

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

КОНКУРС «МАТЕМАТИКА 6–8»

(см. «Квант» № 4 за 2008 г.)

1. Отложим какие-нибудь 4 монеты – назовем их «группа А». Оставшиеся 36 монет разделим на две группы В и С по 18 монет.

Произведем первое взвешивание, положив В и С на разные чашки весов.

Рассмотрим случай, когда весы оказались в равновесии. Это означает, что или в обеих группах В и С нет фальшивых монет, или фальшивых монет поровну, т.е. по одной. Разделив группу В на две равные части B_1 и B_2 , произведем второе взвешивание. Если весы при этом окажутся в равновесии, то все 18 монет на весах настоящие. Задача решена. Если же, например, часть B_1 окажется легче части B_2 , то это значит, что в части B_2 все 9 монет настоящие. Тогда разделим группу С поровну на части C_1 и C_2 и произведем третье взвешивание, положив на одну чашку весов все 9 настоящих монет части B_2 , а на другую все 9 монет части C_1 . Если весы в равновесии, то все 18 монет на них – настоящие. Если часть C_1 легче, то в ней есть фальшивая монета, но тогда все 9 монет части C_2 настоящие. Вместе с монетами части B_2 они составляют 18 настоящих монет.

Рассмотрим случай, когда при первом взвешивании одна из групп легче другой, например В легче С. Это означает, что число фальшивых монет в группе С меньше, чем в группе В. Поэтому в группе С не более одной фальшивой монеты. Разделим группу С поровну на части C_1 и C_2 и положим их на различные чашки весов – второе взвешивание. Если весы оказались в равновесии, то в группе С нет фальшивых монет, и все 18 монет на весах настоящие. Задача решена.

Если же, например, C_1 легче C_2 , то в группе С есть одна фальшивая монета и она находится в части C_1 . Тогда в C_2 все монеты настоящие. В группе В, следовательно, две фальшивые монеты, но тогда среди четырех ранее отложенных монет (группа А) фальшивых нет. Из части C_1 отложим одну монету, а оставшиеся 8 разделим поровну на части C_3 и C_4 и положим на разные чашки весов (третье взвешивание).

Если весы в равновесии, то все 8 взвешенных монет настоящие и вместе с девятью настоящими монетами части C_2 и четырьмя настоящими монетами группы А получаем 21 настоящую монету. Если C_3 легче, чем C_4 , то в C_4 четыре настоящие монеты, а в C_3 есть фальшивая. Следовательно, отложенная из части C_1 одна монета – настоящая. Эта монета плюс четыре из части C_4 плюс четыре из группы А плюс девять монет из части C_2 дают в сумме 18 монет.

Задача решена.

2. Обозначим $a(n)$ – количество подмножеств n -элементного множества, каждое из которых состоит из четного числа элементов, $b(n)$ – количество подмножеств, каждое из которых состоит из нечетного числа элементов. У пустого множества есть единственное подмножество – пустое. Поэтому $a(0) = 1$, $b(0) = 0$.

Пусть $n > 0$. Подсчитаем $a(n)$, опираясь на значения $a(n-1)$ и $b(n-1)$ и предполагая, что к $(n-1)$ -элементному множеству добавили некий n -й элемент P . Подмножества, содержащие четное число элементов, разбиваются на две непересекающиеся группы. В одной из них содержатся подмножества, каждое из которых включает элемент P и, стало быть, содержит нечетное число других, отличных от P , элементов, – таких подмножеств $b(n-1)$. В другую группу входят подмножества, каждое из которых не содержит элемент P и, следовательно, содержит четное число других, отличных от P , элементов, – таких подмножеств $a(n-1)$. Отсюда

$$a(n) = b(n-1) + a(n-1).$$

Из совершенно аналогичных соображений подсчитываем

$$b(n) = a(n-1) + b(n-1).$$

Итак, $a(n) = b(n)$ для всех натуральных n .

3. Нет, нельзя. Пронумеруем все клетки полоски так, как показано на рисунке 1. Будем называть номером фишки номер



Рис. 1

клетки, на которой она стоит. Рассмотрим произвольные три клетки такие, что одна из них находится посередине между двумя другими. Пусть номер центральной клетки равен n , а крайние отстоят от нее на m клеток, т.е. имеют номера $n-m$, n , $n+m$. Тогда сумма номеров этих клеток равна $3n$. Следовательно, после каждого разрешенного действия остаток от деления на 3 суммы номеров всех фишек, находящихся на полоске, не меняется. Но в начальной позиции этот остаток равен 1, а в позиции, когда на полоске нет ни одной фишки, он равен 0, поэтому убрать все фишки с полоски нельзя.

4. Такое m существует для всех n .

При $n = 2$ можно взять $m = 2$. Действительно, 2 делится на 2, а 3 делится на 1.

Если же $n > 2$, то можно взять $m = n! - n$ (восклицательный знак означает факториал). Действительно, для любого k от 0 до $n-1$ имеем

$$m + k = n! - n + k = n! - (n - k).$$

Это число с очевидностью делится на $n - k$ (ибо $n!$ делится на все натуральные числа, не превосходящие n).

