XLIX Международная математическая олимпиада

Очередная Международная математическая олимпиада (ММО), проходившая с 10 по 22 июля 2008 года в столице Испании Мадриде, вновь побила рекорд по числу участников и делегаций: в олимпиаде приняли участие 535 юных математиков из 97 стран мира. Олимпиада подарила участникам много ярких впечатлений, новых друзей и свежих математических идей. Экскурсии в Королевский дворец, в знаменитый монастырь Сан Лоренцо дель Эскориал, танцевальное фламенко-шоу, конкурсы и спортивные состязания в свободное время надолго запомнятся школьникам с разных концов света.

На главном школьном математическом соревновании мира Россию представляли выпускники *Владислав Волков* и *Роман Бойкий* из Санкт-Петербурга (ФМШ 239), *Дмитрий Бабичев* из города Долгопрудного (ФМШ 5), *Никита Кудык* из Омска (гимназия 117), *Иван Бажов* из Екатеринбурга (гимназия 9) и *Евгений Горинов* из Кирова (ФМЛ). Руководителями команды были Н.Х.Агаханов, П.А.Кожевников, Д.А.Терёшин, Д.Г.Фон-Дер-Флаас. Наша команда выступила убедительно и ровно, повторив, казалось, неповторимое достижение 2002 года – все шестеро участников из России удостоились медалей высшей пробы. Такого результата не смогла добиться еще ни одна сборная.

Команда России на XLIX Международной математической олимпиаде. Слева направо: В.Волков, Р.Бойкий, Е.Горинов, Н.Кудык, И.Бажов, Д.Бабичев

Задачный вариант олимпиады 2008 года по стилю несколько отличался от вариантов предыдущих двух лет, когда среди шести задач ММО две задачи были достаточно простые, а две – крайне трудными. В этом году вариант был значительно ровнее по трудности задач. Интересно, что самая легкая и самая трудная задачи олимпиады (задачи 1 и 6) – это геометрические миниатюры, предложенные для ММО Россией, причем оба автора – Андрей Гаврилюк и Владимир Шмаров – студенты Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова, в недавнем прошлом победители Международной и Всероссийской олимпиад.

Приводим таблицу результатов российских участников (каждая задача оценивается из 7 баллов):

Участник	Баллы по задачам						Сумма баллов	Медаль
	1	2	3	4	5	6		
Волков Владислав	7	7	7	7	7	2	37	золотая
Бабичев Дмитрий	7	7	7	7	7	1	36	золотая
Бойкий Роман	7	4	7	7	7	0	32	золотая
Кудык Никита	7	4	7	7	7	0	32	золотая
Бажов Иван	7	7	1	7	7	2	31	золотая
Горинов Евгений	7	4	6	7	7	0	31	золотая

а также таблицу результатов стран, получивших наивысшие рейтинги в командном зачете:

Рейтинг	Страна	Сумма баллов	Количество медалей		
			золото	серебро	бронза
1	Китай	217	5	1	0
2	Россия	199	6	0	0
3	США	190	4	2	0
3	Южная Корея	188	4	2	0
5	Иран	181	1	5	0
6	Таиланд	175	2	3	1
7	КНДР	173	2	4	0
8	Турция	170	3	1	2
9	Тайвань	168	2	4	0
10	Венгрия	165	2	3	1
11	Япония	163	2	3	1
12	Вьетнам	159	2	2	2
13	Польша	157	2	3	1
14	Болгария	154	2	1	3
15	Украина	153	2	2	2
16	Бразилия	152	0	5	1
17	Перу	141	1	3	2
17	Румыния	141	0	4	2
19	Австралия	140	0	5	1
20	Сербия	139	1	3	0
20	Германия	139	1	2	3

Руководители команды выражают благодарность всем педагогам-наставникам, которые помогли ребятам воплотить свой талант в прекрасные результаты. Благодарим также членов тренерского совета, завершавших подготовку команды на сборах, которые проходили с 23 июня по 13 июля в пансионате «Лисицкий бор» Тверской области (на сборах с командой работали: аспирант Института системного анализа *А.В.Акопян*, педагог ФМЛ 239 из Санкт-Петербурга *С.Л.Берлов*, старший преподаватель МФТИ *И.И.Богданов*, аспирант Математического института РАН *А.И.Гарбер*, аспирант мехмата МГУ *А.А.Глазырин*, профессор Ярославского государственного университета *В.Л.Дольников*, научный сотрудник Петербургского отделения Математического института РАН и преподаватель СПбГУ *Д.В.Карпов*, педагог ФМЛ 239 из Санкт-Петербурга *М.Я.Пратусевич*, программист из Москвы *Г.Р.Челноков*).

Руководители команды искренне признательны *Дмитрию Юрьевичу Дойхену* за оказание поддержки в проведении мероприятий по подготовке национальной команды России и ее участия в международных математических соревнованиях.

ЗАДАЧИ ОЛИМПИАДЫ

1. См. задачу М2112 «Задачника «Кванта».

(Россия)

2. а) Докажите, что неравенство

$$\frac{x^2}{(x-1)^2}+\frac{y^2}{(y-1)^2}+\frac{z^2}{(z-1)^2}\geq 1$$

выполняется для любых отличных от 1 действительных чисел x, y, z таких, что $xyz = 1$.

б) Докажите, что указанное неравенство обращается в равенство для бесконечного числа троек отличных от 1 рациональных чисел x, y, z таких, что $xyz = 1$.

(Австрия)

3. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел n таких, что число n^2+1 имеет простой делитель, который больше чем $2n+\sqrt{2n}$.

(Литва)

4. Найдите все функции f: $(0;+\infty)\to(0;+\infty)$ (т.е. функции, определенные на множестве всех положительных действительных чисел и принимающие положительные значения) такие, что

$$\frac{(f(w))^2+(f(x))^2}{f(y^2)+f(z^2)}=\frac{w^2+x^2}{y^2+z^2}$$

для любых положительных w, x, y, z, удовлетворяющих равенству $wx = yz$.

(Южная Корея)

5. Пусть n и k – натуральные числа такие, что $k\geq n$, а число $k-n$ четное. Имеются $2n$ лампочек, занумерованных числами 1, 2, …, $2n$, каждая из которых может находиться в одном из двух состояний: *вкл.* (включена) и *выкл.* (выключена). Вначале все лампочки были выключены. Рассматриваются упорядоченные последовательности *шагов*: на каждом шаге ровно одна из лампочек меняет свое состояние на противоположное (с вкл. на выкл. либо с выкл. на вкл.).

Обозначим через N количество последовательностей из k шагов, приводящих к ситуации, в которой все лампочки с 1-й по n-ю включены, а все лампочки с $(n+1)$-й по $(2n)$-ю выключены.

