XXX Турнир городов

Турнир городов – соревнование по математике для старшеклассников. Для школьников из каждого города, участвующего в Турнире, это одна из олимпиад, которые проводятся в их городе. Соревнование же между городами – заочное. В первом турнире (1980 г.) приняли участие только Москва и Киев. Ныне число городов-участников достигло примерно сотни (оно несколько колеблется из года в год), причем общее население этих городов – около 100 миллионов человек, а число школьников, решающих эти задачи, – около 10 тысяч. Самая большая группа городов находится в России, далее идут Украина, Белоруссия, Балканские страны, Австралия, Латинская Америка, Канада, Иран, Израиль, Германия и некоторые другие.

Турнир знакомит школьников с интересными красивыми задачами, требующими для своего решения нестандартных подходов. Школьник, которому удалось самостоятельно решить несколько таких задач (не обязательно во время соревнования, а хотя бы дома, в свободное время), начинает смотреть на математику другими глазами – по сравнению с тем, как он ее воспринимал, видя только школьный курс. Привлекает школьников к Турниру и то, что он является спортивным соревнованием. Потребность проверять свои способности и соревноваться вообще лежит в природе людей, в особенности молодых. Но спортивная сторона Турнира вступает в противоречие с научной стороной. Для тех, кто только начинает интересоваться математикой, это противоречие незаметно. Пяти часов слишком много, чтобы начинающий мог использовать все это время. Но для школьников продвинутых, способных в сложном варианте решить труднейшие задачи, пять часов – это слишком мало, и Турнир становится для них соревнованием на скорость. А это уже противоречит духу науки. Чтобы смягчить этот недостаток, в Турнире введено правило зачета по трем лучшим задачам. Каждый год проходят четыре соревнования (базовый и сложный варианты осенью и весной), но они имеют права попыток, из которых выбирается лучший результат.

Организаторы Турнира городов как в Москве, так и в городах-участниках, заинтересованы в том, чтобы увидеть способных молодых людей, которые займут места в соответствующих учебных заведениях (в математических классах и вузах), а впоследствии – и в научных учреждениях.

ЗАДАЧИ ОСЕННЕГО ТУРА (2008 год)[1]

Базовый вариант

8–9 классы

1(3). В 10 коробках лежат карандаши (пустых коробок нет). Известно, что в разных коробках разное число карандашей, причем в каждой коробке все карандаши разных цветов. Докажите, что из каждой коробки можно выбрать по карандашу так, что все они будут разных цветов.

П.Кожевников

2(3). Даны пятьдесят различных натуральных чисел, двадцать пять из которых не превосходят 50, а остальные больше 50, но не превосходят 100. При этом никакие два из них не отличаются ровно на 50. Найдите сумму этих чисел.

В.Произволов

3(4). В окружность радиуса 2 вписан остроугольный треугольник $A_1A_2A_3$. Докажите, что на дугах A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1 можно отметить по одной точке B_1, B_2, B_3 соответственно так, чтобы площадь шестиугольника $A_1B_1A_2B_2A_3B_3$ численно равнялась периметру треугольника $A_1A_2A_3$.

Г.Гальперин

4(4). Даны три различных натуральных числа, одно из которых равно полусумме двух других. Может ли произведение этих трех чисел являться точной 2008-й степенью натурального числа?

Г.Гальперин

5(4). Несколько спортсменов стартовали одновременно с одного и того же конца прямой беговой дорожки. Их скорости различны, но постоянны. Добежав до конца дорожки, спортсмен мгновенно разворачивается и бежит обратно, затем разворачивается на другом конце и т.д. В какой-то момент все спортсмены снова оказались в одной точке. Докажите, что такие встречи всех спортсменов будут продолжаться и впредь.

А.Шаповалов

10–11 классы

1(3). У Алеши есть пирожные, разложенные в несколько коробок. Алеша записал, сколько пирожных в каждой коробке. Сережа взял по одному пирожному из каждой коробки и положил их на первый поднос. Затем он снова взял по одному пирожному из каждой непустой коробки и положил их на второй поднос – и так далее, пока все пирожные не оказались разложенными по подносам. После этого Сережа записал, сколько пирожных на каждом подносе. Докажите, что количество различных чисел среди записанных Алешей равно количеству различных чисел среди записанных Сережей.