Вместо $n!$ можно взять также любое число, делящееся на НОК(1, 2, 3, ..., n).

5. Да, верно. Перпендикуляры, проведенные к противоположным сторонам параллелограмма, лежат на одной прямой. Отрезки этих прямых являются диагоналями квадрата. Следовательно, эти диагонали взаимно перпендикулярны. Отсюда следует, что стороны исходного параллелограмма перпендикулярны, т.е. исходный параллелограмм – прямоугольник. Кроме того, равны расстояния между противоположными сторонами этого прямоугольника (они равны половине диагонали квадрата). Значит, этот прямоугольник – квадрат.

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

Вопросы и задачи

1. Воздух под воздействием космического излучения и радиоактивного излучения Земли всегда поддерживается в ионизированном состоянии, т.е. не является изолятором.

2. Вращение вызовет смещение электронов к краю диска, его периферия приобретет отрицательный заряд, центр же диска зарядится положительно.

3. а) Параболу; б) синусоиду.

4. Согласно принципу суперпозиции, напряженность результирующего однородного поля будет направлена параллельно биссектрисе угла, образованного плоскостями. В таком поле заряженные частицы станут двигаться по параболам с осями симметрии, параллельными этой биссектрисе.

5. Вылет электронов вызывает появление на катоде избыточных положительных зарядов. Тормозясь в поле, созданном этими зарядами, большинство электронов возвращаются на катод.

6. Да, одинаковы; различны плотности тока.

7. При росте скорости эффект расхождения пучка проявляется в меньшей степени, так как увеличиваются магнитные силы притяжения между движущимися частицами.

8. В гравитационном поле траектория вообще не зависит от вида частицы, в электрическом и магнитном полях она определяется отношением заряда частицы к ее массе.

9. Радиус окружности обратно пропорционален величине удельного заряда частицы, поэтому при увеличении последнего радиус кривизны траектории будет уменьшаться.

10. Нет, нельзя. Относительно наблюдателя, движущегося вслед за электронами, упорядоченное движение станут совершать положительные ионы кристаллической решетки проводника – это приведет к появлению такого же магнитного поля, какое фиксировалось неподвижным наблюдателем.

11. Продвигаясь в область более сильного магнитного поля, частица испытывает действие силы Лоренца, одна из составляющих которой направлена в противоположную сторону и словно выталкивает частицу в область более слабого поля.

12. Нет, нельзя. Частица при столкновении с молекулами газа расходует свою кинетическую энергию на ионизацию молекул, поэтому радиус кривизны ее траектории постепенно уменьшается.

13. Если частицы влетели в камеру снизу, то правый след принадлежит электрону, а левый – позитрону, причем кинетическая энергия позитрона больше.

14. Ответ практически содержится в словах Фейнмана из эпиграфа. Сила Лоренца, действующая на частицы со стороны магнитного поля, обеспечивает искривление траектории движения частиц и, следовательно, уменьшение размеров ускорителя.

15. Действующие на частицы сила Лоренца и кулоновская сила направлены в противоположные стороны. Если эти силы не уравновешивают друг друга, частицы отклоняются от прямой траектории и не попадают в выходное отверстие. Выйти из прибора смогут лишь частицы с определенной скоростью, зависящей от величин обоих полей.

16. Области Сибири расположены в более низких геомагнитных широтах, поскольку геомагнитный полюс смещен относительно географического и находится как раз на территории Канады.

17. Протонам при сближении с ядром требуется преодолевать отталкивание со стороны его кулоновского поля; электроны же, хотя и притягиваются ядрами, имеют примерно в 2000 раз меньшую, чем у нейтрона, массу и, соответственно, меньшую кинетическую энергию.

Микроопыт

При положительном заряде фольги электроны, испускаемые спиралью лампы, движутся к стеклянной колбе и заряжают ее внутреннюю поверхность отрицательно, т.е. зарядом противоположного знака, отчего отклонение листков электроскопа уменьшается. При отрицательном заряде фольги электроны, тормозясь, не попадают на стенки колбы.

САМОЗАКЛИНИВАЮЩИЕСЯ СТРУКТУРЫ

5. а) При движении плоскости, перпендикулярной главной диагонали трехмерного куба, сперва возникает правильный треугольник, который растет, и затем у него начинают урезаться углы, так что возникает шестиугольник, являющийся пересечением растущего и уменьшающегося треугольников. Когда сечение проходит через центр куба, шестиугольник становится правильным, а когда оно проходит через три вершины – уменьшающимся треугольником, центрально симметричным исходному. Для сечения четырехмерного куба возникает растущий правильный тетраэдр, затем у него обрезаются углы, и возникает фигура, являющаяся пересечением растущего и уменьшающегося правильных тетраэдров. Когда сечение проходит через центр четырехмерного куба, размеры тетраэдров сравниваются, и возникает правильный октаэдр.

