствующее рассуждение каждый без труда проделает сам. Заметим, кстати, что аналогичное утверждение для пяти человек, вообще говоря, не является верным.

Описанную ситуацию удобно (и принято) формулировать в терминах графов. Действительно, речь фактически идет о том, чтобы рассмотреть полный граф на шести вершинах-«людях», раскрасить все его $C_6^2 = 15$ ребер в красный и синий цвета (ребро красное – люди знакомы, ребро синее – люди не знают друг друга) и убедиться в том, что либо в графе есть треугольник, у которого все ребра красные, либо в графе есть треугольник, у которого все ребра синие. При этом, опять же, для полного графа на пяти вершинах такой номер не проходит.

А вот и чуть более общее утверждение на языке графов. Для любых натуральных чисел s, t существует наименьшее натуральное число m_0 , обладающее следующим свойством. Каково бы ни было $m \geq m_0$ и какова бы ни была раскраска ребер полного графа на m вершинах в красный и синий цвета, либо в графе есть полный подграф на s вершинах, у которого все ребра красные, либо в графе есть полный подграф на t вершинах, у которого все ребра синие. Например, при $s = t = 3$ имеем $m_0 = 6$.

Теперь заметим, что ребра графа суть, конечно, двухэлементные подмножества множества его вершин.

А что если мы отныне станем красить не ребра, но трех-, четырех-, ..., k -элементные подмножества данного множества? Чем это хуже? Ничем! И вот, наконец, теорема Рамсея во всей своей полноте.

Теорема Рамсея. Для любых натуральных чисел k, l_1, \dots, l_r существует наименьшее натуральное число m_0 , обладающее следующим свойством. Каково бы ни было $m \geq m_0$, если каждое k -элементное подмножество множества $\{1, \dots, m\}$ покрашено в один из r цветов с «именами» $1, \dots, r$, то найдется $i \in \{1, \dots, r\}$ и такое l_i -элементное подмножество $T \subset \{1, \dots, m\}$, что все его k -элементные подмножества имеют цвет с именем i .

Результат про графы вытекает из этой теоремы при $k = 2$, $r = 2$, $l_1 = s$, $l_2 = t$.

Есть тут и своя маленькая логическая тонкость, которую пылливый читатель должен, по идее, заметить сразу: а что если $k > l_i$ при каком-нибудь i ? Скажем, пусть по-прежнему $k = 2$, $r = 2$, но $l_1 = 1$, $l_2 = 100$. В этом случае срабатывает принцип «все крокодилы в реке Тумча красные». Смысл в том, что про отсутствующие элементы можно сказать все что угодно и, стало быть, здесь $m_0 = 1$. Аналогичные рассуждения применимы и в других подобных случаях.

Доказательство теоремы Рамсея получается с помощью многократной индукции и, будучи элементарным, требует все же чересчур много места для своего изложения в нашей заметке. По счастью, это настолько классический факт, что отыскать его полное доказательство не составляет большого труда. Читатель может обратиться как к оригинальным работам [5] и [2], так и к различным популярным источникам типа [6], [7] и [8].

Заметим, что для величины m_0 , фигурирующей в теореме, используется более или менее стандартное обозначение $R_k(l_1, \dots, l_r)$. В частности, мы уже говорили, что $R_2(3, 3) = 6$ и $R_2(1, 100) = 1$. Кстати, таких точных равенств известно очень мало. Их перечень проще всего найти в Википедии (см. [9]), откуда есть ссылка на обзор [10].

В следующем параграфе мы применим теорему Рамсея для доказательства того, что $g(n) < \infty$.

Два фокуса

Сейчас мы докажем, что $g(n) \leq R_4(n, 5)$. Действительно, пусть \mathcal{X} – множество точек, состоящее из не менее чем $R_4(n, 5)$ элементов. Покрасим все четверки точек в нем в красный и синий цвета: если данные четыре точки являются вершинами выпуклого четырехугольника, объявляем четверку красной; иначе говорим, что она синяя. По теореме Рамсея возможны два варианта. В одном из них в \mathcal{X} найдутся пять точек, среди которых все четверки синие, т.е. нет ни одной четверки, которая бы порождала выпуклый четырехугольник. Но это нонсенс, так как противоречит утверждению Кляйн о том, что $g(4) = 5$. Значит, остается лишь альтернатива, при которой в \mathcal{X} есть n точек без синих четверок. Иными словами, все четырехугольники, порождаемые этими точками, выпуклые. Такое возможно только в случае, если сами эти n точек суть

вершины выпуклого n -угольника (докажите это). Все, неравенство получено. Не правда ли, удивительный трюк?

Аналогичный фокус позволяет установить и оценку $g(n) \leq R_3(n, n)$. Попробуйте понять это самостоятельно, используя следующую подсказку. Возьмем множество $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_m\}$ размера не менее $R_3(n, n)$. Рассмотрим в нем произвольную тройку $\{x_i, x_j, x_k\}$ ($i < j < k$) и поглядим на ее выпуклую оболочку (треугольник). Если, стартуя из точки x_i и двигаясь по часовой стрелке вокруг этого треугольника, мы встречаем точки x_i, x_j, x_k именно в таком порядке, то красим тройку в красный цвет. Иначе – в синий.

