прибавление числа 2008 пять раз равносильно прибавлению числа 10040. Если же мы прибавим к числу A число 10040 всего 10^n раз, то результатом будет число, которое получается выписыванием подряд чисел 10040 и A и, тем самым, начинается на 1. Значит, прибавив к числу A число 2008 всего $5 \cdot 10^n$ раз, мы получим число, начинающееся на 1.
Попробуйте решить более общую задачу: если даны любые натуральные числа A и B и мы прибавляем к числу A число B, затем к результату снова прибавляем число B и так далее, то в какой-то момент мы обязательно получим число, начинающееся на 1.

4. Нет, нельзя.
Предположим, что такой срез возможен. У отпиленного кусочка четыре грани: одна – это треугольник со сторонами 2, 3, 4, а три других – прямоугольные треугольники с гипотенузами 2, 3 и 4. Пусть a и b – катеты треугольника с гипотенузой 4. Ясно, что один из этих катетов не больше 2 (поскольку является также катетом треугольника с гипотенузой 2), а другой – не больше 3 (аналогично). По теореме Пифагора должно быть выполнено равенство $a^2 + b^2 = 4^2 = 16$. С другой стороны, $a^2 + b^2 < 2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$ – противоречие. Значит, такой срез невозможен.

5. Заметим, что среди имеющихся у нас гирь три самые маленькие уравновешивают одну самую большую. Значит, это единственный способ уравновесить одну гирю тремя (в любых других случаях чаша с тремя гирями перевесит чашу с одной).
Тогда первым взвешиванием кладем на одну чашу весов гири с надписями 1 г, 2 г, 3 г, а на вторую чашу – гирю с надписью 6 г. Если весы не будут в равновесии, задача решена – какие-то надписи перепутаны. Если же весы в равновесии, то гиря с надписью 6 г действительно весит 6 г, а гири с надписями 1 г, 2 г, 3 г – действительно гири с этими массами (но, может быть, перепутаны между собой).
Следующим взвешиванием кладем на первую чашу весов гири с надписями 1 г и 6 г, а на вторую чашу – гири с надписями 3 г и 5 г. Ясно, что масса гирь на первой чаше не меньше 7 г, а на второй – не больше 8 г. Поэтому, если вторая чаша перевешивает первую, то действительно на первой чаше 7 г, на второй 8 г, и нетрудно видеть, что надписи на всех гирях верны. В противном случае какие-то надписи перепутаны.

ЗАДАЧИ

(см. с.24)

1. Проведем отрезок так, чтобы один из знаков «+» превратился в цифру 4, и получим верное равенство (рис.2):

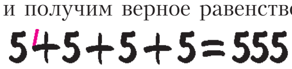

Рис. 2

2. Вычтем 50 из каждого числа, которое больше 50. По условию ни одна из разностей не равна ни одному из 25 чисел, которые не превосходят 50. Поэтому вместе с ними разности дают 50 различных натуральных чисел, которые не превосходят 50, т.е. это все числа от 1 до 50. Их сумма равна 51×25, а сумма всех исходных чисел равна, стало быть, $51 \times 25 + 50 \times 25 = 101 \times 25 = 2525$.

3. Расположим коробки в ряд так, чтобы число карандашей в них возрастало слева направо. Заметим, что тогда в самой левой коробке минимум один карандаш, во второй слева — минимум два, ..., в десятой слева — минимум 10 карандашей. Из самой левой коробки возьмем любой лежащий в ней карандаш. Поскольку во второй коробке лежат карандаши минимум двух разных цветов, там найдется карандаш не того цвета, что мы взяли из первой коробки. Возьмем его. В третьей коробке лежат карандаши минимум трех разных цветов. Поэтому там найдется карандаш, цвет которого отличается от цветов обоих уже выбранных. Возьмем его. Действуя так и дальше, мы выберем искомые 10 карандашей разных цветов.

4. $a = 2$, $b = 1$, $c = 3$.
Если a не меньше трех, то дробь $\frac{1}{a}$ не больше $\frac{1}{3}$, а две другие дроби меньше $\frac{1}{3}$, и сумма трех дробей меньше 1. Поэтому a меньше 3. Но a не может равняться 1 – тогда сумма дробей будет больше 1. Значит, $a = 2$, и нам надо найти все такие числа b и c, что $\frac{1}{2+b} + \frac{1}{2+b+c} = \frac{1}{2}$. Далее рассуждаем аналогично. Если b не меньше 2, то дробь $\frac{1}{2+b}$ не больше $\frac{1}{4}$, а другая дробь меньше $\frac{1}{4}$, и их сумма не может равняться $\frac{1}{2}$. Поэтому $b = 1$. Тогда $\frac{1}{3+c} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$, откуда $c = 3$.

