ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 мая 2009 года по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №1–2009» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М2116» или «Ф2123». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений). Решения задач по математике и физике можно присылать также по электронным адресам math@kvant.info и phys@kvant.info соответственно.

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М2118 и М2121 предлагалась на IV Всероссийской олимпиаде по геометрии имени И.Ф.Шарыгина, задачи М2119, М2120 и М2123 – на XXX Турнире городов.

Задачи М2116–М2123, Ф2123–Ф2129

М2116. Полный набор домино выкладывается на столе в замкнутую цепь, и для всех пар соседних доминошек вычисляется модуль разности очков на клетках, которыми они соприкасаются. Обозначим через S сумму всех таких модулей разностей. Ясно, что наименьшее значение S равно 0 (это происходит в том случае, когда замкнутая цепь выложена по правилам домино). А какое наибольшее значение может принимать сумма S?

А.Грибалко

М2117. Существует ли арифметическая прогрессия из 2008 различных натуральных чисел, произведение которых равно точной 2009-й степени натурального числа?

Г.Гальперин

М2118. Докажите, что в треугольнике ABC с углом A, равным 120°, расстояние от центра описанной окружности до точки пересечения высот равно $AB + AC$.

В.Протасов

М2119. В бесконечной последовательности $a_1, a_2, a_3, \ldots$ число a_1 равно 1, а каждое следующее число a_n строится из предыдущего a_{n-1} по правилу: если у числа n наибольший нечетный делитель имеет остаток 1 от деления на 4, то $a_n = a_{n-1} + 1$, если же остаток равен 3, то $a_n = a_{n-1} - 1$. Докажите, что в этой последовательности все числа положительны, причем каждое натуральное число встречается в ней бесконечно много раз.

А.Заславский

М2120. Многочлен $P(x)$ с действительными коэффициентами таков, что уравнение $P(m) + P(n) = 0$ имеет бесконечно много решений в целых числах m и n. Докажите, что график функции $y = P(x)$ имеет центр симметрии.

А.Шаповалов

М2121. Противоположные стороны выпуклого шестиугольника $ABCDEF$ параллельны. Назовем его «высотами» векторы с концами на прямых, содержащих противолежащие стороны, перпендикулярные им и направленные от AB к DE, от EF к BC и от CD к AF. Докажите, что вокруг этого шестиугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда сумма его «высот» равна нулевому вектору.

А.Заславский

М2122. а) Докажите, что любое натуральное число n, большее 17, можно разложить в сумму трех натуральных попарно взаимно простых слагаемых, каждое из которых больше 1.

б*) Выясните, конечно или бесконечно множество натуральных чисел, не представимых в виде суммы трех взаимно простых в совокупности натуральных слагаемых, любые два из которых не взаимно просты.

В.Лецко

М2123. Тест состоит из 30 вопросов, на каждый есть 2 варианта ответа (один верный, другой нет). За одну попытку Витя отвечает на все вопросы, после чего ему сообщают, на сколько вопросов он ответил верно. Сможет ли Витя действовать так, чтобы гарантированно узнать все верные ответы не позже, чем после 24-й попытки (и ответить верно на все вопросы при 25-й попытке)?

В.Клепцын

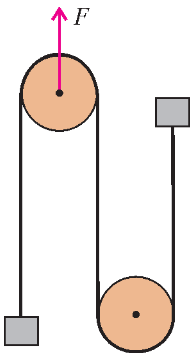


Рис. 1

Ф2123. На гладком горизонтальном столе лежат два блока – тонкие легкие диски. Ось одного их них закреплена, так что двигаться он не может, но может вращаться в горизонтальной плоскости. Кусок легкой нерастяжимой нити охватывает блоки, к концам нити прикреплены одинаковые грузы массой M каждый. В начальный момент нить натянута, свободные куски нити параллельны друг другу. На ось «подвижного» блока начинает действовать сила F (рис.1; вид сверху). Найдите ускорение этого блока, если при движении свободные куски нити остаются параллельными. Во сколько раз отличаются скорости вращения блоков? Нить не проскальзывает относительно блоков.

А.Блоков

Ф2124. Грузы с массами M и m связаны очень легкой пружинкой жесткостью k. На грузы начинают действовать одинаковые по величине и противоположные по направлению силы F (рис.2). Найдите максимальную скорость груза массой M. Найдите также максимальное смещение груза массой m. В начальный момент пружина не деформирована, грузы неподвижны.

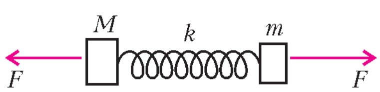


Рис. 2

А.Простов

Ф2125. Моль гелия при нормальных условиях находится внутри эластичной оболочки. Наружные условия изменяются так, что к некоторому моменту газ получает 100 Дж тепла, а температура газа увеличивается при этом на 10 К. Оцените изменение объема газа.

З.Повторов

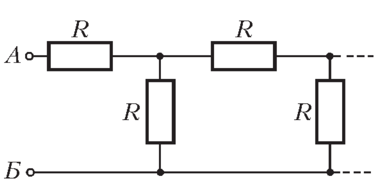


Рис. 3

Ф2126. На рисунке 3 изображена известная бесконечная цепочка, состоящая из резисторов с одинаковыми сопротивлениями. Все знают, как посчитать ее сопротивление, измеренное между точками A и $Б$. А что если взять не бесконечную цепочку, а цепочку, состоящую ровно из 50 звеньев, – как посчитать ее сопротивление? Понятно, что сделать это «в лоб» трудно, проще считать цепь бесконечной... Какую погрешность мы при этом получим? Сильно ли сопротивление урезанной цепи отличается от сопротивления бесконечной цепочки? Зададим конкретный вопрос: эти отличия меньше миллионной доли процента или намного больше?

А.Цепочкин

Ф2127. Потенциалы точек A, $Б$ и $В$ поддерживаются постоянными: $\varphi_А = 100$ В, $\varphi_Б = 200$ В, $\varphi_В = 500$ В. Два одинаковых конденсатора емкостью 10 мФ каждый и резистор сопротивлением 1 МОм соединяем «звездой» и подключаем одновременно свободными выводами к точкам A, $Б$ и $В$ (резистор – к точке $В$; рис.4). Какое количество теплоты выделится в резисторе за большое время?

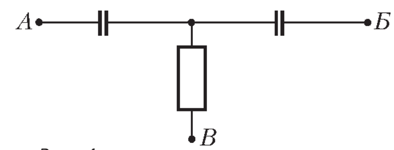


Рис. 4

З.Рафаилов

Ф2128. Две одинаковые катушки соединены последовательно, параллельно одной из них подключен конденсатор, а к выводам цепи подсоединена батарейка напряжением U (рис.5). Найдите максимальное напряжение конденсатора. Элементы цепи считайте идеальными.

Р.Александров

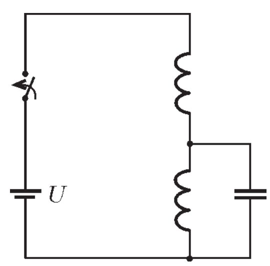


Рис. 5

Ф2129. В трех вершинах квадрата с длиной стороны 2 м расположены одинаковые маленькие громкоговорители, в четвертой вершине находится очень маленький всенаправленный микрофон. К громкоговорителям поочередно подключают источники переменного напряжения частотой 100 Гц и регулируют их уровни так, чтобы напряжение на выходных зажимах микрофона составляло в каждом случае ровно 1 мВ. Какое напряжение выдаст микрофон, если включить одновременно два соседних громкоговорителя? А если включить все три громкоговорителя? Рассмотрите два разных варианта: используются независимые источники напряжения (три звуковых генератора и три усилителя низкой частоты) и используется один генератор, «размноженный» на три усилителя.

А.Зильберман

Решения задач М2096–М2100, Ф2108–Ф2117

М2096. *Депутаты парламента образовали 2008 комиссий, каждая – не более чем из 10 человек. Известно, что любые 11 комиссий имеют общего члена. Докажите, что все комиссии имеют общего члена.*

Предположим, что, напротив, для каждого депутата найдется комиссия, в которую он не входит. Возьмем первую комиссию A, состоящую из депутатов $a_1, a_2, \ldots, a_k$, где $k \le 10$. Для каждого i = 1, 2, ..., k найдем комиссию A_i, в которую не входит депутат a_i. Тогда комиссии $A, A_1, A_2, \ldots, A_k$ не имеют общего члена, что противоречит условию.

Ф.Петров

М2097. *Найдите все такие простые числа p вида $a^2 + b^2 + c^2$ (где a, b, c – натуральные), что $a^4 + b^4 + c^4$ делится на p.*

Ответ: $p = 3$.

Очевидно, $p = 3$ подходит.

Пусть $a \ge b \ge c$ и $a^4 + b^4 + c^4$ делится на $p = a^2 + b^2 + c^2$. Имеем следующее сравнение по модулю p:

$$0 \equiv p^2 \equiv \left(a^2+b^2+c^2\right)^2 \equiv$$
$$\equiv 2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right) \equiv 2\left(a^2b^2+c^2\left(-c^2\right)\right) \equiv$$
$$\equiv 2\left(ab+c^2\right)\left(ab-c^2\right)\left(\operatorname{mod} a^2+b^2+c^2\right).$$

Значит, $2\left(ab+c^2\right)\left(ab-c^2\right)$ делится на p. Так как $p=a^2+b^2+c^2>ab+c^2>ab-c^2\ge 0$, то $ab-c^2=0$, т.е. $a=b=c$. Получили: $p=3a^2$ делится на 3, поэтому $p=3$.