б) В трехмерном случае образуется паркет на плоскости сечения из правильных трех- и шестиугольников (рис.2), в четырехмерье – разбиение трехмерного пространства (гиперплоскости сечения) на правильные тетраэдры и октаэдры. (Задача о разбиении пространства на правильные тетраэдры и октаэдры предлагалась на Турнире городов.)

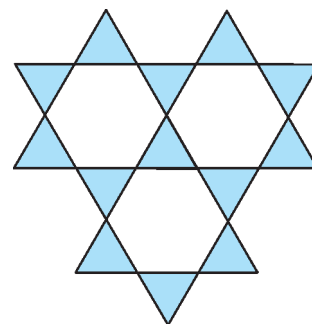


Рис. 2

ПАРАДОКСЫ КОМАНДНЫХ СОРЕВНОВАНИЙ

1. Составим таблицу, расположив по строкам результаты игр команд, победившей в соревновании I типа. Сумма очков на главной диагонали – более 50%. Если строки и столбцы таблицы упорядочены по рейтингу, то в левом нижнем углу любого прямоугольника таблицы находится минимум чисел этого прямоугольника. Поэтому числа главной диагонали определяют некоторый минимум очков в правой верхней половине таблицы. Кроме того, если выделить подтаблицу результатов игроков, имеющих ничьи на главной диагонали, то в этой табличке обе команды набирают половину очков. Возможные варианты подтаблицы для двух игроков:

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$

для трех игроков:

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Детальный разбор с учетом вышеизложенного показывает, что при $N < 5$ сумма очков в таблице будет не менее $\frac{1}{2}N^2$.

2. Обозначим рейтинги игроков следующим образом:

A: a_1 a_2

B: b_1 b_2

C: c_1 c_2

Пусть команда A побеждает команду B, а B побеждает C. В соревнованиях I типа победившая команда не может проиграть ни одной партии. Поэтому имеем

$$a_1 \geq b_1, \quad a_2 \geq b_2$$

и

$$b_1 \geq c_1, \quad b_2 \geq c_2.$$

Следовательно,

$$a_1 \geq b_1 \geq c_1 \quad \text{и} \quad a_2 \geq b_2 \geq c_2,$$

а это исключает возможность победы команды C над командой A.

В соревнованиях II типа победитель может проиграть не более одной партии, и это может быть только партия слабейшего игрока (№2) против сильнейшего игрока команды противника (№1). В этом случае мы имеем

$$a_1 \geq b_1, \quad a_1 \geq b_2, \quad a_2 \geq b_2$$

и

$$b_1 \geq c_1, \quad b_1 \geq c_2, \quad b_2 \geq c_2.$$

Из этих неравенств следуют аналогичные неравенства для игроков команд A и C :

$$a_1 \geq c_1, \quad a_1 \geq c_2, \quad a_2 \geq c_2.$$

Победа команды C над командой A исключена и здесь, потому что из трех ничьих, допускаемых последними неравенствами ($a_1 = c_1$, $a_1 = c_2$, $a_2 = c_2$), вытекает и четвертая ничья ($a_2 = c_1$).

3. Один из возможных примеров:

A : 15 13 8 3 1

B : 14 11 6 5 4

C : 12 10 9 7 2

Здесь, в отличие от примера в тексте, все рейтинги различные, и ничьих в таблицах нет. Но суммарные результаты – такие же.

4. Один из возможных вариантов решения:

A : 4 4 3 2 1 1

B : 3 3 3 3 2 1

C : 4 3 2 2 2 2

Здесь $B : C = 20 : 16$, $C : A = A : B = 18,5$. Этот набор кубиков обеспечивает минимально возможную вероятность выигрыша $P = 18,5/36 = 37/72$, что гораздо хуже, чем для примера в тексте.

5. Один из возможных вариантов решения:

A : 18 14 10 9 5 1

B : 17 13 12 8 4 3

C : 16 15 11 7 6 2

Здесь $A : B = B : C = C : A = 19 : 17$. Вероятность выигрыша $P = 19/36$ для любой пары кубиков.

6. Простейший пример:

A : 3 2

B : 1 3

C : 2 1

$A = B$, $B = C$, $C < A$.

СИЛЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ В ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ

1. Число соударений равно $2n + 1$, где n – наибольшее целое, удовлетворяющее условию $n < \frac{mv_0}{kL}$.

$$2. L = \frac{v_0}{k} \frac{mM}{m + M}.$$

$$3. T_1 = \frac{\sqrt{2} - 1}{\mu} \frac{R}{v_0} = 2,5 \text{ с}.$$

$$4. \alpha = 1, \beta = 1, \gamma = 1; v = \frac{2\rho_2 - \rho_1}{9\eta} gr^2 = 0,26 \text{ см/с}.$$

ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ В ЗАДАЧАХ

1. 1 : 3. 2. 1 : 3. 3. 5 : 1. 4. 16 : 21. 5. 5 : 1, считая от точки B .

XXX ТУРНИР ГОРОДОВ

Базовый вариант

8–9 классы

1. См. решение задачи 3 «Кванта» для младших школьников из «Кванта» № 6 за 2008 год.