Обозначим через M количество последовательностей из k шагов, приводящих к ситуации, в которой также все лампочки с 1-й по n-ю включены, все лампочки с $(n+1)$-й по $(2n)$-ю выключены, но при этом ни одна из лампочек с $(n+1)$-й по $(2n)$-ю ни разу не меняла своего состояния.

Найдите значение отношения N/M.

(Франция)

6. См. задачу М2115 «Задачника «Кванта».

(Россия)

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

2. Сделаем замену $\frac{x}{x-1}=a$, $\frac{y}{y-1}=b$, $\frac{z}{z-1}=c$, где a, b, c не равны 1. Заметим, что x, y, z однозначно выражаются через a, b, c: $x=\frac{a}{a-1}$, $y=\frac{b}{b-1}$, $z=\frac{c}{c-1}$. Условие $xyz = 1$ переписывается в виде

$$(a-1)(b-1)(c-1)=abc\Leftrightarrow a+b+c-1=ab+bc+ca\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2(a+b+c-1)=(a+b+c)^2-\left(a^2+b^2+c^2\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2-1=(a+b+c)^2-2(a+b+c)+1\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2-1=(a+b+c-1)^2.$$

Отсюда вытекает нужное неравенство $a^2+b^2+c^2\geq 1$. Кроме того, из приведенных выкладок ясно, что если $a\neq 1$, $b\neq 1$, $c\neq 1$ и $a+b+c-1=ab+bc+ca$, то неравенство обращается в равенство при условии $a+b+c=1$. Иначе говоря, условие обращения неравенства в равенство для чисел $a\neq 1$, $b\neq 1$, $c\neq 1$ эквивалентно системе

$$\begin{cases}a+b+c=1,\\ ab+bc+ca=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=1-a-b,\\ a+b-a^2-ab-b^2=0.\end{cases}$$

Положим $b=\lambda a$ и подставим в уравнение $a+b-a^2-ab-b^2=0$. Получим $a\left(1+\lambda-a\left(1+\lambda+\lambda^2\right)\right)=0$. Отсюда следует, что при любом λ тройка чисел $a=\frac{1+\lambda}{1+\lambda+\lambda^2}$, $b=\frac{\lambda+\lambda^2}{1+\lambda+\lambda^2}$, $c=\frac{-\lambda}{1+\lambda+\lambda^2}$ удовлетворяет системе. Если в качестве λ брать натуральные числа, то, как легко видеть, мы получаем бесконечное количество различных троек рациональных чисел a, b, c, отличных от 1. Соответственно, этим тройкам чисел a, b, c соответствует бесконечное количество различных троек рациональных чисел x, y, z, удовлетворяющих условию.

3 (Р.Бойкий).

В решении используется существование бесконечного количества простых чисел p вида $4a+1$ (т.е. дающих остаток 1 при делении на 4), а также то, что -1 является *квадратичным вычетом* по модулю простого p вида $4a+1$ (т.е. для простого p вида $4a+1$ найдется такое целое m, что m^2+1 делится на p).

Докажем, что для каждого простого числа $p>20$ вида $4a+1$ найдется требуемое натуральное n.

Рассмотрим такое целое число m, что $m^2+1\,\vdots\,p$. Эта делимость сохранится, если заменить m на остаток при делении m на p, значит, можно считать, что $m\in\{0,1,2,\ldots,p-1\}$. Кроме того, если $m^2+1\,\vdots\,p$, то и $(p-m)^2+1\,\vdots\,p$. Положим $n=\min\{m,p-m\}$, тогда $n^2+1\,\vdots\,p$ и $0\leq n\leq\frac{p-1}{2}$.

Запишем n в виде $n=\frac{p-1}{2}-k$, где k – целое число, $0\leq k\leq\frac{p-1}{2}$. Имеем

$$\left(\frac{p-1}{2}-k\right)^2+1\,\vdots\,p\Rightarrow(p-(1+2k))^2+4\,\vdots\,p\Rightarrow(2k+1)^2+4\,\vdots\,p,$$

а так как $(2k+1)^2+4>0$, то

$$(2k+1)^2+4\ge p \Rightarrow (2k+1)^2 \ge p-4.$$

Проверим, что найденное n удовлетворяет условию задачи:

$$p>2n+\sqrt{2n} \Leftrightarrow p>2\left(\frac{p-1}{2}-k\right)+\sqrt{2\left(\frac{p-1}{2}-k\right)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p>p-1-2k+\sqrt{p-1-2k} \Leftrightarrow 2k+1>\sqrt{p-1-2k} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2k+1)^2+(2k+1)>p,$$

но это неравенство верно, так как по доказанному

$$(2k+1)^2+(2k+1)\ge p-4+\sqrt{p-4}>p-4+\sqrt{20-4}=p.$$

Из приведенных рассуждений вытекает, что чисел n с требуемым свойством бесконечно много. В самом деле, пусть это не так и N – максимальное из чисел, удовлетворяющих условию задачи. Возьмем простое число p вида $4a+1$ такое, что $p>\max\{20, N^2+1\}$. Как мы доказали, для этого p найдется натуральное n, удовлетворяющее условию и такое, что $n^2+1 \vdots p$. Тогда $n^2+1\ge p>N^2+1$, откуда $n>N$ – противоречие.

4 (Д.Бабичев). *Ответ*: $f(x)=x$ и $f(x)=\frac{1}{x}$.

Пусть $w=x=y=z=a>0$. Тогда из исходного уравнения получаем $\frac{2(f(a))^2}{2f(a^2)}=\frac{a^2+a^2}{a^2+a^2}=1$, откуда для всех $a>0$ выполнено

$$(f(a))^2=f(a^2), \qquad (1)$$

в частности $(f(1))^2=f(1)$ и $f(1)=1$ (так как $f(1)\ne 0$).

Далее, положим $w=x=a>0$, $y=1$, $z=a^2$: $\frac{2(f(a))^2}{f(a^4)+f(1)}=\frac{2a^2}{a^4+1}$. Согласно (1), $f(a^4)=(f(a^2))^2=(f(a))^4$, откуда $\frac{2(f(a))^2}{(f(a))^4+1}=\frac{2a^2}{a^4+1}$. Положив $t=f(a)$, имеем

$$\frac{2t^2}{t^4+1}=\frac{2a^2}{a^4+1} \Leftrightarrow t^2a^4+t^2=a^2t^4+a^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a^2t^2-1)(a^2-t^2)=0.$$

Так как $a>0$ и $t>0$, отсюда следует, что для каждого $a>0$ выполнено $t=f(a)=a$ или $t=f(a)=\frac{1}{a}$. Предположим, что нашлись положительные a и b, не равные 1 и такие, что $f(a)=a$, $f(b)=\frac{1}{b}$. Тогда положив $w=a$, $x=b$, $y=ab$, $z=1$, получим (с учетом (1))

$$\frac{a^2+\frac{1}{b^2}}{1+(f(ab))^2}=\frac{a^2+b^2}{1+a^2b^2}. \qquad (2)$$

Если $f(ab)=ab$, то из (2) следует

$$\frac{a^2+\frac{1}{b^2}}{1+a^2b^2}=\frac{a^2+b^2}{1+a^2b^2} \Leftrightarrow \frac{1}{b^2}=b^2 \Rightarrow b^4=1 \Rightarrow b=1,$$

что противоречит предположению.

