

прибавление числа 2008 пять раз равносильно прибавлению числа 10040. Если же мы прибавим к числу A число 10040 всего 10^n раз, то результатом будет число, которое получается выписыванием подряд чисел 10040 и A и, тем самым, начинается на 1. Значит, прибавив к числу A число 2008 всего $5 \cdot 10^n$ раз, мы получим число, начинающееся на 1.

Попробуйте решить более общую задачу: если даны любые натуральные числа A и B и мы прибавляем к числу A число B , затем к результату снова прибавляем число B и так далее, то в какой-то момент мы обязательно получим число, начинающееся на 1.

4. Нет, нельзя.

Предположим, что такой срез возможен. У отпиленного кусочка четыре грани: одна – это треугольник со сторонами 2, 3, 4, а три других – прямоугольные треугольники с гипотенузами 2, 3 и 4. Пусть a и b – катеты треугольника с гипотенузой 4. Ясно, что один из этих катетов не больше 2 (поскольку является также катетом треугольника с гипотенузой 2), а другой – не больше 3 (аналогично). По теореме Пифагора должно быть выполнено равенство $a^2 + b^2 = 4^2 = 16$. С другой стороны, $a^2 + b^2 < 2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$ – противоречие. Значит, такой срез невозможен.

5. Заметим, что среди имеющихся у нас гирь три самые маленькие уравновешивают одну самую большую. Значит, это единственный способ уравновесить одну гирию тремя (в любых других случаях чаша с тремя гириями перевесит чашу с одной).

Тогда первым взвешиванием кладем на одну чашу весов гири с надписями 1 г, 2 г, 3 г, а на вторую чашу – гирию с надписью 6 г. Если весы не будут в равновесии, задача решена – какие-то надписи перепутаны. Если же весы в равновесии, то гирия с надписью 6 г действительно весит 6 г, а гири с надписями 1 г, 2 г, 3 г – действительно гири с этими массами (но, может быть, перепутаны между собой).

Следующим взвешиванием кладем на первую чашу весов гири с надписями 1 г и 6 г, а на вторую чашу – гири с надписями 3 г и 5 г. Ясно, что масса гирь на первой чаше не меньше 7 г, а на второй – не больше 8 г. Поэтому, если вторая чаша перевешивает первую, то действительно на первой чаше 7 г, на второй 8 г, и нетрудно видеть, что надписи на всех гириях верны. В противном случае какие-то надписи перепутаны.

ЗАДАЧИ

(см. с.24)

1. Проведем отрезок так, чтобы один из знаков «+» превратился в цифру 4, и получим верное равенство (рис.2):

$$545 + 5 + 5 = 555$$

Рис. 2

2. Вычтем 50 из каждого числа, которое больше 50. По условию ни одна из разностей не равна ни одному из 25 чисел, которые не превосходят 50. Поэтому вместе с ними разности дают 50 различных натуральных чисел, которые не превосходят 50, т.е. это все числа от 1 до 50. Их сумма равна 51×25 , а сумма всех исходных чисел равна, стало быть, $51 \times 25 + 50 \times 25 = 101 \times 25 = 2525$.

3. Расположим коробки в ряд так, чтобы число карандашей в них возрастало слева направо. Заметим, что тогда в самой левой коробке минимум один карандаш, во второй слева – минимум два, ..., в десятой слева – минимум 10 карандашей. Из самой левой коробки возьмем любой лежащий в ней карандаш. Поскольку во второй коробке лежат карандаши минимум двух разных цветов, там найдется карандаш не того цвета, что мы взяли из первой коробки. Возьмем его. В третьей коробке лежат карандаши минимум трех разных цветов.

Поэтому там найдется карандаш, цвет которого отличается от цветов обоих уже выбранных. Возьмем его. Действуя так и дальше, мы выберем искомые 10 карандашей разных цветов.

4. $a = 2, b = 1, c = 3$.