5. Пусть O – середина стороны AB (рис.3). Проведем из точки A прямую, перпендикулярную DO, а из точки B проведем прямую, перпендикулярную CO. Пусть X – точка пересечения этих прямых. Поскольку угол DOC – прямой, DO параллельна BX, а CO параллельна AX, и треугольник AXB – прямоугольный. Так как O – середина AB, то OD будет серединным перпендикуляром к AX, а OC будет серединным перпендикуляром к BX. Поэтому $AD = XD$ и $BC = XC$. Значит, $AD + BC = XD + XC \geq CD$ по неравенству треугольника.

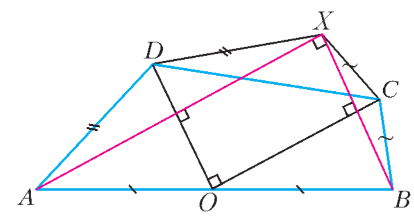

Рис. 3

ЗОЛОТОЕ СЕЧЕНИЕ И ЧИСЛА ФИБОНАЧЧИ

1. По теореме Пифагора $AC = \frac{\sqrt{5}}{2} AB$. Далее,
$AM = AK = AC - BC = \frac{\sqrt{5}-1}{2} AB = \frac{1}{\varphi} AB$. Значит, $\frac{AB}{AM} = \varphi$.

2. Непосредственный подсчет показывает, что $\frac{AE}{OA} = \sqrt{3-\varphi}$.
С другой стороны, отношение стороны правильного пятиугольника к радиусу описанной окружности равно той же самой величине $2\sin 36° = \sqrt{3-\varphi}$. Значит, отрезок AE равен стороне правильного пятиугольника, вписанного в окружность с радиусом OA.

3. Равнобедренный прямоугольный треугольник, два золотых треугольника и треугольник с углами $\frac{540°}{7}$, $\frac{540°}{7}$, $\frac{180°}{7}$.

4. При раскрытии скобок в числителе правой части формулы (6) члены с четными степенями $\sqrt{5}$ взаимно уничтожатся. Остальные члены имеют вид $\sqrt{5}q$, где q – рациональное число. После сокращения с $\sqrt{5}$ в знаменателе получаем рациональное число.

5. Нетрудно доказать по индукции, что n-й член обобщенной последовательности Фибоначчи $f_n(a,b)$ выражается через обычную последовательность Фибоначчи f_n следующей формулой:

$$f_n(a,b) = f_{n-2} \cdot a + f_{n-1} \cdot b\ .$$

Сочетая эту формулу с формулой Бинэ, получаем требуемое выражение.

6. Последовательность (10) является монотонной и ограничена сверху числом φ. Неравенство $a_{n-1} < a_n < \varphi$ доказывается по индукции. Шаг индукции заключается в добавлении еди-

ницы и извлечении квадратного корня из всех трех (положительных) частей неравенства. Согласно теореме Больцано–Вейерштрасса, последовательность a_n сходится.
Последовательность (11) распадается на две подпоследовательности – с нечетными и четными номерами. Первая является монотонно возрастающей и ограниченной сверху числом φ, а вторая – монотонно убывающей и ограниченной снизу числом φ. Оба эти факта доказываются одновременно по индукции. База индукции сводится к простой проверке неравенства $b_1 < b_3 < \varphi$. Шаг индукции заключается в применении к двойному неравенству $b_n < b_{n+2} < \varphi$ (соответственно, $b_n > b_{n+2} > \varphi$) двух операций – взятия обратной величины и добавления единицы. Первая из этих операций меняет знак неравенства. Получаем: $b_{n+1} > b_{n+3} > \varphi$ (соответственно, $b_{n+1} < b_{n+3} < \varphi$). Следовательно, каждая из этих подпоследовательностей сходится. Предел каждой из них положителен и должен удовлетворять уравнению $x = 1 + \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}$, которое сводится к уже знакомому нам квадратному уравнению $x^2 - x - 1 = 0$. Значит, оба предела совпадают и равны φ, а следовательно, к этому же пределу сходится и вся последовательность.

