«Электроны, фононы, магноны»

(неопубликованное предисловие ко второму изданию книги)

М.КАГАНОВ

Перечитывая книгу [1], написанную мною приблизительно 30 лет назад, я испытывал несколько странное чувство. С одной стороны, книгу, несомненно, написал я. Узнаю свои мысли, свое отношение к тому или другому явлению, открытию. Так безошибочно узнаешь себя, глядя на старую фотографию, хотя в зеркале видишь совсем другое лицо. С другой стороны,благодаря прошедшим годам возникает некая отчужденность, позволяющая оценивать прочитанное объективно или почти объективно. Это разрешает мне сказать: «Электроны, фононы, магноны» – хорошая книга, она мне понравилась при перечитывании. Если бы это было не так, не дал бы согласия на ее переиздание.

Конечно, в квантовой теории твердого тела, популярному изложению которой посвящена книга, за прошедшие годы произошло много событий. Но мне кажется, происходившее правильно назвать *развитием*. Основы квантовой теории твердых тел не были пересмотрены. Без знания того, о чем говорится в книге, нельзя понять, в частности, и тех изменений, которые произошли за годы, прошедшие между первым и вторым изданиями.

Квантовые свойства разных твердых тел все более активно используются в технике. Писалась бы книга теперь, с большой вероятностью встречались бы в ней упоминания наноструктур, высокотемпературных сверхпроводников и многих интереснейших открытий, сделанных сравнительно недавно. Признаюсь, я задумывался, не стоит ли сделать вставки или подстрочные примечания с подобными упоминаниями, и пришел к выводу, что делать этого не надо. Сколько-нибудь серьезно рассказать о том, чего не знали в 70-е годы прошлого века, в рамках этой книги невозможно, а знаний, которые можно почерпнуть, прочитав «Электроны, фононы, магноны», будет достаточно для того, чтобы воспользоваться информацией, заполняющей публикации в научно-популярных журналах, в Интернете и в других доступных источниках.

Вот на что стоит обратить внимание. В книге нередко упоминается время, прошедшее после какого-либо научного события, или говорится в «настоящее время», «теперь» и т.п. Надо помнить, что от момента написания книги до того, как она попала к вам, прошло много лет. Надо в уме произвести сложение, либо мысленно перенестись лет на 30 назад. Такие «выкладки», читая, делал и я.

* * *

За прошедшие годы изменилась не только физика твердого тела. Углубилось и изменилось представление о Мире, о его структурных единицах – элементарных частицах, претерпели изменение даже представления о структуре Вселенной, о ее рождении и судьбе.

Вот один пример из далекой от физики твердого тела области – из физики элементарных частиц: в книге ни разу не упоминаются кварки. В те годы, когда книга писалась, кварки были модной темой; много спорили, реальны ли кварки или это только удобный способ описания многих частиц и, главное, обнаруженных нестандартных свойств симметрии. Давно завершились споры. Кварки всеми признаны. Кварки – элементарные частицы, из которых состоят нуклоны и некоторые из мезонов. При этом возникло понимание того, что кварки не существуют как свободные частицы в вакууме, вне барионов. Несомненно, это событие огромного значения. Оно, возможно, изменит наше мировоззрение. Если дальнейшее дробление частиц невозможно и именно кварки – истинно элементарные частицы, то человечество, наконец, обнаружило то, из чего состоит все. И все же, повторю, кварки в книге не встречаются, хотя нуклоны (и протоны, и нейтроны) в книге упоминаются многократно. Но что нужно знать об этих частицах физике твердого тела? Их массу, заряд и магнитный момент. Пожалуй, все. Их внутренняя структура, существенная не только при изучении взаимодействий между частицами, но и для понимания структуры мироздания, непосредственно в физике твердого тела роли не играет (возможно, пока).

Одна из черт окружающего нас Мира и, как следствие, науки о Мире – своеобразная иерархичность. О ней упомянуто в книге. Строительной механике от

---

[1] *М.И.Каганов. «Электроны, фононы, магноны». Издание 2-е. (М.: Издательство ЛКИ, 2008.) Первое издание книги вышло в Главной редакции физико-математической литературы издательства «Наука» в 1979 году. По неизвестным автору причинам специально написанное для второго издания предисловие в книгу не вошло.*

физики твердого тела необходимо получить справочные сведения о прочностных и упругих характеристиках строительных материалов в разных условиях. Электротехнике – электрические характеристики используемых проводников и изоляторов. При исследовании конденсированных тел физики (теоретики и экспериментаторы) пользуются результатами атомной физики и не могут без них обойтись. Недостаточно знать, что тело построено из атомов или молекул. Для понимания природы свойств макроскопических тел и явлений, происходящих в них, необходимо знать устройство тех «кирпичиков», из которых они построены. Но о частицах – строительном материале молекул и атомов, об электронах, протонах и нейтронах – достаточно знать то, что можно почерпнуть из любого справочника. Более того, я думаю, что даже для объяснения феномена жизни этого знания вполне достаточно. Понятно, это не означает, что уже сейчас мы можем ответить на все вопросы, которые ставит молекулярная биология. Предстоят многие годы интенсивных исследований. И, главное, нужно ждать появления новых идей. За последние десятилетия у молекулярной биологии, которая впитала в себя многое из физики твердого тела, есть блестящие достижения. Физических знаний о структуре молекул, из которых построены все живые организмы, пока совершенно достаточно. Думаю, хотя и не все имеют такое мнение, что какого-то специального углубления в физику элементарных частиц для развития молекулярной биологии не потребуется никогда. По-прежнему молекулярным биологам, как и физикам, занятым твердыми телами, достаточно будет знать об электронах, протонах и нейтронах то, что прекрасно известно сегодня.

* * *

Читая книгу, не мог не вспоминать. Во введении к первому изданию книги я не без удовольствия вспомнил, как зародилась мысль написать «Электроны, фононы, магноны». А теперь я с неменьшим удовольствием вспоминаю, как книга писалась.

Большая часть была написана в Пущино, где я проводил отпуск, который совпал с перерывом в чтении лекций в МГУ. В Пущино – уютном городе на берегу Оки – была удобная гостиница. Но главное, в Пущино жил друг моей юности Иосиф Захарович Гольденберг, или Графчик, как называют его все друзья. Обаятельный человек, поэт и прекрасный педагог, он работал в библиотеке Института белка АН СССР и имел возможность помочь в бронировании номера в гостинице. В те годы это было ох, как непросто! Друзья пользовались помощью Графчика. Удобство проживания сопровождалось изоляцией от московской суеты, роскошью человеческого общения и прогулками по берегу Оки, по березовой роще... В Пущино я написал многое из того, что вошло в книгу, и придумал нестандартное расположение материала, за которое меня попрекали, но, и перечитывая, я не разочаровался в своем замысле. Может быть, он возник из разговоров с Иосифом Захаровичем о романе Хулио Кортасара «Игра в классики», но, откровенно говоря, я этого уже не помню.

И еще одно воспоминание. Очень важное. В том же 1979 году, когда вышла книга «Электроны, фононы, магноны», в журнале «Успехи физических наук» был опубликован обзор «Электронная теория металлов и геометрия» – последняя совместная публикация с моим учителем академиком Ильей Михайловичем Лифшицем. Он ушел из жизни в 1982 году безвременно рано – ему было 65 лет. Многие годы я работал под руководством Ильи Михайловича. Невозможно переоценить, что дало мне его руководство. Думая о написанных мною и в соавторстве с И.М.Лифшицем научно-популярных статьях и книгах, я чувствую, сколь важна была роль Ильи Михаловича в формировании моего физического мировоззрения. Перечитывая некоторые абзацы, я слышал голос своего учителя. А воспроизведенный здесь рисунок (4) из книги, важный для понимания места физики твердого тела среди наук, я впервые увидел нарисованным на доске

Каждая из механик имеет свою область применения, которую удобно изобразить в виде диаграммы. На этой диаграмме по вертикали откладывается отношение скорости частицы v к скорости света в вакууме c. По горизонтали откладывается отношение постоянной Планка $\hbar$ к удвоенному действию частицы S. Действие – некоторая физическая величина, имеющая размерность постоянной Планка. Оценить действие можно, перемножив характерный путь, проходимый частицей при заданном движении, и характерный импульс частицы. Пунктирные линии на рисунке – условные границы между механиками

Ильей Михайловичем при чтении им научно-популярной лекции в Харьковском лектории. Потом рисунок появился в нашей статье, которая так и называлась «Физика твердого тела на карте науки». Опубликована она была в сборнике «Будущее науки». Серию сборников под таким названием выпускало общество «Знание».

