Формула любви

Е.МЕЙЛИХОВ

Печальная история любви, описанная Шекспиром, известна всем. В наше время герои этой истории учились бы в школе, ходили на дискотеку, «сидели» бы в Интернете. Могла ли сегодня случиться с ними такая же грустная история? И вообще, отчего бывает счастливая или несчастная любовь? Обычно такие вопросы обсуждаются на школьных уроках литературы, где анализируются отношения персонажей знаменитых романов, подробно разбираются мотивы их поступков, превозносятся их достоинства и критикуются недостатки. Уверен, что просвещенных современников постиндустриального XXI века такой качественный анализ, не подкрепленный уравнениями и графиками, полностью удовлетворить не может.

В связи с этим возникает вопрос: «А можно ли переложить на математический язык и исследовать математическими методами такую тонкую материю, как любовь?» Ответ поэта: «В одну телегу впрячь не можно коня и трепетную лань», т.е. нельзя «поверить алгеброй гармонию». Ответ математика или физика: «Несомненно, можно. Нужно лишь выбрать модель, описывающую явление, и выразить ее в количественной форме – в виде уравнений, формул, графиков».

Самое трудное здесь (так же, как при решении любой физической задачи) – именно создание модели. Образование, опыт и талант нужны для того, чтобы сформулировать «хорошую» модель – такую, в рамках которой учитываются самые основные факторы, определяющие изучаемое явление или процесс, и отбрасывается множество других, оказывающих на него лишь слабое влияние. В такой «хорошей» модели и уравнения оказываются «хорошими» – их удается решить и получить необходимые (аналитические или численные) результаты.

Итак, наша задача – создать модель любви, написать соответствующие уравнения, решить их и проанализировать результаты.

Как всегда в науке, начнем с определения тех величин, которые мы собираемся изучать, и введем для них единицы измерения. Нас интересует, как развиваются во времени любовные отношения между Ромео и Джульеттой или между Сашей и Машей. Соответственно, мы имеем две характеристики этого процесса – любовь и время.

Что касается времени, то здесь все просто: мы знаем множество единиц, в которых оно измеряется, – секунда, минута, час и т.д., – и надо лишь выбрать ту единицу, которая для нас наиболее удобна. Из практики любовных отношений известно, что характерное время их развития (зарождения или затухания) составляет месяцы и годы. Для определенности остановим свой выбор на единице времени, равной году, будем обозначать время, как обычно, символом t и в дальнейшем для краткости будем писать просто $t = 1$ или $t = 10$, имея в виду $t = 1$ год или $t = 10$ лет соответственно.

Гораздо сложнее обстоит дело с определением любви. О ней писали тысячи поэтов, ее испытывали миллионы влюбленных, но никто так и не выработал четкой формулировки типа: «Любовь – это процесс (или состояние?), характеризующийся следующим набором параметров (каких?): $\alpha = \ldots$, $\beta = \ldots, \ldots$ » Тот факт, что общепринятого определения любви не существует, развязывает нам руки и освобождает нашу фантазию – мы можем сами придумать это определение. При этом не будем слишком конкретными (не следует, например, подробно описывать отличие биохимических процессов в организме влюбленного от таковых в отсутствие любви) и постараемся предложить что-нибудь достаточно простое и поддающееся количественному измерению и описанию. Ведь в науке имеют смысл только те сущности, которые могут быть измерены.

Дойдя до этого места, автор осознал, что он не в состоянии дать разумного определения любви. Но, может быть, это и не страшно? Ведь используем же мы, например, такое понятие, как электрический заряд, хотя его определения не существует. Наличие или отсутствие заряда и его величину мы определяем косвенно – например, по силе взаимодействия зарядов друг с другом или по их поведению в магнитном поле. Поступим так же и с любовью – будем считать, что это нечто, заставляющее дотоле нормальных людей совершать безумные поступки, подвиги, глупости, мчаться на другой конец света, стреляться и т.п.

Однако уход от определения рассматриваемой величины не снимает (как и в случае с электрическим зарядом) необходимости дать рецепт ее количественного измерения. Придумать такой рецепт тоже непросто. Действительно, каков смысл утверждения о том, что Саша любит Машу в два раза сильнее, чем Дашу? Означает ли это, что он дарит Маше вдвое больше цветов, проводит с ней вдвое больше времени или, наконец, что увеличение его пульса при встрече с Машей вдвое выше? Для нашей цели годится любой из приведенных способов измерения любви, но для определенности выберем последний вариант с пульсом, который удобен тем, что допускает простое измерение и, кроме того, может давать для любви не только положительные, но и отрицательные значения – снижение пульса характеризует антипатию (отрицательную любовь).

Для того чтобы отстраниться от индивидуальных особенностей разных людей, будем количественно характеризовать любовь безразмерным параметром

$$Y = 10 \ln\left(\frac{P}{P_0}\right),$$

пропорциональным логарифму отношения пульса P к его нормальному (для данного индивида) значению P_0. Соответствующие единицы измерения называются децибелами. Множитель 10 выбран произвольно с тем, чтобы типичные значения любви попадали в удобный численный диапазон. Например, повышение пульса на 10% по сравнению с нормальным значением происходит при величине любви $Y = 10 \ln 1{,}1 \approx 1$, а двукратное увеличение пульса происходит при любви $Y = 10 \ln 2 \approx 7$. Неизменность же пульса указывает на отсутствие любви: $Y = 0$ при $P = P_0$.

Поскольку любовь – это отношение двух людей, необходимо составить два уравнения: одно пусть описывает эволюцию любви Ромео, а другое – эволюцию любви Джульетты. Любовь Джульетты будем характеризовать функцией $J(t)$, а любовь Ромео – функцией $R(t)$.