Замечание. Существует бесконечно много таких простых чисел $p=a+b+c$, что $a^2+b^2+c^2$ делится на p. Для доказательства достаточно (подумайте, почему) установить, что существует бесконечно много простых чисел вида $p=a^2+ab+b^2$ ($a,b\in\mathbb{N}$). Доказательство последнего факта следует из задач в книге А.В.Спивака «Арифметика-2» (Приложение к журналу «Квант» № 5 за 2008 г., задачи 42 и 44 на с.34).

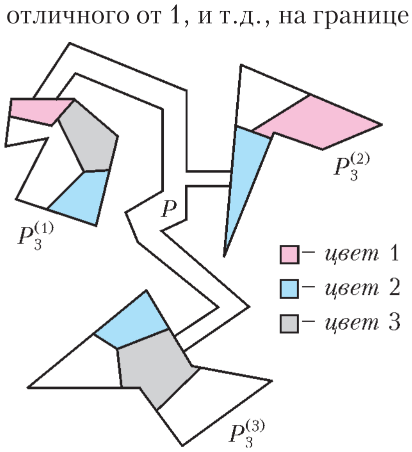
В.Сендеров

М2098. *Двое играют в игру, делая ходы по очереди: первый рисует на плоскости многоугольник, не налегающий на уже нарисованные, а второй ответным ходом раскрашивает его в один из 2008 цветов. Второй игрок хочет, чтобы любые два многоугольника, граничащие по отрезку стороны, имели разные цвета. Сможет ли первый игрок помешать ему?*

Ответ: сможет.

Докажем индукцией по n, что первый может играть так, что нарисованные им многоугольники будут давать в объединении некоторый многоугольник P_n, на границу которого выходят многоугольники не менее n цветов. Отсюда будет следовать, что никакого конечного числа цветов недостаточно.

База индукции очевидна. Пусть утверждение верно для $n=k$, докажем его для $n=k+1$. Из предположения индукции следует, что первый игрок может играть так, чтобы нарисованные многоугольники давали в объединении k многоугольников $P_k^{(1)},P_k^{(2)},\ldots,P_k^{(k)}$, на границу каждого из которых выходят многоугольники не менее k цветов. На границе многоугольника $P_k^{(1)}$ выделим отрезок Δ_1 некоторого цвета 1, на границе многоугольника $P_k^{(2)}$ выделим отрезок Δ_2 некоторого цвета 2, отличного от 1, и т.д., на границе многоугольника $P_k^{(k)}$ выделим отрезок Δ_k некоторого цвета k, отличного от уже определенных цветов $1, 2, \ldots, k-1$. Пусть теперь первый нарисует многоугольник P, пересекающийся с многоугольником $P_k^{(i)}$ по части отрезка Δ_i для всех $i = 1, 2, \ldots, k$ (см. рисунок). Второй игрок должен раскрасить многоугольник P в цвет, отличный от цветов $1, 2, \ldots, k$. Тогда на границу многоугольника, являющего объединением многоугольников $P, P_k^{(1)}, P_k^{(2)}, \ldots, P_k^{(k)}$, выходят не менее $k+1$ цветов. Переход индукции доказан.



Замечания. Строгое доказательство существования многоугольника P из решения задачи далеко не просто (хотя интуитивно все очевидно), оно следует из известной топологической *теоремы Жордана*.

Отметим, что вопрос, поставленный в задаче, уже рассматривался в «Задачнике «Кванта» для случая, когда первому игроку позволяется рисовать многоугольники лишь специального вида (см. задачу М1205).

Результат этой задачи интересно сопоставить также со знаменитой теоремой о четырех красках, согласно которой для раскрашивания *правильным* образом любой карты на плоскости достаточно лишь четырех цветов.

Е.Гик, П.Кожевников

М2099. *Пусть $a_0>a_1>\ldots>a_s=0$ – такая последовательность целых чисел, что натуральные числа a_0 и a_1 взаимно просты, а при $i\ge 1$ число a_{i+1} равно остатку от деления a_{i-1} на a_i с неполными частными $t_i=\left[\dfrac{a_{i-1}}{a_i}\right]$. Построим последовательность $b_0,b_1,\ldots,b_s$ с помощью соотношения $b_{i+1}=b_{i-1}+t_ib_i$, положив $b_0=0$ и $b_1=1$. Докажите, что $b_s=a_0$.*

Заметим, что

$$1=\text{НОД}\left(a_0,a_1\right)=\text{НОД}\left(a_1,a_2\right)=\ldots=\text{НОД}\left(a_{s-1},a_s\right)=1.$$

Так как $a_s=0$, то $a_{s-1}=\text{НОД}\left(a_{s-1},a_s\right)=1$. Положим $d_i=a_{i-1}b_i+a_ib_{i-1}$, $i=1, 2, \ldots, s$. Из рекуррентных соотношений

$$a_{i+1}=a_{i-1}-t_ia_i \text{ и } b_{i+1}=b_{i-1}+t_ib_i$$

следует, что

$$d_{i+1}=a_ib_{i+1}+a_{i+1}b_i=$$
$$=a_i\left(b_{i-1}+t_ib_i\right)+\left(a_{i-1}-t_ia_i\right)b_i=a_{i-1}b_i+a_ib_{i-1}=d_i.$$

Поэтому

$$a_0=a_0\cdot b_1+a_1\cdot b_0=d_1=d_2=\ldots=d_s=$$
$$=a_{s-1}b_s+a_sb_{s-1}=b_s,$$

что и требовалось доказать.

В.Быковский

М2100. *В угол с вершиной O вписаны две окружности ω_1 и ω_2. Луч с началом O пересекает ω_1 в точках A_1 и B_1, а ω_2 – в точках A_2 и B_2 так, что $OA_1<OB_1<OA_2<OB_2$ (рис.1). Окружность γ_1 касается внутренним образом окружности ω_1 и каса-*

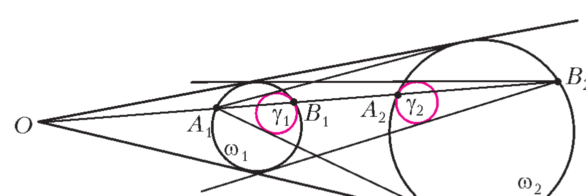


Рис. 1

тельных к ω_2*, проведенных из* A_1*. Окружность* γ_2 *касается внутренним образом окружности* ω_2 *и касательных к* ω_1*, проведенных из* B_2*. Докажите, что окружности* γ_1 *и* γ_2 *равны.*

Пусть радиусы окружностей $\omega_1, \omega_2, \gamma_1$ и γ_2 равны R_1, R_2, r_1 и r_2 соответственно. Из гомотетии h с центром O, переводящей ω_1 в ω_2, следует, что

$$\frac{A_2B_2}{A_1B_1} = \frac{R_2}{R_1}. \qquad (1)$$

В решении будем пользоваться известной теоремой *о трех гомотетиях*: композиция гомотетий с центрами O_1 и O_2 ($O_1 \neq O_2$) и коэффициентами k_1 и k_2 такими, что $k_1k_2 \neq 1$, является гомотетией с центром в точке на прямой O_1O_2 и коэффициентом k_1k_2.

Пусть C_1 – точка касания ω_1 и γ_1. Тогда композиция гомотетии с центром C_1, переводящей γ_1 в ω_1, и гомотетии h – это гомотетия h_1 с коэффициентом $\frac{R_2}{r_1}$, переводящая γ_1 в ω_2. Точка A_1 является центром гомотетии h_1, и по теореме о трех гомотетиях точки C_1, O и A_1 лежат на одной прямой. Это означает, что $C_1 = B_1$. Кроме того, из гомотетии h_1 получаем соотношение

$$\frac{A_1B_2}{A_1B_1} = \frac{R_2}{r_1}. \qquad (2)$$

Аналогично доказывается, что окружности ω_2 и γ_2 касаются в точке A_2 и что

$$\frac{A_1B_2}{A_2B_2} = \frac{R_1}{r_2}. \qquad (3)$$

Поделив соотношение (2) на равенства (1) и (3), получаем $\frac{r_2}{r_1} = 1$, что и требуется.

Замечание. К данной задаче можно свести следующую известную задачу об *арбелосе Архимеда*.

Задача. Пусть окружности ω_1 и ω_2 касаются окружности ω внутренним образом в диаметрально противоположных точках A и B и касаются друг друга внешним образом в точке C (рис.2). Пусть перпендикуляр к AB, проведенный через C, пересекает ω в точке D. Тогда окружности δ_1 и δ_2, вписанные в криволинейные треугольники ACD и BCD, равны.