Если же $f(ab)=\frac{1}{ab}$, то из (2) следует

$$\frac{a^2+\frac{1}{b^2}}{1+\frac{1}{a^2b^2}}=\frac{a^2+b^2}{1+a^2b^2} \Rightarrow \frac{a^2b^2}{b^2}=\frac{a^2+b^2}{1+a^2b^2} \Rightarrow a^4b^2+a^2=$$

$$=a^2+b^2 \Rightarrow b=0 \text{ или } a^4=1,$$

что противоречит предположению.

Таким образом, либо для всех $x>0$ выполнено $f(x)=x$, либо для всех $x>0$ выполнено $f(x)=\frac{1}{x}$. Непосредственно подстановка показывает, что функции $f(x)=x$ и $f(x)=\frac{1}{x}$ подходят.

5 (В.Волков). *Ответ*: 2^{k-n}.

Назовем последовательность из k шагов, меняющую состояние каждой из лампочек 1, 2, …, n нечетное количество раз (и не меняющую состояние лампочек $n+1$, …, $2n$ ни разу), последовательностью I типа; по условию, число таких последовательностей равно M. Назовем последовательность из k шагов, меняющую состояние каждой из лампочек 1, 2, …, n нечетное количество раз, а лампочек $n+1$, …, $2n$ – четное количество раз, последовательностью II типа; по условию, число таких последовательностей равно N. Разобьем лампочки на n пар: в i-ю пару объединим i-ю и $(n+i)$-ю лампочки, $i=1, 2, \ldots, n$. Если на каком-то шаге одна из лампочек некоторой пары изменила состояние, будем говорить, что пара изменила состояние. Рассмотрим последовательность II типа. На каждом из k шагов меняет состояние ровно одна из n пар, причем каждая пара должна изменить состояние нечетное количество раз. Если объявить теперь пары «новыми» лампочками с номерами 1, 2, …, n, то из последовательности II типа получаем соответствующую последовательность I типа.

Докажем, что при таком соответствии каждая последовательность I типа поставлена в соответствие ровно 2^{n-k} последовательностям II типа, – отсюда сразу последует, что $N/M=2^{k-n}$. Зафиксируем последовательность I типа, пусть в ней пара с номером i меняла состояние в $2l_i+1$ шагах ($i\in\{1,2,\ldots,n\}$). Чтобы восстановить последовательность II типа, надо эти $2l_i+1$ шагов разбить на 2 множества – шаги, на которых изменяет состояние i-я лампочка, и шаги, на которых изменяет состояние $(n+i)$-я лампочка, причем в первом множестве должно быть нечетное количество шагов. Всего вариантов такого разбиения 2^{2l_i} (это число равно числу способов разбить множество из $2l_i+1$ элементов на два подмножества, поскольку ровно в одном из подмножеств нечетное число элементов). Такое рассуждение о восстановлении последовательности II типа проведем независимо для $i=1, 2, \ldots, n$. В результате получим, что данная последовательность I типа сопоставлена $2^{2l_1}\cdot 2^{2l_2}\cdot\ldots\cdot 2^{2l_n}=2^{2l_1+2l_2+\ldots+2l_n}$ последовательностям II типа. Заметим, что $(2l_1+1)+(2l_2+1)+\ldots+(2l_n+1)=k$ – общее число ходов, поэтому $2l_1+2l_2+\ldots+2l_n=k-n$, что и требовалось.

Публикацию подготовили
Н.Агаханов, П.Кожевников,
Д.Терёшин, Д.Фон-Дер-Флаасс

XXXIX Международная физическая олимпиада

В этом году во Вьетнам на Международную олимпиаду по физике прибыли 376 школьников из 82 стран мира.

В сборную команду России вошли:

Зеленеев Андрей – Киров, физико-математический лицей, учителя-наставники Заграй Владимир Сергеевич, Гырдымов Михаил Владимирович,

Буслаев Павел – Санкт-Петербург, «Физико-техническая школа» при Физико-техническом институте им. А.Ф.Иоффе, учителя-наставники Савельев Артем Владимирович, Иванов Михаил Георгиевич,

Матвеев Харитон – Москва, лицей 1581, учителя-наставники Бучнева Лидия Викторовна, Зильберман Александр Рафаилович, Киселев Александр Михайлович,

Самойлов Леонид – Саратов, физико-технический лицей 1, учителя-наставники Правдина Людмила Вениаминовна, Татарков Гарри Николаевич,

Мельников Игорь – Челябинск, лицей 31, учителя-наставники Иоголевич Иван Александрович, Карманов Максим Леонидович, Лисицын Сергей Григорьевич.

Нашу команду возглавили профессор Московского физико-технического института (МФТИ) Станислав Миронович Козел и доцент МФТИ Валерий Павлович Слободянин. В составе российской делегации в качестве наблюдателей были доцент МФТИ Дмитрий Анатольевич Александров и Заслуженный учитель России Иван Александрович Иоголевич. Участие в олимпиаде наблюдателей состоялось благодаря поддержке Русского фонда содействия образованию и науке и Попечительского совета лицея 31 города Челябинска.

Подготовка команды уже многие годы начинается более чем за год и проводится по стандартной схеме на базе Московского физико-технического института.

На олимпиаде участникам были предложены три теоретические задачи и два экспериментальных задания. Каждая теоретическая задача оценивалась из 10 баллов, а экспериментальные – из 9,5 и 10,5 баллов. Таким образом, максимальное количество баллов, которое мог набрать каждый из участников олимпиады, равнялось 50.

Сравнительные результаты выступления на олимпиаде 16 лучших команд таковы:

№	Страна	Количество медалей			Сумма
		золото	серебро	бронза	баллов
1	Китай	5			197,5
2	Тайвань	5			185,01
3	Южная Корея	4	1		176,31
4	Вьетнам	4	1		169,34
5	Индия	4	1		168,55
6	Таиланд	3	2		165,45
7	США	3	2		163,38
8	Россия	3	1	1	155,60
9	Индонезия	2	2	1	150,31
10	Франция		4	1	144,55
11	Канада	1	1	3	137,55
12	Сингапур	1	3	1	136,21
13	Румыния		3	2	136,00
14	Германия	1	1	3	131,80
15	Гонконг	1		4	128,33
16	Иран			5	117,38

Из таблицы видно, что, как и в прошлые годы, лидирует группа стран из Юго-Восточной Азии. Команды этих стран устойчиво добиваются высоких результатов в Международных олимпиадах и по другим предметам. Это может означать лишь одно: в этих странах уделяется исключительное внимание образованию и, в частности, работе с одаренными детьми – интеллектуальным потенциалом нации.