Вспоминать можно до бесконечности. И, казалось бы, есть вполне законный повод – переиздание книги, вышедшей из печати много лет назад. Но, предаваясь воспоминаниям, не следует все же забывать, что написанное в ней не устарело. И сегодня книга «Электроны, фононы, магноны» может быть весьма полезной для понимания природы процессов и явлений, происходящих в твердых телах.

Метод интерпретаций

А.АНДЖАНС, Д.БОНКА

1. Введение

На занятии математического кружка однажды обсуждалась следующая задача.

«Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ – положительные числа. Может ли дробь

$$\frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} \qquad (1)$$

быть больше одновременно всех дробей $\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \ldots, \frac{b_n}{a_n}$?»

Вот как несколько детей решали эту задачу. (Впрочем, все они получили ответ «нет, не может».)

Юрис, больше всех ценивший силу алгебраических преобразований, решал задачу «от противного»: предположив, что при i = 1, 2, …, n имеет место

$$\frac{b_1 + \ldots + b_n}{a_1 + \ldots + a_n} > \frac{b_i}{a_i},$$

он сложил все неравенства $a_i\left(b_1 + \ldots + b_n\right) > b_i\left(a_1 + \ldots + a_n\right)$ и получил явное противоречие: $\sum a_i \cdot \sum b_i > \sum b_i \cdot \sum a_i$.

Гунарс, имеющий склонность к последовательным конструкциям, решил задачу методом математической индукции (он рассматривал базис индукции при n = 1 и n = 2). Это вы, наверно, можете сделать и без приведения здесь его решения. Кстати, можно пользоваться как стандартным индуктивным переходом от n к n + 1, так и индукцией «туда и обратно».

Петерис, имеющий привычку использовать комбинаторные рассуждения, обратился к методу экстремального элемента (см., например, [1]). Предположим, что k – наибольшее из отношений $\frac{b_i}{a_i}$, i = 1, 2, …, n. Это значит, что $b_i \le a_i \cdot k$, i = 1, 2, …, n. Сложив эти неравенства, получаем $\sum b_i \le k \cdot \sum a_i$, или $\frac{\sum b_i}{\sum a_i} \le k = \frac{b_j}{a_j}$, где j – тот индекс, для которого достигается максимум k. Это показывает, что ситуация, описанная в вопросе задачи, невозможна.

Андрис, увлеченный геометрией, представил следующий рисунок (рис.1).

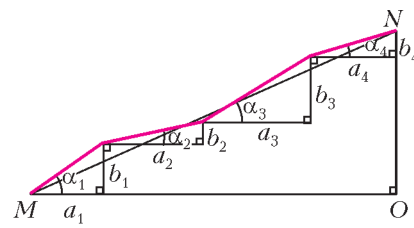


Рис. 1

Он с явной гордостью заявил, что $MO = \sum a_i$, $NO = \sum b_i$, $\frac{NO}{MO} = \operatorname{tg} \angle NMO$ и что, очевидно, $\operatorname{tg} \angle NMO$ не может быть больше всех тангенсов $\operatorname{tg} \alpha_1, \operatorname{tg} \alpha_2, \ldots, \operatorname{tg} \alpha_n$ (в чем авторы с ним вполне согласны). На вопрос приверженца строгой логики Карлиса «а все же почему этого не может быть, и как это доказать?» Андрис по образу древних греков написал под своим рисунком слово «СМОТРИ!» и был награжден аплодисментами.

Однако на занятии присутствовали также член химического кружка Имантс и любитель физики Дзинтарс. Вот что они сказали.

Дзинтарс: «пусть автомашина прошла путь b_i за время a_i, i = 1, 2, 3, …, n. Тогда дробь (1) – средняя скорость машины, а $\frac{b_i}{a_i}$ – скорости на отдельных участках. Ясно ведь, что средняя скорость не может быть выше, чем скорости на всех отдельных этапах!»

Имантс: «пусть имеется n пробирок с растворами соли. Количества растворов в них a_i, количества соли – b_i, i = 1, 2, …, n. Тогда $\frac{b_i}{a_i}$ – концентрация соли в отдельных пробирках, а дробь (1) – концентрация общей смеси. Ясно, что концентрация всей смеси не может быть выше всех отдельных концентраций – а то какой могучий метод добывания соли (или в аналогичной ситуации даже золота) мы бы имели!»

Это рассуждение было принято даже более громкими аплодисментами, чем выступление Андриса.

2. Что мы видели на самом деле?

Во-первых, мы убедились, что задачу можно решить многими разными способами. (Кстати, мы это знали и раньше.) Но способы эти были весьма разными. Три алгебраических решениия – весьма традиционные. Но геометрическое, химическое и физическое решение содержали особый элемент – *«перевод задачи на другой язык»* и решение уже переведенной вместо исходной.

Схематически это можно изобразить так (рис.2).

Затемненная область – условное изображение затруднений, отделявших нас от цели вначале, которую

Агнис Анджанс, Латвийский университет, agnis@lanet.lv
Даце Бонка, Латвийский университет, dace.bonka@lu.lv

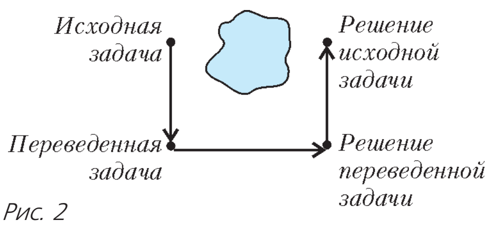


Рис. 2

мы указанным способом удачно обошли и которые преодолеть впрямую было бы, может быть, очень трудно.

Этот способ решения задачи иногда называют **«методом интерпретаций»**: задача одной области математики интерпретируется в другой области, где она или яснее, или больше соответствует нашей интуиции, или допускает применение более мощных средств, и т.д. Литовский математик Р.Кашуба однажды как-то сказал, что метод интерпретаций способствует распространению демократии, так как развивает способность изменить точку зрения.

3. Красивые примеры

В этом пункте собрано несколько примеров, которые нам кажутся и характерными, и эстетически привлекательными.

3.1. *Алгебра $\to$ векторы.*

Пусть a, b, c, d, e, f, g, h – ненулевые числа. Докажите, что по крайней мере одно из чисел $ac+bd$, $ae+bf$, $ag+bh$, $ce+df$, $cg+dh$, $eg+fh$ неотрицательно.

Решение. Рассмотрим векторы (a, b), (c, d), (e, f), (g, h). Рассматриваемые выражения – их попарные скалярные произведения. Отложив векторы от одной точки, мы увидим, что какие-то из них образуют нетупой угол. Эти векторы и их скалярное произведение и надо рассматривать.

3.2. *Алгебра $\to$ длина.*

Пусть $a>0$, $b>0$, $c>0$. Докажите, что

$$\sqrt{a^2-ab+b^2}+\sqrt{b^2-bc+c^2}\geq\sqrt{a^2+ac+c^2}.$$

Решение. Пусть $OA=a$, $OB=b$, $OC=c$, $\angle AOB=\angle BOC=60^\circ$ (рис. 3). Тогда по теореме

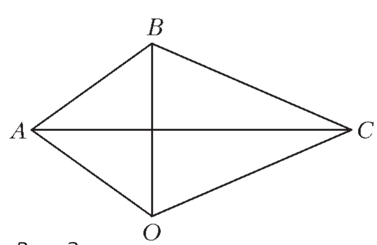


Рис. 3

косинусов

$$AB=\sqrt{a^2-ab+b^2},\ BC=\sqrt{b^2-bc+c^2},$$
$$AC=\sqrt{a^2+ac+c^2},$$

и нужное следует из неравенства треугольника для ΔABC.

3.3. *Алгебра $\to$ площади.*

Пусть n – натуральное число, $n>1$. Докажите, что

$$\sqrt{n^2-1^2}+\sqrt{n^2-2^2}+\ldots+\sqrt{n^2-(n-1)^2}<0,8n^2.$$

Решение. Сравните площадь закрашенной фигуры с площадью четверти круга; вспомните, что $\frac{\pi}{4}<0,8$ (рис.4).