Если a не меньше трех, то дробь $\frac{1}{a}$ не больше $\frac{1}{3}$, а две другие дроби меньше $\frac{1}{3}$, и сумма трех дробей меньше 1. Поэтому a меньше 3. Но a не может равняться 1 – тогда сумма дробей будет больше 1. Значит, $a = 2$, и нам надо найти все такие числа b и c , что $\frac{1}{2+b} + \frac{1}{2+b+c} = \frac{1}{2}$. Далее рассуждаем аналогично. Если b не меньше 2, то дробь $\frac{1}{2+b}$ не больше $\frac{1}{4}$, а другая дробь меньше $\frac{1}{4}$, и их сумма не может равняться $\frac{1}{2}$. Поэтому $b = 1$. Тогда $\frac{1}{3+c} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$, откуда $c = 3$.

5. Пусть O – середина стороны AB (рис.3). Проведем из точки A прямую, перпендикулярную DO , а из точки B проведем прямую, перпендикулярную CO . Пусть X – точка пересечения этих прямых. Поскольку угол DOC – прямой, DO параллельна BX , а CO параллельна AX , и треугольник AXB – прямоугольный. Так как O – середина AB , то OD будет средним перпендикуляром к AX , а OC будет средним перпендикуляром к BX .

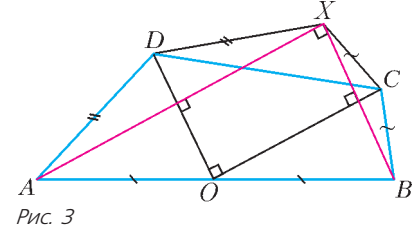


Рис. 3

Поэтому $AD = XD$ и $BC = XC$. Значит, $AD + BC = XD + XC \geq CD$ по неравенству треугольника.

ЗОЛОТОЕ СЕЧЕНИЕ И ЧИСЛА ФИБОНАЧЧИ

1. По теореме Пифагора $AC = \frac{\sqrt{5}}{2} AB$. Далее,

$$AM = AK = AC - BC = \frac{\sqrt{5}-1}{2} AB = \frac{1}{\phi} AB. \text{ Значит, } \frac{AB}{AM} = \phi.$$

2. Непосредственный подсчет показывает, что $\frac{AE}{OA} = \sqrt{3-\phi}$.

С другой стороны, отношение стороны правильного пятиугольника к радиусу описанной окружности равно той же самой величине $2 \sin 36^\circ = \sqrt{3-\phi}$. Значит, отрезок AE равен стороне правильного пятиугольника, вписанного в окружность с радиусом OA .

3. Равнобедренный прямоугольный треугольник, два золотых треугольника и треугольник с углами $\frac{540^\circ}{7}, \frac{540^\circ}{7}, \frac{180^\circ}{7}$.

4. При раскрытии скобок в числителе правой части формулы (6) члены с четными степенями $\sqrt{5}$ взаимно уничтожаются.

Остальные члены имеют вид $\sqrt{5}q$, где q – рациональное число. После сокращения с $\sqrt{5}$ в знаменателе получаем рациональное число.

5. Нетрудно доказать по индукции, что n -й член обобщенной последовательности Фибоначчи $f_n(a,b)$ выражается через обычную последовательность Фибоначчи f_n следующей формулой:

$$f_n(a,b) = f_{n-2} \cdot a + f_{n-1} \cdot b.$$

Сочетая эту формулу с формулой Бинэ, получаем требуемое выражение.

6. Последовательность (10) является монотонной и ограничена сверху числом ϕ . Неравенство $a_{n-1} < a_n < \phi$ доказывается по индукции. Шаг индукции заключается в добавлении еди-

ницы и извлечении квадратного корня из всех трех (положительных) частей неравенства. Согласно теореме Больцано–Вейерштрасса, последовательность a_n сходится. Последовательность (11) распадается на две подпоследовательности – с нечетными и четными номерами. Первая является монотонно возрастающей и ограниченной сверху числом Φ , а вторая – монотонно убывающей и ограниченной снизу числом Φ . Оба эти факта доказываются одновременно по индукции. База индукции сводится к простой проверке неравенства $b_1 < b_3 < \Phi$. Шаг индукции заключается в применении к двойному неравенству $b_n < b_{n+2} < \Phi$ (соответственно, $b_n > b_{n+2} > \Phi$) двух операций – взятия обратной величины и добавления единицы. Первая из этих операций меняет знак неравенства. Получаем: $b_{n+1} > b_{n+3} > \Phi$ (соответственно, $b_{n+1} < b_{n+3} < \Phi$). Следовательно, каждая из этих подпоследовательностей сходится. Предел каждой из них положителен и должен удовлетворять уравнению $x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}$, которое сво-

дится к уже знакомому нам квадратному уравнению $x^2 - x - 1 = 0$. Значит, оба предела совпадают и равны Φ , а следовательно, к этому же пределу сходится и вся последовательность.