А.Буфетов

2(3). Решите систему уравнений ($n > 2$)

$$\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2 + \ldots + x_n} = \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3 + \ldots + x_n + x_1} = \ldots = \sqrt{x_n} + \sqrt{x_1 + \ldots + x_{n-1}};$$

$$x_1 - x_2 = 1.$$

Б.Френкин

3(4). В окружность радиуса 2 вписан тридцатиугольник $A_1A_2\ldots A_{30}$. Докажите, что на дугах A_1A_2, A_2A_3, …, $A_{30}A_1$ можно отметить по одной точке $B_1, B_2, \ldots, B_{30}$ соответственно так, чтобы площадь шестидесятиугольника $A_1B_1A_2B_2\ldots A_{30}B_{30}$ численно равнялась периметру тридцатиугольника $A_1A_2\ldots A_{30}$.

Г.Гальперин

4(4). Существует ли арифметическая прогрессия из пяти различных натуральных чисел, произведение которых есть точная 2008-я степень натурального числа?

Г.Гальперин

5(4). На клетчатом листе бумаги нарисованы несколько прямоугольников, их стороны идут по сторонам клеток. Каждый прямоугольник состоит из нечетного числа клеток, и никакие два прямоугольника не содержат общих клеток. Докажите, что эти прямоугольники можно раскрасить в 4 цвета так, чтобы у прямоугольников одного цвета не было общих точек границы.

А.Грибалко

---

[1] *В скобках после номера каждой задачи указано максимальное количество баллов, присуждавшихся за ее решение.*

Сложный вариант

8–9 классы

1(4). На шахматной доске 100×100 расставлено 100 не бьющих друг друга ферзей. Докажите, что в каждом угловом квадрате 50×50 находится хотя бы один ферзь.

А.Грибалко

2(6). Есть 4 камня, каждый весит целое число граммов. Есть чашечные весы со стрелкой, показывающей, на какой из двух чаш масса больше и на сколько граммов. Можно ли узнать про все камни, сколько какой весит, за 4 взвешивания, если в одном из этих взвешиваний весы могут ошибиться на 1 грамм?

Д.Баранов

3(6). Сережа нарисовал треугольник ABC и провел в нем медиану AD. Затем он сообщил Илье, какова в этом треугольнике длина медианы AD и какова длина стороны AC. Илья, исходя из этих данных, доказал утверждение: угол CAB тупой, а угол DAB острый. Найдите отношение AD/AC (и докажите для любого треугольника с таким отношением утверждение Ильи).

И.Богданов

4(6). Барон Мюнхгаузен рассказывал, что у него есть карта страны Оз с пятью городами. Каждые два города соединены дорогой, не проходящей через другие города. Каждая дорога пересекает на карте не более одной другой дороги и не более одного раза. Дороги обозначены зеленым или красным (по цвету кирпича, которым вымощены), и при обходе вокруг каждого города (по периметру) цвета выходящих из него дорог чередуются. Могут ли слова барона быть правдой?

А.Грибалко

5(8). Даны положительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Известно, что $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \le 1/2$. Докажите, что

$$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n) < 2 .$$

С.Слободник

6(9). На сторонах AC и BC неравнобедренного треугольника ABC во внешнюю сторону построены как на основаниях равнобедренные треугольники $AB'C$ и $CA'B$ с одинаковыми углами при основаниях, равными φ. Перпендикуляр, проведенный из вершины C к отрезку $A'B'$, пересекает серединный перпендикуляр к отрезку AB в точке C_1. Найдите угол AC_1B.

А.Заславский

7. В бесконечной последовательности $a_1, a_2, a_3, \ldots$ число a_1 равно 1, а каждое следующее число a_n строится из предыдущего a_{n-1} по правилу: если у числа n наибольший нечетный делитель имеет остаток 1 от деления на 4, то $a_n = a_{n-1} + 1$, если же остаток равен 3, то $a_n = a_{n-1} - 1$. Докажите, что в этой последовательности

а)(5) число 1 встречается бесконечно много раз;

б)(5) каждое натуральное число встречается бесконечно много раз.

(Вот первые члены этой последовательности: 1, 2, 1, 2, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 3, ...)

А.Заславский

10–11 классы

1(4). Квадратная доска разделена 7-ю прямыми, параллельными одной стороне доски, и 7-ю прямыми, параллельными другой стороне доски, на 64 прямоугольные клетки, которые покрашены в белый и черный цвета в шахматном порядке. Расстояния межу соседними прямыми не обязательно одинаковы, поэтому клетки могут быть разных размеров. Известно, однако, что отношение площади любой белой клетки к площади любой черной клетки не больше 2. Найдите наибольшее возможное отношение суммарной площади белых клеток к суммарной площади черных.