7. Примените метод математической индукции.

ДВИЖЕНИЕ ПРОВОДНИКА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

1. $\omega = \dfrac{\mathcal{E}_{\max}}{\Phi_{\max}} = 60$ рад/с. **2.** $\mathcal{E}_{\text{инд}} = \sqrt{B_{\text{г}}^2 + B_{\text{в}}^2}\, vl = 250$ мВ.

3. $I = \dfrac{3}{7}\dfrac{Bv}{\rho_l} = 15$ мА.

4. $v = \dfrac{mgR(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{B^2l^2\cos\alpha(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)} = 2$ м/с^2.

5. $v = \dfrac{mg(R/2 + r)}{B^2l^2} = 6$ м/с. **6.** $v = \dfrac{\mathcal{E}}{Bl} - \dfrac{mgr}{B^2l^2} = 5$ м/с.

7. $a = \dfrac{mg\sin\alpha}{m + CB^2l^2\cos^2\alpha} = 2$ м/с^2. **8.** $x_{\max} = \dfrac{v_0\sqrt{mL}}{Bl} = 0{,}4$ м.

XXXIX МЕЖДУНАРОДНАЯ ФИЗИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

Задача 1

1.1. $TG = 0{,}016$ м. **1.2.** $\alpha_1 = 20{,}6°$, $\alpha_2 = 30°$.
1.3. $m_1 = 0{,}61$ кг, $\beta = 23{,}6°$. **2.1.** См. рис.4.
2.2. Площадь под графиком $\mu(\alpha)$ численно равна совершенной работе. Тогда $W_{\text{t}} = S_{OAB} - S_{OBCDFO}$, а $W_{\text{p}} = S_{OEDFO}$.

2.3. $\alpha_0 = 34{,}7°$, $W_{\text{p}} \approx 2{,}6$ Дж.
3.1.1. Равновесие устойчиво.
3.1.2. $\mu = -47{,}2\Delta\alpha$ (Н · м).
3.1.3. $\dfrac{d^2\Delta\alpha}{dt^2} = -47\Delta\alpha$, $\tau = 3{,}2$ с.
3.2. $\Phi_1 = 0{,}23$ кг/с.
3.3. $\Phi_2 = 0{,}7$ кг/с.

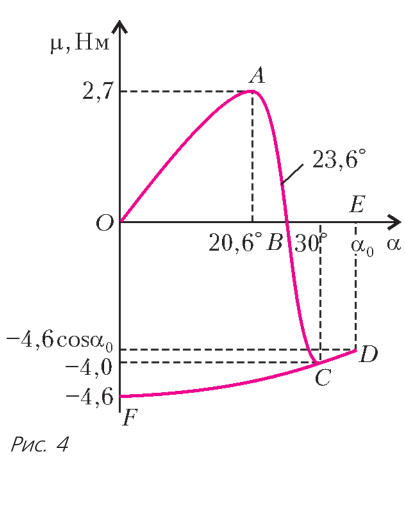

Рис. 4

Задача 2

1.1. См. рис.5.
1.2. $\varphi = \arcsin\dfrac{1}{\beta n}$.
2. Кольцо имеет радиус $r = f\theta$, его центр находится на расстоянии $f\alpha$ от главной оптической оси.

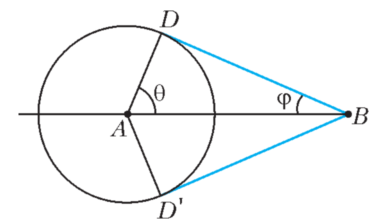

Рис. 5

3.1. $p_{\min}$ равно 16 атм для протонов, 4,6 атм для каонов, 0,36 атм для пионов.
3.2. $p_{1/2} = 6$ атм, $\theta_{\text{к}} = 1{,}6°$, $\theta_{\pi} = 2\theta_{\text{к}} = 3{,}2°$; мы не сможем наблюдать кольцевого изображения для протонов.
4.1. $\dfrac{\Delta\theta_{\text{к}}}{\Delta P} = 0{,}51\dfrac{1°}{\text{ГэВ}/c}$, $\dfrac{\Delta\theta_{\pi}}{\Delta P} = 0{,}02\dfrac{1°}{\text{ГэВ}/c}$.
4.2. $\Delta P < 0{,}3$ ГэВ/c.
5.1. $T_{\min} = 0{,}517Mc^2$.
5.2. Для α-частиц $T_{\min} = 1{,}96$ ГэВ, для электронов $T_{\min} = 0{,}264$ ГэВ.
6.1. $\delta\theta = \dfrac{\delta n}{\theta} = 0{,}033°$. **6.2.1.** $0{,}017°;\ 0{,}006°$.
6.2.2. Красный, белый и синий.