2. См. решение задачи 2 «Кванта» для младших школьников из «Кванта» № 6 за 2008 год.

3. Пусть точки B_1, B_2, B_3 – середины дуг A_1A_2 , A_2A_3 , A_3A_1 соответственно, O – центр окружности. Площадь шестиугольника $A_1B_1A_2B_2A_3B_3$ равна сумме площадей четырехугольников $OA_1B_1A_2$, $OA_2B_2A_3$ и $OA_3B_3A_1$. Но у этих четырехуголь-

ников диагонали перпендикулярны, а значит, площадь каждого равна половине произведения его диагоналей. Искомая

сумма равна тогда $\frac{1}{2}OB_1 \cdot A_1A_2 + \frac{1}{2}OB_2 \cdot A_2A_3 + \frac{1}{2}OB_3 \cdot A_3A_1$.

Поскольку по условию $OB_1 = OB_2 = OB_3 = 2$, эта сумма численно равна $A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_1$, что нам и нужно.

4. См. решение задачи M2117 «Задачника «Кванта» в одном из следующих номеров журнала.

5. Изобразим беговую дорожку в виде левой половины некоторой окружности. Будем считать, что бегун, добежав до конца дорожки, не поворачивает обратно, а бежит дальше по правой половине этой окружности. Тогда все бегуны просто бегут по этой окружности. Условие того, что бегуны оказываются в одной точке исходной беговой дорожки, означает, что они находятся на прямой, перпендикулярной диаметру, разделяющему левую и правую половины нашей окружности.

Пусть через время t после начала забега бегуны встретились (находятся на соответствующей прямой). Тогда бегуны на левой половине находятся на некотором расстоянии x от точки старта, и бегуны на правой половине тоже находятся на расстоянии x от точки старта (рис.3).

При этом каждый бегун на левой половине пробежал некоторое целое число кругов и еще расстояние x , а каждый бегун на правой половине не добежал до некоторого целого числа кругов расстояния x .

Где будут бегуны через время $2t$ от начала забега? Каждый бегун на левой половине пробежит некоторое целое число кругов и еще расстояние $2x$, а каждый бегун на правой половине не добежит до некоторого целого числа кругов расстояния $2x$. Но это как раз и означает, что они находятся на некоторой прямой, перпендикулярной диаметру, разделяющему левую и правую половины нашей окружности (поскольку находятся на одинаковом расстоянии вдоль окружности от точки старта). Значит, на исходной дорожке бегуны снова встретятся через время $2t$, аналогично – через время $3t$ и так далее.

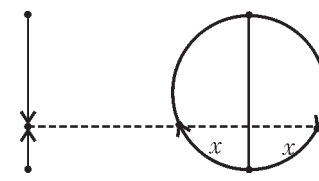


Рис. 3

10–11 классы

1. Расположим коробки в ряд так, чтобы число пирожных в них убывало слева направо. Теперь нарисуем на клетчатой бумаге «лесенку», где высота первого столбика (шириной в одну клетку) равна числу пирожных в первой слева коробке, высота второго столбика равна числу пирожных во второй слева коробке и т.д. (рис.4). Лесенка разделится на ступеньки. Первая (самая левая) ступенька будет состоять из самых высоких столбиков, вторая ступенька – из следующих по высоте столбиков, и т.д., последняя (самая правая) ступенька будет состоять из самых низких столбиков. Количество различных чисел в записях Алеши равно числу ступеней этой лесенки (самые полные коробки соответствуют самой высокой ступеньке, и т.д.). Но этому же числу равно и количество различных чисел среди записанных Сережей. В самом деле, можно считать, что, выбирая по пирожному из каждой коробки, мы просто срезаем у нашей лесенки нижний слой квадратиков. Тогда, заполнив подносы с наибольшим числом пирожных, мы срежем несколько слоев так, что пропадет целая ступенька (самая низкая), и число ступенек уменьшится на 1. Когда мы заполним подносы со следующим количеством

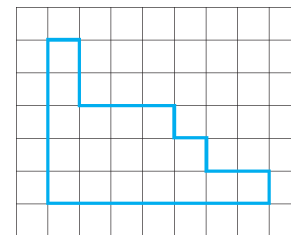


Рис. 4

пирожных (по величине), мы срежем еще одну ступеньку, и т.д.

2. $x_1 = 1, x_2 = \dots = x_n = 0$.

Возведем в квадрат равенство

$$\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2 + \dots + x_n} = \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3 + \dots + x_n + x_1},$$

вычтем из обеих частей сумму $x_1 + \dots + x_n$ и снова возведем в квадрат. Получим $x_1(x_2 + \dots + x_n) = x_2(x_3 + \dots + x_n + x_1)$, откуда $(x_1 - x_2)(x_3 + \dots + x_n) = 0$. Так как $x_1 - x_2 = 1$, получаем, что $x_3 + \dots + x_n = 0$. Поскольку из чисел $x_3, \dots, x_n$ извлекается квадратный корень, то они неотрицательны, и раз их сумма равна 0, то каждое из них равно 0.