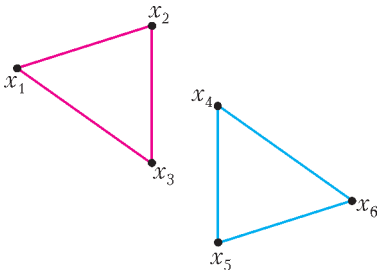


Рис.11. Слева красный треугольник, справа синий

На рисунке 11 мы приводим примеры красной и синей троек. Итак, теперь мы знаем, что $g(n) < \infty$. Но нам-то вслед за Эрдешем и Секерешем хочется верить в красивую гипотезу 1. Следовательно, хорошо бы сказать пару слов о том, как соотносятся величины $R_4(n, 5)$, $R_3(n, n)$ и $2^{n-2} + 1$. К сожалению, тут пока все довольно скверно. Прежде всего, очень мало известно о скорости роста функций $R_4(n, 5)$ и $R_3(n, n)$. Из некоторых соображений кажется, что при больших n величина $R_3(n, n)$ все-таки поменьше, чем $R_4(n, 5)$. Однако строго это не доказано. Вина тому то обстоятельство, что все оценки для нужных нам чисел Рамсея, которые на данном этапе развития науки удалось получить, весьма и весьма слабые. Например, вот лучшее, что мы умеем сказать про $R_3(n, n)$:

$$2^{an^2} < R_3(n, n) < 2^{bn^2},$$

где a и b – некоторые конкретные числа. В любом случае даже 2^{an^2} растет куда быстрее, нежели $2^{n-2} + 1$, а о 2^{bn^2} и говорить страшно.

Короче, фокусы – фокусами, а деваться некуда: надо думать дальше.

Чашки и крышки

Сейчас мы определим два типа выпуклых ломаных на плоскости – чашки и крышки. Для этого зафиксируем на плоскости какую-нибудь прямоугольную систему координат (рис.12,а). Пусть даны натуральные числа $k \geq 3$ и $l \geq 3$. Назовем k -чашкой ломаную, которая имеет k вершин с разными абсциссами ($k - 1$ звено) и внешне напоминает чашку (рис.12,б), коль скоро мы глядим на нее как бы сверху вниз вдоль оси ординат. Аналогично определяем l -крышку (рис.12,в). Разумеется, существует куда более строгое определение каждого из введенных нами объектов. Например, в случае чашки суть в том, что многоугольная область, ограниченная чашкой и двумя прямыми, которые перпендикулярны оси абсцисс и проходят через левый и правый концы чашки, выпукла («надграфик» чашки –

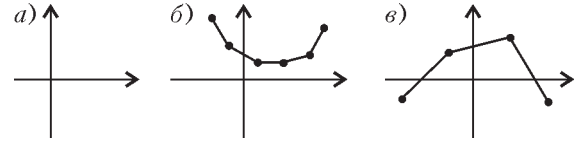


Рис.12. Наглядное определение чашек и крышек

выпуклое множество). Приведем еще для верности пример выпуклой ломаной, которая не является ни чашкой, ни крышкой в нашей системе координат (рис.13).

Понятно, что если мы найдем в том или ином множестве \mathcal{X} чашку или крышку с n вершинами в какой-нибудь системе координат, то выпуклый n -угольник у нас в кармане: достаточно соединить свободные концы ломаной недостающим отрезком. На самом деле, выражение «в какой-нибудь системе координат» можно спокойно заменить выражением «в любой системе координат, для которой пары точек из \mathcal{X} не задают прямых, параллельных оси y ». Назовем всякую систему координат с указанным свойством *правильной для* \mathcal{X} . Отметим, что в определенном смысле для данного \mathcal{X} «почти всякая» система координат правильная. Рассмотрим, стало быть, величину $f(k, l)$, равную наименьшему f_0 такому, что для любого $f \geq f_0$ в каждом множестве \mathcal{X} из f точек на плоскости и в каждой правильной для \mathcal{X} системе координат найдется либо k -чашка, либо l -крышка. В конечном счете $g(n) \leq f(n, n)$, так что теперь хорошо бы понять, как ведет себя функция $f(k, l)$ с ростом своих аргументов.

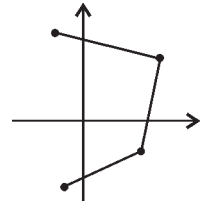


Рис.13. Не чашка и не крышка, хотя похожа

Теорема о чашках и крышках. *Имеет место рекуррентное неравенство*

$$f(k, l) \leq f(k - 1, l) + f(k, l - 1) - 1.$$

Теорему доказали Эрдеш и Секереш все в той же работе [2]. В следующем разделе мы приведем их рассуждение. Заметим, что сама величина $f(k, l)$ очень похожа по структуре своего определения на число Рамсея $R_2(k, l)$. Однако это вовсе не означает, конечно, что $g(n) \leq R_2(n, n)$ (хотя мы и знаем, что $g(n) \leq f(n, n)$).

Доказательство теоремы о чашках и крышках

Положим $n = f(k - 1, l) + f(k, l - 1) - 1$, зафиксируем произвольное множество \mathcal{X} мощности n и любую правильную для \mathcal{X} систему координат. Нам необходимо показать, что либо в \mathcal{X} есть k -чашка, либо в \mathcal{X} есть l -крышка. Обозначим через \mathcal{Y} множество *всех* точек, являющихся левыми концами $(k - 1)$ -чашек в \mathcal{X} . Допустим сперва, что в множестве $\mathcal{X} \setminus \mathcal{Y}$ не меньше чем $f(k - 1, l)$ точек. Тогда либо в нем есть $(k - 1)$ -чашка, либо в нем есть l -крышка. Однако первый случай невозможен, ведь $\mathcal{X} \setminus \mathcal{Y}$ по построению не содержит ни одной $(k - 1)$ -чашки. Значит, в предположении $|\mathcal{X} \setminus \mathcal{Y}| \geq f(k - 1, l)$ в \mathcal{X} есть l -крышка, и все в порядке. Предположим тогда, что $|\mathcal{X} \setminus \mathcal{Y}| \leq f(k - 1, l) - 1$. В этом