

Метод эквивалентных деформаций

В.ЭПШТЕЙН

МАТЕМАТИКА ПРЕДСТАВЛЯЕТ СОБОЙ ЕСТЕСТВЕННЫЙ язык, на котором формулируются и решаются физические задачи. И, тем не менее, для понимания элементарных (а может быть, и фундаментальных) оснований науки об окружающем нас мире полезно познакомиться с задачами, решение которых не требует проведения математических расчетов. Так, метод эквивалентных деформаций предполагает ряд мысленных изменений конфигурации (т.е. геометрических размеров и формы) тел, при которых основные характеристики системы остаются неизменными, но ход исследуемых процессов становится очевидным. Вашему вниманию предлагается несколько таких задач.

Задача 1. *В небольшом бассейне плавает лодка. Изменится ли (и если изменится, то как) уровень воды в бассейне, если лежащий на дне лодки камень бросить в воду?*

Расчетные методы решения этой задачи предложены во многих учебных пособиях. Можно, однако, обойтись и без расчетов.

Подумаем: зависит ли ответ на вопрос, поставленный в задаче, от формы дна лодки, на котором лежит камень? Ясно, что такой зависимости быть не может: в законе Архимеда форма тела, погруженного в жидкость, никакой роли не играет. Тогда будем мысленно «продавливать» камень через дно лодки. Последовательные стадии этого процесса представлены на рисунке 1. На одном из этапов

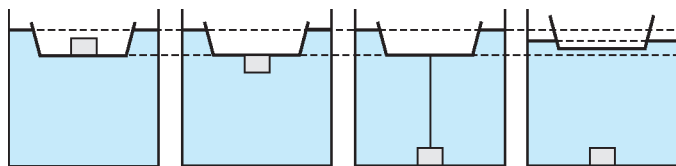


Рис. 1

камень можно представить подвешенным на веревке, привязанной ко дну лодки. Уровень воды, естественно, не изменится, если удлинить веревку так, чтобы камень коснулся дна бассейна. Если же веревку теперь перерезать, то, очевидно, лодка всплывет, и, следовательно, уровень воды понизится.

Задача 2. *В стакане плавает кусок льда, содержащий: а) пузырек, наполненный воздухом; б) кусочек пробки; в) стальную гайку. Как изменится уровень воды в стакане, когда лед растает?*

Заметим для начала, что если лед однороден, то после его таяния уровень воды не изменится: лед вытесняет ровно столько воды, сколько сам весит и, следовательно, сколько получится при плавлении.

Ясно, что решение задачи не зависит от места расположе-

ния указанных объектов в куске льда. В случае а), к примеру, пузырек можно переместить к поверхности льда (рис.2). Таким образом, наличие пузырька эквивалентно изменению формы однородного льда, плавление которого, как уже говорилось, уровня воды не изменяет.

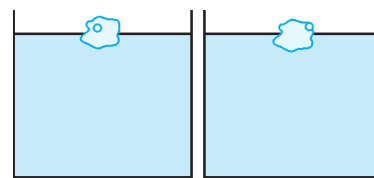


Рис. 2

Следует отметить, что, строго говоря, сказанное выше справедливо лишь в том случае, если плотность влажного воздуха в пузырьке совпадает с плотностью окружающего атмосферного воздуха. В состоянии термодинамического равновесия это возможно только в так называемой тройной точке, т.е. при таких значениях температуры и давления, при которых лед, вода и водяной пар находятся в равновесии ($t \approx 0,01^\circ \text{C}$, $p \approx 4,6$ мм рт. ст.).

Таяние льда с вмержшей пробкой – случай б) – уровень воды не изменит, так как пробку можно мысленно выдавить из льда и пустить в самостоятельное плавание на тонкой ледяной нити.

В случае в) гайку, как и в первой задаче, «продавим» сквозь лед до дна стакана, а затем перережем связывающую ледяную нить. Лед всплывет, уровень воды понизится и уже не изменится после плавления льда.

Задача 3. *Закрытый пробкой сосуд, вес которого равен выталкивающей силе, покоится на дне стакана с водой. Почти не совершая работы, его можно поднять к поверхности воды. Если теперь вынуть пробку, то сосуд наполнится водой и утонет. При этом он может совершить некоторую работу. Если же вынуть пробку, когда сосуд лежит на дне, он также наполнится водой, но работы не совершит. Как согласовать полученные результаты с законом сохранения энергии?*

Обсудим, в чем суть парадокса.

В первой части задачи речь идет о том, что при падении сосуда, заполненного водой, работа совершается несмотря на то, что для поднятия тела не пришлось затратить никакой энергии. Произведем, однако, с сосудом в исходном состоянии эквивалентную деформацию: мысленно деформируем лежащий на дне сосуд так, как показано на рисунке 3. «Выдавим» массу стенок в перемещенную часть, а пустую часть сосуда отделим от заполненной.

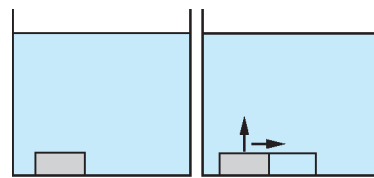


Рис. 3

Вода окажется «захваченной» стенками сосуда и, таким образом, будет находиться внутри сосуда. Теперь сосуд и «воздух» можно поднимать отдельно. Поднимая сосуд, мы совершаем работу. Поднятие «воздуха» эквивалентно опусканию некоторого объема воды (массы этой воды и сосуда равны). Ситуация совершенно аналогична повороту рычажного рычага с равными грузами на концах. Поднимая один груз, мы опускаем другой (рычаг находится в положении безразличного равновесия – работа не совершается). Затем мы можем перерезать нить, которой привязан поднятый груз. При падении этого груза сила тяжести совершит работу.

Применяя этот же метод во второй части задачи, мы не видим существенных различий с уже рассмотренным случаем. Наполнение водой сосуда эквивалентно перемещению известного объема воды от поверхности до дна стакана.

Работа при этом выполняется такая же, что и в первом случае (при перемещении сосуда).

Отличие условий первой части задачи от второй сводится, таким образом, всего лишь к порядку действий. Нарушения закона сохранения энергии не обнаруживается.

Задача 4. *Сосуд наполовину заполнен водой, в которой плавает кусок льда. Поверх льда наливают керосин, верхний уровень которого устанавливается на высоте h от дна сосуда. Как изменится эта высота, когда лед растает?*

Эта задача была опубликована в «Задачнике «Кванта» (Ф113) в 1971 году. В журнале приведено строгое математическое решение этой (не очень сложной) задачи. Можно, однако, обойтись и без расчетов.

В случае, когда лед оказывается под поверхностью керосина, ответ очевиден: вода, полученная после плавления льда, занимает меньший объем, значит, верхний уровень керосина понизится.

Интерес представляет анализ ситуации, когда лед выступает над поверхностью керосина. Идея эквивалентных деформаций порождает соблазн деформировать лед так, чтобы его вершина оказалась под поверхностью керосина. Таким образом, казалось бы, можно свести рассматриваемую задачу к предыдущей. Однако этот «фокус» не проходит: погружение выступающей части льда в керосин сопровождается повышением уровня жидкости, а после плавления уровень понижается – следовательно, конечный результат не будет очевидным. Итак, деформация оказывается неэквивалентной.

Но если эквивалентная деформация льда не проходит, не стоит ли двинуться в противоположном направлении: оставить лед в покое, а «деформировать» жидкость? Попробуем.

Для этого слой керосина толщиной H_1 заменим таким слоем воды, который сохраняет положение льда неизменным (рис.4). Поскольку плотность воды больше плотности керосина, высота этого слоя $H_2 < H_1$. При плавлении льда уровень воды (как было замечено выше) не меняется. Если теперь осуществить обратную замену и вернуть на место керосин (для этого следует оставить след поверхности льда, как показано на рисунке 5), то выяснится, что слой керосина над поверхностью, которую ранее образовывала вода, растекается по большей площади и уровень керосина понижается (по сравнению с исходным).

Итак, уровень керосина понижается независимо от того, покрывает керосин ледяную глыбу полностью или частично. Несмотря на то, что эквивалентную деформацию льда осуществить не удалось, сама идея метода оказалась плодотворной.

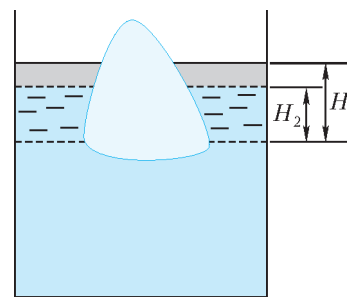


Рис. 4

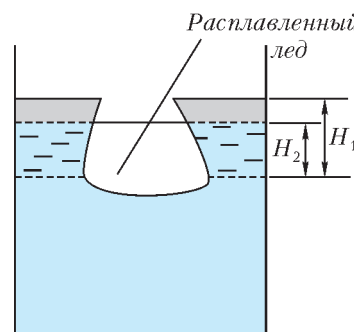


Рис. 5

От точки росы до точки кипения

В. ПТУШЕНКО, А. ПЯТАКОВ

Есть разница меж них. И есть единство.

И.Бродский

РАЗНООБРАЗНЫМ НЕОБЫЧНЫМ (ДА И САМЫМ ОБЫЧНЫМ тоже) свойствам воды и водяного пара в «Кванте» было посвящено много статей – от сугубо практических, например о заваривании чая, о русской бане или сохранении урожая в поле в холодные осенние ночи, до почти романтической «истории одной росинки».¹ А с чего начинается история росинки? Этот нехитрый вопрос, на кото-

рый, наверное, без труда ответит любой читатель, таит в себе если и не загадки, то уж подвохи точно. Вот ему мы и посвятим нашу статью.

Итак, с чего же все-таки начинается история росинки? С конденсации, конечно, это всем известно. Поэтому уточним вопрос: а когда и при каких условиях начинается конденсация? Давайте обсудим все по порядку.

У воды, как у всякого вещества, есть три агрегатных состояния – твердое, жидкое и газообразное. Логично ожидать, что между тремя состояниями имеются две температурные границы: температура плавления и температура кипения. А теперь задумаемся: при какой температуре газообразная вода превращается в жидкую? Если горячий водяной пар, взятый при температуре выше 100 °С, начать охлаждать, то первые росинки (жидкость) появятся в нем..., ну конечно, в точке росы – недаром же эта температура так называется! Постойте, а что же тогда такое точка кипения? Почему же не в ней – в этой пограничной точке между жидким состоянием и газообразным – происходит превращение газа в жидкость? В каком же тогда смысле она является границей?

Прежде чем ответить на эти вопросы, подумаем: а при какой температуре вода как жидкость превращается в пар? Да при любой! И из чашки с горячим чаем поднимается пар, и из блюдца с холодной водой, которое вы оставили для котенка, вода рано или поздно испарится. Даже мокрая простыня на морозном зимнем ветру успевает высохнуть быстрее, чем замерзнуть и «превратиться в камень». В чем же тогда особенность температуры кипения? Ответ хорошо известен: при температуре кипения происходит не просто испарение, а именно кипение, т.е. интенсивное испарение по всему объему жидкости.

¹ См. статьи И.Мазина «Приглашение в парную» («Квант» №8 за 1985 г.), А.Варламова и А.Шапиро «Пока чайник не закипел...» («Квант» №8 за 1987 г.), А.Абрикосова (мл.) «История росинки» («Квант» №7 за 1988 г.), А.Стасенко «Костры в поле и русская баня» («Квант» №1 за 2002 г.).