7. Примените метод математической индукции.

ДВИЖЕНИЕ ПРОВОДНИКА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

- 1. $\omega = \frac{\mathcal{E}_{\max}}{\Phi_{\max}} = 60 \text{ рад/с}$. 2. $\mathcal{E}_{\text{инд}} = \sqrt{B_r^2 + B_b^2} v l = 250 \text{ мВ}$.
- 3. $I = \frac{3 B v}{7 \rho_l} = 15 \text{ мА}$.
- 4. $v = \frac{mgR(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}{B^2 l^2 \cos \alpha (\cos \alpha + \mu \sin \alpha)} = 2 \text{ м/с}^2$.
- 5. $v = \frac{mg(R/2 + r)}{B^2 l^2} = 6 \text{ м/с}$. 6. $v = \frac{\mathcal{E}}{Bl} - \frac{mgr}{B^2 l^2} = 5 \text{ м/с}$.
- 7. $a = \frac{mg \sin \alpha}{m + CB^2 l^2 \cos^2 \alpha} = 2 \text{ м/с}^2$. 8. $x_{\max} = \frac{v_0 \sqrt{mL}}{Bl} = 0,4 \text{ м}$.

XXXIX МЕЖДУНАРОДНАЯ ФИЗИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

Задача 1

- 1.1. $TG = 0,016 \text{ м}$. 1.2. $\alpha_1 = 20,6^\circ$, $\alpha_2 = 30^\circ$.
- 1.3. $m_1 = 0,61 \text{ кг}$, $\beta = 23,6^\circ$. 2.1. См. рис.4.
- 2.2. Площадь под графиком $\mu(\alpha)$ численно равна совершенной работе. Тогда $W_t = S_{OAB} - S_{OBCDFO}$, а $W_p = S_{OEDFO}$.

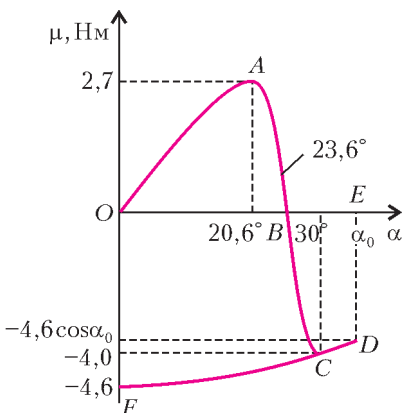


Рис. 4

- 2.3. $\alpha_0 = 34,7^\circ$, $W_p \approx 2,6 \text{ Дж}$.
- 3.1.1. Равновесие устойчиво.
- 3.1.2. $\mu = -47,2 \Delta \alpha (\text{Н} \cdot \text{м})$.
- 3.1.3. $\frac{d^2 \Delta \alpha}{dt^2} = -47 \Delta \alpha$, $\tau = 3,2 \text{ с}$.
- 3.2. $\Phi_1 = 0,23 \text{ кг/с}$.
- 3.3. $\Phi_2 = 0,7 \text{ кг/с}$.

Задача 2

- 1.1. См. рис.5.
- 1.2. $\varphi = \arcsin \frac{1}{\beta n}$.
- 2. Кольцо имеет радиус $r = f\theta$, его центр нахо-

дится на расстоянии $f\alpha$ от главной оптической оси.

- 3.1. p_{\min} равно 16 атм для протонов, 4,6 атм для каонов, 0,36 атм для пионов.

- 3.2. $p_{1/2} = 6 \text{ атм}$, $\theta_\kappa = 1,6^\circ$, $\theta_\pi = 2\theta_\kappa = 3,2^\circ$; мы не сможем наблюдать кольцевого изображения для протонов.

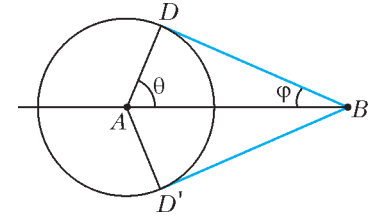


Рис. 5

4.1. $\frac{\Delta \theta_\kappa}{\Delta P} = 0,51 \frac{1^\circ}{\text{ГэВ/с}}$, $\frac{\Delta \theta_\pi}{\Delta P} = 0,02 \frac{1^\circ}{\text{ГэВ/с}}$.