Члены сборной команды России показали следующие результаты:

Участник	Теория	Эксперимент	Сумма баллов	Медаль
Самойлов Леонид	17,70	18,20	35,90	золото
Матвеев Харитон	17,80	16,45	34,25	золото
Буслаев Павел	15,65	17,45	33,10	золото
Мельников Игорь	9,80	18,20	28,00	серебро
Зеленеев Андрей	8,00	16,35	24,35	бронза

Следует отметить, что объем заданий олимпиады от года к году возрастает, причем этот рост связан в основном с увеличением расчетной части. В этом году на олимпиаде перегруженность вычислениями заданий теоретического тура превысила все разумные пределы. Это привело к тому, что большинство участников получили за теорию менее трети от максимального количества баллов.

На экспериментальном туре участникам было предложено освоить дифференциальный термометрический метод, широко используемый в технике прецизионных измерений.

В первой части эксперимента дифференциальный термометрический метод применялся для определения температуры затвердевания чистого кристаллического вещества, предоставленного в количестве 20 мг. В случае такой малой массы вещества обычный метод дает слишком большую ошибку. При выполнении задания необходимо было провести несколько предварительных экспериментов и построить ряд графиков для определения параметров установки и оценки погрешностей. Во время тренировочных сборов наши ребята хорошо подготовились к заданиям такого рода. За первую часть эксперимента они набрали 97% возможных баллов. Это чрезвычайно высокий результат.

Во второй части экспериментального задания участники исследовали работу солнечного элемента и с помощью дифференциального термометрического метода определяли его коэффициент полезного действия. При выполнении этой части задания участникам нужно было продемонстрировать знание законов термодинамики и умение обрабатывать результаты эксперимента. С помощью графиков требовалось доказать, что теоретические формулы правильно описывают работу установки, и выполнить ряд сложных фотометрических измерений. В целом наши ребята успешно справились и с этой частью задания. Однако к концу работы ощущалась нехватка времени, и последние пункты задания были выполнены некоторыми членами нашей команды наспех. В итоге во второй части экспериментального задания наши ребята набрали 77% возможных баллов. Если учесть сложность экспериментального задания и его объем, то это неплохой результат. К сожалению, часть баллов, как и на прежних олимпиадах, была потеряна из-за небрежного исполнения графиков, неаккуратной записи результатов измерений и т. д.

В целом за эксперимент наша команда набрала 87% возможных баллов и показала третий результат в мире, опередив в этом виде соревнования Китай. За всю историю Международных олимпиад (а наша команда принимала участие в 38 таких олимпиадах) впервые результаты выполнения теоретического тура оказались значительно ниже результатов экспериментального тура. Такая же картина наблюдалась и у большинства других команд.

Ниже приводятся условия задач теоретического тура соревнований.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

Задача 1. Водяная ступа для шлифовки риса

Рис является главным национальным продуктом для подавляющего большинства людей во Вьетнаме. Чтобы получить белый рис, от него необходимо отделить сначала его кожуру («обдирка»), затем отруби («шлифовка»). Горные регионы северного Вьетнама богаты водными струями, и люди, живущие в этих регионах, используют водяные устройства (ступы) для шлифовки риса.

Водяная ступа, показанная на рисунке 1, состоит из собственно ступы (ступки), рычага и дубинки. Ступа – это просто деревянная емкость для риса. Рычаг, который представляет собой деревянный ствол с концами разной длины, может вращаться вокруг некоторой горизонтальной оси. Дубинка (пестик) прикреплена перпендикулярно к рычагу с его короткой стороны; длина дубинки такова, что она может прикасаться к рису в ступе, когда рычаг лежит горизонтально. На длинном конце рычага вырезано углубление, играющее роль сосуда для воды. Форма этого сосуда очень важна для действия устройства.

Ступа может работать в двух режимах: в рабочем и в мертвом.

В рабочем режиме ступа совершает некоторый рабочий цикл, проиллюстрированный на рисунке 2.

a) В начальный момент сосуд пуст, дубинка покоится в ступке. Вода начинает течь в сосуд с маленькой скоростью , но рычаг некоторое время остается в горизонтальном положении.


Рис. 1

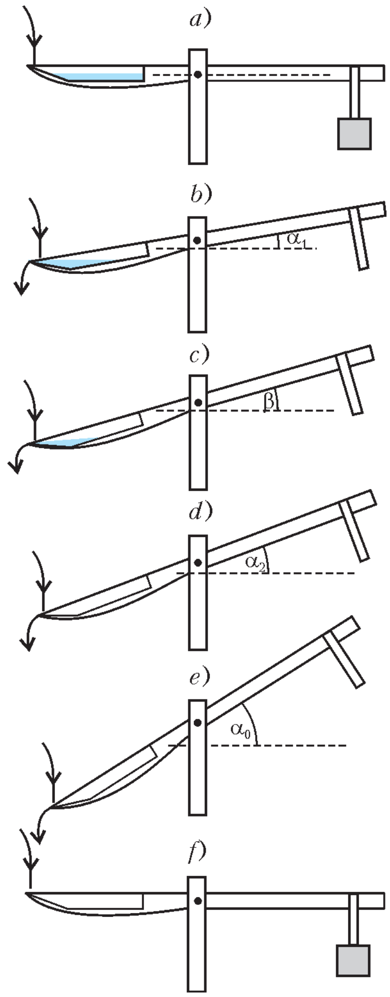

Рис. 2

b) В некоторый момент количество воды в сосуде оказывается достаточным для поднятия рычага. Вода перетекает к более отдаленной стороне сосуда, наклоняя рычаг все быстрее. Вода начинает вытекать при угле $\alpha = \alpha_1$.

c) Угол α продолжает увеличиваться, вода продолжает вытекать. При некотором значении угла наклона $\alpha = \beta$ суммарный вращающий момент становится равным нулю.

d) Угол α продолжает расти, вода продолжает вытекать до тех пор, пока сосуд не опорожнится при угле $\alpha = \alpha_2$.

e) Угол α продолжает расти по инерции. Благодаря форме сосуда, втекающая вода сразу вытекает из него. Движение рычага по инерции продолжается до тех пор, пока угол α не достигает максимального значения α_0 .

f) Когда сосуд пуст, вес рычага возвращает его назад в начальное горизонтальное положение. Дубинка совершает тяжелый удар по ступке (с рисом внутри него), и начинается новый цикл.

Шлифовка риса происходит благодаря энергии, передаваемой от дубинки к рису в стадии f). Если по какой-то причине дубинка не может прикасаться к дну ступки, говорят, что устройство не работает.