Это короткое формальное определение, подобно сказочному ларцу, внутри содержит гораздо больше, чем можно предположить, глядя снаружи. Внутри этого «ларца» прячется одно из основных представлений физики – понятие равновесия. Чтобы жидкость могла долгое время просуществовать, она должна находиться в равновесии со своим окружением. Но разных видов равновесия может быть много – столько же, сколько существует разных видов «движения», т.е. любого *изменения* системы жидкость–газ. Например, есть механическое равновесие между всеми силами, действующими на жидкость изнутри и снаружи. Есть тепловое равновесие, стремясь к которому, горячий чай остывает до комнатной температуры. А еще есть физико-химическое равновесие с кислородом, который из воздуха стремится проникнуть в воду и раствориться в ней, давая жизнь вашим аквариумным рыбкам... Так какие же виды равновесия важны в данном случае?

Давайте посмотрим на жидкость под микроскопом: мы увидим в ней мельчайшие пузырьки воздуха. Водяной пар норовит заполнить собой эти пузырьки и «взорвать» жидкость изнутри. Сделать это ему не позволяют водяной пар вместе с воздухом, находящиеся снаружи, над поверхностью жидкости: они «сдавливают» жидкость, это давление передается внутрь от одного слоя к другому, «ощущается» в каждом уголке заполненного жидкостью объема и сдерживает рост пузырьков.

Кроме опасности быть взорванной изнутри, жидкости грозит еще одна опасность – улетучиться, молекула за молекулой, через открытую поверхность в окружающее пространство. Но этому может помешать водяной пар, который уже заполняет это пространство над поверхностью жидкости. Молекула за молекулой, он может возвращаться обратно в жидкость, т.е. конденсироваться, компенсируя испарение. Такое фазовое равновесие наступает, например, в банке, накрытой крышкой, в которой находится вода, а над ней – влажный воздух с *насыщенным* водяным паром. Роль крышки могут играть также неподвижные воздушные массы при соответствующих атмосферных условиях, и тогда на земле долго не высыхают лужи, а бельё на веревках остается влажным, нарушая все планы хозяек.

А что же происходит при кипении? При температуре кипения давление насыщенного пара становится слишком большим – вырастает до атмосферного, пузырьки растут неудержимо, из-под крышки вырывается пар. Нарушаются оба типа равновесия жидкости. Крышка подпрыгивает и позвякивает, напоминая об этом. Можно, конечно, крышку «укрепить», чтобы не прыгала, – тогда получится скороварка², оба равновесия восстановятся, но только давление под крышкой будет уже больше атмосферного.

Обратите внимание: для поддержания фазового равновесия жидкости с открытой поверхностью важен только ее *собственный* пар, его *парциальное* давление, а какие еще газы есть в атмосфере и в каком количестве – совершенно не важно. А вот для сохранения равновесия пузырьков, для того чтобы не происходило кипения, необходимо над поверхностью жидкости иметь еще какой-нибудь газ, кроме самого водяного пара. Если вы ухитритесь из-под закрытой крышки откачать весь сухой воздух, оставив там только водяной пар, то жидкость вскипит. Ничего удивительного: вы понизили внешнее давление до величины, создаваемой лишь одним насыщенным водяным паром, т.е. как раз создали условия кипения.

Вот здесь-то и кроется подвох, который часто мешает пониманию процессов кипения и испарения. При их объяснении главную роль играют парциальное давление водяного пара и полное (атмосферное) давление. Полное внешнее давление, как правило, считается неизменной величиной, в то время как парциальное давление водяного пара, наоборот, может изменяться по мере испарения воды. И действительно, в кухне, где долго кипит чайник, вы можете вполне явственно ощутить повышение влажности, в то время как имеющийся в кухне барометр показывает все то же атмосферное давление. Почему же это давление не повышается? В обычных условиях потому, что уменьшаются остальные слагаемые: водяной пар, заполняя кухню, частично вытесняет из нее азот и кислород, их парциальные давления падают, и суммарное давление остается неизменным. А в необычных условиях – например, в уже упоминавшейся нами скороварке, в подземных камерах гейзеров и т.п. – рост парциального давления водяного пара вполне может приводить и к росту суммарного давления, так что оно уже перестает быть постоянным и изменяется, например с температурой.

Теперь мы можем вернуться к вопросам, с которых начали статью. Только сделаем последний шаг – чтобы наглядней сопоставить определения точек росы и кипения, слегка переформулируем одно из них. (Переформулировать классические определения – неблагодарное дело. Но, надеемся, читатель оценит методический смысл этого приема и простит нам эту «фамильярность» по отношению к классике.) Как известно, точка росы – это температура, при которой водяной пар, содержащийся в атмосфере (наряду с азотом, кислородом и пр.), будет насыщенным. А точку кипения определим как температуру, при которой был бы насыщенным водяной пар, целиком «единолично» образующий атмосферу. Отсюда сразу понятно, что точка кипения – это верхняя граница для точки росы и граница для существования жидкости (при заданном внешнем давлении, как правило атмосферном). Поэтому, охлаждая горячий влажный воздух, вы можете обнаружить первые капли жидкости *при любой температуре, но только ниже точки кипения*: если влаги в воздухе немного, то заставить молекулы воды «собраться вместе» удастся, лишь сильно понизив температуру. Если почти весь объем воздуха заполнен паром, то точка росы может оказаться довольно близко к точке кипения (вспомните, как выходящий из кипящего чайника пар покрывает капельками даже очень горячие на ощупь крышку или носик).

Подведем итог сказанному. Процессы испарения и кипения жидкости определяются двумя разными факторами: взаимодействием жидкости с ее *собственным паром* и с *атмосферой в целом*. Суммарное атмосферное давление газа над жидкостью определяет равновесие между жидкостью и образующимися внутри нее пузырьками, т.е. возможность ее вскипания. А парциальное давление пара определяет равновесие жидкости с окружающим паром, т.е., в частности, возможность ее полного испарения или, наоборот, начала конденсации в точке росы.

Будем надеяться, что наша статья поможет читателю увереннее ориентироваться в этих, хотя и очень привычных, однако все же не всегда простых для понимания вопросах. Но если она породит новые вопросы – будет еще лучше!

Авторы благодарны Георгию Евгеньевичу Пустовалову за исключительную поддержку и внимание к данной работе.

² Подробнее о принципе работы скороварки см. в упомянутой статье А.Варламова и А.Шапиро.

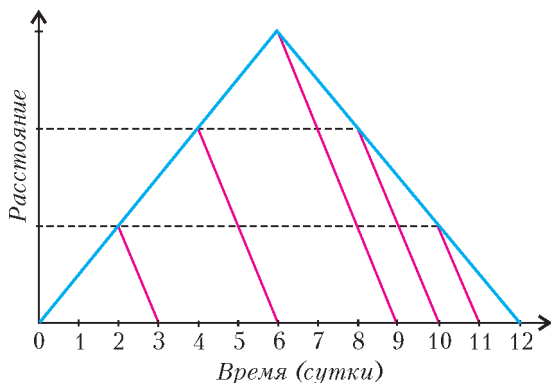
Легенда об искажении сигнала

С.ДВОРЯНИНОВ

ОДНАЖДЫ ФАРАОН СНАРЯДИЛ ЭКСПЕДИЦИЮ ДЛЯ РАЗВЕДКИ нового торгового пути, строго-настрою приказав начальнику отряда отправлять гонца с донесением в первопрестольную через каждые двое суток. Не смели ослушаться подчиненные этого приказа. Точно по расписанию садился очередной гонец на коня и направлялся в столицу к фараону. Каково же было изумление начальника отряда, когда после удачного возвращения могущественный владыка встретил его с мрачным видом и обвинил в непослушании. Оказывается, гонцы начали прибывать к нему с интервалом в трое суток, а под конец ни с того ни с сего вдруг стали появляться через каждые сутки.

История умалчивает о дальнейшей судьбе начальника экспедиции. А какое можно было бы придумать оправдание, оказавшись на его месте?

Приведем один из возможных вариантов. На рисунке показаны графики движения экспедиции (синяя ломаная) и



гонцов (красные отрезки). Скорость гонцов в два раза превышает скорость экспедиции. Из рисунка видно, что гонцы с донесением отправлялись точно в соответствии с приказом фараона через двое суток, а прибывали в столицу сначала с интервалом в трое суток, а затем через сутки.

История грозного фараона является красивой наглядной иллюстрацией известного физического эффекта — *эффекта Доплера* (точнее — продольного эффекта Доплера), который имеет огромное научное и практическое значение.

В 1842 году Кристиан Доплер (1803–1853) дал математическое описание следующему наблюдаемому эффекту. Пусть имеются источник, испускающий волну, и наблюдатель, принимающий эту волну. Тогда если источник или наблюдатель движутся относительно неподвижной среды так, что расстояние между ними меняется, то частота (период) волны, принимаемой наблюдателем, отличается от частоты излучаемой волны. Так, если расстояние между источником и наблюдателем уменьшается, то частота принимаемой вол-

ны оказывается больше, чем частота испускаемой, т.е. частота увеличивается, а если расстояние увеличивается, то частота уменьшается. Именно этот эффект проявился в описанной выше правдивой истории: пока отряд (источник сигналов-гонцов) удалялся от фараона (неподвижного наблюдателя), частота приема сигнала уменьшалась, а когда отряд стал приближаться к фараону, частота увеличивалась. Правда, в тексте речь шла не о частоте испускания и приема сигналов, а об обратной величине — периоде, т.е. об интервале времени между испускаемыми или принимаемыми сигналами.

Какими же формулами описывается эффект Доплера? Начнем с нашей истории, т.е. со случая, когда источник движется, а наблюдатель неподвижен. Пусть v_n — скорость, с которой источник удаляется от наблюдателя, T_n — период испускания сигналов, V — скорость сигнала. К моменту испускания следующего сигнала предыдущий сигнал перемещается в сторону наблюдателя на расстояние $V T_n$, а сам источник проходит в противоположном направлении расстояние $v_n T_n$. Значит, расстояние между двумя сигналами (двумя гонцами, двумя гребнями волны) равно $\lambda = (v_n + V) T_n$. Поскольку оба сигнала движутся со скоростью V , то интервал времени между приемами этих сигналов неподвижным наблюдателем равен

$$T_n = \frac{\lambda}{V} = T_n \frac{V + v_n}{V}.$$

Если источник приближается к наблюдателю, то скорость источника в этой формуле надо считать отрицательной. В описанной истории скорость отряда v_n была в два раза меньше скорости гонцов V , поэтому период приема (время между прибытиями гонцов) сначала в полтора раза увеличивался, а потом в два раза уменьшался.

Рассмотрим теперь второй вариант: источник неподвижен, а наблюдатель удаляется от него со скоростью v_n (если наблюдатель приближается к источнику, то $v_n < 0$). Такому варианту соответствовала бы история, в которой фараон путешествует, а его помощники шлют к нему из столицы гонцов с информацией. В этом случае изменение периода описывается немного другой формулой. Расстояние между сигналами равно теперь $\lambda = V T_n$, а время между приемами двух последовательных сигналов составляет

$$T_n = \frac{\lambda}{V - v_n} = T_n \frac{V}{V - v_n}.$$

Если, как и в первой истории, скорость отряда с фараоном будет в два раза меньше скорости гонцов, то при удалении отряда период увеличивается в два раза, а при приближении отряда к столице период приема уменьшается и составляет $2/3$ от периода испускания (отправки гонцов из столицы).

Если же движутся и источник, и наблюдатель, то изменение периода описывается такой общей формулой:

$$T_n = T_n \frac{V + v_n}{V - v_n},$$

где v_n — скорость удаления источника от наблюдателя, v_n — скорость удаления наблюдателя от источника. Соответствующая формула для частоты $\nu = 1/T$ имеет вид

$$\nu_n = \nu_n \frac{V - v_n}{V + v_n}.$$

Отметим, что все приведенные формулы относятся к случаю движения вдоль одной прямой.

Эффект Доплера для звуковых волн легко, например, обнаружить, наблюдая за приближающейся электричкой.

Если мимо железнодорожной платформы проносится гудящий поезд, то сначала слышен высокий звук (частота звуковой волны на слух воспринимается как высота звука), затем, по мере удаления поезда, звук становится все ниже и ниже.