4.2. $\Delta P < 0,3 \text{ ГэВ/с}$.

5.1. $T_{\min} = 0,517 \text{ Мс}^2$.

5.2. Для α -частиц $T_{\min} = 1,96 \text{ ГэВ}$, для электронов $T_{\min} = 0,264 \text{ ГэВ}$.

6.1. $\delta\theta = \frac{\delta n}{\theta} = 0,033^\circ$.

6.2.1. $0,017^\circ; 0,006^\circ$.

6.2.2. Красный, белый и синий.

Задача 3

1.1. $p(z) = p(0) \cdot e^{-\frac{Mg}{RT_0} z}$.

1.2.1. $p(z) = p(0) \cdot \left(1 - \frac{\Lambda z}{T(0)}\right)^{\frac{Mg}{R\Lambda}}$.

1.2.2. $\Lambda > \frac{Mg}{R} = 0,034 \text{ К/м}$.

2.1. $G = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{Mg T_p}{R T}$.

2.2.1. $\Gamma = \frac{Mg}{C_p}$.

2.2.2. $\Gamma = 0,00978 \text{ К/м}$.

2.2.3. $T(z) = T(0) - \Gamma z$.

2.3. $T_p(z) = T_p(0) \cdot \left(\frac{T(0) - \Lambda z}{T(0)}\right)^{\frac{\Gamma}{\Lambda}}$.

2.4. $T_p(z) \approx T_p(0) - \Gamma z$.

3.1. При $\Lambda > \Gamma$ атмосфера нестабильна, при $\Lambda < \Gamma$ атмосфера стабильна, при $\Lambda = \Gamma$ атмосфера нейтральна.

3.2. $h = \frac{1}{\Lambda} \left[T(0) - \left(\frac{(T(0))^\Gamma}{(T_p(0))^\Lambda} \right)^{1/(\Gamma-\Lambda)} \right]$.

4.1. $T_p(96 \text{ м}) = 294,04 \text{ К} \approx 21^\circ \text{C}$,

$T_p(119 \text{ м}) = 291,81 \text{ К} \approx 20,8^\circ \text{C}$.

4.2. $H = 142 \text{ м}$, $T_p(H) = 293,6 \text{ К} = 20,6^\circ \text{C}$.

5.1. $\frac{dC(t)}{dt} + C(t) \frac{u}{W} = \frac{M}{LWH}$.

5.2. $C(t) = \frac{M}{LHu} \left(1 - \exp\left(-\frac{ut}{W}\right) \right)$.

5.3. $C = 2,3 \text{ мг/м}^3$.

МОСКОВСКАЯ СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО ФИЗИКЕ

- 1. Столкновение произойдет.
- 2. $L = \sqrt{6lR}$.
- 3. $P_{\max} = \frac{31}{231} mg$; $\Delta r = 0,001R$.

$$4. L = \frac{R-r}{\sin \alpha}.$$

5. КПД увеличивается на $\frac{1}{7}$.

$$6. A^* = -A + \frac{q^2 R}{4\pi\epsilon_0 l^2}.$$

$$7. B = \sqrt{\frac{1,26mR}{a^2 t}}.$$

8. $16I_0$; интенсивность не изменится, а фаза изменится на $\pi/2$.