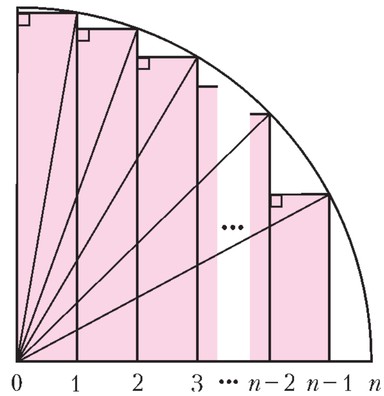


Рис. 4

3.4. *Алгебра $\to$ тригонометрия.*

Пусть $a_1=\alpha\in\mathbb{R}$ и $a_{n+1}=4a_n(1-a_n)$ при $n\in\mathbb{N}$. Для скольких разных α мы имеем $a_{2004}=0$?

Решение. Из равенства $a_{n+1}=1-(1-2a_n)^2$ легко вытекает: если $0\leq a_{n+1}\leq$ ≤ 1, то $0\leq a_n\leq 1$. Следовательно, и все искомые значения α лежат в интервале $[0;\ 1]$. Обозначим $\alpha=\sin^2\omega$. Тогда

$$a_2=4\sin^2\omega\left(1-\sin^2\omega\right)=(2\sin\omega\cos\omega)^2=\sin^2 2\omega$$

и т.д., $a_{2004}=\sin^2 2^{2003}\omega$; так как $a_{2004}=0$, то $\sin 2^{2003}\omega=0$, $2^{2003}\omega=\pi k$ ($k\in\mathbb{Z}$), $\omega=\frac{\pi k}{2^{2003}}$, $k\in\mathbb{Z}$.

Это дает $2^{2002}+1$ разных значений $\sin^2\omega$.

3.5. *Суммирование $\to$ геометрия на клетчатой бумаге.*

Докажите, что для чисел Фибоначчи ($F_1=1$; $F_2=1$; $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$ при $n\geq 1$) имеет место равенство

$$F_1^2+F_2^2+\ldots+F_n^2=F_n\cdot F_{n+1}.$$

Решение. См. рисунок 5.

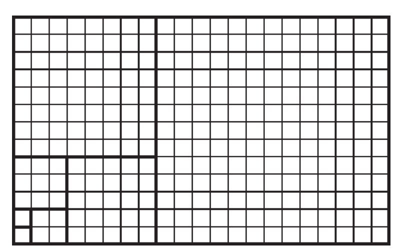


Рис. 5

3.6. *Суммирование $\to$ подсчет вариантов.*

Докажите, что $1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Решение. Допустим, что Марису страшно понравилась Эллина. Он хочет сделать три вещи:

а) пригласить ее на бал,

б) впервые поцеловать,

в) признаться в любви.

В его распоряжении есть $n+1$ дней. При этом признание в любви должно произойти только тогда, когда уже в предыдущие дни были и бал, и поцелуй; бал же и поцелуй могут быть как в разные дни, так и в один и тот же день. Сколько есть разных распорядков для Мариса?

Математически говоря, мы ищем количество троек целых чисел x, y, z, для которых $1\leq x$, $y<z\leq n+1$. Однако любовь гораздо привлекательнее целых чисел.

Признание в любви может произойти в день с номером 2, 3, 4, …, $n+1$. Если это происходит в i-й день, то для бала и поцелуя есть $(i-1)^2$ возможностей. Поэтому разных распорядков есть $1^2+2^2+\ldots+n^2$.

Подсчитаем теперь это же количество другим способом. Сначала: сколько есть распорядков, использующих два дня – один для признания, другой для бала и поцелуя? Ясно, что их количество равно C_{n+1}^2. Далее: сколько есть распорядков, использующих три дня? Их количество равно $2C_{n+1}^3$. Здесь множитель 2 появляется из-за того, что за два первых выбранных дня бал и поцелуй могут следовать в двух разных вариантах.

Получаем, что

$$1^2+2^2+\ldots+n^2=C_{n+1}^2+2C_{n+1}^3,$$

что после преобразований дает нужное равенство.

3.7. *Алгебра $\to$ теория вероятностей.*

Пусть p и q – такие положительные числа, что $p+q=1$. Пусть m и n – натуральные числа, $m\ge 2$, $n\ge 2$. Докажите, что $\left(1-p^m\right)^n+\left(1-q^n\right)^m\ge 1$.

Решение. Рассмотрим таблицу с m строками и n столбцами, состоящую из одинаковых квадратных клеток. «Организуем» вероятностный процесс, в котором каждая клетка независимо от других красится в белый или красный цвет: в белый – с вероятностью p, в красный – с вероятностью q.

Тогда, на основании элементарных законов теории вероятностей, для любого наперед заданного столбца p^m – вероятность того, что он весь белый; $\left(1-p^m\right)$ – вероятность того, что в нем есть красная клетка. Поэтому $\left(1-p^m\right)^n$ – вероятность того, что в любом из n столбцов есть красная клетка.

Аналогично, $\left(1-q^n\right)^m$ – вероятность того, что в любой из m строк есть белая клетка.

Наше неравенство можно переписать в форме

$$\left[1-\left(1-p^m\right)^n\right]+\left[1-\left(1-q^n\right)^m\right]\le 1.$$

Ясно, что $\left[1-\left(1-p^m\right)^n\right]$ – вероятность того, что имеется белый столбец, а $\left[1-\left(1-q^n\right)^m\right]$ – вероятность того, что имеется красная строка.

Так как оба последних события не могут произойти одновременно (что находилось бы на пересечении белого столбца и красной строки?), то сумма их вероятностей не превосходит 1, что и требовалось доказать.

Примечание. Так как возможны раскраски, не имеющие ни белого столбца, ни красной строки, то на самом деле доказываемое неравенство – строгое.

3.8. *Геометрия $\to$ физический процесс.*

Докажите, что любой выпуклый многогранник можно пересечь плоскостью так, чтобы и его объем, и площадь поверхности делились этой плоскостью пополам.

Решение. Сделаем сосуд в форме рассматриваемого многогранника и наполним его водой ровно наполовину. Тогда, как бы ни повернуть сосуд, поверхность воды определит плоскость, делящую объем многогранника пополам. Нам надо доказать, что сосуд можно повернуть так, чтобы вода покрывала ровно половину площади его стенок.

Поставим сосуд в любое положение и повернем потом его «вверх ногами». Если вначале вода покрывала половину стенок, все уже было хорошо. В противном случае можем допустить, что она покрывала **меньше** половины стенок. Так как в конечном положении вода занимает как раз ту часть сосуда, которая вначале была пустой (почему?), то в конце вода покрывает больше половины стенок. Так как площадь, покрытая водой, в процессе перевертывания изменяется непрерывно, то был момент, когда вода покрывала ровно половину площади стенок. Этого мы и добивались!

3.9. *Один процесс $\to$ другой процесс.*

Через ручеек упала тонкая тростинка. С одного берега по тростинке направились пять черных муравьев, с другого берега – пять красных. Скорости муравьев одинаковы, расстояния между ними могут и различаться. Как только два муравья встречаются, они тотчас поворачивают обратно и с теми же скоростями направляются в противоположные стороны. Сколько встреч состоится, пока все муравьи не уйдут обратно на свои начальные берега?

Решение. Вместе с данным процессом рассмотрим другой, которые отличается от данного в задаче только тем, что муравьи не поворачивают обратно, а «проскальзывают» друг через друга и продолжают движение вперед. Ясно, что и в «настоящем», и в «воображаемом» процессе муравьи находятся на тростинке в одних и тех же местах (только это разные муравьи!). Про воображаемый процесс же ясно, что там произойдет $5\times 5=25$ встреч. Значит, столько же встреч произойдет и в «настоящем» процессе.

Мы больше примеров приводить не будем. Вне статьи остались интерпретации комбинаторных задач с помощью графов, ставшие уже повседневной практикой; физические интерпретации, использующие понятия о центре тяжести и потенциальной энергии (см., например, [2] и [3]), интерпретации стереометрией планиметрических задач (см., например, [4]), интерпретация одной планиметрической задачи при помощи другой с использованием параллельной или центральной проекции (см., например, [5]) и многое другое.