Эффект Доплера проявляется и по отношению к электромагнитным волнам, в частности – к распространению света. Правда, в этом случае формулы для эффекта Доплера несколько видоизменяются. Электромагнитные волны распространяются в вакууме, а не в среде, и в ответ может входить только относительная скорость наблюдателя и источника v . Поэтому вместо двух формул – для движения наблюдателя и для движения источника – остается только одна:

$$v_n = v_n \sqrt{\frac{V - v}{V + v}}.$$

Эта формула выводится в рамках специальной теории относительности.

Представим, что на коне мчится всадник, держащий в руках фонарь зеленого цвета. Частоты световых волн воз-

растают при переходе от красного цвета к фиолетовому. Так вот, если всадник с фонарем удаляется от нас, то цвет воспринимаемого нами света будет казаться нам менее зелеными и более желтым. Но об этом можно говорить только теоретически: дробь $\frac{v}{V}$ для скоростей света $V = 300000$ км/с и всадника $v \ll V$ настолько мала, что ее вряд ли стоит принимать в расчет. Другое дело – космические объекты: галактики, удаляющиеся от нас с огромными скоростями. В световом спектре галактик приборы регистрируют смещение в сторону красного цвета, значит, галактики разбегаются друг от друга, что свидетельствует о расширении Вселенной.

Поскольку эффект Доплера позволяет измерять скорость недоступного источника излучения волн по смещению их спектральных линий, то он становится удобным инструментом во многих областях науки и техники: в астрофизике, спектроскопии, радио- и гидролокации и других.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

Парадоксы командных соревнований

Л. ИЛЬКОВ

МЫ БУДЕМ РАССМАТРИВАТЬ КОМАНДНЫЕ СОРЕВНОВАНИЯ в индивидуальных видах спорта, например, в шахматах. Для упрощения ситуации предположим, что все команды состоят из «идеальных» игроков: у каждого игрока есть рейтинг, отражающий его силу, игрок всегда побеждает игрока с меньшим рейтингом и играет вничью с равным по силе.

Есть два способа проведения (два типа) командных соревнований:

I. В каждой команде игроки упорядочиваются «по доскам», обычно в порядке убывания рейтинга, и каждый игрок участвует только в одной партии с соответствующим членом другой команды (всего N партий, где N – количество игроков в команде).

II. Каждый игрок играет со всеми игроками другой команды (всего N^2 партий).

Парадокс 1

Команда, победившая в матче одного типа, может проиграть в матче другого типа.

Приведем такой пример. Ниже указаны две команды по 5 игроков в каждой (даны рейтинги игроков):

A: 6 4 3 3 2

B: 5 4 4 3 1

В матче I типа побеждает команда A, в матче II типа – команда B. Действительно, составим таблицу соревнований:

	5	4	4	3	1	Σ
6	1	1	1	1	1	5
4	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1	3
3	0	0	0	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$
3	0	0	0	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$
2	0	0	0	0	1	1

В первом столбце таблицы – рейтинги игроков команды A, в первой строке – команды B. Результаты матча II типа показаны в клетках пересечения соответствующих строк и столбцов: 1 – выигрыш игрока команды A, 0 – проигрыш, $1/2$ – ничья. По диагонали в таблице выделены результаты матча I типа. Последний столбец – суммы очков игроков команды A для матча II типа. Как видим, в матче I типа у команды A – 3 очка из 5, у команды B – 2; побеждает команда A. Для матча II типа общая сумма очков команды A – 12 из 25 возможных, а у команды B – 13; побеждает команда B.

В дальнейшем для удобства мы будем часто вместо «команда A побеждает команду B» писать просто $A > B$.

Задача 1. Докажите, что если количество игроков в командах менее 5, этот парадокс невозможен.

Указание. Воспользуйтесь ограничениями, которые накладываются на расположение результатов в таблице упорядоченностью ее строк и столбцов по рейтингу.

Парадокс 2

Существуют тройки команд, из которых каждая выигрывает у одной из соперниц, но проигрывает другой (отсутствие транзитивности).

Операция сравнения чисел обладает следующим свойством: если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$. Это свойство называется

транзитивностью. Им обладают и наши «идеальные» игроки, если сравнивать их рейтинги.

Но оказывается, что транзитивность в групповых играх выполняется далеко не всегда. Ниже указаны три команды по три игрока в каждой (даны рейтинги игроков):

A: 5 2 2

B: 4 4 1

C: 3 3 3

Эти команды при любом способе проведения соревнований обыгрывают друг друга циклически. Действительно, в I случае результаты игр таковы: $A : B = B : C = C : A = 2 : 1$. Во II случае $A : B = 5 : 4$, $B : C = C : A = 6 : 3$.

Между тем, существуют тройки команд, обладающие транзитивностью только для одного способа проведения соревнований. Так, команды

A: 6 3 3 2

B: 5 5 3 1

C: 4 4 3 3

обыгрывают друг друга циклически, соревнуясь I способом: $A > B$, $B > C$, $C > A$. При II способе цикличности нет, но и транзитивности тоже нет: $A = B$, $B > C$, $C > A$. Если из этих команд убрать игроков третьей доски (у них одинаковый рейтинг 3), то соотношение команд в I случае, конечно, не изменится, а во II случае тоже появится цикличность: $A > B$, $B > C$, $C > A$.

Этот пример показывает, что цикличность – «крайний» случай нарушения транзитивности: отсутствие транзитивности не обязательно сопровождается цикличностью.

Команды

A: 5 2 2

B: 4 3 1

C: 3 3 2

обладают цикличностью во II случае: $A > B$, $B > C$, $C > A$. В I случае нет ни цикличности, ни транзитивности: $A > B$, $B = C$, $C = A$.

В соревнованиях команд, состоящих из двух игроков, цикличность невозможна, хотя нарушения транзитивности наблюдаются.

Задача 2. Докажите, что для команд из двух игроков цикличность невозможна.

Парадокс 3

Существуют тройки команд с разнонаправленной для разных типов соревнований цикличностью.

Этот парадокс как бы объединяет в себе парадоксы 1 и 2. Пример – команды

A: 11 9 6 3 1

B: 10 7 5 5 4

C: 8 7 7 5 2.

В соревнованиях I типа $A > B$, $B > C$, $C > A$; в соревнованиях же II типа – $A < B$, $B < C$, $C < A$. Везде преимущество минимальное – 1 очко.

Задача 3. Найдите еще один или более примеров этого парадокса для команд из пяти игроков.

Примечание. Решение должно существенно отличаться от приведенного примера. Легко построить «новое» решение из приведенного, лишь изменив рейтинги игроков так, чтобы ни один результат личных встреч не изменился. Это достигается, например, сдвигом рейтингов или умножением их на некоторый коэффициент.

Поэтому вводится дополнительное условие: все рейтинги – целые положительные числа и занимают без пропусков некоторый диапазон целых чисел $1 : k$ (в примере – $1 : 11$).

Для решения этой задачи можно составить компьютерную программу; без компьютера задача кажется трудной. С помощью такой программы было установлено, что в соревнованиях команд, состоящих из трех игроков, цикличность возможна, если количество различных рейтингов игроков $k \geq 5$. Для команд из четырех игроков уже при $k = 4$ возможна цикличность, но только в соревнованиях II типа. При $k \leq 3$ цикличность невозможна для команд любого размера.

Проблема 1. Доказать, что в соревнованиях команд из трех игроков при количестве различных рейтингов игроков $k \leq 4$ цикличность невозможна.

Проблема 2. Доказать, что в соревнованиях II типа команд из четырех игроков при количестве различных рейтингов игроков $k \leq 4$ цикличность невозможна.

Проблема 3. Доказать, что при количестве различных рейтингов игроков $k \leq 3$ цикличность невозможна в соревнованиях команд любого размера.

«Волшебные» кубики (игральные кости)

Представьте себе, что у вас есть три кубика. Обычные шестигранные кубики, на каждой грани которых написаны некоторые числа. Вы предлагаете своему партнеру взять любой кубик, который ему больше понравился, а себе выбираете один из двух оставшихся кубиков. Далее вы начинаете играть: каждый бросает свой кубик, и выигрывает тот, на чьем кубике выпадет большее число. Так вот, кубики могут быть такими, что при большом числе бросаний в среднем вы будете в выигрыше, то есть будете чаще выигрывать у партнера. Даже если партнер поменяет кубик, например, возьмет кубик, которым играли вы, то он все равно будет проигрывать, если вы воспользуетесь правом выбрать себе кубик из двух оставшихся.

Может ли такое быть? Оказывается, может. Весь секрет в числах, которые расставлены на гранях кубиков. Задача заключается в том, чтобы найти эти числа и расставить их на гранях трех кубиков так, чтобы кубики обладали описанным выше «волшебным» свойством. Интересно, что решением этой задачи может служить частный случай цикличности в командных соревнованиях. Действительно, возьмем три команды по шесть игроков, циклически обыгрывающие соперников в соревнованиях II типа. Это легко сделать, например, «удвоив» игроков в первом примере парадокса 2:

A: 5 5 2 2 2 2

B: 4 4 4 4 1 1

C: 3 3 3 3 3 3

Далее возьмем три кубика, используемые в азартных играх, и вместо цифр 1–6 нанесем на их грани рейтинги трех команд. Теперь кубики стали «волшебными» – они обладают описанным выше свойством, помогающим их обладателю выигрывать у партнера. Какой бы кубик ни выбрал ваш партнер, среди двух оставшихся всегда имеется один, который дает вам больше шансов выиграть, чем партнеру. Для этого вам нужно выбрать кубик, чья «команда» сильнее «команды» партнера.

Действительно, одновременное бросание двух кубиков – это выбор одной из 36 партий соревнования II типа. Если «ваша команда» обыгрывает «команду партнера» со счетом $m : n$, где $m > n$, $m + n = 36$, то из 36 возможных исходов бросания вы выигрываете в m случаях, а партнер – в n случаях. Вероятность вашего выигрыша $P = m/36$, $P > 1/2$.

Результаты «командных игр» для наших кубиков следующие:

$A : B = 20 : 16$, $B : C = C : A = 24 : 12$.

Таким образом, в наихудшем случае, когда ваш партнер выбирает кубик B , а вы – кубик A , вероятность вашего выигрыша $P = 20/36 = 5/9$. В остальных случаях эта вероятность будет больше.

Проблема 4. Какую наибольшую вероятность выигрыша (в случае использования самой «плохой» пары) может обеспечить владельцу наилучший набор из трех волшебных кубиков?

Примечание. Конечно, можно с помощью компьютерной программы перебрать все варианты (так как имеется всего конечное число существенно различных вариантов – смотрите предыдущее примечание). Интересно, однако, определить эту вероятность или хотя бы получить для нее оценки снизу и сверху чисто математически.

Задача 4. Сконструируйте тройку «волшебных кубиков» так, чтобы на всех гранях кубиков фигурировали только четыре числа 1, 2, 3, 4 (разумеется, с повторениями).

(Выше приведен пример «волшебных кубиков» с числами 1, 2, 3, 4, 5. Четыре числа, согласно утверждению проблемы 3, – это минимальный набор).

Задача 5. Сконструируйте тройку «волшебных кубиков» так, чтобы на всех 18 гранях были различные числа.

О логичных и нелогичных турнирах

В 1997 году в журнале «Квант» (№5) была опубликована статья А.Заславского с таким названием. В статье изучаются некоторые свойства таблиц соревнований, проводящихся по *круговой системе*, когда каждый участник соревнований встречается со всеми остальными участниками. Вводится величина – *степень нелогичности* турнира, равная количеству нетранзитивных троек в таблице результатов, и выводятся формулы для вычисления этой величины через результаты участников.