Мертвый режим – это режим с поднятым рычагом. В стадии c) рабочего цикла, когда угол наклона рычага α увеличивается, количество воды в сосуде уменьшается. В определенный момент времени количество воды становится достоточным для уравновешивания рычага. Значение угла наклона в этот момент обозначено β. Если рычаг расположен под углом β и его начальная угловая скорость равна нулю, он останется навсегда в этом положении. Это и есть мертвый режим с поднятым рычагом. Устойчивость этого положения рычага зависит от скорости Φ натекания воды в сосуд. Если Φ превышает некоторое значение Φ_2, стабилен только мертвый режим и ступа переходит в него из любого начального положения, т.е. не может перейти в рабочий режим. Другими словами, Φ_2 является минимальной скоростью течения, при превышении которой устройство перестает работать.

Основные размеры водной рисошлифующей ступки приведены на рисунке 3. Масса рычага (с дубинкой, но без воды) $M = 30$ кг, центр масс рычага находится в точке G. Рычаг вращается вокруг оси T, момент инерции рычага вокруг этой оси $I = 12\ \text{кг} \cdot \text{м}^2$. Когда в сосуде есть вода, ее масса обозна-

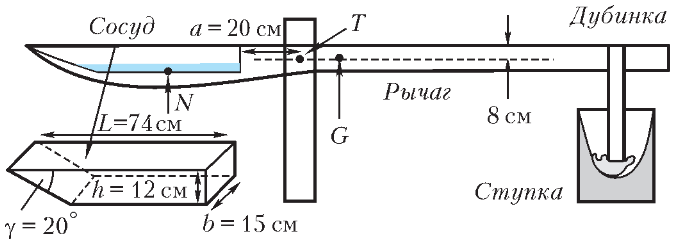

Рис. 3

чается m, центр масс воды – точкой N. Угол наклона рычага к горизонту обозначается α.

Трением в оси вращения и силой, возникающей из-за натекания воды в сосуд, пренебрегайте. Считайте, что поверхность воды всегда горизонтальна.

1. Параметры устройства

В начальный момент сосуд пуст и рычаг расположен горизонтально. Затем вода втекает в сосуд до тех пор, пока рычаг не начинает поворачиваться. Масса воды в сосуде в этот момент $m = 1{,}0$ кг.

1.1. Определите расстояние от центра масс G рычага до оси вращения T. Известно, что линия GT горизонтальна, когда сосуд пуст.

1.2. Вода начинает вытекать из сосуда, когда угол между рычагом и горизонтальной осью достигает некоторого значения α_1. Вода полностью выливается из сосуда, когда значение этого угла становится равным α_2. Вычислите значения углов α_1 и α_2.

1.3. Пусть $\mu(\alpha)$ – суммарный вращающийся момент (относительно оси T), создаваемый весом рычага и воды в сосуде. При некотором угле $\alpha = \beta$ этот момент становится равным нулю $\mu(\alpha) = 0$. Рассчитайте значения угла β и массы m_1 воды в сосуде в этот момент.

2. Параметры рабочего режима

Пусть вода втекает в сосуд с малой постоянной скоростью. Количество воды, втекающей в сосуд за время движения рычага, пренебрежимо мало. В этой части задачи пренебрегайте изменением момента инерции системы в рабочем цикле.

2.1. Нарисуйте схематический график зависимости вращающего момента μ от угла α в течение рабочего цикла. Приведите явные значения $\mu(\alpha)$ при углах α_1, α_2, и $\alpha = 0$.

2.2. Используя график, нарисованный в пункте 2.1, дайте геометрическую интерпретацию значений общей работы W_t, произведенной моментом сил тяжести, и работы W_p, совершенной дубинкой над рисом, за один цикл.

2.3. С помощью графика зависимости $\mu(\alpha)$ оцените максимальный угол отклонения α_0 и работу W_p (предполагая, что кинетическая энергия воды, текущей в сосуд и из него, пренебрежимо мала). Для облегчения расчетов можете заменить кривые ломанными линиями.

3. Мертвый режим

Пусть вода втекает в сосуд с постоянной скоростью натекания (масса в единицу времени) Φ. В данной части задачи необходимо учитывать количество воды, втекающей в сосуд при движении рычага.

3.1. Будем считать сначала, что сосуд всегда наполнен водой (которая переливается через его край).

3.1.1. Нарисуйте примерный график зависимости вращающего момента μ от угла α в окрестности $\alpha = \beta$. К какому виду равновесия относится положение рычага при $\alpha = \beta$?

3.1.2. Найдите аналитическую формулу для вращающего момента как функции $\Delta\alpha$, когда $\alpha = \beta + \Delta\alpha$, причем $\Delta\alpha$ мало.

3.1.3. Запишите дифференциальное уравнение движения рычага, который движется с нулевой начальной скоростью от начального положения $\alpha = \beta + \Delta\alpha$ ($\Delta\alpha$ мало). Покажите, что это движение с хорошей точностью является гармоническими колебаниями. Рассчитайте их период τ.

3.2. Пусть теперь при заданной скорости натекания Φ сосуд наполнен водой все время только в том случае, когда рычаг движется достаточно медленно. Тогда амплитуда гармонических колебаний зависит от Φ. Определите значение Φ_1 скорости натекания (в кг/с) такое, чтобы рычаг мог совершать гармонические колебания с амплитудой 1°.

3.3. Пусть скорость Φ велика настолько, что при колебательном движении рычага, когда угол наклона изменяется от α_2 до α_1, сосуд всегда остается наполненным водой. В этом случае устройство не может действовать в рабочем режиме. Допуская, что движение рычага является гармоническими колебаниями, оцените минимальную скорость течения Φ_2, при которой устройство перестает функционировать в рабочем режиме.

Задача 2. Черенковское излучение и кольцевой черенковский детектор

Свет распространяется в вакууме со скоростью c. Не существует частиц, движущихся со скоростью больше c. Однако в прозрачной среде частица может двигаться со скоростью v, превышающей скорость света в этой среде c/n, где n – показатель преломления среды. Эксперимент (Черенков, 1934) и теория (Тамм и Франк, 1937) показали, что заряженная частица, движущаяся со скоростью v в прозрачной среде с показателем преломления n, удовлетворяющим условию $v > c/n$, излучает свет, названный черенковским излучением, в направлениях, образующих с ее траекторией угол $\theta = \arccos\frac{1}{\beta n}$, где $\beta = \frac{v}{c}$.

1. Чтобы объяснить этот эффект, рассмотрим частицу, движущуюся с постоянной скоростью $v > c/n$ по прямой линии (рис.4). Она проходит точку A в момент времени 0 и точку B в момент t_1. Так как задача симметрична относительно вращения вокруг оси AB, достаточно рассмотреть световые лучи в любой плоскости, содержащей AB. В любой точке C между A и B частица излучает сферическую световую волну, распространяющуюся со скоростью c/n. Назовем волновым фронтом в заданный момент времени t огибающую всех таких сфер в этот момент.