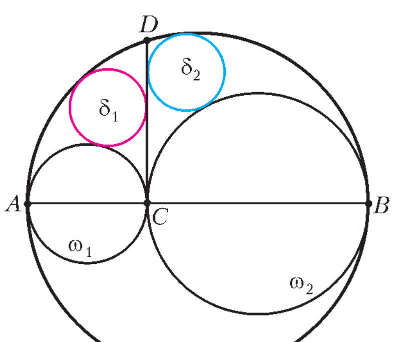


Рис. 2

Решение. Пусть δ_1 касается окружности ω_1 и прямой CD в точках K и L (рис. 3). Тогда, как известно (см., например, задачу М438 «Задачника «Кванта»), прямая BK является общей касательной к ω_1 и δ_1. Пусть BK пересекает CD в точке M. Впишем в угол BMC окружность γ_2, касающуюся MC в точке C. Из равенства касательных $MC = MK$ вытекает, что окружности δ_1 и γ_2, вписанные в вертикальные углы KML и BMC, равны. Из симметрии относительно диаметра AB следует, что γ_2 касается касательных к ω_1, проведенных из B. Аналогично, окружность γ_1, которая касается внутренним образом ω_1 и касательных к ω_2, проведенных из A, равна окружности δ_2. Но из задачи М2100 следует равенство окружностей γ_1 и γ_2.

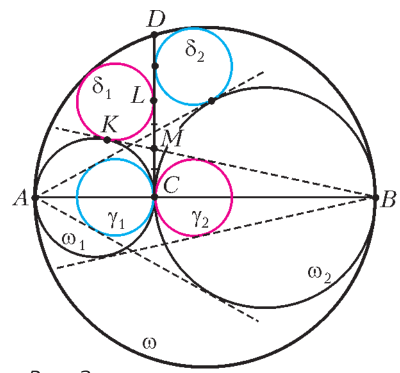


Рис. 3

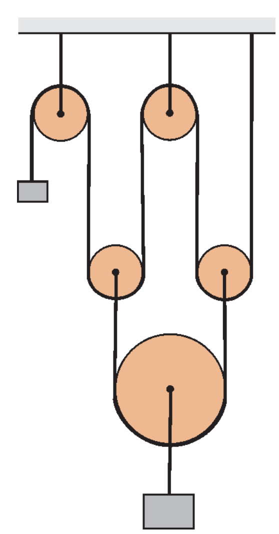
П.Кожевников

Ф2108. *Вдоль оси X движется точка. В пределах заданной дистанции скорость точки обратно пропорциональна расстоянию от нее до начала координат. Во сколько раз больше времени она тратит на прохождение второй дистанции по сравнению с первой?*

Движение точки не равноускоренное, готовых формул тут нет. Но можно решить задачу совсем просто. Построим график зависимости величины $1/v$ (обратной скорости) от координаты x – получится прямая. Площадь под этой прямой, точнее – под участком графика между координатами x_1 и x_2, есть время движения от x_1 до x_2. Это легко доказать, но достаточно просто и сообразить. Получается отношение нужных нам площадей 3:1. Итак, время прохождения второй половины дистанции втрое больше, чем первой.

А.Простов

Ф2109. *В системе, изображенной на рисунке, большой груз вдвое тяжелее малого. Блоки одинаковые, очень легкие. Нити нерастяжимые, массы нитей пренебрежимо малы, свободные куски нитей вертикальны. Найдите ускорение большого груза.*



Обозначим натяжение верхней нити T. Тогда на нижний груз массой $2M$ действует сила натяжения $4T$. Малые подвижные блоки имеют одинаковые ускорения – блоки одинаковые, силы одинаковые (впрочем, можно считать их ускорения и не одинаковыми, решение будет более громоздким, но ответ не изменится). Если обозначить эти ускорения буквой a, то ускорение нижнего груза тоже будет равно a, а ускорение верхнего груза массой M составит $4a$ и будет направлено вверх. Может быть, при решении ускорение получится отрицательным – там будет видно...

Теперь запишем уравнения динамики для обоих грузов:

$$T - M \cdot g = M \cdot 4a, \quad 2M \cdot g - 4T = 2M \cdot a.$$

Решая эту простую систему, получим

$$a = -\frac{g}{9}.$$

И в самом деле ускорение отрицательное.

Итак, ускорение большого груза направлено вверх и составляет по величине $g/9$.

А.Повторов

Ф2110. *Яма имеет полусферическую форму, ее радиус R = 1 м, стенки гладкие. На уровне горизонтального диаметра приклеено очень маленькое тело. Оно отклеивается и начинает скользить вниз без начальной скорости. Внизу небольшой кусочек поверхности шероховатый, коэффициент трения там $\mu = 0{,}1$, шероховатый кусочек имеет форму круга, его радиус r = 1 см, центр круга находится около самой нижней точки поверхности ямы. Какая часть начальной потенциальной энергии тела выделится при первом преодолении шероховатого кусочка?*

Скорость тела перед шероховатым кусочком внизу – он совсем мал, поэтому разность высот примем равной радиусу сферы R – равна

$$v = \sqrt{2gR}.$$

Тогда сила нормальной реакции составляет

$$N = mg + \frac{mv^2}{R} = 3mg.$$

Сила трения практически постоянна:

$$F_{\text{тр}} = \mu N = \mu \cdot 3mg,$$

и потери энергии равны

$$\Delta W = F_{\text{тр}} \cdot 2r = 6\mu mgr.$$

Доля потерь составляет

$$\delta = \frac{\Delta W}{W} = \frac{6\mu mgr}{mgR} = 0{,}6\%.$$

Приближения оправданы.

Р.Теплов

Ф2111. *В сосуде находится смесь одинаковых масс криптона и гелия при давлении 1 атм и температуре 300 К. Проследим за одним атомом криптона. Оцените число его соударений с другими частицами за 1 час.*

Атомы криптона намного тяжелее атомов гелия, поэтому при расчете ударов можно учитывать только соударения атомов криптона с атомами гелия. (Удары атомов криптона о стенки и друг о друга происходят гораздо реже, мы их просто не будем учитывать – в рамках очень приближенной модели соударений частиц это вполне допустимо.) Итак, мы должны посчитать удары тяжелых частиц о легкие, однако намного понятнее, как посчитать число ударов легких частиц о тяжелые (это те же самые удары!). При расчете будем считать тяжелые частицы неподвижными – тогда нужно просто найти боковую поверхность этой (тяжелой) частицы и считать удары так же, как считают удары о стенки сосуда.

Примем диаметр атома криптона равным 0,6 нм, диаметр атома гелия 0,2 нм (эти данные легко найти в справочниках, можно поискать их в Интернете – я там их нашел за 3 минуты). В таком случае площадь поверхности одного атома криптона примерно равна $S = 1 \cdot 10^{-18}$ м^2. В задаче не задан объем сосуда – это, может быть, ошибка, ведь при достаточно большом интервале времени (а 1 час – это большой интервал, за это время атомы успеют многократно побывать во всех местах сосуда, а не только в какой-то малой его части, определяемой скоростями частиц и длиной свободного пробега) объем сосуда нам может понадобиться. Зададим объем сосуда самостоятельно – возьмем, скажем, 1 л. Количество частиц в сосуде найдем обычным способом: $N = N_{\text{A}} pV/(RT) = 2{,}4 \cdot 10^{22}$, при этом концентрация частиц получится $n = 2{,}4 \cdot 10^{25}$ $1/\text{м}^3$. При равных массах газов на долю тяжелого криптона приходится примерно $1/22$ общего количества атомов, т.е. примем число атомов криптона равным $1 \cdot 10^{21}$. Теперь подсчитаем (очень приблизительно!) число ударов:

$$N_{\text{уд}} = 0{,}5 nSv_x\tau = 0{,}5 \cdot 2{,}4 \cdot 10^{25} \cdot 1 \cdot 10^{-18} \cdot 8 \cdot 10^2 \cdot 3600 = 3{,}5 \cdot 10^{14},$$

где $v_x = 8 \cdot 10^2$ м/с – соответствующая проекция скорости для атомов гелия при этой температуре.

Проверим – а нужно ли было задавать объем сосуда? Можно провести расчет для сосуда побольше, например для 1000 л, получится практически то же число ударов! Проверим теперь формулы – объем сосуда там сокращается:

$$N_{\text{уд}} = 0{,}5 \frac{p}{kT} S \sqrt{\frac{RT}{\text{M}}}\, \tau$$

(здесь M – молярная масса гелия). Действительно, в эту формулу объем сосуда не входит.

Можно было и сразу догадаться написать общую формулу и увидеть все, а можно было вот так – методом проб и без ошибок.

З.Рафаилов

Ф2112. *Давление разреженного газа в сосуде убывает от 1 атм до 0,2 атм при увеличении объема от 2 л до 20 л, при этом зависимость давления от объема линейная. Найдите максимальную температуру газа в этом процессе. Минимальная температура газа в процессе 200 К.*

Ясно, что минимальная температура получится на одном из концов отрезка прямой, который изображает процесс на pV-диаграмме. Сравнивая произведения pV, найдем, что минимальная температура соответствует давлению 1 атм и объему 2 л. Можно брать эти величины в любых единицах, мы будем только сравнивать эти произведения. Итак, температура 200 К соответствует произведению $2\ \text{атм} \cdot \text{л}$.