В конце статьи указывается, что величина степени нелогичности используется в теории экспертных оценок для определения компетентности экспертов, оценивающих качество каких-либо объектов. Эксперту предлагается оценить группу однотипных объектов путем их полного парного сравнения. Чем больше степень нелогичности таблицы оценок (т.е., чем больше в таблице нетранзитивных троек), тем менее компетентным признается эксперт. Напрашивается следующая мысль: при такой оценке компетентности эксперта считается, что правильная оценка объектов любого типа должна быть транзитивной, а любая нетранзитивная тройка в таблице – следствие ошибки эксперта. В действительности все не так просто.

Предположим, что объекты имеют несколько независимых *характеристик* (например, вкус, цвет, запах и тому подобное). При сравнении пары объектов лучшим будем считать тот из них, который имеет большее количество лучших характеристик. Таким образом мы сводим сравнение пары объектов к командному соревнованию I типа, где объекты становятся командами, а игроками являются характеристики этих объектов. Мы видели, что в таких соревнованиях транзитивность не соблюдается, и следовательно, такая оценка объектов не является транзитивной. Ситуация не изменится, если считать, что характеристики не равнозначны, и суммировать «победы» с некоторыми весами. В этом случае в нашей модели нужно считать, что в «команде» есть несколько «игроков» каждого типа (равной «силы»), и их количество пропорционально весу соответствующей характеристики.

Исследуя соревнования I типа, мы всегда упорядочивали игроков в команде по рейтингу. Здесь это не требуется, и, более того, это невозможно. Ранее предполагалось, что каждый игрок может, в принципе, сыграть на любом месте

(на любой доске). Здесь команда является как бы набором игроков, играющих в разные игры, и игроки в командах упорядочиваются по названиям «игр» (вкус, цвет, запах). Это только облегчает построение примеров нетранзитивности.

Мы можем сделать следующие выводы:

1. Наличие нетранзитивных троек в таблице «правильных» оценок группы сложных многофакторных объектов вполне закономерно и определяется внутренними свойствами этих объектов.

2. «Степень нелогичности» таблицы оценок таких объектов ни в коей мере не может служить мерилем компетентности эксперта, поскольку она зависит еще и от свойств самих объектов. Судить о компетентности эксперта по «степени нелогичности» таблицы его оценок можно лишь в том случае, если оценивалась группа простых однофакторных объектов, единственная характеристика которых допускает «одномерную» оценку.

Задача 6. Постройте нетранзитивную тройку объектов с двумя характеристиками (дайте рейтинги характеристик каждого объекта).

Заключение

Мы рассмотрели упрощенную модель соревнований. Результат партии между «идеальными» игроками полностью определяется их рейтингами. В турнирной таблице таких игроков не может быть нетранзитивных троек.

Реальный мир сложнее и интереснее. Рейтинги реальных игроков влияют лишь на вероятность исхода партии и определяют статистику результатов в достаточно большой серии встреч. И отличие не только в этом. Реальный игрок является сложным «объектом», на игру которого влияют несколько независимых факторов (в шахматах это, например, дебютная подготовка, умение вести позиционную борьбу, умение комбинировать, знание эндшпилей, способность играть в цейтноте и прочее). Поэтому даже статистика партий между двумя отдельными игроками не всегда соответствует их рейтингам, поскольку рейтинг отражает среднюю силу игрока в полной совокупности всех его противников, а из-за особенностей «многофакторных» качеств игрока у него появляются «удобные» и «неудобные» противники.

Автор благодарит В.К.Титова, который с помощью волшебных кубиков заинтересовал его тематикой статьи и активно участвовал в ее написании.

Вниманию наших читателей!

Поправка

В «Кванте» №6 за 2008 год в статье «Новый прием в школы-интернаты при университетах» во вступительном задании по математике для поступающих в 11 класс в задаче 2 допущена опечатка. Приводим правильное условие задачи.

2. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, центр O которой лежит внутри него. Найдите площадь четырехугольника, если углы BAO и DAC равны, а диагонали AC и BD равны m и n соответственно.

Отражение от тонких цилиндрических зеркал

А.АНДРЕЕВ, А.ПАНОВ

В ОБЫДЕННОЙ ЖИЗНИ МЫ ЧАЩЕ ВСЕГО ИМЕЕМ ДЕЛО С плоскими зеркалами, в оптических приборах используются сферические и параболические зеркала, а вот с цилиндрическими зеркалами мы сталкиваемся редко. Разве что в аттракционе под названием «комната смеха» или в анаморфоскопах – приборах для рассматривания специально искаженных (анаморфных) изображений (рис.1). В то же время, большое количество предметов вокруг нас имеют именно цилиндрическую форму – это всевозможные цилиндрические емкости, трубы, ветки деревьев, троллейбусные провода и многое другое. Некоторые из них являются хорошими отражателями.

Тонкие цилиндрические зеркала. Проще всего исследовать отражение от *тонкого* цилиндрического зеркала, радиус поперечного сечения которого достаточно мал по сравнению с расстоянием до наблюдателя. Хорошим примером таких зеркал могут служить троллейбусные провода, освещенные автомобильными фарами или уличными фонарями.

Рассмотрим простейший случай, когда на тонкое цилиндрическое зеркало падает тонкий пучок параллельных лучей, полностью перекрывающий зеркало по диаметру. Оказывается, что отраженные световые лучи образуют конус, осью которого является зеркало, а одной из образующих – продолжение падающего светового пучка. Для доказательства этого утверждения достаточно воспользоваться принципом Ферма.

А вот и экспериментальное подтверждение – оно представлено на рисунке 2. Тонким цилиндрическим зеркалом здесь служит обычная иголка, на которую падает лазерный луч.



Рис.1. Использование цилиндрического зеркала в качестве анаморфоскопа

Пересечением конуса отраженных лучей с плоским экраном может быть любое коническое сечение – эллипс, парабола или гипербола, все зависит от расположения экрана. Если же падающий луч перпендикулярен зеркалу, то отраженный конус превращается в плоскость (рис.3).

Опишем несколько простых ситуаций, где используется выказанное нами утверждение.

Легко представить себе, что происходит, когда все протяженное тонкое цилиндрическое зеркало освещено пучком параллельных лучей. В этом случае все пространство окажется заполненным одинаковыми конусами, состоящими из отраженных лучей, а цилиндрическое зеркало будет общей осью этих конусов. Если же зеркало освещается точечным источником, то мы тоже получим систему соосных конусов, только они уже не будут одинаковыми. В ближайшей к источнику точке зеркала конус будет представлять собой плоскость, т.е. иметь угол раствора 180° . По мере удаления вершины конуса от источника угол раствора конуса будет уменьшаться до 0° . Если цилиндрическое зеркало – это отрезок тонкого провода, то провод можно изогнуть, и при отражении от такого изогнутого цилиндрического зеркала мы опять получим систему конусов. Но они уже не будут соосными, а осью каждого отраженного конуса будет служить касательная к зеркалу – прямая, которая вместе с точкой отражения содержит и маленький отрезок провода.

Светящиеся круги из веток. Мокрые оголенные ветки многих пород деревьев являются хорошими отражателями. Если посмотреть через крону такого дерева на уличный фонарь, то можно обнаружить, что отражающие участки веток образуют узор, складывающийся в систему концентри-

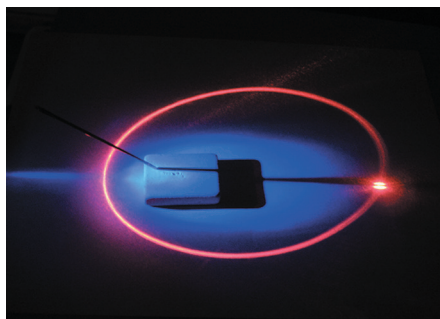


Рис.2. Тонкое цилиндрическое зеркало — иголка: слева на экране эллипс, справа — гипербола

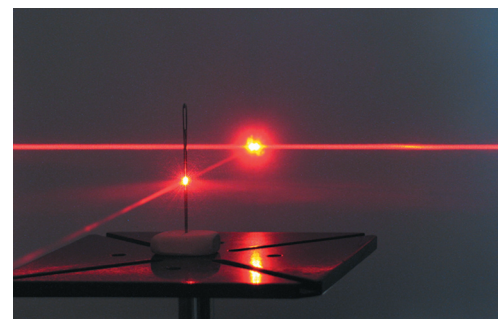
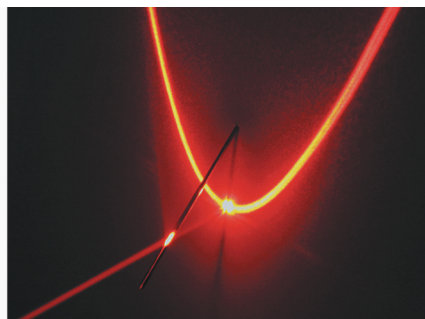


Рис.3. Когда падающий луч перпендикулярен зеркалу, отраженные лучи заполняют целую плоскость

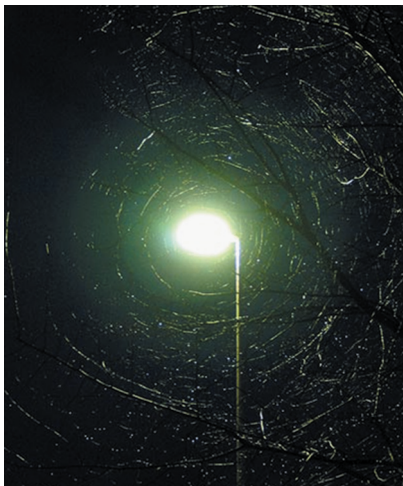


Рис.4. Отражающие участки веток формируют узор из concentрических окружностей

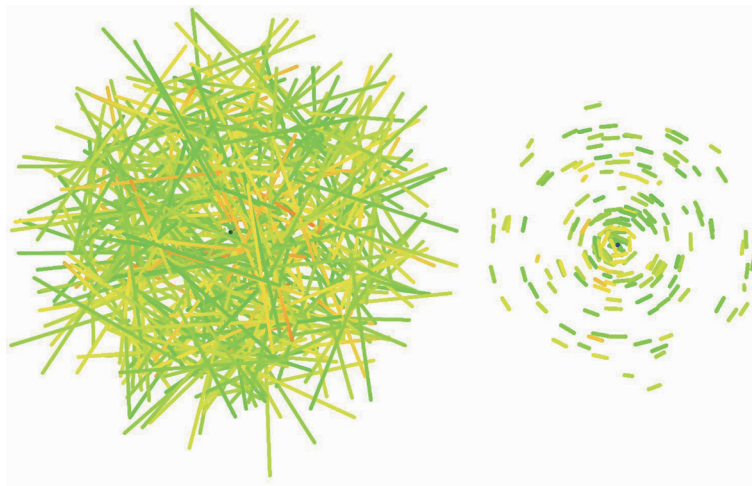


Рис.5. Слева — «крона» дерева, справа — отражающие участки «ветвей»

ческих окружностей (рис.4). Одно из объяснений этого факта содержится в известной книге М.Миннарта «Свет и цвет в природе». Мы приведем здесь другое рассуждение, основанное на том, что каждую ветку в отдельности можно считать тонким цилиндрическим зеркалом.

Компьютерная модель. Смоделируем крону дерева случайным набором тонких цилиндрических зеркал — отрезков единичной длины, расположенных между точечным источником и наблюдателем. Каждая точка такого отрезка после отражения излучает конус. Мы хотим найти на этом отрезке такую точку, чтобы одна из образующих соответствующего конуса попала в глаз наблюдателя. На самом деле, из-за протяженности источника нужное нам отражение будет происходить не только от этой точки, но и от небольшого участка ветки, содержащего эту точку. На рисунке 5 слева изображена крона, представленная набором случайных единичных отрезков, ось источник-наблюдатель перпендикулярна плоскости рисунка. Справа оставлены небольшие (длиной $1/10$) участки отрезков, отражающие лучи в глаз наблюдателя. В целом эти участки действительно складываются в узор, сходный с тем, что изображен на рисунке 4.