4. Сильные стороны, слабые стороны, риски

Нельзя отрицать, что приведенные решения просты и убедительны. Нам они кажутся даже красивыми. Но насколько они корректны? Довольно легко заметить, что в любом из примеров где-то пришли мы в рассуждении к ситуации, когда с сияющей улыбкой смогли заявить: «И это же очевидно!» Скептик мог бы качать головой и комментировать: «Ну, это уж какие у кого глаза…». И тогда, например, мы в примере 3.5 добавили бы рассуждение с математической индукцией, в примере 3.9 нудно доказывали бы непрерывность изменения покрытой водой поверхности, и т.д. Но надо ли это делать?

Великий физик Нильс Бор говорил: «Глубокая истина – это такая, отрицание которой тоже есть глубокая истина».

Доказательства важны, жизненно важны для математики. Но доказательства – не цель. Цель есть понимание.

Доказательство на математической практике – это рассуждение, которое убеждает. Никто не доводит доказательство сложных теорем до аксиом теории множеств или арифметики Пеано – иначе не могла бы быть опубликована ни одна научная или даже методическая статья. Любой математик на каком-то месте всегда говорит (открыто или скрыто): «Ну, а это, уж извините, ясно как день». Это же самое делается при использовании метода интерпретаций.

Но, разумеется, как всюду, так и здесь есть свои заторы, подводные камни и иные опасности. Про наиболее важные полезно знать.

4.1. Надо заботиться, чтобы интерпретация «перекрыла» все возможные случаи. Например, при решении системы уравнений

$$\begin{cases} x = 2y^2 - 1, \\ y = 2z^2 - 1, \\ z = 2x^2 - 1 \end{cases}$$

недостаточно заявить: обозначим $x = \cos\alpha$; тогда $z = \cos 2\alpha$, $y = \cos 4\alpha$ и $x = \cos 8\alpha$, откуда $\cos\alpha = \cos 8\alpha$, $8\alpha = \mp\alpha + 2\pi n$ и $\alpha = \frac{2\pi n}{9}$, $\alpha = \frac{2\pi n}{7}$ ($n \in \mathbb{Z}$), откуда получаем возможные значения неизвестных. Хотя на такую интерпретацию явно указывает форма уравнений системы, она упускает возможность $|x| > 1$. (К счастью, этот случай легко решается другим путем: при $|x| > 1$ имеем $|z| > |x|$, $|y| > |z|$, $|x| > |y|$, значит, $|x| > |x|$ – противоречие. Следовательно, при $|x| > 1$ решений у системы нет.)

4.2. Иногда интерпретация – явно упрощенная, и тогда приходится решить, насколько существенны эти упрощения. Например, при решении примера 3.8 мы предположили, что поверхность воды – плоскость; на самом деле это не так – вспомните и про выпуклость земной поверхности, и про капиллярные явления около стенок сосуда и т.д. Кроме того, так как окружающий нас мир (и уж, конечно, вода) состоит из дискретных частиц, то ни один процесс вообще не проходит непрерывно в математическом смысле слова.

4.3. А иногда даже могут возникнуть сомнения, соответствует ли вообще употребляемой интерпретации что-то реальное. Припомним пример 3.7. А есть ли вообще в мире что-то случайное? И, если есть, то возможно ли организовать описанный процесс для любых p и q (их-то, вообще говоря, континуум)? Какие природные процессы могут быть использованы при организации такого процесса – не бросание же монеты? Так что вопросов тут больше, чем ответов.

Но одно неоспоримо: даже самые «сомнительные» интерпретации могут дать толчок к пониманию, каков ответ на самом деле. А зная, каков он, доказать-то мы его как-нибудь уж докажем... даже строго, если нас хорошо попросят.

5. Границы метода интерпретаций

В «большой науке» метод интерпретаций встречается сплошь да рядом. Любая математическая модель на самом деле есть интерпретация природного, общественного, мыслительного процесса на математическом языке.

Говоря про «внутриматематические интерпретации», кроме уже названной теории графов следует упомянуть аналитическую геометрию, средство инженерной математики – преобразование Лапласа, быстрое преобразование Фурье, теорию кодирования. Решающую роль в развитии теоретической кибернетики (theoretical computer science) сыграла интерпретация общего алгоритмического процесса машиной Тьюринга в 1936 году. Это мы упомянули лишь малую часть важных интерпретаций. Есть ли предел?

Не вдаваясь в подробности, упомянем о знаменитой теореме Геделя о неполноте (она была доказана в 1930 году). Из этой теоремы вытекает следующее. В любой «достаточно интересной» математической теории, построенной на основе аксиом и содержащей формальное понятие о доказательстве на основе их,

- или существуют доказательства утверждений, которые хотя бы в некоторых «разумных» интерпретациях неверны;
- или же существуют утверждения, которые верны во всех «разумных» интерпретациях этой теории, но которые нельзя доказать при помощи допустимых формальных средств.

(Слова, поставленные в кавычках, разумеется, должны быть уточнены, но это потребовало бы отдельной статьи.)

Следовательно, метод интерпретаций, равно как и математическое моделирование, не может быть приведен в полное согласие с понятием формального доказательства.

Тем не менее мы рекомендуем его к использованию всюду, где вы видите такую возможность.

6. Литература

1. *A.Engel*. Problem-Solving Strategies. (Springer, 1999)
2. *М.Б.Балк*. Геометрические приложения понятия о центре тяжести. (М.: Физматгиз, 1959)
3. *Д.Пойя.* Математика и правдоподобные рассуждения. (М.: Наука, 1975)
4. *И.Шарыгин.* Выход в пространство. (Квант, 1975, №5, с.45–49)
5. *И.М.Яглом*. Геометрические преобразования II. (М.: ГИТТЛ, 1956)

7. Об авторстве примеров

Задача из введения, примеры 3.1, 3.2, 3.5, 3.6, 3.8, 3.9 – авторские. Примеры 3.3 и 3.7 были опубликованы ранее в «Кванте». Пример 3.4 – фольклор, встречался (с другими числами вместо 2004) во многих олимпиадах.

ПРЕМИЯ ЗА НАРУШЕНИЯ

Нобелевская премия по физике в 2008 году присуждена за фундаментальные теоретические исследования по нарушению глобальных симметрий в мире элементарных частиц. Сама премия также несимметрична. Половину премии получил 87-летний американский физик японского происхождения Йоичиро Намбу (Институт Энрико Ферми Чикагского университета, США). Свою главную работу он выполнил более 50 лет назад (совместно с итальянским физиком Джованни Йона-Лазиньо) в университете города Осака (Япония). Формулировка награждения – «за пионерские идеи о возможности спонтанного нарушения киральной симметрии». Вторую половину премии разделили два японских физика – Макото Кобаяши (Исследовательский центр ускорителя высоких энергий, Цукуба, Япония) и Тошихидэ Маскава (Институт теоретической физики Киотского университета, Япония) – «за открытие природы нарушенной симметрии, которое предсказывает существование в природе по крайней мере трех семейств кварков».

Нелегко разобраться в этих формулировках. Казалось бы, в проблеме нарушения симметрии само понятие «симметрия» не так уж сложно. Однако речь идет при этом не о тривиальных пространственных симметриях, например в кристаллах. Еще в 1927 году создатель геохимии, естествоиспытатель и философ В.И.Вернадский писал: «Новым в науке явилось не выявление принципа симметрии, а выявление его всеобщности». Современное понятие симметрии включает: а) объект или явление, симметрия которого рассматривается; б) преобразования, по отношению к которым рассматривается симметрия; в) инвариантность (неизменность, сохранение) каких-то свойств объекта, выражающую рассматриваемую симметрию. Такое понятие симметрии шире понятия «законы природы». Можно сказать, что симметрия создает законы, лежит в их основе. Например, симметрии параллельного переноса в пространстве (иначе говоря, однородности пространства) соответствует закон сохранения импульса, симметрии переноса начала времени (однородности времени) соответствует закон сохранения энергии.

Гораздо более сложные и не совсем очевидные симметрии удается обнаружить в мире элементарных частиц.