Продолжим отрезок до пересечения с осями диаграммы – получим давление $49/45$ атм при нулевом объеме и объем $49/2$ л при нулевом давлении. Максимальная температура соответствует середине этого расширенного отрезка:

$$\frac{T_{\max}}{T_{\min}} = \frac{(49/90)(49/4)}{2}, \text{ и } T_{\max} = \frac{49 \cdot 49 \cdot 200}{90 \cdot 4 \cdot 2}\ \text{К} \approx 667\ \text{К}.$$

А.Повторов

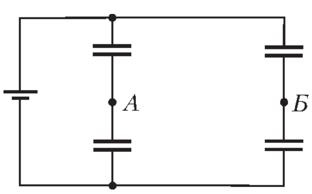
Ф2113. *Вольтметр и миллиамперметр соединены последовательно и подключены к батарейке, при этом приборы показывают 6,1 В и 1 мА. Параллельно миллиамперметру подключают второй вольтметр – показания первого вольтметра увеличиваются до 6,3 В, а второй вольтметр (он того же типа, что и первый) показывают 0,4 В. Какой ток теперь течет через миллиамперметр? Батарейку можно считать идеальной.*

Ток через вольтметр пропорционален напряжению, которое он показывает. При напряжении 6,1 В ток через первый вольтметр был равен 1 мА, тогда для искомого тока можно записать

$$I = 1\ \text{мА}\,\frac{6{,}3\ \text{В}}{6{,}1\ \text{В}} - 1\ \text{мА}\,\frac{0{,}4\ \text{В}}{6{,}1\ \text{В}} \approx 0{,}97\ \text{мА}\,.$$

Р.Александров

Ф2114. *В схеме, изображенной на рисунке, три конденсатора одинаковые и имеют емкость C каждый, а один имеет втрое большую емкость. Между точками А и Б включают катушку индуктивностью L. Найдите максимальное значение силы тока через катушку. Батарейка имеет напряжение U.*



Пусть, для определенности, конденсатор емкостью $3C$ находится внизу справа. Энергию конденсаторов до подключения катушки легко найти: общая емкость системы $C_1 = 5C/4$ и энергия

$$W_1 = \frac{C_1U^2}{2} = \frac{5}{8}CU^2\,.$$

После подключения катушки по ней начинает течь ток, заряды конденсаторов меняются, ток течет и через батарейку – в балансе энергий нужно учитывать и ее работу. При максимальном токе через катушку ЭДС индукции нулевая, нижние конденсаторы соединены параллельно, верхние – тоже. Полная емкость при этом $C_2 = 4C/3$, энергия конденсаторов

$$W_2 = \frac{C_2U^2}{2} = \frac{2}{3}CU^2\,.$$

Батарейка «протолкнула» дополнительный заряд $q = (C_2 - C_1)U = CU/12$ и совершила работу

$$A = qU = \frac{1}{12}CU^2\,.$$

Максимальный ток катушки найдем из баланса энергий:

$$\frac{LI^2}{2} = A - (W_2 - W_1) = \frac{1}{24}CU^2\,,\ \text{и}\ I = \frac{U}{2}\sqrt{\frac{C}{3L}}\,.$$

А.Мостиков

Ф2115. *Катушка индуктивностью L = 2 Гн и резистор сопротивлением R = 100 Ом соединены параллельно. В некоторый момент к этой цепочке подключают источник постоянного тока силой I_0 = 3 А («источник постоянного тока» создает в нагрузке постоянный по величине ток, не зависящий от свойств нагрузки). Найдите количество теплоты, которое выделится в резисторе за большое время.*

Сразу после подключения источника ток через катушку не течет, весь ток I_0 протекает через резистор. Затем ток через катушку понемногу увеличивается, спустя очень большое время после подключения ток через резистор станет пренебрежимо малым, а ток через катушку практически достигнет величины I_0.

Обозначим ток через резистор I – это функция времени, тогда ток через катушку $I_L = I_0 - I$. Напряжение резистора равно величине ЭДС индукции:

$$-L\frac{\Delta I_L}{\Delta t} = RI\,,\ \text{или}\ L\Delta I = RI\Delta t\,.$$

Умножим обе части этого уравнения на величину I – мы хотим получить в правой части количество теплоты, выделившееся в резисторе за малый интервал времени Δt. В левой части получается выражение, которое легко преобразовать (учитывая малость Δt):

$$LI\Delta I = L\Delta\left(\frac{I^2}{2}\right).$$

Суммируя полученные слева и справа малые «дольки», получим в левой части произведение индуктивности на разность квадратов токов через катушку в конце и в начале процесса, а в правой части – суммарное количество теплоты Q, выделившееся в резисторе. Тогда окончательно

$$Q = \frac{LI_0^2}{2} = 9\ \text{Дж}\,.$$

З.Катушкин

Ф2116. *Вдоль прямого участка дороги стоят люди – они встречают дорогого гостя из далекой страны. Интервал между встречающими составляет 0,5 м. Один из встречающих делает шаг в сторону и тут же возвращается на место. Через 2 с то же самое делает его сосед справа, и так далее. С большой высоты кажется, что вдоль шеренги бежит волна. Определите скорость этой волны и ее длину.*

Фронт этой волны проходит расстояние 0,5 м за 2 с – скорость волны получается 0,25 м/с. А вот длину волны найти не получится – колебания в этой волне не гармонические. Можно их представить в виде суммы гармонических волн разных длин – «гармоник». Длина самой длинноволновой гармоники окажется равной расстоянию между соседями в ряду, т.е. 0,5 м.

А.Гостев

Ф2117. *До сих пор любители высококачественного звучания используют усилители звуковой частоты на электронных лампах – они уверены, что качество звучания музыки в этом случае намного лучше, чем при использовании транзисторов (автор задачи не разделяет их уверенности). Рассмотрим практический случай: громкоговоритель имеет сопротивление 4 Ом и для его подключения к усилителю требуется понижающий трансформатор. Выходной каскад усилителя низкой частоты (УНЧ) содержит одну мощную электронную лампу – ее анодный ток может* *быть в пределах от 20 до 100 мА, напряжение на аноде этой лампы при таких изменениях анодного тока должно находиться в пределах от 40 до 300 В. Какая «выходная мощность» может быть у такого усилителя? Каков должен быть коэффициент трансформации у выходного трансформатора для получения этой мощности?*

Если подключить громкоговоритель прямо в анодную цепь, то звуковая мощность получится совсем малой. Если, как обычно делается, оценивать эту мощность на гармоническом, синусоидальном сигнале – на вход усилителя от генератора низкой частоты подается синусоидальный сигнал (как правило, используют сигнал с частотой 1000 Гц – впрочем, это не принципиально). Для того чтобы искажения усиливаемого сигнала не были недопустимо большими, удвоенная амплитуда тока в анодной цепи должна укладываться в диапазон токов 20 – 100 мА (при сопротивлении громкоговорителя 4 Ом в диапазон допустимых напряжений мы заведомо укладываемся), т.е. амплитуда тока через громкоговоритель не должна превышать примерно 28 мА. Это дает «выходную» мощность

$$P = 0,5 \cdot (0,028)^2 \cdot 4 \text{ Вт} = 1,6 \cdot 10^{-3} \text{ Вт}.$$

Малость этой величины связана с тем, что мы не используем возможного «размаха напряжения». Включим громкоговоритель через понижающий трансформатор с отношением числа витков первичной обмотки к числу витков вторичной обмотки n. В этом случае напряжение на громкоговорителе уменьшится в n раз, а ток возрастет во столько же раз – по сравнению с величинами в анодной цепи. Для удвоенных максимальных амплитуд тока и напряжения получим простое соотношение, откуда найдем n:

$$80 \cdot 10^{-3} \cdot n = \frac{260}{n}, \quad n^2 = \frac{260}{80 \cdot 10^{-3}} = 3250, \; n = 57.$$

Именно таким должен быть коэффициент трансформации у выходного трансформатора. В этом случае выходная мощность получится

$$P' = \frac{80 \cdot 10^{-3} \cdot 260}{16} \text{ Вт} = 1,3 \text{ Вт}.$$

А.Зильберман

Интервью с А.Кузнецовым

(Начало см. на с. 24)

идти домой из школы, когда прибежал мой одноклассник, который сказал, что завтра будет районная олимпиада по математике и что мне туда обязательно надо пойти. Конечно, может быть, и без этого мне кто-нибудь позвонил бы и сообщил эту информацию, но может и нет. На районной олимпиаде я занял второе место, в результате чего получил приглашение на вступительные экзамены в 57-ю школу. Экзамены я успешно сдал и поступил в 8 класс. Эта школа многое мне дала. Во-первых, знания, которые мне очень помогли – например, за это время мы успели пройти почти полный курс первого года обучения на мехмате (и еще часть второго), что в дальнейшем позволило на первом курсе изучать более продвинутые вещи. Во-вторых, я познакомился со многими сверстниками, разделяющими мое увлечение математикой, а вместе учиться всегда легче. В-третьих, я увидел много замечательных людей среди учителей, которые стали для меня примером в дальнейшем (особенно здесь мне хотелось бы отметить моего учителя математики Рафаила Калмановича Гордина).

Следующее важное событие произошло так. Во время учебы в старших классах я исправно ходил на олимпиады (математические и физические). Очень больших успехов у меня там не было (максимальное достижение – третье место на городской олимпиаде), но общий уровень, видимо, был достаточно неплохим. Поэтому летом после окончания школы и после вступительных экзаменов в университет меня пригласили в летний лагерь Турнира городов. Летний лагерь – это замечательное мероприятие, придуманное (как и сам Турнир городов) Николаем Николаевичем Константиновым. Туда приглашаются школьники-старшеклассники, хорошо выступающие в олимпиадах, а также студенты-младшекурсники, хорошо выступавшие на олимпиадах в недавнем прошлом. Школьникам предлагаются задачи, которые они решают под руководством студентов. В этом лагере я познакомился с несколькими второкурсниками, которые мне в дальнейшем очень помогли. Игорь Пак и Саша Постников стали моими первыми соавторами, а статья, которую мы с ними через два года написали, была развитием задачи, которую я решал в этом лагере. А Сережа Архипов очень мне помог в дальнейшем обучении и в выборе научного руководителя. В частности, он мне посоветовал ходить на семинар Израиля Моисеевича Гельфанда, где я увидел много замечательных математиков (таких как Саша Бейлинсон, Витя Гинзбург, Боря Фейгин) и познакомился с Леней Посицельским. Ему, в тот момент третьекурснику, Гельфанд поручил обучать младшекурсников «математике», т.е. вещам, которые не входят в программу обучения на мехмате, но совершенно необходимы для научных исследований. Леня меня научил очень и очень многому. Уверен, что без его «спецкурсов» мне пришлось бы намного сложнее.