НАПЕЧАТАНО В 2008 ГОДУ

	№ журнала с.			№ журнала с.	
Памяти Ю.А.Осипьяна	5 2-я с. обл.		Калейдоскоп «Кванта»		
К 100-летию И.К.Кикоина			Математика		
«Вот Квант, который построил Исаак...» <i>А.Савин</i>	1	3	Бесконечность в задачах	6	32
Из истории газовых центрифуг. <i>С.Романов</i>	3	2	Пифагоровы треугольники	4	«
Нанотехнологии: когда размер имеет значение. <i>К.Богданов</i>	3	6	По порядку становись!	2	«
Об Исааке Константиновиче Кикоине. <i>А.Боровой</i>	2	2	Физика		
О Кикоине, единицах СИ и стандартах. <i>Ю.Брук</i>	1	2	Распространение звука	3	«
Проблема обнаружения ядерных взрывов. <i>Е.Лобиков</i>	4	2	Распространение света	5	«
Теория относительности и теорема Пифагора. <i>Л.Окунь</i>	5	3	Тепловое равновесие	1	«
Ударные волны и детонация. <i>Л.Белопухов</i>	1	4	Школа в «Кванте»		
Физика ядерного взрыва. <i>Л.Белопухов</i>	2	7	Математика		
Физик и инженер. <i>Я.Сморodinский</i>	5	2	О двух параллелограммах в треугольнике. <i>Г.Филипповский</i>	4	34
Статьи по математике			Физика		
Арифметические треугольники. <i>В.Тиморин</i>	6	8	И тележка в гору едет... <i>С.Семиков</i>	5	35
Две знаменитые формулы. <i>В.Вавилов, А.Устинов</i>	2	11	Магнитная сила и закон электромагнитной индукции. <i>Е.Ромишевский, А.Стасенко</i>	5	38
Касающиеся окружности: от Тебо до Фейербаха. <i>В.Протасов</i>	4	10	Механический генератор. <i>В.Дроздов</i>	5	37
Комплексные числа. <i>С.Дориченко</i>	5	11	Можно ли в микроскоп молекулу разглядеть? <i>А.Стасенко</i>	3	39
Множества Жюлиа. <i>Н.Долбилин</i>	1	9	Ракета на водяном паре, или Как студент с Луны улетал. <i>А.Стасенко</i>	3	38
Хроматические числа. <i>А.Райгородский,</i> <i>О.Рубанов, В.Кошелев</i>	3	13	Тема с вариациями. <i>В.Эпштейн</i>	1	34
Статьи по физике			Три эссе на физические темы. <i>Р.Винокур</i>	1	30
Полет и падение спутника Земли. <i>С.Варламов</i>	4	5	Урок близился к завершению... <i>М.Бондаров</i>	3	37
Самая светлая революция и ее творцы. <i>Ю.Носов</i>	6	2	Физический факультатив		
Новости науки			Как шарик о плиту ударился. <i>А.Стасенко</i>	5	40
Триумф фундаментальной науки	4	4	Квантовая телепортация. <i>А.Арутюнов</i>	4	36
Наш календарь			Не пренебрежем трением качения... <i>А.Стасенко</i>	1	36
Лев Давидович Ландау	1	15	Формула любви. <i>Е.Мейлихов</i>	6	25
Задачник «Кванта»			Математический кружок		
Задачи М2071 – М2115, Ф2078 – Ф2122	1 – 6		Два тюремщика. <i>И.Акулич, В.Лецко</i>	5	44
Решения задач М2051 – М2095, Ф2063 – Ф2107	1 – 6		Золотое сечение и числа Фибоначчи. <i>В.Бугаенко</i>	6	29
Победители конкурса «Задачник «Кванта» 2007 года	3	23	О двух велосипедистах и вишневого косточке. <i>В.Протасов</i>	3	41
Вокруг шестиугольника	4	23	О разрезании треугольника на подобные ему. <i>Б.Френкин</i>	4	39
КМШ			Оригами и построения. <i>А.Петрунин</i>	1	38
Задачи	1–6		Лаборатория «Кванта»		
Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»	1, 4, 5, 6		О поющих проводах, или Загадки пружины. <i>А.Сергеев, Н.Жданова, И.Сергачев,</i> <i>Р.Стрюнгис, А.Пятаков</i>	3	45
Победители конкурса имени А.П.Савина «Математика 6–8» 2007/08 учебного года	4	27	Устоит ли наш кораблик? <i>С.Богданов, О.Попов,</i> <i>Д.Тарасов</i>	4	42
Летний турнир имени А.П.Савина «Математика 6–8»	5	29	Практикум абитуриента		
Статьи по математике			Математика		
Дюжина задач о среднем арифметическом. <i>А.Шень</i>	6	23	Будет ЕГЭ по математике. <i>Л.Денищева,</i> <i>Б.Писаревский</i>	2	24
Нет предела совершенству! <i>И.Акулич</i>	3	34	Объем тетраэдра и его частей. <i>Л.Ерганжиева,</i> <i>В.Мирошин</i>	3	50
Призрак Леонардо. <i>И.Акулич</i>	1	26			
Проблемы дележки. <i>В.Уфнарковский</i>	4	28			