Киральная (в химии это право- или левовинтовая) симметрия в случае субатомных частиц – это инвариантность уравнений, описывающих их поведение, относительно изменения так называемой скрытой винтообразности частиц. Согласно гипотезе Намбу, из-за взаимодействия частиц с физическим вакуумом эта внутренняя симметрия с конечной вероятностью может самопроизвольно нарушиться. Объектами преобразованных свойств в модели Намбу были гипотетические очень мелкие частицы, из которых в случае нарушения симметрии могли «образоваться» мезоны, барионы и гипероны. Последних к тому времени наоткрывали на ускорителях уже многие десятки, а вскоре их число перевалило за три сотни – появился целый «зоопарк», как тогда шутили физики. Работа Намбу и Йона-Лазиньо была первой попыткой навести порядок в этом «зоопарке», выявить наиболее фундаментальные «кирпичики бытия». Она подготовила появление через 10 лет (1964 г.) кварковой модели адронов.

Работа Кобаяши и Маскава связана с нарушением двух других симметрий в мире элементарных частиц – пространственной и зарядовой. Пространственная симметрия в этом случае связана с зеркальным отображением. В обыденной жизни мы привыкли к тому, что в зеркале левое меняется на правое и наоборот. Про микрообъекты современной физики, которые после преобразования отражения превращаются в своих «антиподов», говорят, что они нечетные (их «четность» равна –1). В мире элементарных частиц есть как четные, так и нечетные. Правила, связанные с сохранением четности в процессах микромира, рассматриваются как проявление Р-симметрии (от английского *parity* – четность). Под зарядовой симметрией понимают сохранение суммарных зарядов, каждого по отдельности – электрического, барионного и лептонного, в процессах взаимодействия объектов между собой. У частиц и античастиц эти заряды имеют противоположные знаки. Зарядовая симметрия обозначается как С-симметрия (*charge* – заряд). В 1956 году было обнаружено нарушение четности – оказалось, что правило сохранения четности не является законом. Тогда в 1957 году был сформулирована гипотеза сохранения «комбинированной четности», так называемая СР-инвариантность – если меняется четность, то вместе с ней должны измениться знаки зарядов, т.е. частицы должны замениться на античастицы (Л.Ландау, Т.Ли. А.Салам и Ч.Янг). Незамедлительно последовало экспериментальное подтверждение (талантливая физик-экспериментатор Ц.Ву). Гипотеза стала законом.

Когда в 1964 году появилась 3-кварковая гипотеза Гелл-Мана и Цвейга, она учитывала этот закон. И вдруг в это же время был обнаружен случай нарушения СР-инвариантности (в экспериментах по изучению распадов нейтрального К-мезона). Казалось, что кварковая гипотеза опровергнута. Но именно тогда Кобаяши и Маскава выдвинули свою гипотезу о возможности самопроизвольного (спонтанного) нарушения этой симметрии. Для этого им пришлось предположить, что в природе существуют не три кварка, а шесть – три пары кварков. Сегодня физики говорят о трех «семействах» кварков и о соответствующих им трех «семействам» лептонов. В этом заключается сущность современной так называемой стандартной модели микромира.

Итак, три физика, две работы, обе – предшественницы будущих открытий и обе связаны с нарушениями симметрии. Нобелевская «награда за нарушения», пусть и спустя много лет, нашла своих героев.

Л.Белопухов

Макото Кобаяши

Тошихидэ Маскава

Йоичиро Намбу

Самозаклинивающиеся структуры

А.БЕЛОВ

В олимпиадном фольклоре ходила такая задача (не очень простая):

Если на плоскости расположить несколько выпуклых фигур, то одну из них можно выдвинуть так, чтобы не задеть другие.

Упражнение 1. Попробуйте решить эту задачу.

А что в пространстве? Многие математики пытались доказать ее пространственное обобщение. Были получены некоторые продвижения. В частности, было показано, что если выпуклые тела – шары (в пространстве любой размерности), то одно из них можно выдвинуть, не задев остальные.

Упражнение 2*. Докажите это утверждение в размерности три.

Указание. Отметьте центры шаров и для каждой отмеченной точки рассмотрите ее *область Вороного* – множество точек пространства, для которых эта отмеченная точка ближе, чем любая другая отмеченная точка. Покажите, что можно выдвинуть целую область Вороного.

Поскольку казалось «очевидным», что ответ положителен, прошло несколько лет, прежде чем был построен контрпример (независимо Гальпериным и Кузьминых). История вопроса изложена в книге А.Боровика «Mathematics under the Microscope» (ее можно скачать из интернета по адресу http://micromath.wordpress.com). Этой задаче и связанным с ней вопросам была посвящена неопубликованная заметка А.Боровика, отчасти вошедшая впоследствии в его книгу. Я получил ее от Н.Б.Васильева, и она меня вдохновила.

Первые примеры, как это зачастую бывает в математике, оказались довольно сложными и искусственными. Захотелось получить более изящные конструкции. Если создать самозаклинивающуюся структуру в слое между двумя концентрическими сферами, задача будет решена. Если же радиусы сфер будут очень большими, а слой между ними – тонким, то ситуация будет очень похожа на случай слоя между двумя плоскостями.

Так родилась задача для LXIII Московской городской математической олимпиады (2000 г., 11 кл., задача 6):

Можно ли расположить в слое между двумя плоскостями семейство одинаковых выпуклых тел так, чтобы ни одно из них нельзя было сдвинуть, не задевая остальные?

Эту задачу решило 20 участников. Интересно, однако, что среди них не было учеников физматшкол!

А.Белов, Московский институт открытого образования, kanel@mccme.ru

Рисунки к статье, принадлежащие А.Дыскину и Е.Пастернак, взяты из статьи [3], а фотографии – из статьи [8].

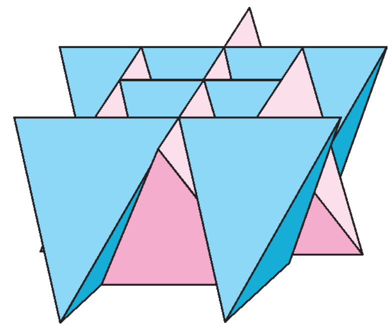


Рис. 1

Фрагмент такого семейства показан на рисунке 1.

Докажем, что ни один из тетраэдров нельзя выдвинуть. Заменим один из них вписанным в него шаром S и покажем, что этот шар нельзя выдвинуть. Вращать шар бесполезно, поэтому ограничимся рассмотрением параллельных переносов.

Рассмотрим плоскость грани Γ другого тетраэдра, которая касается S. Множество векторов сдвига, разрешенных гранью Γ, задается множеством векторов, идущих из Γ в сторону S. Такие векторы образуют полупространство направлений, а множество возможных сдвигов шара есть пересечение множеств направлений (полупространств), разрешенных гранями тетраэдров укладки, касающихся S. Легко видеть, что оно пусто. Поэтому шар, а значит и тетраэдр, в который он вписан, не вынимается.

Придумывалась эта конструкция так. Рассмотрим слой из обычных кубов, раскрашенных в шахматном порядке, так что в серединном сечении образуется бесконечная шахматная доска. Рассмотрим черный куб. Наклоним его боковые «северные» и «южные» грани так, чтобы они сходились наверху (они не дадут ему двигаться вверх), а «западные» и «восточные» – так, чтобы они сходились внизу (они не дадут ему двигаться вниз). С каждым белым кубом поступим наоборот – наклоним его «северные» и «южные» грани так, чтобы они сходились внизу, а «западные» и «восточные» – так, чтобы они сходились наверху (рис.2). При этом грани черных и белых кубов останутся в контакте. Если убрать основания кубов, то

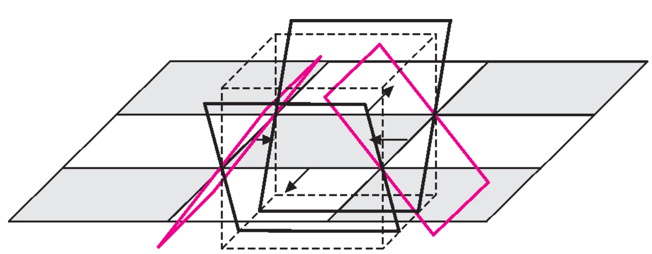


Рис. 2

при подходящих углах наклона возникает слой из правильных тетраэдров (см. рис.1)!