Самое большое влияние на меня, конечно же, оказал мой научный руководитель – Алексей Игоревич Бондал. И прежде всего следует сказать даже не о знаниях, которые я от него получил, а о способе мышления, умении широко и правильно взглянуть на поставленную задачу.

4. *Как много времени Вы уделяете профессиональной деятельности? Как используете компьютер?*

В идеале математик работает все время. На самом деле, если задача, которую вы решаете, вам интересна, то ваши мысли все равно вольно или невольно к ней возвращаются. Но в реальности, конечно, так не получается. Всегда находится множество дел, отвлекающих от работы. А компьютер для математика имеет второстепенное значение. Конечно, он незаменим для написания статей (раньше обходились бумагой и ручкой, но сейчас уже другие времена), а также для поиска и просмотра нужных статей и книг. Кроме того, некоторые математики используют компьютер для вычислений.

5. *Какие у Вас увлечения помимо математики?*

Во время учебы в школе и университете я регулярно ходил в походы. Сейчас у меня редко возникает такая возможность, но если удается, я с удовольствием ею пользуюсь.

Мы поздравляем Александра Геннадьевича и желаем ему новых ярких математических открытий!

Так как катодные лучи несут заряд отрицательного электричества, они отклоняются электростатической силой, как если бы они были отрицательно наэлектризованы, и на них действует магнитная сила таким образом, как эта сила действовала бы на отрицательно наэлектризованное тело, движущееся по траектории этих лучей.

Джозеф Джон Томсон

...ко мне пришел страшно возбужденный Гейгер и сказал: «Нам удалось наблюдать α-частицы, возвращающиеся назад». Это было самым невероятным событием, которое мне пришлось пережить.

Эрнест Резерфорд

На снимках обнаруживались время от времени прямые пути частиц неизвестного происхождения, почти не отклоняемые магнитным полем, но по своему ионизирующему действию не отличающиеся сколько-нибудь от быстрых β-лучей.

Дмитрий Скобельцын

Такие устройства, как циклотрон и синхротрон, ускоряют частицу до высоких энергий, заставляя ее многократно проходить через сильное электрическое поле. А на своей орбите частицу удерживает магнитное поле.

Ричард Фейнман

А так ли хорошо знакомы вам частицы и поля?

Практически всякий раз фрагменты из работ выдающихся ученых, предваряющие очередной выпуск нашей рубрики, выстраиваются в своеобразный «краткий курс» истории того или иного физического направления. Нынешняя же тема оказалась настолько обширна и необъятна, что на нее нанизываются почти все ответвления современной физики, хронологическим рубежом которой называют самый конец XIX века, когда одно за другим последовали блестящие достижения – такие, как открытия электрона и радиоактивности.

Можно сказать, что обнаружение элементарных заряженных частиц – мельчащих структурных составляющих материи – словно подхлестнуло исследователей к дальнейшим поискам, сулившим совершенно новое представление об окружающем нас мире. Но не только: для изучения и управления микроскопическими «невидимками» потребовались такие хитрые сочетания полей, такая аппаратура, такие технологии, которые буквально на глазах стали менять производство и быт, энергетику и средства связи – одним словом, привели к промышленной и информационной революции, плоды которой мы пожинаем до сих пор.

Вот и сегодня, накануне запуска в Швейцарии самого крупного и самого мощного ускорителя элементарных частиц, когда-либо созданного разумом руками человека, мы ожидаем беспрецедентных открытий, развивающих, а, может быть, и переворачивающих наши знания о строении вещества и об устройстве Вселенной.

В расчете на то, что и на вашу долю достанется еще немало сложных и интересных проблем, касающихся частиц и полей, начнем с более простых, но не менее увлекательных задач.

Вопросы и задачи

1. Почему в комнатных условиях, даже при всех мерах предосторожности, электроскоп обязательно разрядится?

2. Металлический незаряженный диск приводится в быстрое вращение. Электрометр, присоединенный с помощью контактов к центру и к периферии диска, показывает, что между ними возникла разность потенциалов. Каков ее знак?

3. Какую траекторию опишет электрон, пролетая между пластинами плоского конденсатора, на которые подано: а) постоянное напряжение; б) переменное напряжение достаточно высокой частоты?

4. Две пересекающиеся плоскости равномерно заряжены отрицательным зарядом. В некоторой точке между плоскостями помещен радиоактивный источник. Что представляют собой траектории движения положительно и отрицательно заряженных частиц, испускаемых источником?

5. При отсутствии внешнего электрического поля электроны, вылетающие из катода вакуумного диода, не рассеиваются в окружающем пространстве, а большей частью возвращаются на поверхность катода. Чем это можно объяснить?

6. Скорость движения электронов между электродами вакуумного диода достигает тысяч километров в секунду, а в металлических проводниках анодной цепи – миллиметров в секунду. Одинаковы ли силы тока в диоде и в проводниках?

7. Коллимированный пучок заряженных частиц, т.е. пучок, в котором все частицы имеют одно и то же направление скорости, под влиянием кулоновских сил постепенно расходится. Как зависит этот эффект от скорости частиц?

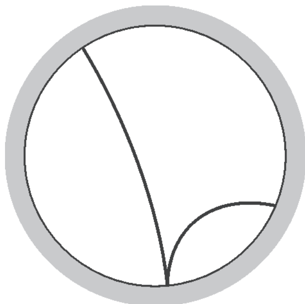
8. От каких характеристик частицы зависит форма ее траектории при движении в гравитационном поле, электрическом поле, магнитном поле?

9. Как будет изменяться радиус траектории заряженной частицы, движущейся по окружности в однородном магнитном поле, с увеличением ее удельного заряда?

10. По длинному прямому металлическому проводу течет электрический ток. Можно ли избавиться от его магнитного поля, устремившись вдоль провода со скоростью, равной средней скорости упорядоченного движения электронов в нем?

11. Почему частица, обращающаяся в неоднородном магнитном поле, «отражается» от области, где индукция этого поля увеличивается?

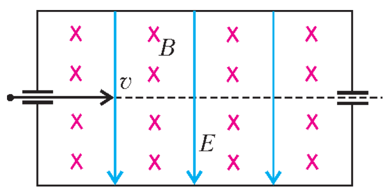
12. Можно ли считать дугой окружности траекторию движения заряженных частиц, влетевших в камеру



Вильсона перпендикулярно линиям однородного магнитного поля?

13. На рисунке представлены следы электрона и позитрона, полученные в камере Вильсона, находившейся в магнитном поле, направленном от читателя перпендикулярно рисунку. Какой из следов принадлежит электрону, а какой – позитрону? Какая частица имеет бо́льшую кинетическую энергию?

14. Увеличение скорости заряженных частиц в циклотроне осуществляется исключительно за счет воздействия на частицы электрического поля. Зачем же утяжеляют и удорожают эти установки, заботясь о действии на частицы еще и магнитного поля?



15. Как действует изображенный на рисунке «фильтр скоростей»? Внутри прибора созданы однородные электрическое и магнитное поля, направленные перпендикулярно друг к другу и к начальной скорости частиц.

16. Почему в Канаде северные сияния бывают чаще, чем в Сибири, расположенной на той же географической широте?

17. Для инициирования ядерных реакций деления чаще всего используется бомбардировка ядер нейтронами. А почему для этой цели менее пригодны, скажем, протоны или электроны?

Микроопыт

Наклейте на обычную осветительную лампу полоску металлической фольги и присоедините ее проводком к электроскопу. Зарядите электроскоп положительно и включите ток в лампе. Повторите опыт, зарядив электроскоп отрицательно. Чем объяснить, что в первом случае при включении тока листки электроскопа спадают, а во втором – нет?

Любопытно, что…

…знаменитым опытам Дж.Дж.Томсона с катодными лучами предшествовала почти сорокалетняя работа физиков разных стран по изучению электрического разряда в разреженных газах. Считалось, что эти лучи – либо поток молекул, зарядившихся отрицательно при столкновении с катодом, либо новый вид электромагнитных волн, отклоняющихся, в отличие от обычного света, магнитным полем. Лишь Томсону в длинной серии экспериментов удалось добыть к 1897 году решающие доказательства того, что катодные лучи состоят из электронов. Так была открыта первая элементарная частица.

…задача по определению заряда и массы α- и β-частиц, возникшая сразу после обнаружения радиоактивности, привела со временем к созданию масс-спектрографов – приборов, использующих электрическое и магнитное поля для измерения масс мельчайших ионов. Первый из них был построен в 1919 году Фрэнсисом Астоном, учеником Дж.Дж.Томсона, открывшего за семь лет до этого события существование изотопов.