	№ журнала	с.
Физика		
Гидростатика в стакане. <i>А.Черноуцан</i>	3	47
Движение проводника в магнитном поле. <i>А.Черноуцан</i>	6	35
ЕГЭ по физике. <i>М.Демидова, А.Черноуцан</i>	2	29
Задачи на смешение идеальных газов. <i>А.Черноуцан</i>	4	45
Потенциальная энергия кулоновского взаимодействия. <i>А.Черноуцан</i>	5	47
Эта «простенькая» кинематика. <i>В.Трояновский</i>	1	40
Варианты вступительных экзаменов 2007 года		
Институт криптографии, связи и информатики Академии ФСБ РФ	2	36
Московский государственный институт электронной техники	2	38
Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова	1	45
Московский государственный технический университет им. Н.Э.Баумана	2	39
Московский инженерно-физический институт	2	40
Новосибирский государственный университет	2	41
Российский государственный педагогический университет им. А.И.Герцена	2	43
Российский государственный технологический университет им. К.Э.Циолковского (МАТИ)	2	43
Российский государственный университет нефти и газа им. И.М.Губкина	2	45
Санкт-Петербургский государственный политехнический университет	2	47
Санкт-Петербургский государственный университет	2	48
Олимпиады		
XXXIV Всероссийская олимпиада школьников по математике	5	51
XLII Всероссийская олимпиада школьников по физике	5	54
Всероссийская студенческая олимпиада по физике	3	56
Задачи LXXI Московской математической олимпиады	4	48
Избранные задачи Московской физической олимпиады	4	50
XLVIII Международная математическая олимпиада	2	49
XLIX Международная математическая олимпиада	6	39
XVI Международная олимпиада «Интеллектуальный марафон»	3	53
XXXVIII Международная физическая олимпиада	2	52
XXXIX Международная физическая олимпиада	6	42
Международный турнир «Компьютерная физика»	4	54
Московская студенческая олимпиада по физике	2	54
— « —	6	47
Информация		
Заочная школа СУНЦ НГУ	3	57
Мальбэк мехмат МГУ	1	44
Новый прием в школы-интернаты при университетах	6	58
Открылся новый математический факультет	6	60
Очередной набор в ОЛ ВЗМШ	6	48
Федеральная заочная физико-техническая школа при МФТИ	6	55
Школа «Комбинаторная математика и теория алгоритмов»	6	59
Нам пишут		
Еще одно решение задачи M1000	3	22

	№ журнала	с.
Физика в «Рассказах о животных»	4	31
Вниманию наших читателей	3	30, 36
	5	9, 28
Коллекция головоломок		
Браслет-головоломка	2	4-я с.обл.
Головоломки в бутылках	4	«
Пенто-пенто-пирамида	1	«
Психологический «Завиток»	3	«
Пять петель	5	«
Шкатулка с секретом	6	«
Шахматная страничка		
Ананд досрочно обыграл Крамника	6	3-я с.обл.
Корона отправилась на родину шахмат	1	«
Математика турниров	5	«
Пат и симметрия	4	«
Рекорды Алексея Ханяна	3	«
Шахматные моды в ГУМЕ	2	«
«Невозможные» объекты	1-4	2-я с.обл.
Математические этюды	6	2-я с.обл.
Наша обложка		
Мозаика из снежинок	1	14

журнал © Квант

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

**С.А.Дориченко, А.А.Егоров, С.П.Коновалов,
А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан**

НОМЕР ОФОРМИЛИ

**В.Н.Власов, Д.Н.Гришукова, В.В.Иванюк,
А.Е.Пацхверия, М.В.Сумнина**

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

**Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ
по печати. Рег. св-во №0110473**

Адрес редакции:

119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»

Тел.: 930-56-48

E-mail: admin@kvant.info, math@kvant.info,

phys@kvant.info

Сайт: kvant.info

**Отпечатано в ОАО ордена Трудового Красного Знамени
«Чеховский полиграфический комбинат»**

142300 г.Чехов Московской области,

Сайт: www.chpk.ru E-mail: marketing@chpk.ru

Факс: 8(49672) 6-25-36, факс: 8(499) 270-73-00

Отдел продаж услуг многоканальный: 8(499) 270-73-59