Отметим еще, что в «кроне» имеются отдельные отрезки, которые не укладываются вдоль concentрических окружностей. Но все они имеют небольшую длину, а это значит, что они почти что параллельны оси источник-наблюдатель.

Модель из булавок. Вот если бы все ветки лежали в плоскости, перпендикулярной указанной оси, то их участки, которые отражают в глаз наблюдателя, были бы касательны-

ми к concentрическим окружностям. Это следует из того, что в точке отражения, откуда световой луч приходит к наблюдателю, падающий луч перпендикулярен к ветке и отраженный конус представляет собой плоскость, перпендикулярную ветке. Вот еще одна модель, на этот раз физическая, которая подтверждает этот факт (рис.6). Здесь в качестве отражателей использованы обычные булавки, лежащие на стекле.

Царапины на стекле. К слову сказать, и булавки вовсе не обязательно, можно обойтись одним лишь куском стекла — отражать будут имеющиеся на нем царапины (рис.7).

Этот пример тоже описан в книге Миннарта, и автор добавляет, что царапины на стекле уже достаточно тонки, чтобы при взаимодействии с ними свет мог проявить свои волновые свойства. Свет дифрагирует на них, и мы видим их окрашенными в цвета спектра.

Взгляд сквозь моток проволоки. Наконец, последняя модель. Мы уже говорили, что цилиндрическое зеркало можно изогнуть. Возьмем на этот раз в качестве отражателя целый моток запутанной проволоки и посмотрим через него на источник света (рис.8). Мы видим те же самые кольцевые узоры и убеждаемся, что моток проволоки точно так же успешно моделирует отражающие свойства кроны дерева.

Проволока, используемая нами в эксперименте, достаточно тонка — ее диаметр составляет всего 0,2 мм. Поэтому и здесь возникает соответствующая дифракционная картина. Чтобы увидеть ее, нужно аккомодировать глаз (или настроить объектив фотоаппарата) на бесконечность. Мы не будем входить в детали (этот эксперимент подробно обсуждается в



Рис.6. В качестве отражателей здесь использованы булавки



Рис. 7. Светящиеся кольца из царапин на стекле

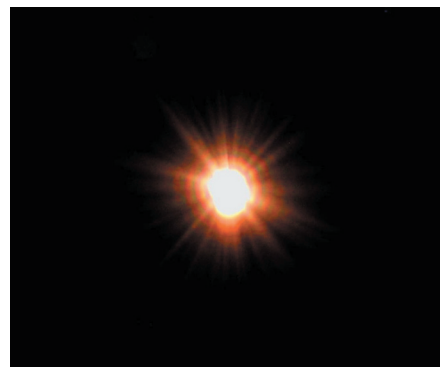
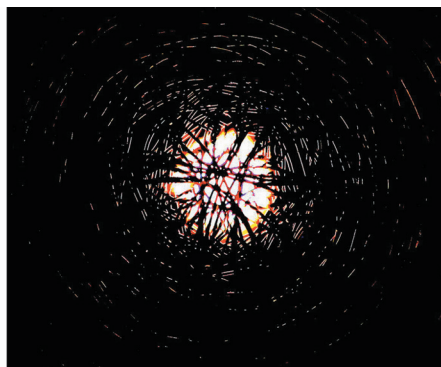
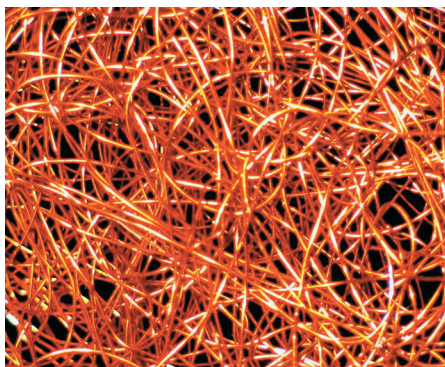


Рис.8. Слева – моток проволоки, освещенный со стороны наблюдателя, справа – вид на источник света через этот моток проволоки

Рис.9. Тот же самый моток проволоки, но фотоаппарат сфокусирован на бесконечность

статье Н.Ростовцева «Как с помощью проволоки измерить длину световой волны» – см. «Квант» № 8 за 1977 г. или выпуск 4 «Библиотечки «Квант»», а ограничимся соответствующей картинкой (рис.9).

До сих пор мы имели дело с цилиндрическими отражателями, которые были расположены хаотически – ветки деревьев или разбросанные булавки. Посмотрим, что может произойти, когда отражатели расположены упорядоченным образом.

Линия на крыше. В последнее время на многих подмосковных железнодорожных платформах появились большие полупрозрачные крыши, имеющие цилиндрическую форму. В ясную погоду на таких крышах возникает любопытное изображение солнца, имеющее вид своеобразно изогнутой дуги (рис.10). Мы можем применить наши соображения по поводу отражения от тонких цилиндров для анализа формы этой кривой.

Все дело в конструкции тех полупрозрачных листов, из которых сделана крыша. Каждый такой лист первоначально плоский и составлен из двух параллельных поверхностей, разделенных небольшим промежутком. Этот узкий промежуток заполнен системой тонких длинных цилиндрических ребер, параллельных между собой и скрепляющих обе поверхности. Цилиндрическая форма такому листу обычно придается двумя различными способами. При одном изгибании листа ребра становятся параллелями цилиндра, при другом – его образующими. На железнодорожных платформах ребра – параллели. Именно этот случай мы и будем анализировать. При этом будем считать, что тонкие цилиндрические ребра представляют собой систему тонких цилиндрических зеркал. Заметим, что прозрачные крыши на

троллейбусных и автобусных остановках также делают из подобного материала. На некоторых из них вы тоже сможете увидеть дугообразные линии, на других картина будет иной, но это как раз там, где ребра идут вдоль образующих цилиндрической поверхности.

Итак, посмотрим на крышу железнодорожной платформы. Введем систему координат: ось X пусть вдоль оси большого цилиндра, представляющего крышу, ось Y пусть тоже лежит в горизонтальной плоскости, а ось Z направим вверх. Зададимся радиусом крыши R и будем считать, что наблюдатель находится в точке $P = (0, 0, z_0)$, а от солнца приходит пучок параллельных лучей, направление которого задается вектором $\vec{V} = (u, v, w)$, имеющим единичную длину.

Каждое тонкое цилиндрическое зеркало – это окружность с центром на оси X в точке $O_x = (x, 0, 0)$, а точки M_x , лежащие на таком зеркале, имеют координаты

$$M_x(\varphi) = (x, R \cos \varphi, R \sin \varphi), \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Задача заключается в том, чтобы на каждом тонком цилиндрическом зеркале найти точку, для которой отраженный конус проходит через глаз наблюдателя, т.е. через точку P . Например, хорошо было бы найти зависимость углового параметра φ отражающей точки, лежащей на зеркале, от величины x . Оказывается, что удобнее выразить x через φ :

$$x(\varphi) = \pm \sqrt{\left(\frac{z_0 \cos \varphi}{w \cos \varphi - v \sin \varphi} \right)^2 - (R^2 - 2Rz_0 \sin \varphi + z_0^2)}.$$

Нарисовав все точки с координатами $x(\varphi)$, $R \cos(\varphi)$, $R \sin(\varphi)$, получим соответствующую пространственную картину, имеющую определенное сходство с фотографией на рисунке 10.

В заключение – несколько вопросов к читателям.

1. На изображении солнца на крыше железнодорожной платформы видны два ярких пятна – одно в направлении самого солнца, другое расположено на симметричной ветви кривой. Объясните появление второго яркого пятна.

2. Пусть параллельные между собой тонкие цилиндрические зеркала заполняют целую плоскость. Какую кривую на таком плоском листе увидит наблюдатель, глядя сквозь него на солнце?

3. Найдите автобусную остановку, где тонкие цилиндрические зеркала являются образующими, и посмотрите, какая «солнечная кривая» видна на крыше остановки.

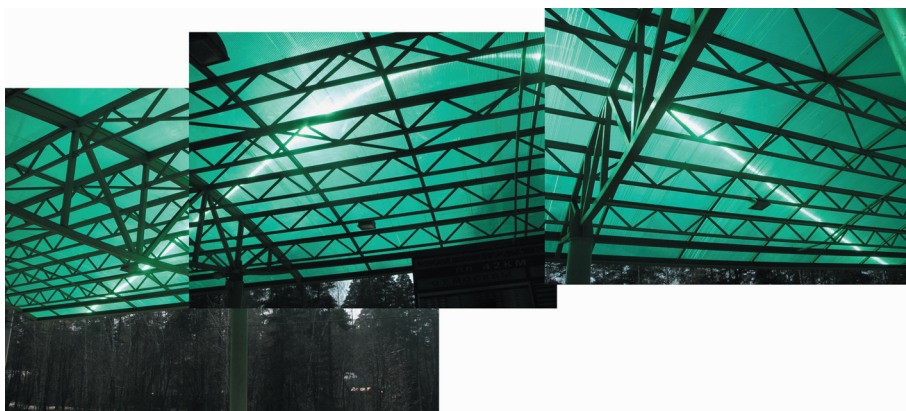


Рис.10. Яркая линия – изображение солнца на крыше железнодорожной платформы



Силы сопротивления в задачах динамики

В.ЛОСЕВ, В.ПЛИС

НА ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНАХ И ОЛИМПИАДАХ В ВЕДУЩИХ ФИЗИЧЕСКИХ ВУЗАХ НАШЕЙ СТРАНЫ РЕГУЛЯРНО ПРЕДЛАГАЮТСЯ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ, В КОТОРЫХ НАРЯДУ С «ТРАДИЦИОННЫМИ» СИЛАМИ: СИЛОЙ ТЯЖЕСТИ, СИЛОЙ АРХИМЕДА, СИЛОЙ ЛОРЕНЦА И Т.Д. НА ТЕЛА ДЕЙСТВУЕТ СИЛА СОПРОТИВЛЕНИЯ (ЖИДКОГО ТРЕНИЯ). ТАКАЯ СИЛА ПОЯВЛЯЕТСЯ, НАПРИМЕР, ПРИ ОТНОСИТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ ТЕЛ, СОПРИКАСАЮЩИХСЯ СМАЗАННЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ, А ТАКЖЕ ПРИ ДВИЖЕНИИ ТЕЛ В ЖИДКОСТЯХ И ГАЗАХ. ВОЗНИКАЮЩАЯ ПРИ ТАКОМ ДВИЖЕНИИ СИЛА СОПРОТИВЛЕНИЯ НАПРАВЛЕНА ПРОТИВ ПОСКОРОСТИ НАБЕГАЮЩЕГО ПОТОКА И ПРОПОРЦИОНАЛЬНА ПЕРВОЙ ИЛИ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ СКОРОСТИ.

Можно указать две причины возникновения этой силы. При очень малых скоростях (или для очень маленьких тел) главный вклад в силу сопротивления дают касательные силы внутреннего трения (вязкости), действующие со стороны потока жидкости или газа на «прилипший» к поверхности тела пограничный слой. Такую силу вязкого трения можно считать пропорциональной первой степени скорости. При больших скоростях эта сила становится несущественной, и главную роль играет сила лобового сопротивления, возникающая за счет различия сил давления на переднюю и заднюю части тела вследствие несимметричности картины обтекания реальной жидкостью или газом даже симметричного тела. Силу лобового сопротивления можно считать пропорциональной квадрату скорости.

Эти и другие причины приводят к тому, что зависимость сил сопротивления от скорости, размеров и т.д. носит в общем случае нелинейный характер. Однако знакомство с действием такого рода сил уместно начинать, как это принято в физике, с простейших модельных зависимостей.

Рассмотрим несколько характерных задач.