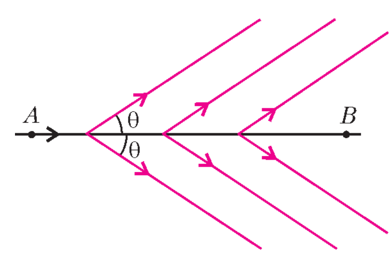

Рис. 4

1.1. Определите волновой фронт в момент времени t_1 и начертите линию его сечения плоскостью, содержащей траекторию частицы.

1.2. Выразите угол φ между указанной линией и траекторией частицы через n и β.

2. Рассмотрим пучок частиц, движущихся вдоль прямой линии IS, пересекающей в точке S выпуклое сферическое зеркало с фокусным расстоянием f и центром C. Скорость пучка $v > c/n$ такова, что угол θ мал. Отрезок SC образует с линией SI малый угол α. Излучение пучка частиц создает кольцевое изображение в фокальной плоскости зеркала. Поясните это явление с помощью рисунка. Определите положение центра кольца и его радиус r.

Установка, описанная выше, используется в кольцевых черенковских детекторах (КЧД), а среда, через которую частицы проходят, называется излучателем.

Примечание: поскольку углы α и θ малы, во всех пунктах данной задачи соответствующими членами второго и высших порядков малости можно пренебречь.

3. Рассмотрим пучок частиц с известным импульсом $P = 10{,}0$ ГэВ/c, состоящий из частиц трех типов: протонов, каонов и пионов с массами покоя $M_p = 0{,}94$ ГэВ/c^2, $M_\kappa = 0{,}50$ ГэВ/c^2 и $M_\pi = 0{,}14$ ГэВ/c^2 соответственно. Напомним, что величины Pc и Mc^2 имеют размерность энергии, 1 эВ – энергия, приобретаемая электроном, ускоренным разностью потенциалов 1 В, 1 ГэВ $= 10^9$ эВ, 1 МэВ $= 10^6$ эВ.

Пучок частиц движется в воздухе, находящемся под давлением p, который играет роль излучателя. Показатель преломления воздуха выражается через его давление p, измеренное в атмосферах, с помощью формулы $n = 1 + ap$, где $a = 2{,}7 \cdot 10^{-4}$ атм$^{-1}$.

3.1. Рассчитайте для каждого из трех типов частиц минимальное значение $p_{\min}$ атмосферного давления, при котором они начинают давать черенковское излучение.

3.2. Рассчитайте давление $p_{1/2}$, при котором радиус кольцевого изображения, порожденного излучением каонов, равен половине радиуса кольцевого изображения, порожденного излучением пионов, а также значения θ_κ и θ_π для этого случая. Можно ли при таком давлении наблюдать кольцевое изображение, порожденное излучением протонов?

4. Предположим теперь, что пучок не является полностью монохроматическим: импульс частиц распределен в интервале с центром в точке 10 ГэВ/c, имеющем полуширину ΔP (на половине высоты). Это приводит к уширению кольцевого изображения. Соответствующее уширение распределения по θ характеризуется полушириной $\Delta\theta$ (на половине высоты).

4.1. Вычислите $\Delta\theta_\kappa/\Delta P$ и $\Delta\theta_\pi/\Delta P$, т.е. значение $\Delta\theta/\Delta P$ для пионов и каонов.

4.2. Два кольцевых изображения, созданных излучением пионов и каонов, можно хорошо различить, если угловое расстояние $\theta_\pi - \theta_\kappa$ превышает сумму полуширин $\Delta\theta = \Delta\theta_\kappa + \Delta\theta_\pi$ более чем в 10 раз, т.е. $\theta_\pi - \theta_\kappa > 10\Delta\theta$. Рассчитайте максимальное значение ΔP, при котором два изображения еще можно хорошо различить.

5. Черенков впервые открыл эффект, ныне носящий его имя, наблюдая за сосудом с водой, расположенным вблизи радиоактивного источника. Он увидел, что вода в сосуде светилась.

5.1. Найдите минимальное значение кинетической энергии $T_{\min}$ частицы с массой покоя M, движущейся в воде, при котором появляется черенковское излучение. Показатель преломления воды $n = 1{,}33$.

5.2. Радиоактивный источник, использованный Черенковым, излучал α-частицы (ядра гелия), имеющие массу покоя $M_\alpha = 3{,}8$ ГэВ/c^2, и β-частицы (электроны), имеющие массу покоя $M_e = 0{,}51$ ГэВ/c^2. Рассчитайте численные значения $T_{\min}$ для α- и β-частиц.

Зная, что кинетическая энергия частиц, излучаемых радиоактивными источниками, не превышает нескольких МэВ, определите, какие частицы порождали излучение, наблюдавшееся Черенковым.

6. В предыдущих пунктах задачи не учитывалась зависимость черенковского излучения от длины волны λ. Учтем теперь тот факт, что черенковское излучение частицы имеет широкий непрерывный спектр, включающий видимую область (длины волн от 0,4 мкм до 0,8 мкм). Известно также, что при возрастании λ в пределах этой области показатель преломления излучателя линейно уменьшается на 2% от величины $(n - 1)$.

6.1. Рассмотрим пучок пионов с заданным импульсом 10,0 ГэВ/c, движущийся в воздухе, находящемся под давлением 6 атм. Определите разность углов $\delta\theta$, соответствующих краям видимой области.

6.2. Качественно исследуйте влияние дисперсии (т.е. зависимости n от λ) на изображение кольца, созданное излучением пучка пионов. Импульсы пионов распределены в интервале с центром в точке $P = 10$ ГэВ/c, имеющем полуширину $\Delta P = 0{,}3$ ГэВ/c (на половине высоты).

6.2.1. Рассчитайте уширение, обусловленное дисперсией (изменением показателя преломления), а также уширение, вызываемое немонохроматичностью пучка (разбросом импульсов частиц).

6.2.2. Опишите, как изменяется цвет кольца при переходе от его внутреннего края к внешнему.

Задача 3. Изменение температуры воздуха с высотой, атмосферная стабильность и загрязнение

Вертикальное движение воздуха определяет многие атмосферные процессы, например образование облаков и осадков, а также рассеяние воздушных загрязнений. Если атмосфера стабильна, вертикальное движение ограничено и воздушные загрязнения имеют тенденцию не рассеиваться, а собираться над областью, в которой находятся источники загрязнения. В то же время, в нестабильной атмосфере вертикальное движение воздуха способствует вертикальному распространению загрязнений. Таким образом, концентрация загрязнений зависит не только от активности их источников, но и от стабильности атмосферы.