…вращение заряженных частиц в магнитном поле открыл еще в 1895 году английский физик Джозеф Лармор. В дальнейшем идея удержания частиц с помощью этого поля была очень хорошо отработана при создании ускорителей – в них частицы совершают миллионы оборотов по круговой орбите и могут жить на ней многие часы. А вот проблему магнитного удержания – изоляции – высокотемпературной плазмы в термоядерных реакторах не удалось еще окончательно решить.

…применение магнитных полей с определенными сложными конфигурациями в опытах на ускорителях позволяет фокусировать пучки частиц подобно тому, как оптические линзы фокусируют световые лучи.

…открытые в 1910 году космические лучи стали интенсивно изучаться в том числе и с помощью камеры Вильсона, помещенной в магнитное поле. Именно она позволила наблюдать аномальные следы, приведшие к обнаружению в 1932 году позитрона – «электрона с положительным зарядом».

…в отличие от переменных потоков солнечных космических лучей, галактические и метагалактические лучи – это мало изменяющиеся во времени потоки атомных ядер. Самая важная их особенность – энергия частиц, достигающая 10^{21} эВ, что на несколько порядков выше энергий, получаемых на рукотворных установках. Таким образом, Вселенная оказываеся как бы гигантским ускорителем атомных ядер.

…в 1985 году с острова Керселен в Индийском океане стартовала геофизическая ракета с небольшим ускорителем частиц. На определенной высоте он испустил поток электронов, в дальнейшем двигавшихся вдоль линии земного магнитного поля и вызвавших искусственное полярное сияние над Архангельской областью. Эти эксперименты предназначались для изучения механизма возникновения северных сияний, структуры магнитного поля Земли, процессов в ее ионосфере и их влияния на погоду.

…о масштабах современных исследований в физике элементарных частиц можно судить по параметрам Большого адронного коллайдера, готовящегося к пуску в Женеве. Периметр его кругового туннеля, залегающего на глубине примерно 100 метров под землей, составляет 27 километров; сверхпроводящие магниты разгонят протоны до энергии 7 ТэВ и затем будут сталкивать их друг с друг с частотой 800 миллионов раз в секунду; в планировании и финансировании строительства коллайдера приняли участие более двух десятков стран, в числе которых и Россия.

Что читать в «Кванте»о частицах и полях

(публикации последних лет)

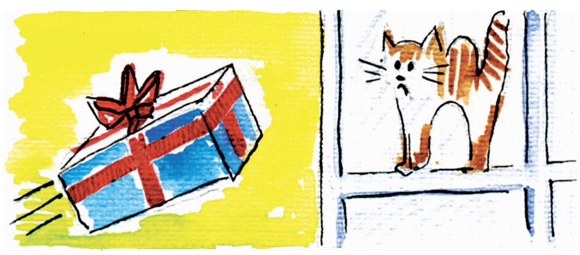
1. «Следы в камере» – 2003, № 3, с. 40;
2. «Магнитное поле» – 2004, № 4, с. 47;
3. «Калейдоскоп «Кванта» – 2005, № 1, с. 32;
4. «Заряженные частицы в магнитном поле» – 2006, № 4, с. 40;
5. «Движение заряда в магнитном поле» – 2007, № 5, с. 42;
6. «Потенциальная энергия кулоновского взаимодействия» – 2008, № 5, с. 47.

Материал подготовил А.Леонович

Задачи

1. Назовем кирпичом прямоугольный параллелепипед, у которого длина, ширина и высота различны. Можно ли поверхность какого-нибудь кирпича оклеить без перекрытий пятью бумажными квадратами? (Квадраты разрешается перегибать через ребра, размеры их не обязательно одинаковы.)

А.Шаповалов

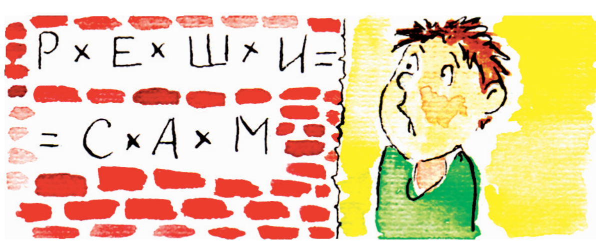


2. Может ли быть верным равенство

$$Р \times Е \times Ш \times И = С \times А \times М,$$

если в нем каждая буква заменяет некоторую цифру, причем разные буквы заменяют разные цифры?

Ю.Эвнин



3. Десять точечных кузнечиков сидят на столе, образуя некоторую фигуру. Известно, что каждый из кузнечиков может отдельно от остальных перепрыгнуть из начального положения на некоторое новое место (а другие при этом останутся неподвижными) так, что снова получится та же самая фигура (только, возможно, по-другому расположенная). Как такое может быть?

Фольклор

4. В кинотеатре «Будь здоров!» 20 рядов по 25 мест в каждом и все места заняты. В кинотеатре принято правило: если зритель чихнет во время сеанса, то он должен отдать каждому из своих соседей по рублю. Вначале у всех было одинаковое количество денег. Дима чихнул и расплатился. Какое наименьшее число раз должны еще чихнуть зрители, чтобы у всех снова стало поровну денег? (Соседями считаются сидящие спереди, сзади, слева и справа, у каждого зрителя может быть от двух до четырех соседей.)

Д.Калинин

5. У меня есть двое электронных часов — наручные и настенные, идут они всегда правильно (время показывают цифрами). Стоя у зеркала, я взглянул на наручные часы — было 12:05. Я перевел взгляд на

зеркало: в нем отражались и наручные, и настенные часы, но показывали они в зеркале разное время и ни одно не совпадало с реальным. Как такое могло быть?

А.Толпыго

Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6 – 8 классов.

Иллюстрации Д.Гришуковой

Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»

Мы завершаем очередной конкурс по решению математических задач для учащихся 6–8 классов. Решения задач высылайте в течение месяца после получения этого номера журнала по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» или по электронному адресу: math@kvant.info ***(с пометкой «Конкурс «Математика 6–8»). Не забудьте указать имя, класс и домашний адрес.***

Как и прежде, мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и математических кружков. Руководителей кружков просим указать электронный адрес или контактный телефон. По традиции, кружки-победители заочного конкурса приглашаются на финальный очный турнир.

16. Можно ли отметить несколько клеток на поверхности кубика Рубика $3\times3\times3$ так, чтобы на каждом кольце из 12 клеток, опоясывающем кубик, было отмечено ровно по 5 клеток?

А.Грибалко

17. В треугольном парке есть три дорожки: синяя, зеленая и красная. Каждая дорожка делит парк на две части равной площади. Вместе дорожки делят парк на 7 частей: четыре «треугольных» и три «четырехугольных» (рис.1). Может ли так быть, что из двух частей, примыкающих к одной и той же стороне парка, «четырехугольная» всегда не меньше по площади, чем «треугольная»?

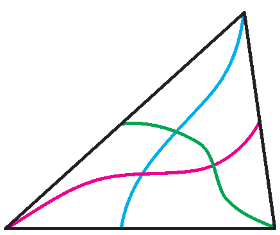


Рис. 1

Г.Гальперин

18. Дан восьмиугольник «лесенка» (рис.2). Можно ли из нескольких одинаковых «лесенок» сложить восьмиугольник той же формы, но большего размера?

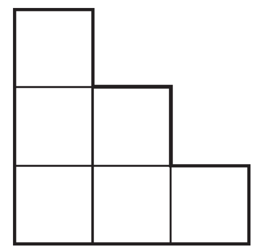


Рис. 2

С.Маркелов

19. Имеются 1000 бутылок с вином, в одной из них вино испорчено. Имеются также 10 белых мышей, с помощью которых нужно обнаружить плохое вино. Если мышь выпьет плохого вина, ровно через 10 минут она приобретет яркую фиолетовую окраску. Разрешается накапать вина из разных бутылок каждой мыши и дать им выпить одновременно, а потом ждать. Придумайте способ, позволяющий через 10 минут и 1 секунду определить бутылку с испорченным вином.

Г.Гальперин

20. Положительные числа a и b удовлетворяют равенству $a+b+1=3ab$. Докажите, что $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq 2$.

Р.Пиркулиев

Математическая сказка

У царя-бюрократа подданные объединяются в тайные общества. Каждое подмножество подданных рассматривается как тайное общество. Для эффективного контроля царь хочет, чтобы на каждое тайное общество кто-то доносил. Однако каждый в состоянии писать доносы только на одно тайное общество. Докажите, что царю для этой цели не хватит людей, даже если население страны бесконечно.

Решение. Назовем человека *порядочным*, если он доносит только на то тайное общество, членом которого он не состоит.

Порядочные люди существуют. Иначе каждому пришлось бы доносить на общество, состоящее только из него самого (любой, кто доносит на общество, состоящее из единственного другого гражданина, порядочен по определению). Такая ситуация не только противоречит здравому смыслу, но и невозможна математически – другие подмножества окажутся неохваченными.

Кто доносит на множество всех порядочных людей?

Если он порядочен, то он доносит на общество, членом которого состоит, т.е. непорядочен. Если же он непорядочен, то он доносит на общество, членом которого не является, – т.е. порядочен. Противоречие.

Сказка – ложь, да в ней намек: множество всех подмножеств любого множества имеет большую мощность, чем исходное множество.

Замечание. Если подданных не больше одного, то затея царя не осуществится, если для полноты отчетности он будет требовать, чтобы доносили и на пустое множество.