Начнем со случая, когда сила сопротивления принимается пропорциональной скорости.

Задача 1. Мяч, брошенный с поверхности земли вертикально вверх со скоростью $v_0 = 10$ м/с, упал на землю. За время полета скорость мяча уменьшилась по величине на $\delta = 30\%$. Найдите продолжительность T полета мяча. Силу сопротивления считайте пропорциональной скорости: $\vec{F} = -k\vec{v}$.

Решение. Согласно второму закону Ньютона, приращение импульса мяча пропорционально действующей на мяч результирующей силе и происходит по направлению этой силы:

$$m\Delta\vec{v} = (m\vec{g} - k\vec{v})\Delta t.$$

Переходя к проекциям сил и приращения скорости на

вертикальную ось, получаем

$$m\Delta v_y = -mg\Delta t - kv_y\Delta t.$$

Заметим, что элементарное перемещение мяча по вертикали равно $\Delta y = v_y\Delta t$, и перепишем последнее соотношение в виде

$$m\Delta v_y = -mg\Delta t - k\Delta y.$$

Просуммируем все такие соотношения по всему времени полета, т.е. от $t = 0$ до $t = T$:

$$m(\sum \Delta v_y) = -mg(\sum \Delta t) - k(\sum \Delta y),$$

или

$$m(v_y(T) - v_y(0)) = -mgT - k(y(T) - y(0)).$$

Перемещение мяча по вертикали за время полета нулевое: $y(T) - y(0) = 0$, тогда

$$-(1 - \delta)mv_0 - mv_0 = -mgT.$$

Отсюда находим продолжительность полета мяча:

$$T = \frac{v_0}{g}(2 - \delta) = 1,7 \text{ с}.$$

Задача 2. На горизонтальной поверхности покоится брусок. Черепаха перемещается с одного конца этого бруска на другой. Найдите расстояние, пройденное бруском за все время движения черепахи. Силу сопротивления считайте пропорциональной скорости бруска относительно горизонтальной поверхности: $\vec{F}_c = -k\vec{v}$.

Решение. Рассмотрим систему тел «черепаха + брусок». На каждом элементарном промежутке времени приращение $\Delta\vec{p}$ импульса этой системы равно суммарному импульсу действующих на систему внешних сил, т.е. сил тяжести, силы нормальной реакции опоры и силы сопротивления:

$$\Delta\vec{p} = M\Delta\vec{v}_0 + m\Delta\vec{v}_c = ((M + m)\vec{g} + \vec{F}_p - k\vec{v}_c)\Delta t,$$

где M – масса бруска, $\vec{v}_0$ – его скорость, m – масса черепахи, $\vec{v}_c$ – ее скорость.

Сумма сил тяжести и нормальной реакции равна нулю, тогда любое приращение импульса системы равно импульсу силы сопротивления:

$$\Delta\vec{p} = -k(\vec{v}_c\Delta t),$$

т.е. любое элементарное приращение импульса $\Delta\vec{p}$ системы «черепаха + брусок» и элементарное перемещение $\vec{v}_c\Delta t$ бруска отличаются в $(-k)$ раз.

Найдем перемещение бруска за все время движения. Для этого просуммируем все элементарные перемещения бруска по всему времени движения черепахи и бруска от старта – в этот момент $\vec{p}_{\text{нач}} = 0$, до полной остановки – в этот момент $\vec{p}_{\text{кон}} = 0$:

$$s_0 = \sum (\vec{v}_c\Delta t) = -\frac{1}{k}(\vec{p}_{\text{кон}}) - \vec{p}_{\text{нач}} = 0.$$

Задача 3. На горизонтальном столе один на другом лежат три длинных бруска (рис.1). Массы брусков m . Бруски смазаны маслом. При движении сила трения между брусками, а также между нижним бруском и столом пропорциональна относительной скорости: $\vec{F} = -k\vec{v}_{\text{отн}}$. Сначала все

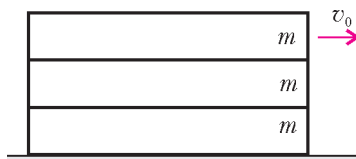


Рис. 1

бруски неподвижны, затем верхнему бруску сообщают горизонтальную скорость $\vec{v}_0$. Определите относительные смещения брусков после прекращения движения.

Решение. Рассмотрим систему, состоящую из n ($n = 1, 2, 3$) верхних брусков (бруски нумеруем, начиная с верхнего). Импульс рассматриваемой системы изменяется вследствие действия единственной горизонтальной внешней силы – силы вязкого трения, проекция которой на горизонтальную ось X имеет вид

$$F_{nx} = -k(v_n - v_{n+1}),$$

где v_n и v_{n+1} – скорости брусков в лабораторной системе отсчета. Тогда на каждом элементарном перемещении приращение импульса системы равно импульсу силы вязкого трения:

$$\Delta p_{nx} = -k(v_n - v_{n+1})\Delta t = -k(\Delta x_n - \Delta x_{n+1}) = -k\Delta X_{n\text{отн}},$$

где $\Delta x_n, \Delta x_{n+1}$ – абсолютные перемещения брусков, $\Delta X_{n\text{отн}} = \Delta x_n - \Delta x_{n+1}$ – перемещение n -го бруска в системе отсчета, связанной с $(n+1)$ -м бруском.

Вследствие рассеяния энергии движение в какой-то момент прекратится. Просуммируем все соотношения вида $\Delta p_{nx} = -k\Delta X_{n\text{отн}}$ по всему времени движения вплоть до остановки:

$$\sum \Delta p_{nx} = -k \sum \Delta X_{n\text{отн}},$$

учтем, что импульс системы в конечном состоянии нулевой, а в начальном состоянии он был равен $m\vec{v}_0$, и получим

$$-mv_0 = -kL_{n\text{отн}}, \text{ или } L_{n\text{отн}} = \frac{mv_0}{k},$$

где $L_{n\text{отн}} = \sum \Delta X_{n\text{отн}}$ – относительное перемещение n -го бруска в системе отсчета, связанной с $(n+1)$ -м бруском за все время движения.

Все относительные смещения брусков одинаковы. После остановки система будет иметь вид «лесенки» с шагом $\frac{mv_0}{k}$.

В следующем примере сила сухого трения оказывается связанной со скоростью.

Задача 4. На гладкой горизонтальной поверхности в круге, ограниченном шероховатой вертикальной стенкой, находится шайба (рис.2). Если шайбе сообщить произвольную начальную скорость, то, совершив два оборота, она возвращается в точку старта с вдвое меньшей скоростью. Найдите коэффициент μ трения скольжения шайбы по поверхности стенки, считая его постоянным.

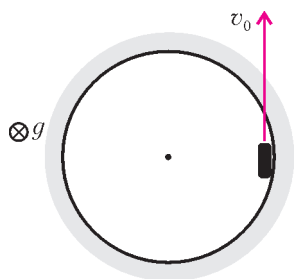


Рис. 2

Указание: при решении воспользуйтесь тем, что при малых приращениях аргумента приращение логарифма аргумента равно отношению приращения аргумента, т.е.

$$\Delta(\ln x) = \frac{\Delta x}{x}.$$

Решение. На шайбу действуют силы тяжести $m\vec{g}$, нормальной реакции вертикальной стенки $\vec{N}_1$, нормальной реакции горизонтальной поверхности $\vec{N}_2$, а также сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$, равная по величине $F_{\text{тр}} = \mu N_1$. В лабораторной системе отсчета шайба движется по окружности радиусом R . По второму закону Ньютона,

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{F}_{\text{тр}}.$$

Переходя к проекциям сил и ускорения на радиальное направление:

$$m \frac{v^2}{R} = N_1$$

и на тангенциальное направление:

$$m \frac{\Delta v}{\Delta t} = -F_{\text{тр}} = -\mu m \frac{v^2}{R},$$

находим

$$\frac{\Delta v}{v} = -\frac{\mu}{R} v \Delta t.$$

Следуя указанию в условии задачи, левую часть последнего равенства представим в виде $\frac{\Delta v}{v} = \Delta(\ln v)$, а в правой сделаем замену $\Delta s = v \Delta t$. Тогда, суммируя элементарные приращения

$$\sum \Delta(\ln v) = -\frac{\mu}{R} \sum \Delta s$$

по времени совершения двух оборотов, получим

$$\ln \frac{v_0}{2} - \ln v_0 = -\frac{\mu}{R} \cdot 4\pi R.$$

Отсюда находим

$$\mu = \frac{\ln 2}{4\pi} \approx 0,06.$$

Теперь обсудим более сложные случаи зависимости силы сопротивления от скорости.

Задача 5. Парашютист совершает затяжной прыжок – от старта с нулевой начальной скоростью до раскрытия парашюта скорость парашютиста растет, а начиная с некоторого момента становится практически постоянной. Известно, что сила сопротивления F , действующая на парашютиста, является степенной функцией его скорости v и характерного размера r , а также плотности воздуха ρ , т.е. $F = k \cdot \rho^\alpha \cdot v^\beta \cdot r^\gamma$, где k – безразмерный множитель порядка единицы. Оцените установившуюся скорость падения парашютиста.

Решение. Для определения показателей степени α, β, γ воспользуемся соображениями размерности. В Международной системе единиц (СИ) размерности физических величин, входящих в формулу для силы сопротивления, таковы:

$$[F] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2}, \quad [\rho] = \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \quad [v] = \frac{\text{м}}{\text{с}}, \quad [r] = \text{м}.$$

Тогда, сравнивая размерности левой $\left(\frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2}\right)$ и правой $\left(\frac{\text{кг}^\alpha}{\text{м}^{3\alpha}} \cdot \frac{\text{м}^\beta}{\text{с}^\beta} \cdot \text{м}^\gamma\right)$ частей формулы для силы сопротивления, приходим к следующим соотношениям:

$$1 = \alpha, \quad 1 = -3\alpha + \beta + \gamma, \quad -2 = -\beta.$$

Отсюда находим

$$\alpha = 1, \quad \beta = 2, \quad \gamma = 2.$$

Теперь формула для силы сопротивления принимает такой вид:

$$F = k\rho v^2 r^2.$$

При движении с установившейся скоростью сила тяжести равна по величине силе сопротивления:

$$Mg = k\rho v_{\text{уст}}^2 r^2.$$

Для численной оценки скорости $v_{\text{уст}}$ примем массу парашютиста $M = 100$ кг, плотность воздуха $\rho = 1,3$ кг/м³, квадрат

характерного размера $r^2 = 0,25 \text{ м}^2$. Это приводит к окончательному результату

$$v_{\text{уст}} = \sqrt{\frac{Mg}{k\rho r^2}} = \sqrt{\frac{100 \cdot 10}{1 \cdot 1,3 \cdot 0,25}} \text{ м/с} \approx 55 \text{ м/с},$$

который хорошо согласуется с опытными данными.

Задача 6. Теннисист подает мяч со скоростью $v_0 = 200 \text{ км/ч}$ с высоты $h = 3 \text{ м}$. Пролетев $L = 20 \text{ м}$, мяч

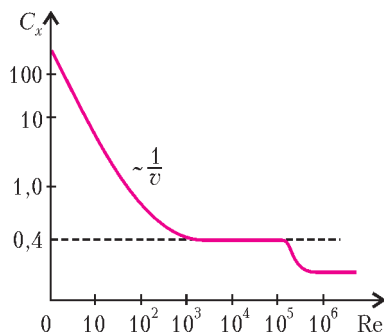


Рис. 3

ударяется о корт. Масса мяча $m = 60 \text{ г}$, радиус мяча $R = 32,5 \text{ мм}$. Оцените скорость мяча v_1 в момент удара и продолжительность полета T . Считайте, что в полете на мяч действует сила сопротивления $F = C_x \frac{\rho v^2}{2} \pi R^2$. На рисунке 3 представлена экспериментальная зависимость безразмерного коэффициента сопротивления C_x шара от безразмерного параметра (числа Рейнольдса) $Re = \frac{\rho v R}{\eta}$, где $\rho = 1,3 \text{ кг/м}^3$ – плотность воздуха, v – скорость шара, R – его радиус, $\eta = 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ Па} \cdot \text{с}$ – коэффициент внутреннего трения (вязкости) воздуха. Вращением мяча следует пренебречь.