Будем определять атмосферную стабильность с помощью модели воздушного пакета, принимаемой в метеорологии, и сравнивать температуру такого пакета, поднимающегося или опускающегося адиабатически в атмосфере, с температурой окружающего воздуха. Мы увидим, что во многих случаях воздушный пакет, содержащий воздушные загрязнения и поднимающийся от земли, останавливается на некоторой высоте, называемой высотой смешивания. Чем больше высота смешивания, тем меньше концентрация воздушных загрязнений. В данной задаче предлагается оценить высоту смешивания и концентрацию угарного газа (CO), выбрасываемого мотоциклами в многолюдной части Ханоя, для примера в утренний час пик, когда на уровнях выше 119 м вертикальное перемешивание ограничено из-за температурной инверсии (температура воздуха увеличивается с высотой).

Будем рассматривать воздух как идеальный двухатомный газ с молярной массой $\mathrm{M} = 29$ г/моль. Квазистатический адиабатический процесс подчиняется уравнению $pV^\gamma = \mathrm{const}$, где $\gamma = C_p/C_V$ – отношение молярных теплоемкостей газа в изобарическом и изохорическом процессах.

Вы можете использовать следующие данные при необходимости: универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль $\cdot$ К), атмосферное давление у земной поверхности $p_0 = 101{,}3$ кПа, ускорение свободного падения $g = 9{,}81$ м/c^2, молярная теплоемкость воздуха при постоянном давлении $C_p = \frac{7}{2}R$, молярная теплоемкость воздуха при постоянном объеме $C_V = \frac{5}{2}R$.

Математические подсказки:

а) $\int \frac{dx}{A + Bx} = \frac{1}{B}\int \frac{d(A + Bx)}{A + Bx} = \frac{1}{B}\ln(A + Bx)$;

b) решение дифференциального уравнения $\dfrac{dx}{dt} + Ax = B$ (A и B – константы) есть $x(t) = x_1(t) + \dfrac{B}{A}$, где $x_1(t)$ – решение однородного дифференциального уравнения $\dfrac{dx}{dt} + Ax = 0$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$.

1. Изменение давления с высотой

1.1. Предположим, что температура атмосферы постоянна по высоте и равна T_0. Напишите формулу, выражающую атмосферное давление p как функцию высоты z.

1.2. Допустим теперь, что температура атмосферы меняется с высотой по закону $T(z) = T(0) - \Lambda z$, где Λ – константа, называемая скоростью изменения температуры атмосферы с высотой (вертикальный градиент температуры равен $-\Lambda$).

1.2.1. Выразите атмосферное давление p в виде функции высоты z.

1.2.2. Конвекция называется свободной, если она происходит вследствие того, что плотность верхних слоев больше, чем нижних. При каких значениях Λ возникает свободная конвекция?

2. Изменение температуры воздушного пакета при вертикальном движении

Воздушный пакет представляет собой некоторый объем воздуха достаточного размера (шириной порядка нескольких метров), так что его можно рассматривать как самостоятельный термодинамический объект, но все же достаточно малый – чтобы температуру всех его точек можно было считать одинаковой. Вертикальное движение воздушного пакета будем рассматривать как квазистатический адиабатический процесс, т.е. теплообменом с окружающим воздухом можно пренебречь. Если воздушный пакет поднимается в атмосфере, он расширяется и охлаждается. Напротив, если он опускается, растущее внешнее давление сжимает воздух внутри пакета, в результате его температура увеличивается.

Так как размер пакета невелик, давление воздуха в разных его точках имеет одно и то же значение $p(z)$, где z – высота центра пакета. Температура также предполагается постоянной по всему пакету и равной $T_\text{p}(z)$; эта температура в общем случае отличается от температуры окружающего воздуха $T(z)$. В частях 2.1 и 2.2 мы не будем делать никаких предположений относительно вида зависимости $T(z)$.

2.1. Изменение температуры пакета T_p с высотой характеризуется величиной $\dfrac{dT_\text{p}}{dz} = -G$. Выведите выражение для $G(T, T_\text{p})$.

2.2. Рассмотрим особое состояние атмосферы, при котором на любой высоте z температура атмосферы равна температуре пакета: $T(z) = T_\text{p}(z)$. Обозначим через Γ значение G при $T = T_\text{p}$, т.е. $\Gamma = -\dfrac{dT_\text{p}}{dz}$ при $T = T_\text{p}$. Величина Γ называется скоростью изменения температуры в сухой адиабатической атмосфере.

2.2.1. Выведите выражение для Γ.

2.2.2. Вычислите численное значение Γ.

2.2.3. Выведите выражение для температуры атмосферы $T(z)$ как функции высоты.

2.3. Предположим, что температура атмосферы изменяется с высотой по закону $T(z) = T(0) - \Lambda z$, где Λ – константа. Получите зависимость температуры пакета от высоты, т.е. $T_\text{p}(z)$.

2.4. Напишите приближенное выражение для $T_\text{p}(z)$, если $|\Lambda z| \ll T(0)$ и $T(0) \approx T_\text{p}(0)$.

3. Стабильность атмосферы

В этой части мы будем предполагать, что T изменяется с высотой по линейному закону.

3.1. Рассмотрим воздушный пакет, находящийся в начальный момент времени в равновесии с окружающим воздухом на высоте z_0, т.е. имеющий ту же температуру $T(z_0)$, что и окружающий воздух. Если пакет незначительно смещается вверх или вниз (например, при атмосферном возмущении), возможен один из следующих трех случаев:

пакет возвращается на первоначальную высоту z_0, равновесие пакета устойчиво, в этом случае говорят, что атмосфера стабильна;

пакет продолжает двигаться в направлении первоначального смещения, равновесие пакета неустойчиво, атмосфера нестабильна;

пакет остается в его новом положении, равновесие пакета безразлично, атмосфера нейтральна.

Каким условиям должно удовлетворять значение Λ, чтобы атмосфера была: стабильной, нестабильной, нейтральной?

3.2. Пусть температура пакета на земле $T_\text{p}(0)$ выше, чем температура $T(0)$ окружающего воздуха. Выталкивающая сила поднимает пакет. Выведите выражение для максимальной высоты, которой пакет может достигать в случае стабильной атмосферы, в зависимости от Λ и Γ.

4. Высота смешивания

4.1. Таблица показывает температуру воздуха, записанную шаром-зондом в 7 часов утра в ноябрьский день в Ханое. Зависимость температуры от высоты внутри диапазонов $0 < z < 96$ м, $96\text{ м} < z < 119$ м, $119\text{ м} < z < 215$ м может быть приближенно описана формулой $T(z) = T(0) - \Lambda z$, где каждому диапазону соответствует свое значение Λ.

Таблица

Высота, м	5	60	64	69	75	81	90	96	102
Температура, °C	21,5	20,6	20,5	20,5	20,4	20,3	20,2	20,1	20,1
Высота, м	109	113	119	128	136	145	153	159	168
Температура, °C	20,1	20,1	20,1	20,2	20,3	20,4	20,5	20,6	20,8
Высота, м	178	189	202	215	225	234	246	257	
Температура, °C	21,0	21,5	21,8	22,0	22,1	22,2	22,3	22,3	

Рассмотрим воздушный пакет с температурой $T_\text{p} = 22$ °C, поднимающийся от земли. На основании данных таблицы вычислите температуры пакета на высотах 96 м и 119 м, используя описанное выше линейное приближение.