Пусть $x_2 \neq 0$, т.е. $x_2 - x_3 \neq 0$. Рассмотрев суммы с $\sqrt{x_2}$ и $\sqrt{x_3}$ и рассуждая как выше, получаем $x_1 = 0$. Тогда

$x_2 = -1$, но существует $\sqrt{x_2}$ – противоречие. Значит, $x_2 = 0$, откуда $x_1 = 1$, и тогда все условия выполнены.

3. Пусть точки $B_1, B_2, \dots, B_{30}$ – середины дуг

$A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{30}A_1$ соответственно, O – центр окружности.

Площадь шестидесятиугольника $A_1B_1A_2B_2 \dots A_{30}B_{30}$ равна сумме площадей четырехугольников $OA_1B_1A_2, OA_2B_2A_3, \dots, OA_{30}B_{30}A_1$. Но у этих четырехугольников диагонали перпендикулярны, а значит, площадь каждого равна половине произведения его диагоналей. Заметим, что один из этих четырехугольников может оказаться невыпуклым (если центр окружности лежит снаружи исходного тридцатиугольника), но его площадь все равно вычисляется так же (проверьте).

Искомая сумма равна тогда $\frac{1}{2}OB_1 \cdot A_1A_2 + \frac{1}{2}OB_2 \cdot A_2A_3 + \dots$

$\dots + \frac{1}{2}OB_{30} \cdot A_{30}A_1$. Поскольку по условию $OB_1 = OB_2 = \dots = OB_{30} = 2$, эта сумма численно равна $A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_{30}A_1$, что нам и нужно.

4. См. решение задачи M2117 «Задачника «Кванта» в одном из следующих номеров журнала.

5. Можно считать, что наши прямоугольники нарисованы на бесконечной клетчатой плоскости. Разобьем мысленно плоскость на квадраты размером 2×2 клетки и пронумеруем клетки каждого квадратика цифрами 1, 2, 3, 4 по часовой

	1	2	1	2	1	2
	4	3	4	3	4	3
	1	2	1	2	1	2
	4	3	4	3	4	3

Рис. 5

стрелке, начиная с левого верхнего угла квадратика (рис.5). Так как обе стороны каждого нашего прямоугольника нечетны, в углах любого прямоугольника будут стоять одинаковые цифры. Занумеруем тогда цифрами 1, 2, 3, 4 четыре различных цвета, и каждый прямоугольник выкрасим в цвет, номер которого стоит в

углах этого прямоугольника. Нетрудно убедиться, что цифры в углах любых двух примыкающих друг к другу прямоугольников будут различны.

Сложный вариант

8–9 классы

1. Доска состоит из четырех угловых квадратов 50×50 : левого верхнего, левого нижнего, правого верхнего и правого нижнего. Предположим, что в одном из угловых квадратов, скажем в левом верхнем, нет ферзей. Пусть в правом нижнем квадрате всего x ферзей. В левом нижнем квадрате тогда находится не более $50 - x$ ферзей (так как ферзи левого и правого нижних квадратов находятся в 50 строчках прямоугольника 50×100). Аналогично, в правом верхнем угловом квад-

рате находится не более $50 - x$ ферзей. Общее количество ферзей на доске не превосходит тогда $x + 50 - x + 50 - x = 100 - x$. Но ферзей всего 100, а x неотрицательно – это возможно лишь при $x = 0$. Значит, в правом нижнем квадрате ферзей тоже нет, т.е. все ферзи находятся в левом нижнем и правом верхнем квадратах.

Рассмотрим у нашей доски клетчатую диагональ, соединяющую левую нижнюю и правую верхнюю клетки, а также все диагонали, параллельные этой и пересекающие левый нижний и правый верхний квадраты. Их будет ровно 99, и все 100 ферзей находятся на этих диагоналях. Тогда какие-то два ферзя находятся на одной диагонали и, значит, бьют друг друга – противоречие.

2. Можно.

Пусть гири весят a, b, c, d граммов.

Первое решение. Годятся, например, такие 4 взвешивания:

- 1) на одной чаше гири a, b , на другой – c, d ;
- 2) на одной чаше гири a, c , на другой – b, d ;
- 3) на одной чаше гири a, d , на другой – b, c ;
- 4) одна чаша пустая, на другой – a, b, c, d .

Пусть $b = a + x, c = a + y, d = a + z$. Из первых трех взвешиваний (сложив результаты) мы знаем разность между $3a + (b + c + d)$ и $2(b + c + d)$, т.е. $x + y + z$, либо точно, либо с ошибкой в 1. Из последнего взвешивания мы знаем $a + b + c + d = 4a + (x + y + z)$ либо точно, либо с ошибкой в 1.

Причем ошибка на 1 может быть только в одном из этих случаев. Значит, мы знаем разность $(x + y + z)$ и $4a + (x + y + z)$, т.е. $4a$, с точностью до 1. Тогда легко найдем a из делимости на 4. Аналогично найдем b, c, d .