Если сечение многогранника двигать снизу вверх с постоянной скоростью, то сам многогранник можно рассматривать как процесс эволюции многоугольника во времени (ось времени будет перпендикулярна плоскости сечения). При этом стороны сечения также движутся с постоянной скоростью. (Например, можно рассматривать тетраэдр как эволюцию плоского сечения, параллельного паре противоположных ребер, при движении вверх. Вначале появляется отрезок. Далее отрезок становится прямоугольником, одна сторона которого растет, другая – уменьшается. Прямоугольник становится квадратом, когда растущая сторона становится равной коллапсирующей, и в конце концов он вырождается в отрезок и исчезает.)

Упражнения

3. Назовем грань *контактной*, если она имеет общий участок поверхности с другим многогранником («блоком»). Рассмотрим многогранник как эволюционирующий многоугольник M сечения. Пусть M' есть многоугольник, образованный продолжением контактных сторон M, т.е. пересечениями плоскости сечения с продолжениями контактных граней.

Докажите, что если M' вырождается при движении вверх, то многогранник заклинен сверху (т.е. его нельзя убрать вверх параллельным переносом, не трогая остальных), а если M' вырождается при движении вниз, то многогранник заклинен снизу. Докажите, что обратное тоже верно.

4. Рассмотрев тонкий слой между двумя сферами (или лучше торами), придумайте такое расположение тетраэдров, чтобы ни один из них не выдвигался.

Замечание. Техническая реализация этой конструкции несколько затруднительна, мы отсылаем читателя к материалам 14-й конференции Турнира городов (см. сайт http://www.turgor.ru/lktg/2002/index.php).

Попробуем немного по-другому описать конструкцию плоского самозаклинивающегося слоя тетраэдров. Посмотрим еще раз, как выглядит сечение тетраэдра плоскостью, параллельной паре противоположных ребер, если эту плоскость двигать вверх с постоянной скоростью. Это многоугольник, стороны которого также движутся с постоянной скоростью. Направление движения стороны можно изобразить стрелкой (вектором), ей перпендикулярной. Длина вектора указывает на скорость движения, а направление – на направление.

Снова рассмотрим бесконечную шахматную доску, являющуюся серединным сечением слоя из кубов. Нарисуем на сторонах квадратиков стрелки единичной длины, ведущие либо внутрь, либо наружу так, чтобы для каждого квадратика внутренние и наружные стрелки чередовались (рис.3).

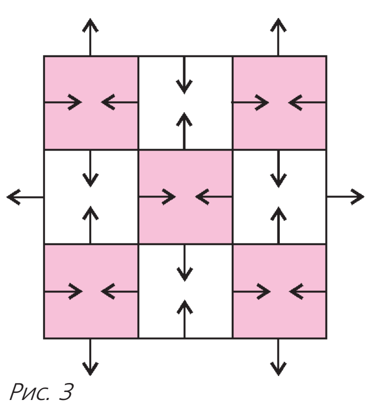


Рис. 3

Если у двух квадратиков есть общая сторона, то стрелка, ей отвечающая, для одного из квадратиков ведет внутрь, а для другого – наружу. Теперь наклоним боковые грани кубов.

Если стрелка ведет внутрь, то боковую грань, образующую соответствующую сторону, наклоняем сверху внутрь; если стрелка ведет наружу – то наклоняем грань сверху наружу. Продолжения боковых граней при подходящем угле наклона дадут слой из правильных тетраэдров.

Этот взгляд позволяет придумать и другую структуру. На плоскости есть еще одна интересная решетка – правильная шестиугольная (пчелиные соты). Если расставить стрелки перпендикулярно сторонам шестиугольников так, чтобы для каждого из них стрелки, ведущие внутрь и наружу, чередовались (рис.4), рассмотреть

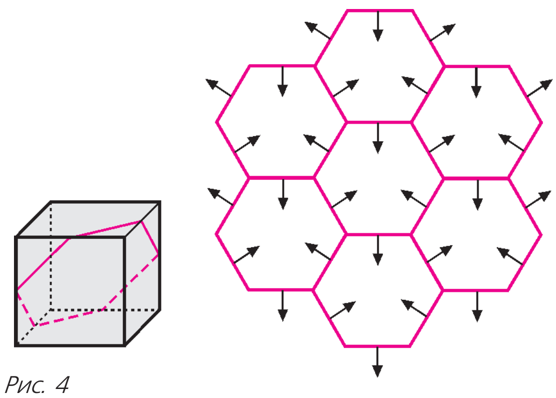


Рис. 4

систему правильных шестиугольных призм и наклонить их боковые грани в соответствии со стрелками, в продолжении боковых граней при подходящем угле наклона неожиданно получаются кубы!

Упражнения

5. а) Рассмотрите движение плоскости, перпендикулярной главной диагонали куба. Какие многоугольники возникают? Тот же вопрос для четырехмерного куба. Что получается в его серединном сечении?

б) Что получается в сечении, если стандартную решетку единичных кубов пересечь плоскостью, проходящей через центр одного из кубов и перпендикулярной его главной диагонали? Тот же вопрос для решетки четырехмерных кубов.

6. Придумайте систему из самозаклинивающихся четырехмерных кубов.

Эта конструкция имеет и такое описание. У куба есть сечение, являющееся правильным шестиугольником (а именно, плоскостью, являющейся серединным перпендикуляром к его главной диагонали). Рассмотрим правильный шестиугольный паркет («пчелиные соты») и расположим кубы так, чтобы эти шестиугольники образовывали бы их сечения, а сами кубы отличались бы параллельным переносом (рис.5 и первая страница обложки). Похоже, что такое расположение кубов не было известно человечеству!

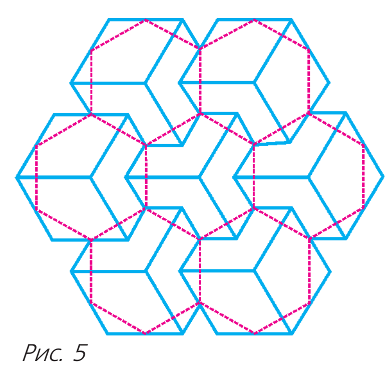


Рис. 5

Как видите, научная работа может не требовать знаний, выходящих за рамки средней школы.[1]

[1] *Автор не призывает вас на этом основании отказаться от дальнейшей учебы.*

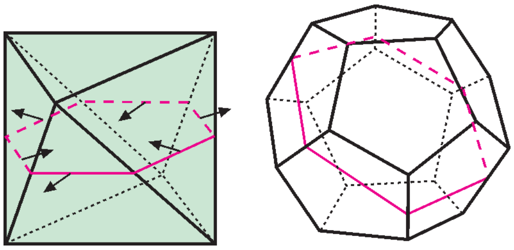


Рис. 6

Заметим, что октаэдр и додекаэдр (рис.6) также имеют правильные шестиугольные сечения, так что получаются аналогичные конструкции из октаэдров и додекаэдров (рис.7, 8).

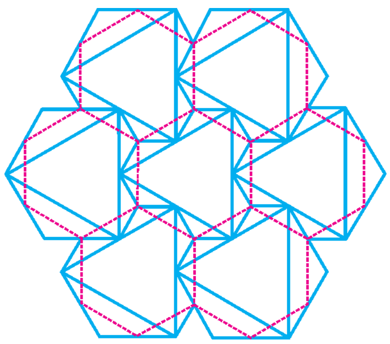


Рис. 7

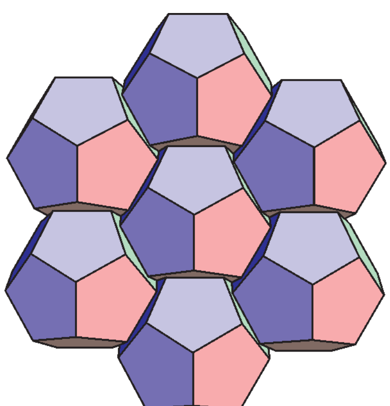


Рис. 8

Теперь рассмотрим расположение правильных десятиугольников, как показано на рисунке 9. Заметим, что икосаэдр, додекаэдр, а также усеченный икосаэдр (форма молекулы фулерена C_{60}) имеют правильное десятиуголь-