Решение. Оценки проведем в два этапа.

Скорость 200 км/ч – это (в СИ) приблизительно 55 м/с , и мяч пролетит 20 м за время $T \approx \frac{L}{v_0} \approx 0,4 \text{ с}$. В начальный момент $Re = \frac{\rho v_0 R}{\eta} \approx 1,3 \cdot 10^5$. Из графика на рисунке 3 следует, что при уменьшении скорости мяча в 100 раз, т.е. практически в течение всего полета, коэффициент сопротивления остается постоянным и равным $C_x = 0,4$. Оценим величину горизонтальной составляющей ускорения мяча в начальный момент:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{C_x \pi \rho R^2 v^2}{2m} \approx 43 \text{ м/с}^2.$$

За время полета скорость уменьшится примерно на

$$\Delta v = aT \approx 17 \text{ м/с}$$

и в момент удара будет равна

$$v_1 = v_0 - \Delta v \approx 38 \text{ м/с}.$$

Конечно, полученный результат верен по порядку величины и демонстрирует технику построения грубых оценок.

Более точный ответ можно получить, суммируя бесконечно малые. Действительно, по второму закону Ньютона,

$$m \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = -F = -C_x \rho \frac{v_x^2}{2} \pi R^2,$$

или

$$\frac{\Delta v_x}{v_x} = -\beta \Delta t = -\beta \Delta x, \text{ где } \beta = \frac{C_x \pi \rho R^2}{2m} \approx 0,014 \text{ м}^{-1}.$$

Суммируя элементарные относительные приращения горизонтальной составляющей скорости мяча по всему времени полета, получаем

$$\sum \frac{\Delta v_x}{v_x} = -\beta \sum \Delta x, \text{ или } \ln \frac{v_1}{v_0} = -\beta L.$$

Отсюда находим

$$v_1 = v_0 \cdot \exp(-\beta L) \approx 42 \text{ м/с}.$$

Уточним и продолжительность полета мяча:

$$T = \sum \Delta t = -\frac{1}{\beta} \sum \frac{\Delta v_x}{v_x^2} = \frac{1}{\beta} \left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_0} \right) \approx 0,27 \text{ с}.$$

Рассмотренная задача иллюстрирует известное правило Уилера (американского физика-теоретика): «Никогда не начинай вычислений, пока не знаешь ответа. Каждому вычислению предпосылай оценочный расчет: привлеки простые физические соображения (симметрию! инвариантность!) до того, как начинать подробный вывод... Будь смелее... Делай предположения быстро, интуитивно. Удачные предположения укрепляют интуицию. Ошибочные предположения дают ей хорошую встряску».

Упражнения

1. Небольшой упругий брусок массой m может двигаться без трения внутри прямоугольной коробки такой же массы. Коробка находится на столе, покрытом тонким слоем масла. В начальный момент коробка покоится, а бруску, находящемуся у одной из стенок, сообщают скорость v_0 , направленную по нормали к стенке. Сколько соударений бруска с коробкой произойдет за все время движения? Расстояние между стенками, с которыми соударяется брусок, равно L . Силу трения считайте пропорциональной скорости коробки: $\vec{F} = -k\vec{v}$, соударения – абсолютно упругими.

2. Маленькая шайба массой m лежит на краю длинной доски массой M , покоящейся на гладкой горизонтальной поверхности. Шайба и доска смазаны маслом. Шайбе сообщают горизонтальную скорость v_0 , направленную вдоль доски. При движении на каждое тело действует сила вязкого трения, пропорциональная относительной скорости: $\vec{F} = -k\vec{v}_{\text{отн}}$. Определите перемещение шайбы относительно доски за достаточно большой промежуток времени.

3. Следуя условию задачи 4 в статье, найдите время, за которое шайба совершит первый оборот. Считайте начальную скорость $v_0 = 3 \text{ м/с}$, радиус круга $R = 1 \text{ м}$.

Указание: при решении воспользуйтесь тем, что при малых приращениях аргумента $\Delta \left(\frac{1}{x} \right) = -\frac{\Delta x}{x^2}$.

4. Стальной шарик радиусом $r = 0,5 \text{ мм}$ движется в широком сосуде, наполненном глицерином. На шарик действуют сила тяжести, сила Архимеда и сила сопротивления, являющаяся степенной функцией его скорости v , радиуса r и коэффициента внутреннего трения (вязкости) η глицерина, т.е. $F = k \cdot \eta^\alpha \cdot v^\beta \cdot r^\gamma$, где $k = 6\pi$ – безразмерный множитель. Воспользуйтесь соображениями размерности и найдите показатели степени α, β, γ . Далее определите скорость v установившегося (равномерного) движения шарика. Плотность глицерина $\rho_1 = 1,26 \text{ г/см}^3$, плотность стали $\rho_2 = 7,8 \text{ г/см}^3$, коэффициент внутреннего трения (вязкости) глицерина $\eta = 1,4 \cdot 10^{-3} \text{ Н} \cdot \text{с/м}^2$.

Параллельное проектирование в задачах

В. МИРОШИН

ИЗОБРАЖЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ФИГУРЫ ИГРАЕТ важную роль в решении большинства стереометрических задач. Существуют общепринятые и часто используемые изображения основных стереометрических объектов – призм, пирамид, конусов и т.д. Но изображение – плоское, и поэтому фигура может изображаться в различных ракурсах.

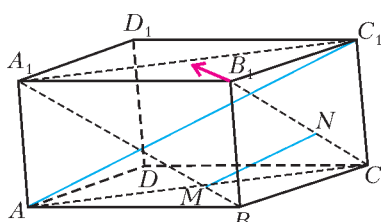


Рис. 1

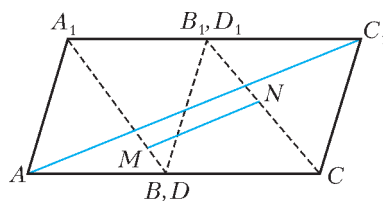


Рис. 2

«вдоль» диагонали B_1D_1 , спроектировав нужные нам точки в плоскость $A_1CC_1A_1$ (рис. 2).

Образы вершин B и D совпадут с серединой AC ; аналогично, образы вершин B_1 и D_1 совпадут с серединой A_1C_1 . При параллельном проектировании образами параллельных прямых являются параллельные прямые, и к тому же отношения отрезков, расположенных на параллельных прямых, сохраняются. Поэтому из теоремы Фалеса следует, что образы диагоналей A_1B и B_1C разделят образ AC_1 на три равных отрезка, средний из которых будет равен образу MN . Значит, $MN : AC_1 = 1 : 3$.

Ответ: $1 : 3$.

Задача 2. В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ точки M и N – середины боковых ребер AA_1 и CC_1 соответственно. На отрезках AB_1 и CM расположены точки E и F соответственно так, что $EF \parallel BN$ (рис. 3). Найдите отношение $EF : BN$.

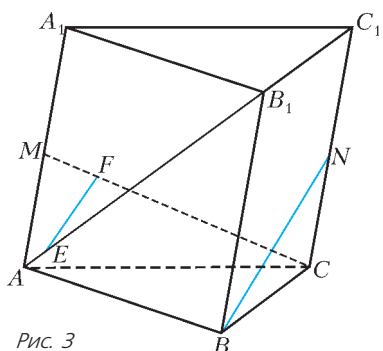


Рис. 3

Решение. Выберем в качестве плоскости проектирования основание призмы ABC , а в каче-

стве прямой проектирования выберем прямую MC . Далее для удобства будем обозначать образ точки при проектировании той же буквой, что ее прообраз, только со штрихом (например, проекцию точки N будем обозначать N'). Образом боковой грани CC_1A_1A призмы будет отрезок, расположенный на прямой AC , а образом боковой грани CC_1B_1B – параллелограмм, одной из сторон которого будет BC (рис. 4).

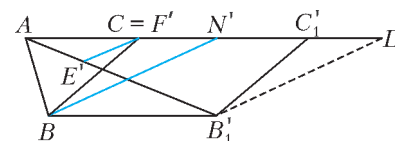


Рис. 4

Так как N – середина ребра, то треугольники $CN'N$ и C_1A_1N равны, поэтому $AC = A_1C_1 = CN'$. Кроме того, так как $CN = NC_1$, то $CN' = N'C_1'$. Проведем $B_1'D \parallel BN'$. Получим

$$\frac{EF}{BN} = \frac{E'F'}{BN'} = \frac{E'F'}{B_1'D} = \frac{AF'}{AD} = \frac{1}{4}.$$

Ответ: $1 : 4$.

Задача 3. В пирамиде $ABCD$ точки M , F и K – середины ребер BC , AD и CD соответственно. На прямых AM и CF соответственно взяты точки P и Q так, что $PQ \parallel BK$ (рис. 5). Найдите отношение $PQ : BK$.

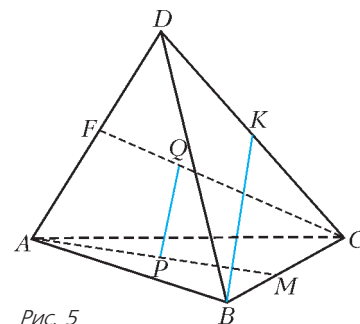


Рис. 5

Решение. Следуя предыдущим примерам, мы должны выбрать плоскость проектирования и прямую проектирования так, чтобы наиболее простым образом найти нужное нам отношение. В качестве плоскости проектирования выберем основание пирамиды ABC , а в качестве прямой проектирования возьмем FC . Образом отрезка FK будет отрезок $CK' = FK = \frac{1}{2}AC$. Образом отрезка PQ будет отрезок $PC \parallel BK'$ (рис. 6).

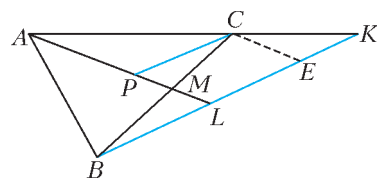


Рис. 6

Продолжим AM до пересечения с BK' в точке L и проведем $CE \parallel AL$. Тогда

$$\frac{BL}{PC} = \frac{BM}{MC} = \frac{1}{1}, \quad \frac{K'E}{EL} = \frac{K'C}{CA} = \frac{1}{2}.$$

И так как $PC = EL$, получим, что

$$\frac{PQ}{BK} = \frac{PC}{BK'} = \frac{PC}{BL + LE + EK'} = \frac{2}{2 + 2 + 1} = \frac{2}{5}.$$

Ответ: $2 : 5$.

Задача 4. На ребре AD и диагонали A_1C параллелепипеда $ABCA_1B_1C_1D_1$ выбраны точки M и N так, что $AM : AD = 1 : 5$ и прямая MN параллельна плоскости BDC_1 (рис. 7). Найдите отношение $CN : CA_1$.

Решение. Как и в первой задаче, построим проекцию параллелепипеда на плоскость AA_1C_1C вдоль прямой BD .

Так как прямая проектирования лежит в плоскости BC_1D , то эта плоскость отобразится в прямую OC_1 ,

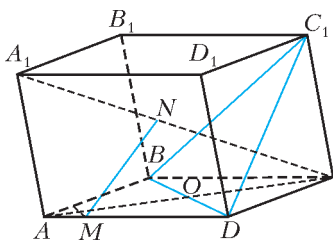


Рис. 7

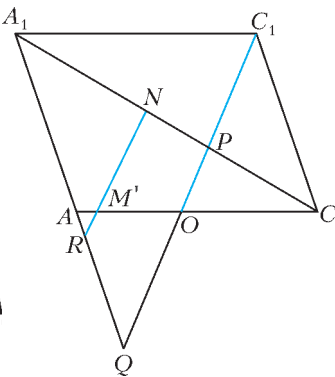


Рис. 8

а отрезок MN , параллельный плоскости, — в отрезок $M'N \parallel OC_1$ (рис.8).