Второе решение. Годятся, например, такие 4 взвешивания:

- 1) на одной чаше гири a, b, c , на другой – d ;
- 2) на одной чаше гири a, b, d , на другой – c ;
- 3) на одной чаше гири a, c, d , на другой – b ;
- 4) на одной чаше гири b, c, d , на другой – a .

Из показаний весов мы получаем следующие числа (одно, возможно, с ошибкой):

$$x = a + b + c - d, y = a + b - c + d, z = a - b + c + d,$$

$$t = -a + b + c + d.$$

Решаем эту систему: например, чтобы найти a , складываем три первых уравнения и вычитаем из результата четвертое, получаем $4a = (x + y + z - t)$, откуда $a = (x + y + z - t)/4$. Аналогично находим b, c и d . Одно из чисел x, y, z, t мы знаем, возможно, с ошибкой в 1 грамм. Поэтому в выражениях для чисел a, b, c, d числители могут не делиться на 4. Но легко однозначно восстановить их истинные значения (добавляя или вычитая 1 так, чтобы числитель делился на 4). Отсюда находим массы гирь.

3. 1/2.

Немного переформулируем задачу. Продлим медиану AD на ее длину за точку D , получим точку D' (рис.6). Тогда $CABD'$ – параллелограмм (так как диагонали этого четырехугольника делятся пополам их точкой пересечения), откуда угол DAB равен углу $DD'C$. Поскольку углы CAB и ACD' параллелограмма в сумме дают 180° , условие того, что угол CAB тупой, означает, что угол ACD' острый. В итоге имеем: Илья, зная только длину стороны AD' (она равна удвоенной длине AD), смог доказать, что в треугольнике CAD' углы при стороне CD' острые. При каком соотношении сторон AC и AD' это возможно?

Ясно, что если треугольник CAD' равнобедренный ($AC = AD' = 2AD$), то углы при основании острые (ведь они рав-

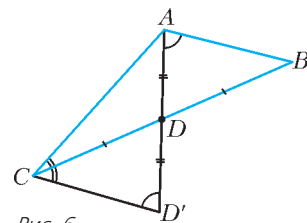


Рис. 6

ны и их сумма меньше 180°). Значит, ответ $AD/AC = 1/2$ подходит (и мы доказали для этого случая утверждение Ильи).

Если треугольник CAD' неравносторонний ($AC \neq AD'$), то, например, возьмем большую из сторон AC и AD' за гипотенузу, а меньшую – за катет, и построим треугольник CAD' ,

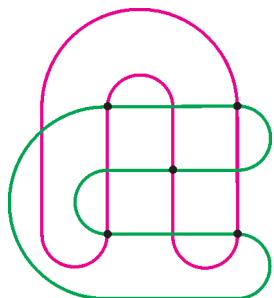


Рис. 7

в котором один из углов ACD' или $AD'C$ будет прямым. Построим теперь параллелограмм $CABD'$ и получим треугольник CAB , который вполне мог оказаться у Сережи, и в этом треугольнике один из углов DAB или CAB будет прямым. Значит, Илья не смог бы доказать свое утверждение для $AD/AC \neq 1/2$.

4. Могут.

Пример изображен на рисунке 7.

5. *Первое решение.* Раскроем в произведении $(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n)$ скобки. Получим сумму

$$1 + (a_1 + \dots + a_n) + (a_1a_2 + \dots + a_{n-1}a_n) + \dots + (a_1a_2a_3 + \dots + a_{n-2}a_{n-1}a_n) + \dots + a_1a_2 \dots a_n.$$

В первой скобке стоит просто сумма чисел $a_1, \dots, a_n$, слагаемые во второй скобке получаются так – выбираем пару чисел из $a_1, \dots, a_n$ и записываем их произведение, слагаемые в третьей скобке получаются так – выбираем тройку чисел из $a_1, \dots, a_n$ и записываем их произведение, и т.д. Ясно, что сумма чисел во второй скобке не превосходит $(a_1 + \dots + a_n)^2$, сумма чисел в третьей скобке не превосходит $(a_1 + \dots + a_n)^3$, и т.д. Значит, наше произведение не превосходит

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n} < 2.$$

Второе решение. Докажем по индукции, что для всех k от 1 до n верно утверждение

$$(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_k) < 1+2(a_1+\dots+a_k).$$

Для $k=1$ утверждение очевидно ($1+a_1 < 1+2a_1$, так как a_1 положительно).

Сделаем шаг индукции.

Пусть для некоторого k , где $k < n$, верно

$$(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_k) < 1+2(a_1+\dots+a_k).$$

Домножим это неравенство на $(1+a_{k+1})$. Получим

$$(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_{k+1}) < (1+2(a_1+\dots+a_k))(1+a_{k+1}) \leq 1+2(a_1+\dots+a_k) + a_{k+1}\left(1+2\cdot\frac{1}{2}\right) = 1+2(a_1+\dots+a_{k+1}).$$

Утверждение доказано.

Взяв $k=n$, получим, что

$$(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n) < 1+2(a_1+\dots+a_n) < 1+2\cdot\frac{1}{2} = 2,$$

что и требовалось доказать.