Задача 3

1.1. $p(z) = p(0)\cdot e^{-\frac{Mg}{RT_0}z}$.
1.2.1. $p(z) = p(0)\cdot\left(1 - \dfrac{\Lambda z}{T(0)}\right)^{\frac{Mg}{R\Lambda}}$.
1.2.2. $\Lambda > \dfrac{Mg}{R} = 0{,}034$ К/м.
2.1. $G = \dfrac{\gamma - 1}{\gamma}\dfrac{Mg}{R}\dfrac{T_{\text{p}}}{T}$.
2.2.1. $\Gamma = \dfrac{Mg}{C_p}$.
2.2.2. $\Gamma = 0{,}00978$ К/м.
2.2.3. $T(z) = T(0) - \Gamma z$.
2.3. $T_{\text{p}}(z) = T_{\text{p}}(0)\cdot\left(\dfrac{T(0) - \Lambda z}{T(0)}\right)^{\frac{\Gamma}{\Lambda}}$.
2.4. $T_{\text{p}}(z) \approx T_{\text{p}}(0) - \Gamma z$.
3.1. При $\Lambda > \Gamma$ атмосфера нестабильна, при $\Lambda < \Gamma$ атмосфера стабильна, при $\Lambda = \Gamma$ атмосфера нейтральна.
3.2. $h = \dfrac{1}{\Lambda}\left(T(0) - \left(\dfrac{(T(0))^{\Gamma}}{(T_{\text{p}}(0))^{\Lambda}}\right)^{1/(\Gamma-\Lambda)}\right)$.
4.1. $T_{\text{p}}(96\text{ м}) = 294{,}04$ К ≈ 21 °С, $T_{\text{p}}(119\text{ м}) = 291{,}81$ К $\approx 20{,}8$ °С.
4.2. $H = 142$ м, $T_{\text{p}}(H) = 293{,}6$ К $= 20{,}6$ °С.
5.1. $\dfrac{dC(t)}{dt} + C(t)\dfrac{u}{W} = \dfrac{M}{LWH}$.
5.2. $C(t) = \dfrac{M}{LHu}\left(1 - \exp\left(-\dfrac{ut}{W}\right)\right)$.
5.3. $C = 2{,}3$ мг/м^3.

МОСКОВСКАЯ СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО ФИЗИКЕ

1. Столкновение произойдет.
2. $L = \sqrt{6lR}$.
3. $P_{\max} = \dfrac{31}{231}mg$; $\Delta r = 0{,}001R$.

4. $L = \dfrac{R - r}{\sin\alpha}$.

5. КПД увеличивается на $\dfrac{1}{7}$.

6. $A^* = -A + \dfrac{q^2 R}{4\pi\varepsilon_0 l^2}$.

7. $B = \sqrt{\dfrac{1,26 mR}{a^2 t}}$.

8. $16I_0$; интенсивность не изменится, а фаза изменится на $\pi/2$.

НАПЕЧАТАНО В 2008 ГОДУ

Квант журнал ©

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

С.А.Дориченко, А.А.Егоров, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

В.Н.Власов, Д.Н.Гришукова, В.В.Иванюк, А.Е.Пацхверия, М.В.Сумнина

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:
119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»
Тел.: 930-56-48
E-mail: admin@kvant.info, math@kvant.info, phys@kvant.info
Сайт: kvant.info

Отпечатано в ОАО ордена Трудового Красного Знамени «Чеховский полиграфический комбинат»
142300 г.Чехов Московской области,
Сайт: www.chpk.ru E-mail: marketing@chpk.ru
Факс: 8(49672) 6-25-36, факс: 8(499) 270-73-00
Отдел продаж услуг многоканальный: 8(499) 270-73-59