4.2. Какой максимальной высоты H может достичь пакет? Найдите температуру T_p пакета на этой высоте. Высота H называется высотой смешивания. Воздушные загрязнения, выбрасываемые в атмосферу с земли, могут смешиваться с атмосферным воздухом (например из-за ветра, турбулентности и т.д.) и остаются во взвешенном состоянии ниже высоты H.

5. Оценка загрязнения угарным газом (CO) в течение утреннего часа пик в Ханое

Густо населенная часть Ханоя может быть аппроксимирована прямоугольником со сторонами L и W, как показано на рисунке 5 (сторона L идет вдоль Красной реки). По оценке, в течение утреннего часа пик, начинающегося с 7:00 утра, на дорогах находится $8 \cdot 10^5$ мотоциклов, каждый из которых пробегает в среднем 5 км и выпускает 12 г CO на километр.

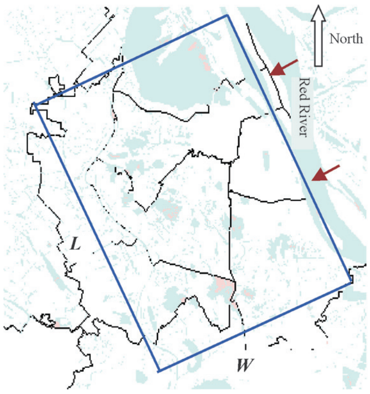

Рис. 5

Будем считать, что это количество CO-загрязнений выпускается равномерно по времени в течение часа пик; общую массу загрязнений, выбрасываемую в единицу времени, обозначим M. В то же время, чистый северо-восточный ветер, дующий перпендикулярно Красной реке (стороне L прямоугольника) со скоростью u, проходит через город с такой же скоростью и уносит часть загрязненного воздуха из городской атмосферы.

Мы будем использовать следующее грубое приближение:

• CO быстро распространяется по всему объему зоны смешивания над густозаселенной частью Ханоя, так что концентрация $C(t)$ угарного газа в момент времени t можно считать одинаковой по всему прямоугольному параллелепипеду со сторонами L, W и H;

• приносимый ветром воздух является чистым, а загрязненный воздух не может покидать параллелепипед через стороны, параллельные ветру;

• до 7:00 утра концентрация CO в атмосфере пренебрежимо мала.

5.1. Получите дифференциальное уравнение для зависимости концентрации $C(t)$ CO-загрязнений от времени.

5.2. Решите это уравнение и запишите выражение для $C(t)$.

5.3. Рассчитайте численное значение $C(t)$ в 8:00 утра, если $L = 15$ км, $W = 8$ км, $u = 1$ м/с.

Публикацию подготовили С.Козел, В.Слободянин

Московская студенческая олимпиада по физике

В мае 2008 года в Московском государственном техническом университете (МГТУ) им. Н.Э.Баумана прошла очередная (двенадцатая) Московская городская олимпиада по физике среди студентов технических вузов.

В командном зачете первое место заняла команда Российского государственного университета (РГУ) нефти и газа им. И.М.Губкина, набравшая 128 баллов, второе место заняла команда Московского института стали и сплавов (112 баллов), третье место – команда Московского института электронной техники (МИЭТ) (108 баллов).

В личном зачете первое место поделили Доан Дык Ня (РГУ нефти и газа им. И.М.Губкина) и Дмитрий Бундин (МИЭТ), набравшие по 33 балла, второе место завоевал Дмитрий Рухлов (МИЭТ, 30 баллов), третье место – Игорь Прудников (МГТУ им. Н.Э.Баумана, 29 баллов).

ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ ОЛИМПИАДЫ

1. Определите, произойдет ли столкновение при движении двух автомобилей по шоссе, если первый автомобиль резко затормозит с ускорением a, время реакции водителя второго автомобиля τ, ускорение торможения второго автомобиля на 20% больше, чем у первого. Начальная скорость автомобилей $v = 8a\tau$, а начальная дистанция между ними $L = 11a\tau^2/4$.

2. Маятник представляет из себя нить длиной l, к нижнему концу которой привязан стержень. Точка соединения находится от центра масс стержня на расстоянии $R \ll l$. Маятник совершает малые колебания таким образом, что угол отклонения от вертикали у стержня всегда вдвое больше, чем у нити. Определите длину стержня.

3. Орбитальная околоземная станция находится на низкой круговой орбите, имеет вид однородного стержня длиной 0,1 радиуса Земли и ориентирована все время к ее центру. Определите максимальный вес человека массой m, находящегося внутри станции, а также расстояние от центра масс станции до точки, в которой сила растяжения корпуса станции максимальна.

4. Два невесомых цилиндра радиусами r и R, оси которых горизонтальны и параллельны между собой, находятся в равновесии на наклонной плоскости, если на них положена доска массой m. Угол между наклонной плоскостью и горизонтом α, проскальзывание отсутствует. Определите расстояние между осями цилиндров.

5. Две одинаковые тепловые машины работают с одноатомным газом по циклу, состоящему из двух изохор, в которых $V_2/V_1 = 2^{3/2}$, и двух адиабат. Температура в начале изохорного охлаждения T_2, а в начале изохорного нагрева T_1, при этом $T_2/T_1 = 5$. Работа осуществляется таким образом, что, когда в одной машине идет изохорное охлаждение, она отдает тепло другой машине, в которой в этот момент идет изохорный нагрев. Определите, на сколько повышается КПД за счет процесса обмена теплом, если он протекает до выравнивания температур.

6. Работа по перемещению заряда q из бесконечности в точку, находящуюся на расстоянии l от центра металлической сферы радиусом R, равна A, если сфера изолирована. Определите работу, которую необходимо затратить, чтобы удалить заряд на бесконечность, если заряд сначала внесли при заземленной сфере, а затем заземляющую перемычку удалили.

7. Перемычка массой m с сопротивлением R лежит на двух горизонтальных параллельных рельсах, расстояние между которыми a. К рельсам на время t подключили источник с ЭДС $\mathscr{E}$. Какое вертикально направленное магнитное поле B необходимо создать, чтобы скорость перемычки после отключения источника достигла максимального значения? Считать, что $\exp(1,26) = 3,52$.

8. Зонная пластинка с закрытой первой зоной Френеля помещена в отверстие, радиус которого равен радиусу пятой зоны Френеля, и освещена светом интенсивностью I_0. Определите интенсивность света в точке наблюдения. Что изменится, если радиусы всех зон увеличить на половину следующей зоны (закрыть полторы первой зоны, с середины третьей зоны по середину четвертой и т.д.)?