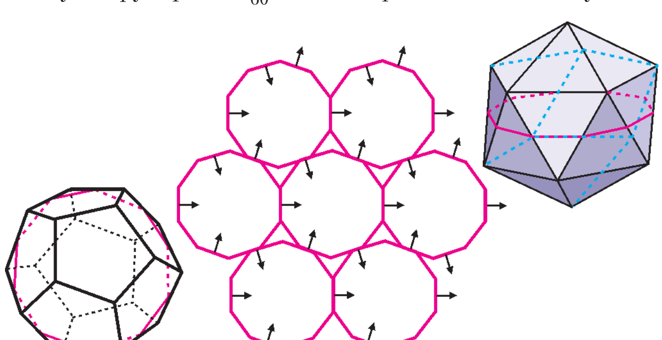


Рис. 9

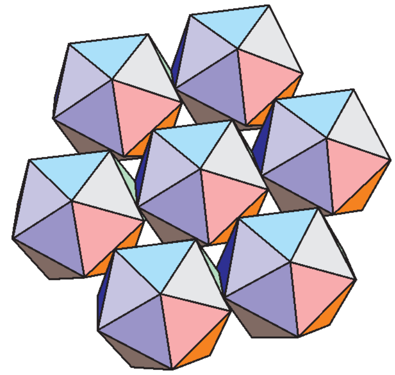


Рис. 10

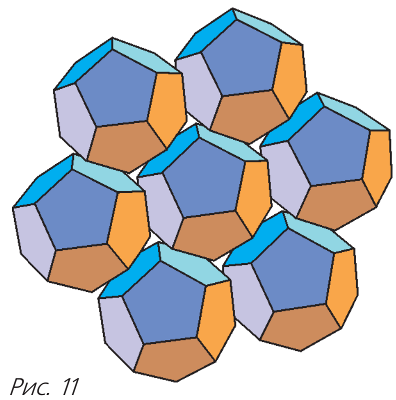


Рис. 11

ное сечение. Получается кладка из самозаклинивающихся икосаэдров (рис.10), новая кладка из додекаэдров (рис. 11) и кладка из усеченных икосаэдров (рис.12).

Мы несколько раз, казалось бы, немного изменяли описание конструкций. Однако всякий раз такое изменение приводило к новым результатам. Язык стрелок, позволяющий описывать наклоны граней, привел к появлению конструкции из кубов, описание самозаклиненной кладки из кубов через шестиугольное сечение позволило обобщить конструкцию, построить системы из октаэдров и додекаэдров, а затем – и других тел. Рассуждения с движением сторон сечения позволяют строить самозаклиненные конструкции регулярным образом. Наличие языка очень важно в математике, и точные слова, несмотря на кажущуюся «незначительность» переформулировок, приводят к новым результатам.

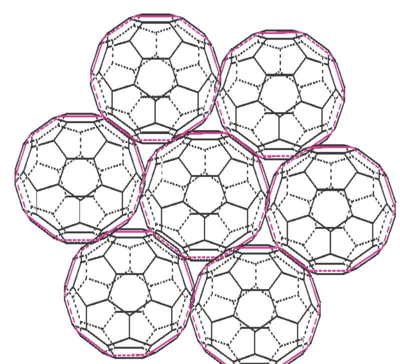


Рис. 12

Довольно хорошо известен арочный эффект, когда из камней без цемента еще в древности складывали арку (рис.13). Однако теоретически возможно создать не только классическую выпуклую, но и вогнутую арку!

Упражнение 7. Придумайте конструкцию вогнутой арки.

Указание. Рассмотрите слой между двумя концентрическими сферами. В малом он устроен как слой между двумя плоскостями, и его можно сделать заклиненным в обе

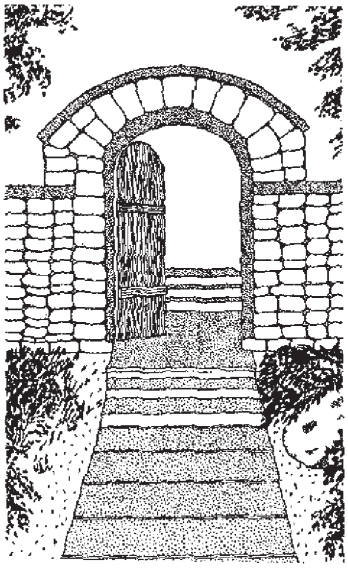


Рис. 13

стороны, в том числе и в сторону внешней сферы.

Подборка исследовательских задач, посвященных самозаклинивающихся структурам, предлагалась на 14-й конференции Турнира городов в 2002 году.

Расскажу, как я встретился с этими вопросами.

В свое время я поступил в аспирантуру московского Горного Института. Там я занялся изучением равновесия блочных массивов скальных пород, прочел книгу R.Googman and Shi-gen-Hua «Introduction to Rock Mechanics». В этой книге была изложена концепция ключевого блока. Ключевые блоки – это те блоки, которые не заклинены остальными и могут двигаться внутри выработки. Для обеспечения безопасности выработки достаточно осуществить крепление только таких блоков. Там же содержались рассуждения с пересечением пространств направлений, задаваемых гранями. (Авторы книги, видимо, и представить себе не могли, что ключевых блоков может просто не быть вообще!)

После защиты диссертации я к горному делу не возвращался. Однако, узнав из заметки А.Боровика, что из выпуклых тел можно составить выпуклое тело так, чтобы ни одно из них нельзя было выдвинуть, придумал ту самую задачу для Московской олимпиады.

История имела занятное продолжение. Когда я был в Израиле в мае 2000 года, нашел бывшего научного руководителя по аспирантуре МГИ. На какую тему сделать доклад? Пришла идея. Известно, что прочность материала на микроуровне более чем на три порядка выше его прочности на макроуровне[2]. Однако если сделать материал зернистым так, чтобы зерна заклинили друг друга, то трещина, зародившись в зерне, остановится на его поверхности и не будет расти дальше. Если зерна маленькие, можно добиться того, чтобы процентное содержание «плохих» зерен (т.е. зерен, содержащих зародыш – микротрещину) было небольшим. Поэтому возникает возможность создавать композитные материалы, в которых плохо распространяются трещины. Они могут выдерживать высокое давление и обладают другими интересными свойствами. Данная идея заинтересовала специалистов. Ими были предложены разнообразные формы и расположения зерен, исследованы различные возможности их применения (см. список литературы). В качестве примера на рисунке 14 показано разрушение сплошной пластины, а на рисунке 15 – разрушение составной блочной структуры.

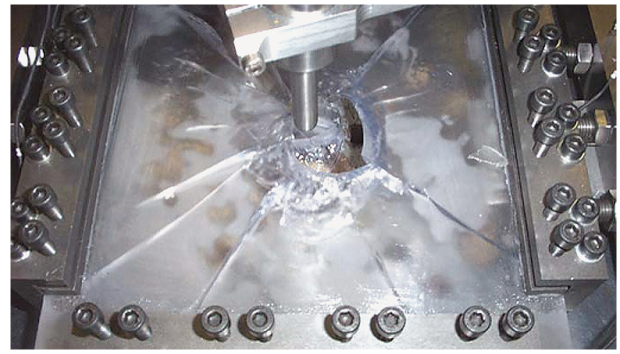


Рис. 14

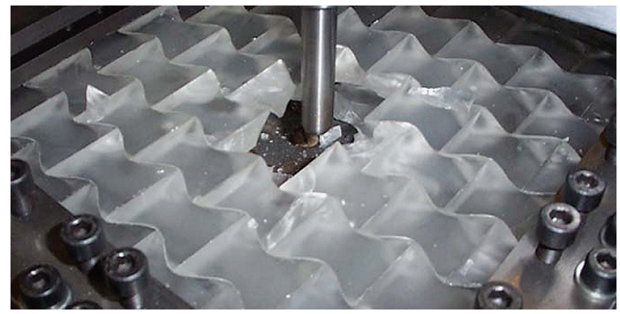


Рис. 15

Оказалось, что вопросы, связанные с пространственной организацией структурных элементов при создании композитных материалов, в должной мере не исследованы, не говоря уже об эффекте самозаклинивания зерен. В данный момент ведется работа вместе с материаловедами и специалистами по механике. Теория самозаклинивающихся структур изложена в статье [3].