И.Рубанов, А.Канель-Белов

Абу-л-Вафа и циркуль постоянного раствора

Г.ФИЛИППОВСКИЙ

Математик и астроном из Хорасана (Иран) Абу-л-Вафа (940–998) с 20 лет жил и работал в Багдаде – крупнейшем научном центре арабского халифата. Он написал руководство по практической арифметике, в котором показал, как работать с обыкновенными дробями, и первым в Багдаде стал использовать отрицательные числа. Абу-л-Вафа написал комментарии к Евклиду, Птолемею, Диофанту. В своих астрономических трудах он впервые пользуется секансом и косекансом, составляет более точные таблицы синусов, тангенсов и котангенсов, доказывает теорему синусов.

Что касается геометрии, то здесь Абу-л-Вафа пишет оригинальное сочинение: «Книга о том, что необходимо ремесленнику из геометрических построений». В ней он приводит разнообразные построения, применявшиеся в архитектуре, технике, землемерии. Одна из глав книги посвящена решению задач на составление квадрата из нескольких квадратов. Вот пример такой задачи, носящей сегодня его имя:

Задача Абу-л-Вафы. *Способом разрезания составьте квадрат из трех данных равных квадратов.*

Решение. Возьмем два данных квадрата, разрежем их по диагонали. Полученные части приложим диагоналями к сторонам третьего квадрата $ABCD$ (рис.1,*а*). Поскольку $\Delta KTE = \Delta NTA$ – по стороне и двум углам (рис.1,*б*), – то треугольником KTE можно заполнить

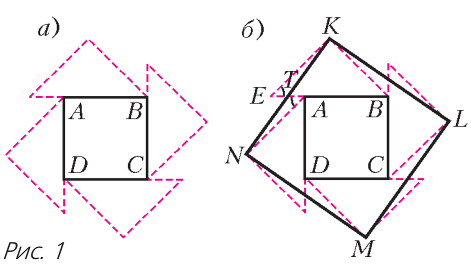


Рис. 1

пустоту на месте треугольника NTA. Выполнив аналогичные операции еще три раза, получим квадрат $KLMN$.

Однако наибольший интерес для нас в геометрии представляют задачи Абу-л-Вафы на построение, в которых, помимо линейки, используется циркуль постоянного раствора («заржавленный» циркуль, как позже скажет Леонардо да Винчи). Циркулем постоянного раствора пользовались и в Индии, и в Древней Греции. Это было обусловлено тем, что при измерениях на местности часто неудобно (или даже невозможно) проводить окружности разных радиусов.

Тем не менее, именно Абу-л-Вафа впервые систематизировал задачи с циркулем постоянного раствора, поместив в своей книге по практической геометрии около 15 таких задач. О некоторых из них мы и поведем дальнейший рассказ, где наряду с решениями Абу-л-Вафы будут представлены более поздние и даже современные решения. Все следующие задачи выполняются с помощью линейки и циркуля постоянного раствора, равного R.

Задача 1. *Через данную точку K проведите прямую, параллельную к прямой l (рис.2).*

Решение. На прямой l дважды отложим отрезки, равные R ($AB = BC = R$). Порядок дальнейших операций укажем лишь цифрами (так, на первом шаге проводим прямую AK, на втором – проводим через точку C произвольную прямую, пересекающуюся с AK, и так далее). KN – искомая прямая (почему?).

Задача 2. *Разделите данный отрезок: а) пополам;*

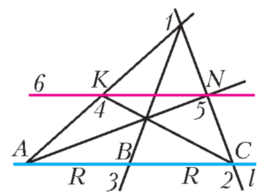


Рис. 2

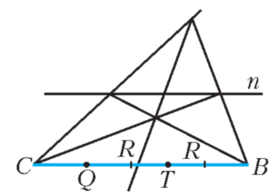


Рис. 3

б) на n равных частей; в) в отношении $m:n$.

Решение. а) Пусть дан отрезок BC. Отложив на прямой BC два отрезка, равных R ($BT = TQ = R$), проведем прямую $n \parallel BC$, как мы делали это в задаче 1 (рис.3). Затем, как и в задаче 1, воспользуемся **леммой о трапеции**: *середины оснований трапеции, точка пересечения диагоналей и точка пересечения продолжений ее боковых сторон лежат на одной прямой.*

б) Пусть, например, $n = 5$. Проведем произвольный луч f, выходящий из точки C. Отложим на луче f пять отрезков, равных R (рис.4). Соединим последнюю точку деления E с B. Проведя через точки деления F, G, K, N прямые, параллельные BE, получим требуемое. Таким образом, построение совпадает с классическим.

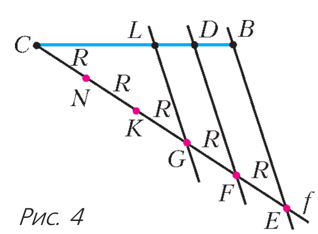


Рис. 4

в) Как и в пункте б), откладываем на луче f отрезок R всего $m + n$ раз. Например, на рисунке 4 показано, как разделить BC в отношении 3:2 и 4:1.

Задача 3. *Постройте биссектрису угла.*

Решение. Решение показано на рисунке 5.

Задача 4. *Постройте угол, равный данному углу BAC.*

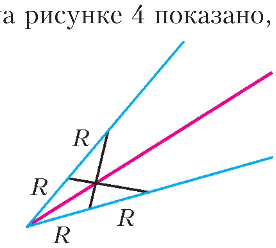


Рис. 5

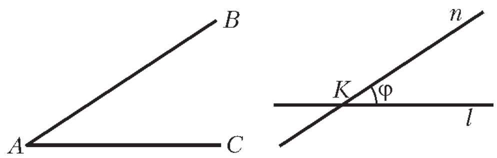


Рис. 6

Решение. Через произвольную точку K проводим $n \parallel AB$ и $l \parallel AC$ согласно задаче 1 (рис.6). Очевидно, что $\varphi = \angle BAC$.

Задача 5. *Из точки T вне прямой l проведите перпендикуляр к l, а из точки K, лежащей на прямой l, восставьте перпендикуляр к l.*

Решение. Строим на прямой l отрезки $AB = BC = CD = R$ (рис.7). Окружности с центрами в B и C пересекаются в точках E и F. Нетрудно показать, что $EF \perp l$ (покажите!). Тогда остается через точки T и K провести прямые параллельно EF (задача 1).

Задача 6. *Постройте центр данной окружности ω, радиус которой больше R.*

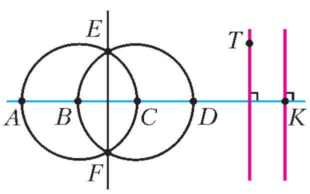


Рис. 7

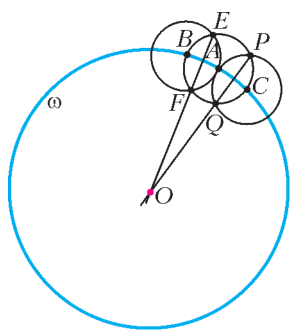


Рис. 8

Решение. Из произвольной точки A на ω строим окружность радиуса R. Она пересекает ω в точках B и C (рис.8). Из B и C как из центров строим такие же окружности. Пусть равные окружности попарно пересекаются в точках E и F, P и Q. Остается доказать, что прямые EF и PQ пересекаются в центре O окружности ω (докажите!).

Задача 7. *На данной прямой l отложите отрезок, равный данному отрезку BC.*

Решение. Через C проводим произвольную прямую f, не параллельную l. Пусть она пересекает l в точке D (рис.9). Через D проводим прямую, параллельную BC, а через B – параллельную f (задача 1). При этом $DT = BC$ ($BCDT$ – параллелограмм). Далее строим биссектрису $\angle TDQ$ (задача 3). Из T проводим к ней перпендикуляр TN (задача 5), который при продолжении пересекает l в точке K. Очевидно, $DK = DT = BC$.

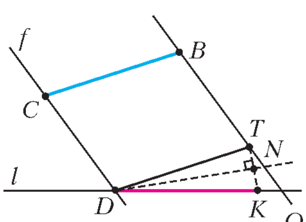


Рис. 9

Задача 8. *На данном отрезке BC постройте правильный треугольник ABC.*

Решение. Строим равносторонние треугольники BEF и CNK со стороной R (рис.10). Прямые BF и CN пересекутся в искомой вершине A.

Задача 9. *В данный круг впишите: а) квадрат; б) правильный шестиугольник.*

Решение. а) Находим центр O данного круга (задача

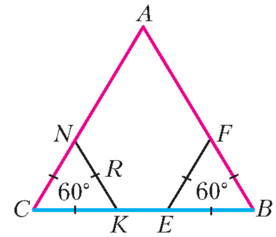


Рис. 10

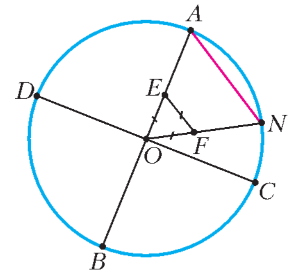


Рис. 11

6) и проводим произвольно диаметр AB (рис.11). Через O проводим перпендикуляр к AB, который пересекает окружность в точках C и D. Тогда $ACBD$ – квадрат, вписанный в данную окружность.

б) От точки O откладываем угол $60°$ (к отрезку AO) – например, построив равносторонний треугольник OEF со стороной R (рис. 11). Проведенный луч пересекает окружность в точке N. Тогда AN – сторона правильного шестиугольника. Дальнейшее построение проведите самостоятельно.