Замечание для знатоков. На самом деле выполнено более точное неравенство. Можно доказать, что при постоянной сумме $a_1 + \dots + a_n$ выражение $(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n)$ принимает наибольшее значение, когда числа $a_1, \dots, a_n$ равны. Значит,

$$(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n) \leq \left(1+\frac{1}{2n}\right)^n = \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}}.$$

Как известно из курса математического анализа, выражение

под корнем не превосходит числа Эйлера $e = 2,71828\dots$, откуда $(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n) < \sqrt[n]{e} = 1,64\dots$

Кстати, неравенство $\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n \leq 2$ равносильно неравенству $\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)^n \geq \frac{1}{2}$, которое сразу следует из неравенства Бернулли.

6. 2φ .

Построим точку A_1 так, чтобы точка B' была серединой отрезка A_1C (рис.8). Тогда точка B' будет центром описанной

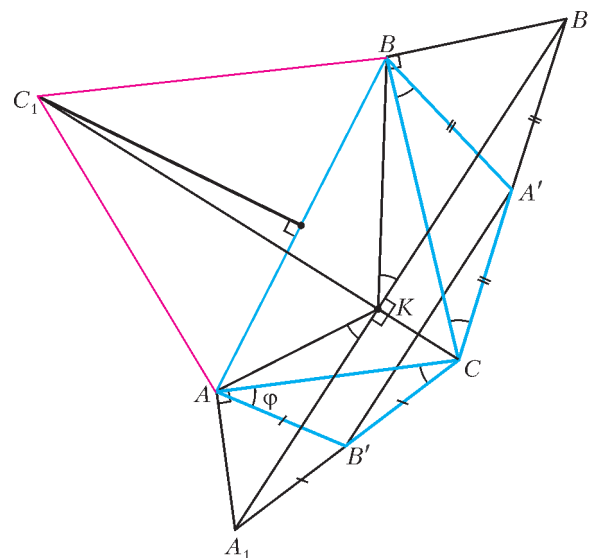


Рис. 8

окружности треугольника A_1AC , откуда угол A_1AC – прямой. Аналогично, построим точку B_1 так, чтобы точка A' была серединой отрезка B_1C – тогда угол B_1BC будет прямым.

Заметим, что $A'B'$ – средняя линия в треугольнике A_1CB_1 и, значит, параллельна A_1B_1 . Поэтому прямая CC_1 перпендикулярна A_1B_1 . Пусть K – точка пересечения прямых CC_1 и A_1B_1 . Четырехугольник A_1AKC – вписанный (так как углы A_1AC и A_1KC прямые), а значит, угол AKA_1 равен углу ACA_1 , т.е. равен φ . Аналогично, угол BKB_1 равен φ . Тогда KC_1 – биссектриса угла AKB . По известному свойству, она делит пополам дугу AB описанной окружности треугольника AKB (на которую опирается угол AKB). Но через середину этой дуги проходит и серединный перпендикуляр к отрезку AB . Значит, точка C_1 и есть середина дуги AB , откуда

$$\angle AC_1B = 180^\circ - \angle AKB = 180^\circ - 2(90^\circ - \varphi) = 2\varphi.$$

7. См. решение задачи М2119 «Задачника «Кванта» в одном из следующих номеров журнала.

10–11 классы

1. $5/4$.

Рассмотрим среди вертикальных линий 2-ю, 4-ю и 6-ю и среди горизонтальных тоже 2-ю, 4-ю и 6-ю. Эти линии делят доску на 16 прямоугольников, каждый из которых разделен на 4 клетки, раскрашенные в шахматном порядке. Если в каждом таком прямоугольнике отношение суммарной площади белых клеток к суммарной площади черных не больше $5/4$, то это же будет верно и для большого прямоугольника (в самом деле, если в i -м прямоугольнике a_i – площадь белых клеток, b_i – площадь черных и $a_i \leq (5/4)b_i$, то, сложив все эти неравенства, получим нужное неравенство для всей доски).

Рассмотрим теперь отдельный прямоугольник, разбитый на 4 клетки. Пусть длины его сторон x (по горизонтали) и y (по вертикали). Ясно, что у одной из белых клеток длина горизонтальной стороны не меньше $x/2$. Пусть для определенности эта клетка верхняя левая. Горизонтальную прямую, разделяющую прямоугольник, можно тогда передвигать вниз до тех пор, пока отношение площади левой верхней клетки (белой) к левой нижней (черной) не станет равно 2. При этом условие задачи (о том, что площадь любой белой клетки не больше удвоенной площади любой черной клетки) по-прежнему будет выполнено, а суммарная площадь белых клеток только увеличится (или не изменится). Дальше прямую двигать нельзя (нарушится условие задачи). Аналогично, после этого можно двигать вправо вертикальную прямую (пока площадь верхней левой клетки не станет в 2 раза больше площади верхней правой). Стороны верхней левой клетки будут тогда равны $2x/3$ и $2y/3$, площадь белых клеток будет равна $4xy/9 + xy/9 = 5xy/9$, а площадь черных будет равна $xy - 5xy/9 = 4xy/9$. Получили, что отношение площади белых клеток к площади черных равно $5/4$ и больше быть не может.