Продолжим C_1O и NM' до пересечения с AA_1 . Имеем

$$\frac{AM'}{M'O} = \frac{AM}{MD} = \frac{1}{4}, \quad \frac{NP}{PC} = \frac{M'O}{OC} = \frac{4}{5}.$$

Так как O — середина AC , то $AQ = AA_1$ и $\frac{AR}{RQ} = \frac{1}{4}$;

$$\frac{A_1N}{NP} = \frac{A_1R}{RQ} = \frac{6}{4}.$$

$$\text{Следовательно, } \frac{CN}{CA_1} = \frac{5+4}{5+4+6} = \frac{3}{5}.$$

Ответ: 3 : 5.

Задача 5 (МФТИ, 1981 г., а также конкурс абитуриентов 2007/2008 года по решению задач вступительных испытаний МФТИ). Точка D — середина ребра A_1C_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$. Правильная треугольная пирамида $SMNP$ расположена так, что плоскость ее основания совпадает с плоскостью треугольника ABC , вершина M лежит на продолжении AC , причем $CM = \frac{1}{2}AC$, ребро SN проходит через точку D , а ребро SP пересекает отрезок BB_1 в точке K (рис.9). В каком отношении отрезок BB_1 делится точкой K ?

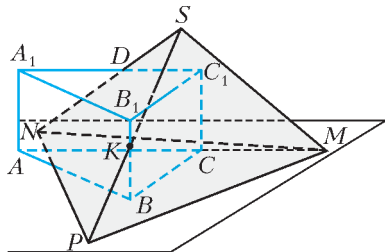


Рис. 9

Решение. Прежде всего, посмотрим «сверху», т.е. спроектируем оба многогранника на их общую плоскость основания. Вершина S пирамиды спроектируется в центр треугольника MNP — точку H (рис.10).

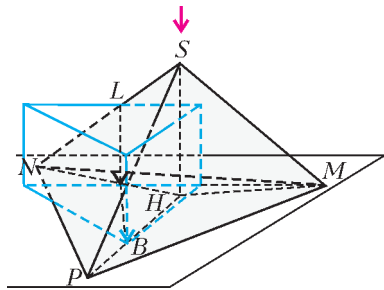


Рис. 10

Образами боковых ребер будут служить радиусы описанной около него окружности, проведенные в вершины. Образы точек D и K будут лежать на перпендикуляре, проведенном к AM из вершины B . Но самое интересное, что точка M , точка B и образ точки D будут видны из образа вершины пирамиды под углами $\frac{2\pi}{3}$. Это следует из того, что

$\angle NHM = \angle MHP = \angle PHN = 120^\circ$, так как H — центр правильного треугольника MNP , а проекции точек D и K лежат на отрезках HN и HP соответственно. Следовательно, H — точка Торричелли для прямоугольного треугольника BMD' (рис.11, D' — образ точки D).

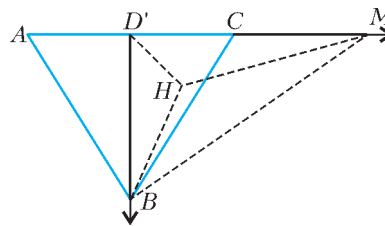


Рис. 11

Напомним свойство точки Торричелли: сумма расстояний от нее до вершин треугольника минимальна. Из условия задачи можно найти отношение $b : a = \operatorname{tg} \varphi = BD' : D'M = 3 : 2$, где $\varphi = \angle D'MB$ (далее это понадобится).

Найдем отношения расстояний от точки H до вершин прямоугольного треугольника $D'BM$. Введем систему координат таким образом, чтобы начало координат находилось в точке D' , ось абсцисс была направлена по лучу $D'M$, а ось ординат — по лучу $D'B$.

Точка H будет точкой пересечения окружностей, описанных около треугольников BHD' и $D'HM$, углы в вершинах H которых равны $\frac{2\pi}{3}$ (рис.12). Кроме

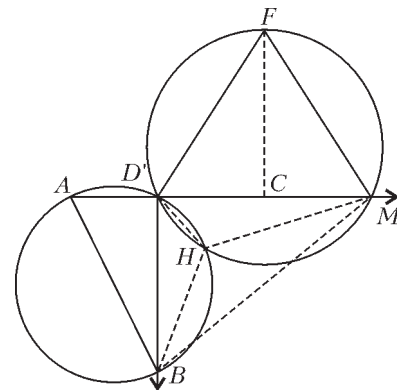


Рис. 12

того, окружность, описанная около первого треугольника, пройдет, очевидно, через точку A . Следовательно, AB — ее диаметр, и ее уравнение

$$\left(x + \frac{a}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{16} + \frac{b^2}{4}.$$

Аналогично, вторая окружность будет содержать вершину F равностороннего треугольника $D'MF$, построенного так, чтобы точки B и F лежали в разных полуплоскостях относительно прямой $D'M$. Уравнение второй окружности будет иметь вид

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \frac{a^2}{3}.$$

Для нахождения координат точки H решим систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + \frac{a}{2}x + y^2 - by = 0, \\ x^2 - ax + y^2 + \frac{a\sqrt{3}}{3}y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \frac{a}{2}x + y^2 - by = 0, \\ \frac{3a}{2}x = \left(b + \frac{a}{\sqrt{3}}\right)y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \frac{a}{2}x + y^2 - by = 0, \\ y = \frac{3\sqrt{3}a}{2(a+b\sqrt{3})}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \frac{a}{2}x + y^2 - by = 0, \\ y = \frac{3\sqrt{3}}{2(1+\sqrt{3}\operatorname{tg}\varphi)}x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3\sqrt{3}}{2(1+\sqrt{3}\operatorname{tg}\varphi)}x, \\ x^2 \left(1 + \frac{27}{4(1+\sqrt{3}\operatorname{tg}\varphi)^2} \right) + x \left(\frac{a}{2} - \frac{3\sqrt{3}a\operatorname{tg}\varphi}{2(1+\sqrt{3}\operatorname{tg}\varphi)} \right) = 0. \end{cases}$$

Понятно, что первое решение системы $(0; 0)$, так как обе окружности проходят через начало координат. Найдем второе решение системы, обозначив $\sqrt{3}\operatorname{tg}\varphi = k$.

$$x \left(\frac{4(1+k)^2 + 27}{4(1+k)^2} \right) = \frac{a}{2} \left(\frac{2k-1}{1+k} \right) \Leftrightarrow x = a \frac{2(2k-1)(k+1)}{4(k+1)^2 + 27}.$$

Соответственно,

$$y = \frac{3\sqrt{3}}{2(1+k)} a \frac{2(2k-1)(k+1)}{4(k+1)^2 + 27} = a \frac{3\sqrt{3}(2k-1)}{4(k+1)^2 + 27}.$$

Учитывая, что $k = \frac{3}{2}$, получим координаты точки H :

$$x = \frac{5}{26}a, \quad y = \frac{3\sqrt{3}}{2(1+k)} \cdot \frac{5}{26}a = a \frac{3\sqrt{3}}{26}.$$

Найдем искомые расстояния:

$$D'H = \sqrt{\frac{25}{676} + \frac{27}{676}}a = \sqrt{\frac{52}{676}}a = \frac{a}{\sqrt{13}};$$

$$HM = \sqrt{\left(\frac{5}{26} - 1\right)^2 + \frac{27}{676}}a = \sqrt{\frac{441+27}{676}} = \frac{3a}{\sqrt{13}};$$

$$HB = \sqrt{\frac{25}{676} + \left(\frac{3\sqrt{3}}{26} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}a = \sqrt{\frac{325}{676}}a = \frac{5a}{2\sqrt{13}}.$$

Для получения окончательного решения сделаем еще вот что: совместим треугольники SHM , SHP и SHN (рис.13). Так как

$$HD' = \frac{1}{3}HM, \quad HB = \frac{5}{6}HM,$$

$$\text{то } \frac{B_1K}{KB} = \frac{DK}{KM} = \frac{D'B}{BM} = \frac{3}{1}.$$

Действительно, «сверху и сбоку» виднее.

Ответ: $3 : 1$.

Упражнения

1. На диагоналях AC и BA_1 боковых граней параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ выбраны точки M и N так, что отрезок MN параллелен диагонали параллелепипеда DB_1 . Найдите отношение $MN : DB_1$.

2. На диагонали AC_1 параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взята точка M , а на прямой B_1C — точка N так, что отрезки MN и BD параллельны. Найдите отношение длин этих отрезков.

3. Точка E — середина ребра MQ правильной четырехугольной пирамиды $SMNPQ$. Куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ расположен так, что плоскость грани $ABCD$ совпадает с плоскостью $MNPQ$, вершина B_1 лежит на ребре SN , точка E лежит на прямой AB , причем $EA = AB$. Прямая SP пересекает ребро CC_1 . В каком отношении отрезок CC_1 делится точкой пересечения?

4. В правильной треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$ точка D — середина ребра $A_1 C_1$. Правильная треугольная пирамида расположена так, что плоскость ее основания совпадает с плоскостью ABC , первое боковое ребро проходит через вершину B , второе — через точку D , а третье пересекает ребро CC_1 . Найдите отношение объема пирамиды к объему призмы.

5. Через середины M и N ребер AD и CC_1 параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ проведена плоскость, параллельная диагонали DB_1 . В каком отношении эта плоскость делит ребро BB_1 ?

Вниманию наших читателей!

Когда диагональ пятиугольника параллельна стороне?

В 11 номере «Кванта» за 1977 год опубликовано довольно сложное решение следующей задачи.

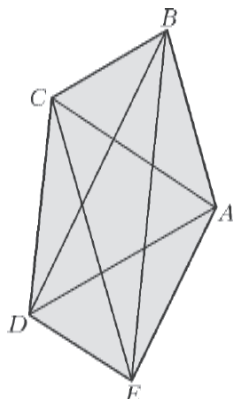
M433. Сторона BC выпуклого пятиугольника $ABCDE$ параллельна диагонали AD , сторона CD — диагонали BE , сторона DE — диагонали AC , а сторона AE — диагонали BD . Докажите, что сторона AB параллельна диагонали CE .

Заметьте, однако, что условие $BC \parallel AD$ можно записать в виде

$$S_{ABC} = S_{DBC}.$$

Аналогично, условия $CD \parallel BE$, $DE \parallel AC$ и $AE \parallel BD$ запишем в виде равенств

$$S_{DBC} = S_{DEC}, \quad S_{DEC} = S_{DEA} \quad \text{и} \quad S_{DEA} = S_{BEA}.$$



Таким образом,

$$S_{ABC} = S_{DBC} = S_{DEC} = S_{DEA} = S_{BEA},$$

откуда $S_{ABC} = S_{BEA}$, т.е. $CE \parallel AB$, что и требовалось доказать.

А.Спивак

Новая книга по физике

В издательстве «Физматлит» в серии «Школьнику и учителю» вышла книга «Краткий курс физики», автором которой является заместитель главного редактора журнала «Квант» по физике А.И.Черноуцан.

Книга содержит краткое, но достаточно полное и подробное изложение всех разделов школьной физики, включенных в программу ЕГЭ. Изложение теории сопровождается многочисленными примерами, вопросами и ответами, а также замечаниями, проясняющими тонкие и трудные моменты. В книге есть подробный предметный указатель, позволяющий использовать ее в качестве справочника.

Книга рекомендована Федеральным институтом педагогических измерений для подготовки к ЕГЭ.