Задача 10. *В данный квадрат $ABCD$ впишите равносторонний треугольник BKN.*

Решение. На стороне CD квадрата строим равносторонний треугольник CED (задача 8), а на стороне AD – равносторонний треугольник AFD (рис.12). Прямые BE и BF в пересечении с AD и CD соответственно дадут недостающие вершины K и N равностороннего треугольника BKN (покажите, что $\angle ABK = \angle CBN = 15°$).

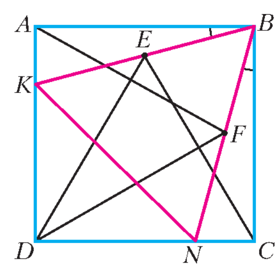


Рис. 12

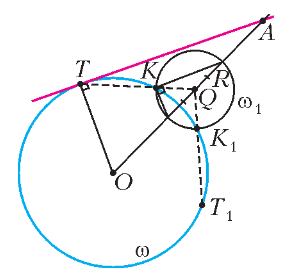


Рис. 13

Задача 11. *Из точки A вне окружности ω проведите касательную к ω.*

Решение. Находим центр O окружности ω (задача 6). Делим отрезок OA пополам (задача 2,а) – получаем точку Q (рис.13). Из точки Q как из центра радиусом, равным R, строим окружность ω_1. Пусть ω_1 пересекает ω в точках K и K_1. Прямые QK и QK_1 пересекут окружность ω в искомых точках касания T и T_1 (покажите это при помощи гомотетии).

Предложите способ построения касательной в случае, когда окружность ω_1 радиуса R с центром в Q не будет пересекать ω.

Задачи для самостоятельного решения

12. Удвойте данный отрезок.

13. На данном отрезке постройте: а) квадрат; б) правильный шестиугольник.

14. В данную оружность впишите правильные n-угольники: а) $n = 3$; б) $n = 8$; в) $n = 10$.

15. В данный равносторонний треугольник впишите квадрат.

Несколько рифмованных физических задач

В.АКИМОВ

Условия задач

1. Кораблик на реке

По реке плывет кораблик,
Он плывет издалека.
Вдруг порывом ветра сдуло
Бескозырку с моряка.

Четверть часа пролетело,
Пока в том разобрались
И с такой же быстротою
За фуражкой погнались.

Где догнать ее сумели?
Вот вопрос для знатока,
Если на четыре мили
Утекает в час река.

2. Спичка в руках

Разломишь спичку пополам,
Часть ты сломай опять.
Скажи же, почему трудней
Второй-то раз ломать?

3. Сизифов труд

Сизиф свой камень в гору тащит
Испокон, как водится.
Для него ведь никогда
Не будет безработицы.

Под камень он рычаг
подсунул:
Часть четвертую его.
Выиграл в три раза в силе.
Это вроде ничего!

С каким выигрышем будет,
Одолеет ли «врага»,
Если он теперь возьмется
За второй край рычага?

4. Клоун на канате

Ходит клоун по канату.
В руках держит
полбревна.
Для артиста что важнее –
Вес бревна или длина?

5. Мячик на горке

В горку мы катнули мячик.
Не поймем до сей поры:
Куда двигался он дольше –
В гору иль опять с горы?

6. Карандаш в графине

В графин с водою уронила
Карандаш Мальвина.
Карандаш не утонул,
Заметил Буратино.

Погрузился карандашик
На три четверти всего.
А теперь скажи, какая
Была плотность у него?

7. Ручной бегемот

Дело было в Африке,
рассказывал мне кто-то.
Может, где сейчас Тунис,
а может... где Лесото?
Собирал прежадный вождь подати с народа
С помощью священного ручного бегемота.

Приплывал на лодке он с весами и солдатом.
Народ уравновешивал бегемота златом.
Раскормил животное, и весы сломались.
Над жадностью правителя люди посмеялись.

Тут взбесился вождь. Обязал солдата,
Чтоб отмерил дань воин до заката!
На сложное задание хватило простоты.
А как же в этом случае поступил бы ты?

8. Клад в кувшине

Плакал в лодке рыбак, что
удачи все нет,
Бросил на воду взгляд свой
сконфуженный.
Вдруг увидел на волнах
какой-то предмет
Почти полностью в воду
погруженный.

В реку бросился он,
весь промок и продрог.
Скоро в лодку поднял
из пучины
С печатью сургучной
на пробке кувшин
Трехлитровый,
старинный, из глины.

Распечатав кувшин,
наш герой обомлел,
Душа пела как тысяча дудок –
«Золотые» катились. Отныне семья
Не уснет на голодный желудок.

Вот уж деньги в мешке, кувшин тронулся в путь,
Лишь на треть из воды выступая.
Не завидуя парню, вам надо смекнуть –
У денежек масса какая?

9. Диск в кружке

Давайте опыт проведем
(Мысленный, конечно) –
Фанерный в кружку диск кладем,
Водою заливаем спешно.

Весьма нетрудно предсказать,
Где будет диск потом.
А если опыт повторять
Со ртутью и стеклом?

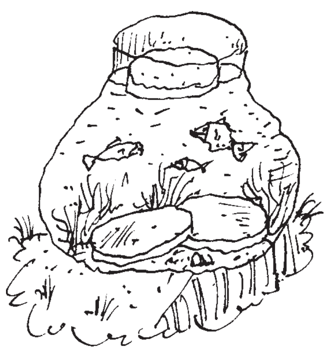
10. Шуба в жару

В Египет чукча прилетел,
Жара под сорок пять.
Зачем же шубу он надел?
Попробуй угадать.

11. Цунами на суше

В океане цунами
Не ощущаются нами.
Почему же у суши
Они так непослушны?

12. Чайник для заварки



Чайник для заварки чая
Выполнен весьма хитро:
Из фарфора, в форме шара,
Совсем белое нутро.

Сбоку ручка, крышка
с дыркой,
Носик с решетом внутри.
Ты все эти «заковырки»
По науке рассмотри!

Решения задач

1. В системе отсчета, связанной с водой, скорость кораблика постоянна по величине, поэтому до бескозырки он доплывет за четверть часа. Значит, время нахождения бескозырки в воде составляет полчаса. Перейдем теперь в систему отсчета, связанную с берегом. Поскольку время в обеих системах течет одинаково, бескозырка за полчаса уплывет на две мили.

2. При повторном разламывании рычаг становится короче, следовательно, требуется бóльшая сила.

3. В первом случае выигрыш в силе получился не в четыре, а только в три раза. Это означает, что сам рычаг – весомый. Записав условие равновесия рычага, найдем, что масса рычага в шесть раз меньше массы камня. Тогда во втором случае выигрыш в силе получится в 1,2 раза.

4. Шест нужен канатоходцу для сохранения равновесия. То, что шест должен быть тяжелым, это очевидно, и с этим никто не спорит. Однако если расположить шест не поперек каната, а вдоль него, то уравновешивающее свойство шеста исчезает. Значит, важны и его геометрические размеры. При этом оказывается, что для сохранения устойчивости длина шеста играет большую роль, нежели его вес.

5. Когда мячик поднимается в горку, его скорость уменьшают две силы: сила тяжести и сила трения. Когда же мячик спускается с горки, его движению препятствует только сила трения. Это означает, что скатываться с горки мячик будет дольше.

6. Ясно, что плотность карандаша составляет три четверти от плотности воды, т.е. 750 $кг/м^3$.

7. Нужно поставить бегемота в лодку и отметить глубину ее погружения. Затем надо убрать бегемота и нагружать лодку золотом до тех пор, пока глубина погружения не станет прежней. В таком случае масса груза будет равна массе бегемота.

8. В первом случае выталкивающая сила уравновешивает силу тяжести кувшина и силу тяжести золота. Во втором случае выталкивающая сила, уменьшившаяся на одну треть, уравновешивает только силу тяжести кувшина. Отсюда получается, что масса золота составляет 1 кг.

9. Вода, смачивая фанеру, подтечет под диск, появится выталкивающая сила, и фанерный диск всплывет. Ртуть же стекло не смачивает, поэтому она не будет подтекать под стеклянный диск, архимедовой силы не появится, и стеклянный диск останется лежать на дне.

10. Если температура на улице выше температуры человеческого тела, то имеет смысл носить одежду, не пропускающую тепло. Тогда под одеждой температура будет не 45 градусов, а только 36,6.

11. Когда в океане на большой глубине происходит землетрясение, большая масса воды начинает двигаться с небольшой скоростью – как в широкой трубе. У берега – мелководье, «труба» сужается, но объем воды, протекающий через поперечное сечение, должен оставаться неизменным, поэтому скорость движения воды возрастает, со всеми вытекающими отсюда последствиями.

12. Рассмотрим все вопросы по порядку. Для того чтобы чай заварился, в чайнике должна сохраняться высокая температура достаточно продолжительное время – вот почему чайник сделан из вещества с плохой теплопроводностью (фарфор). Чем меньше площадь поверхности тела (при прочих равных условиях), тем оно медленнее остывает, а наименьшая площадь поверхности – у шара. Белый цвет внутренней поверхности чайника предотвращает потери тепла за счет излучения. Ручка нужна для удобства переноски горячего чайника. Если крышка чайника плотно прилегает к корпусу, то при выливании чая внутри чайника образуется объем воздуха с пониженным давлением и заварка перестает вытекать – во избежание этого и делают в крышке отверстие. И наконец, решето в носике мешает попаданию чаинок в чашку.