[2] *Об этом можно прочитать, например, в статье И.И.Кикоина «Абрам Федорович Иоффе», опубликованной в выпуске 106 «Библиотечки «Квант», с.211–212.*

Эта статья написана по итогам совместной деятельности с А.Дыскиным, И.Ивановым-Погодаевым, Ю.Эстриным, Е.Пастернак. Всем им автор выражает свою благодарность.

Литература

1. *Гальперин Г.А.* Непрерывные движения в пространстве конфигураций твердых звездчатых тел. (Успехи математических наук, 1985, 40:5(245), 251–252)

2. *Канель А.Я.* История одной олимпиадной задачи. (Математическое просвещение, 2001, вып. 5, 207–208)

3. *Kanel-Belov A.J., Dyskin A.V., Estrin Y., Pasternak E., Ivanov I.A.* Interlocking of convex polyhedra: towards a geometric theory of fragmented solids. (Mosc. Math. Journ. to appear)

4. *Dyskin A.V., Estrin Y., Kanel-Belov A.J., Pasternak E.* A new concept in design of materials and structures: Assemblies of interlocked tetrahedron-shaped elements. (Scripta Materialia, 2001, 44, 2689–2694)

5. *Dyskin A.V., Estrin Y., Kanel-Belov A.J., Pasternak E.* Toughening by fragmentation – How topology helps. (Advanced Engineering Materials, 2001, 3, Issue 11, 885–888)

6. *Dyskin A.V., Estrin Y., Kanel-Belov A.J., Pasternak E.* Topological interlocking of platonic solids: A way to new materials and structures. (Phil. Mag. Letters 2003, Vol.83, No. 3, 197–203)

7. *Estrin Y., Dyskin A.V., Pasternak E., Khor H.C., Kanel-Belov A. J.* Topological interlocking of protective tiles for Space Shuttle. (Phil. Mag. Letters, 2003, 83, 351–355)

8. *Dyskin A.V., Estrin Y., Pasternak E., Khor H.C., Kanel-Belov A. J.* Fracture resistant structures based on topological interlocking with non-planar contacts. (Advanced Engineering Materials, 2003, 5, No.3, 116–119)

ИНТЕРВЬЮ С А.КУЗНЕЦОВЫМ

14 июля 2008 года в Амстердаме на Европейском математическом конгрессе наш соотечественник, сотрудник Математического института им. В.А.Стеклова РАН Александр Геннадьевич Кузнецов получил премию Европейского математического общества (ЕМО) для молодых математиков.

Предлагаем вашему вниманию беседу Александра Геннадьевича с членом редколлегии нашего журнала Николаем Петровичем Долбилиным.

1. *Расскажите об истории премии ЕМО для молодых ученых. Кто из наших ученых ее удостаивался?*

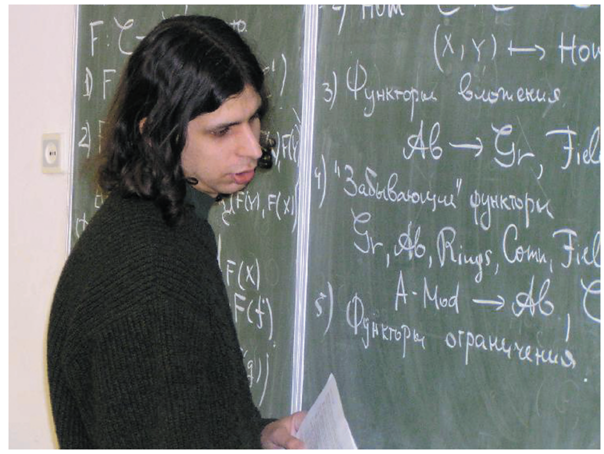
Премия Европейского математического общества является аналогом самой престижной международной математической премии – медали Филдса (как известно, Нобелевская премия математикам не вручается), поэтому естественно было бы вначале сказать пару слов о ней. Начиная с 1897 года раз в каждые четыре года проводится Международный конгресс математиков, на котором специально выбранная комиссия, состоящая из самых известных математиков, выбирает четырех лауреатов (иногда их может быть и меньше), которым и вручаются медали. Критерий выбора очень простой – награды удостаиваются ученые, работы которых внесли наиболее значимый вклад в развитие математики. При этом есть ограничение на возраст – рассматриваются только математики моложе 40 лет.

Шестнадцать лет назад по образу и подобию Международного математического союза было создано Европейское математическое общество, которое, естественно, учредило свой аналог медали Филдса. Однако между этими двумя наградами есть существенные различия. Во-первых, премия ЕМО вручается математикам не старше 35 лет. Во-вторых, претенденты должны являться европейцами (в довольно мягком смысле – либо по рождению, либо по гражданству, либо по месту работы). Наконец, премий ЕМО значительно больше – на каждом конгрессе (которые тоже проходят раз в четыре года, в точности посередине между международными конгрессами) присуждается 10 премий.

Поскольку премия ЕМО вручается относительно недавно, а ограничение по возрасту довольно жесткое, фамилии лауреатов не слишком на слуху. Пожалуй, наиболее известен Максим Концевич, получивший премию в 1992 году.

2. *Какие Ваши работы были удостоены этой премии? Можно ли рассказать читателям «Кванта» о них и, вообще, о Ваших научных интересах?*

Я занимаюсь алгебраической геометрией. Это область математики, находящаяся на стыке алгебры и геометрии (что следует из названия), но при этом имеющая очень тесные связи с другими математическими дисциплинами и даже с физикой. Алгебраическая геометрия изучает свойства алгебраических многообразий, т.е. тел (геометрия!), которые можно задать полиномиальными уравнениями (алгебра!). Простейшие алгебраические многообразия изучаются еще в школе – это точка, прямая, плоскость, трехмерное пространство. Можно также рассматривать пространства более высоких размерностей. Окружность, эллипс, гипербола и парабола также являются алгебраическими многообразиями (так как задаются на плоскости квадратичными уравнениями). Более сложные многообразия получаются рассмотрением большего числа уравнений более высокой степени в пространствах более высокой размерности (например – пересечение эллипсоида и гиперболического параболоида в трехмерном пространстве). Оказывается, многие геометрические свойства алгебраических многообразий можно выражать



Александр Кузнецов читает лекцию в Независимом московском университете

через разные связанные с ними алгебраические структуры. Одной из таких структур является производная категория когерентных пучков – основной объект изучения в моих работах.

3. *Как Вы стали математиком? Какова роль семьи, школы, возможно, математических олимпиад, дополнительной литературы, «Кванта»? Кто из математиков-профессионалов оказал на Вас решающее влияние?*

Как правило, математиком становятся в результате обучения на математическом отделении какого-либо университета или института (случается, правда, что математиками становились люди, получившие, скажем, физическое образование). В моем случае таковым стал механико-математический факультет МГУ. Но, конечно, все началось со школы. Первые семь лет я учился в обычной школе (в 5 минутах от дома), затем перешел в математическую школу № 57, где провел три замечательных года (в то время в школе учились 10 лет, а не 11, как сейчас).

То, что я стану математиком, я понял довольно рано. Может, я и не чувствовал поначалу к математике особого интереса (трудно испытывать интерес к науке, если совершенно не понимаешь, в чем она состоит), но, по крайней мере, математика мне всегда очень легко давалась. Например, в последний год перед школой я много болел (постоянно простужался) и поэтому подолгу сидел дома. Мне в руки попался учебник математики для первого класса, и я его почти весь прорешал. К задачам у меня было отношение как к интересным головоломкам. Через пару лет после этого (учась во втором классе) я нашел задачник по физике, который меня очень удивил тем, что там я совершенно никаких задач решить не мог. Там было много непонятных слов («параллельно», «перпендикулярно» и т.п.). Я помню, меня это очень задело, и я в течение нескольких следующих лет регулярно его доставал и смотрел, стало ли мне что-нибудь понятнее. Когда же я начал понимать (кажется, это было уже в 6 классе), мне это очень понравилось, и я, наверное в течение года, перечитал весь школьный курс физики. Конечно, учебники 9 и 10 класса были непонятны (там встречались совершенно загадочные для меня на тот момент понятия производной, а также дифференциальные уравнения), но я к тому моменту научился, пропуская непонятное, получать тем не менее удовольствие от такого чтения. В тот момент я был почти уверен, что стану физиком.

Перелом в моей жизни произошел довольно случайно. Однажды (я учился в тот момент в 7 классе) я уже собирался

(Продолжение см. на с. 31)