Ю.Чеканов

2(6). Пространство разбито на одинаковые кубики. Верно ли, что для каждого из этих кубиков обязательно найдется другой, имеющий с ним общую грань?

И.Богданов

3(6). На столе лежат $N > 2$ кучек по одному ореху в каждой. Двое ходят по очереди. За ход нужно выбрать две кучки, где числа орехов взаимно просты, и объединить эти кучки в одну. Выиграет тот, кто сделает последний ход. Для каждого N выясните, кто из играющих может всегда выигрывать, как бы ни играл его противник.

А.Шаповалов

4(6). Дана неравнобокая трапеция $ABCD$. Точка A_1 – это точка пересечения описанной окружности треугольника BCD с прямой AC, отличная от C. Аналогично определяются точки B_1, C_1, D_1. Докажите, что $A_1B_1C_1D_1$ – тоже трапеция.

И.Богданов

5(8). См. задачу М2119 «Задачника «Кванта».

6(9). См. задачу М2120 «Задачника «Кванта».

7. Тест состоит из 30 вопросов, на каждый есть 2 варианта ответа (один верный, другой нет). За одну попытку Витя отвечает на все вопросы, после чего ему сообщают, на сколько вопросов он ответил верно. Сможет ли Витя действовать так, чтобы гарантированно узнать все верные ответы не позже, чем

а)(5) после 29-й попытки (и ответить верно на все вопросы при 30-й попытке);

б)(5) после 24-й попытки (и ответить верно на все вопросы при 25-й попытке)?

(Изначально Витя не знает ни одного ответа, тест всегда один и тот же.)

В.Клепцын

Публикацию подготовили
С.Дориченко, Н.Константинов

ИНФОРМАЦИЯ

Заочное отделение Малого мехмата МГУ

Более 30 лет при механико-математическом факультете МГУ работает Малый механико-математический факультет (МММФ). За эти годы заочное отделение выпустило свыше 10000 учащихся, многие из которых стали студентами механико-математического и других факультетов МГУ.

Основные задачи Малого мехмата – углубление знаний по темам школьной программы и расширение математического кругозора за рамки программы средней школы.

В 2009 году заочное отделение Малого мехмата объявляет прием учащихся на 2009/10 учебный год в 8 и 9 классы, а также прием на неполный курс обучения в 10 и 11 классы. На заочное отделение принимают учащихся из России, стран

СНГ и Прибалтики, а также русскоязычных учащихся из стран дальнего зарубежья. Зачисление индивидуальных учеников производится *на конкурсной основе* по результатам выполнения приведенной ниже вступительной работы.

Существует возможность обучения нескольких учеников из одной школы по форме «Коллективный ученик». Группа работает под руководством своего школьного преподавателя и может включать не более 15 учащихся из одной параллели (если учащихся, желающих заниматься, больше, то можно сформировать несколько групп). Группа «Коллективный ученик» обучается как *один учащийся*, т.е. оформляет по каждому заданию одну работу и оплачивает обучение всей группы как обучение одного учащегося.

Обучение на заочном отделении платное. Информация об условиях оплаты будет выслана учащимся, зачисленным на заочное отделение, летом 2009 года, вместе с комплектом заданий (а коллективным ученикам – несколько позже, в конце сентября – начале октября).

Школьники, успешно закончившие обучение на заочном отделении (с итоговой оценкой «хорошо» или «отлично»), получают свидетельства об окончании Малого мехмата, а закончившие заочное отделение с оценкой «удовлетворительно» – справки об окончании Малого мехмата.

Желающие поступить на заочное отделение Малого мехмата должны *не позднее 30 апреля 2009 года* выслать в наш адрес письмом или по электронной почте решения задач вступительной работы (при этом не обязательно должны быть решены все задачи). Вступительную работу необходимо выполнить в школьной тетради в клетку. Записывать решения в тетрадь следует в том же порядке, в каком задачи идут во вступительной работе. На обложку тетради следует наклеить лист бумаги со следующими данными:

1. Фамилия, имя, отчество учащегося
2. Класс (*в 2009/10 учебном году*)
3. Полный домашний адрес с *указанием почтового индекса*
4. Адрес электронной почты (если он есть)
5. Телефон (с кодом города)
6. Откуда вы узнали о наборе на заочное отделение

Вступительные работы обратно не высылаются.