Осталось привести пример, когда в каждом из 16 прямоугольников нужное отношение равно $5/4$. Разделим доску так, чтобы наши 16 прямоугольников были одинаковыми квадратами, в каждом из них левая верхняя клетка была квадратной, причем ее стороны в 2 раза длиннее сторон правой нижней клетки. Ясно, что так разделить доску можно, и получится искомый пример.

2. Не обязательно.

Приведем один из примеров, который нетрудно описать. Будем считать, что в пространстве заданы три направления: вверх-вниз, вправо-влево, вперед-назад. Сначала заполним все пространство кубиками обычным образом. Выберем теперь один из кубиков. К нему примыкают такие шесть бесконечных столбиков толщиной в один кубик: два параллельных столбика соответственно слева и справа, направленные вверх-вниз, два других – спереди и сзади, направленные влево-вправо, и еще два – снизу и сверху, направленные вперед-назад. Сдвинем каждый столбик вдоль его направления на половину длины ребра кубика (первые два сдвинем вверх, следующие два – влево, следующие два – вперед). Все пространство по-прежнему будет заполнено, но выбранный кубик ни с одним другим не будет граничить по целой грани.

3. Всегда может выиграть второй игрок. Разберем два случая. Пусть $N > 2$ нечетно.

Докажем, что второй может каждым своим очередным ходом объединять две наибольшие имеющиеся кучи.

Сначала первый обязательно сделает кучку из двух орехов, после чего второй сделает кучку из трех орехов, и ситуация после хода второго будет такая: в наибольшей куче нечетное число орехов, а в каждой из остальных кучек по одному ореху.

В такой ситуации у первого есть две возможности. Либо он сделает кучку из двух орехов – и тогда второй присоединит ее к наибольшей куче. Либо он увеличит наибольшую кучку на один орех – тогда в ней будет четное число орехов, и так как N нечетно, то останется еще хотя бы одна кучка из одного ореха, и второй сможет присоединить один орех к наибольшей кучке. В итоге снова получается описанная ситуация.

Мы видим, что у второго всегда есть ход. Кучи со временем кончатся, и первый проиграет.

Пусть $N > 2$ четно.

Заметим, что после хода любого игрока число куч уменьшается на одну. Следовательно, перед ходом второго игрока число куч всегда нечетно. Пусть второй действует так же, как и в

случае нечетного N , до тех пор, пока перед его ходом не останутся три кучи.

Если в двух «маленьких» кучах по одному ореху, он просто объединяет «маленькие» кучи и оставляет первому две кучи с четным числом орехов – и тот проиграл; если в «маленьких» кучах один и два ореха, то добавляет один орех в наибольшую кучу (и снова первый проиграл).

4. Пусть O – точка пересечения диагоналей трапеции $ABCD$. Так как четырехугольник A_1BCD вписан в окружность, имеем $BO \cdot OD = A_1O \cdot OC$ (из подобия треугольников BOA_1 и COD). Аналогично, $BO \cdot OD = AO \cdot OC_1$, $AO \cdot OC = BO \cdot OD_1$ и $AO \cdot OC = B_1O \cdot OD$.

Из первых двух равенств получаем, что $OC/AO = OC_1/A_1O$, из двух других получаем, что $BO/OD = B_1O/OD_1$.

Заметим, что условие параллельности сторон BC и AD трапеции $ABCD$ можно записать в виде $BO/OD = OC/AO$ (из подобия треугольников BOC и DOA).

Но тогда (из предыдущего) $BO_1/OD_1 = OC_1/A_1O$, т.е. стороны B_1C_1 и A_1D_1 параллельны.

Аналогично проверяем, что непараллельность сторон AB и CD влечет непараллельность сторон A_1B_1 и C_1D_1 .

Значит, $A_1B_1C_1D_1$ – трапеция, что и требовалось доказать.

7. См. решение задачи M2123 «Задачника «Кванта» в одном из следующих номеров журнала.

журнал © Квант

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

**С.А.Дориченко, А.А.Егоров, С.П.Коновалов,
А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан**

НОМЕР ОФОРМИЛИ

**Д.Н.Гришукова, В.В.Иванюк, А.Е.Пацхверия,
М.В.Сумнина**

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

**Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ
по печати. Рег. св-во №0110473**

Адрес редакции:

119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»

Тел.: 930-56-48

E-mail: admin@kvant.info, math@kvant.info,

phys@kvant.info

Сайт: kvant.info

Отпечатано в ОАО ордена Трудового Красного Знамени

«Чеховский полиграфический комбинат»

142300 г.Чехов Московской области,

Сайт: www.chpk.ru E-mail: marketing@chpk.ru

Факс: 8(49672) 6-25-36, факс: 8(499) 270-73-00

Отдел продаж услуг многоканальный: 8(499) 270-73-59