Группам «Коллективный ученик» *не нужно* выполнять вступительную работу: необходимо лишь *не позднее 15 сентября 2009 года* выслать письмом или по электронной почте следующие данные:

1. Фамилия, имя, отчество руководителя группы
2. Фамилии, имена, отчества учащихся (не более 15 человек) в алфавитном порядке
3. Класс (*в 2009/10 учебном году*)
4. Полный адрес руководителя группы (по которому следует высылать задания) *с указанием почтового индекса*
5. Адрес электронной почты (если он есть)
6. Телефон (с кодом города)
7. Откуда вы узнали о наборе на заочное отделение

Наш адрес: 119991 Москва, ГСП-1, Ленинские горы, МГУ, мехмат, ММMФ

Электронная почта: vstup@zaoch.ru

Сайт МММФ: http://mmmf.math.msu.ru

Телефон: (495) 939-39-43

Вступительная работа

Задачи 1–10 предназначены для поступающих в 2009 году в 8 или 9 класс (т.е. для нынешних учащихся 7 или 8 класса). Задачи 6–15 предназначены для поступающих в 10 или 11 класс (для нынешних учащихся 9 или 10 класса). За решения задач для других классов баллы не начисляются!

1. Фанерный лист прямоугольной формы обрезали, уменьшив его размеры на 5% по вертикали и на 10% по горизонтали. На сколько процентов уменьшилась площадь листа?

2. Решите неравенство $\left(2x^2-1\right)^4-\left(x^2+8\right)^4 \geq 0$.

3. В треугольнике ABC проведена биссектриса BD. Докажите, что $AB > AD$.

4. Решите в натуральных числах уравнение

$$2n-\frac{1}{n^5}=3-\frac{2}{n}.$$

5. Какое количество простых чисел может быть среди пяти подряд идущих пятизначных натуральных чисел? Укажите все возможные варианты и докажите, что другие варианты невозможны.

6. Витя готовится к важной контрольной работе по теме «Параллельные прямые». За каждый из вопросов контрольной работы можно получить 0, 1, 2, 3 или 4 балла. Витя посчитал, что если за половину вопросов он получит 3 балла, а за оставшуюся половину 2 балла, то этого как раз хватит для того, чтобы успешно сдать тему. Если же Витя за треть вопросов получит 4 балла, а за остальные вопросы 3 балла, то он наберет на 10 баллов больше, чем необходимо для сдачи этой темы. Сколько вопросов содержит контрольная работа? За какое количество баллов ставят зачет по теме «Параллельные прямые»?

7. Катя и Миша играют в игру. Перед началом игры на доске написано число 1. За один ход разрешается умножить записанное число на любое натуральное число от 2 до 9. Первой ходит Катя, далее ходят по очереди. Выигрывает тот, кто первым получит число, большее 1000. Кто выиграет при правильной игре? Укажите выигрышную стратегию.

8. В прямоугольной трапеции $ABCD$ углы A и B – прямые. Известно, что $BC = q$, $AD = r$, $CD = q + r$. Пусть T – точка пересечения биссектрис углов C и D. Найдите длины всех высот треугольника TCD.

9. Пусть S – сумма цифр числа a, T – сумма цифр числа b. Докажите, что если число $S + T$ делится на 9, то число $a + b$ также делится на 9.

10. Несколько друзей устроили шахматный турнир по круговой системе (каждый сыграл с каждым по разу). За победу в шахматах дается 1 очко, за ничью — пол-очка, за поражение — 0. Известно, что среди участников мальчиков было втрое больше, чем девочек. После завершения турнира оказалось, что ничьих не было, а число очков, набранных всеми мальчиками, равно числу очков, набранных всеми девочками. Кто победил на турнире: мальчик или девочка?

11. Даны функции $f(x)=\frac{3}{x-5}$, $g(x)=|x-4|$. Постройте график функции $f\left(g(x)\right)$.

12. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x+y+z=3, \\ x^2+y^2+z^2=3. \end{cases}$$

13. В равнобедренной трапеции $ABCD$ боковые стороны AB и CD равны, $AD > BC$. В трапецию $ABCD$ вписана окружность, касающаяся стороны CD в точке M. Пусть N – вторая точка пересечения окружности и прямой AM. Известно, что $MN/NA = 3$. Найдите AD/BC.

14. Какое число больше: 8^{92} или 3^{180}?

15. Лена загадала число: 1, 2 или 3. Костя хочет отгадать это число. Ему разрешается задать Лене один вопрос, на который Лена отвечает либо «да», либо «нет», либо «не знаю». Приведите пример вопроса, получив ответ на который, Костя смог бы однозначно определить загаданное Леной число. Обязательно объясните свое решение.