Теперь мы готовы к написанию уравнений, описывающих эволюцию любви, т.е. показывающих, как она меняется с течением времени. Такие уравнения называются кинетическими. Итак, мы приступаем к выводу *кинетических уравнений любви*.

С кинетическими уравнениями многие из читателей наверняка имели дело. Таковым является, например, уравнение, соответствующее второму закону Ньютона:

$$\frac{dp}{dt} = F - F_{\text{тр}},$$

в котором p – импульс тела, F – сила, увеличивающая его импульс, и $F_{\text{тр}}$ – сила трения, уменьшающая импульс тела. Эти силы могут зависеть как от свойств *самого* тела, так и от свойств *других* тел, с которыми оно взаимодействует. Приведенное уравнение описывает временну́ю эволюцию импульса: оно показывает, как быстро изменяется импульс в результате совместного действия двух сил.

Запишем в таком же виде наши кинетические уравнения любви:

$$\frac{dJ}{dt} = F_{11} + F_{12},$$

$$\frac{dR}{dt} = F_{21} + F_{22},$$

в которые мы включили четыре «любовные» силы F_{11}, F_{12}, F_{21} и F_{22}, определяющие эволюцию функций любви $J(t)$ и $R(t)$. Ясно, что эти силы не могут быть постоянными, так как тогда скорости изменения любви dJ/dt и dR/dt также были бы постоянными, а это означало бы бесконечный рост (или спад) любви, что противоречит опытным данным. Необходимо поэтому считать, что силы любви зависят от времени t и от величин любви обоих влюбленных J и R: $F_{ik} = F_{ik}(t, J(t), R(t))$, где i, k = 1, 2. Однако в нашей простой модели мы не будем учитывать *явную* зависимость этих сил от времени (в механике такая система называется автономной) и будем считать, что любовные силы зависят исключительно от интенсивности любви партнеров, т.е.

$$F_{ik} = F_{ik}(J(t), R(t)).$$

Как уже отмечалось, модель, приближенно описывающая реальную ситуацию, хороша тогда, когда соответствующие уравнения можно решить. Полученная нами система кинетических уравнений любви легко решается, если она линейна, т.е. силы F_{ik} являются линейными функциями $J(t)$ и $R(t)$. В этом приближении нашу систему уравнений можно записать в виде

$$\frac{dJ}{dt} = a_{11}J + a_{12}R, \qquad (1)$$

$$\frac{dR}{dt} = a_{21}J + a_{22}R,$$

где коэффициенты a_{11}, a_{12}, a_{21} и a_{22} – постоянные (не зависящие от времени) величины. Мы будем задавать полный набор значений этих коэффициентов таблицей (она называется матрицей):

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Для полной определенности нужно еще задать начальные условия. Пусть знакомство Ромео и Джульетты состоялось в момент времени $t = 0$. Очевидно, что до этого момента $J = 0$ и $R = 0$. Однако в момент $t = 0$ величины J и R могут измениться – приобрести, например, значения $J(0) = 1$ и $R(0) = 1$ (это называется взаимная любовь с первого взгляда) или $J(0) = -1$ и $R(0) = -1$ (взаимная антипатия) и т.п.

Начальные условия $J(0)$ и $R(0)$ вкупе с коэффициентами a_{ik} полностью определяют все дальнейшее развитие отношений между Ромео и Джульеттой. Если с начальными условиями все более или менее ясно, то коэффициенты a_{ik} могут принимать разные (в том числе и по знаку) значения, которые зависят от индивидуальных особенностей влюбленных. Это приводит к необходимости понять, какие факторы влияют на любовь – способствуют ее росту или угасанию. Для этого мы обратимся к большому массиву экспериментальных данных, накопленных в литературе и показывающих большое разнообразие соответствующих коэффициентов. Вот несколько примеров.

Чем меньше женщину мы любим,
• Тем легче нравимся мы ей… $\to a_{12} < 0$.
(А.С.Пушкин, «Евгений Онегин»)

Стыдливо-холодна, восторгу моему
Едва ответствуешь, не внемлешь ничему
• И оживляешься потом все боле, боле – $\to a_{12} > 0$.
И делишь наконец мой пламень поневоле!
(А.С.Пушкин, «Нет, я не дорожу мятежным наслажденьем»)

Любовь, которая внутри пылает, –
• Душа всегда изгнать ее вольна. $\to a_{11}, a_{22} < 0$.
(Данте, «Божественная комедия»)

С усильем тяжким и бесплодным,
Я цепь любви хочу разбить.
• О, если б вновь мне быть свободным, $\to a_{11}, a_{22} < 0$.
О, если б мог я не любить!
(Д. Мережковский, «Проклятие любви»)

Любовь, любить велящая любимым,
• Меня к нему так властно привлекла… $\to a_{11}, a_{22} > 0$.
(Данте, «Божественная комедия»)

• Я не любим, но как же я влюблен! $\to a_{21} < 0$.
(В.Шекспир, «Ромео и Джульетта»)

Но я полюбил ее с первого дня
• За то, что она полюбила меня! $a_{21} > 0$.
(Роберт Бернс)

Поскольку наша задача – не социологическая, а математическая, не будем углубляться в психологические тонкости и рассмотрим далее несколько разных ситуаций, которые могут встретиться в жизни.

В принципе, *аналитическое* решение нашей системы линейных уравнений (1) несложно найти. Однако мы не будем здесь этим заниматься и воспользуемся одной из программ компьютерной математики, которая так и называется Mathematica (сейчас доступна уже пятая версия этой программы – Mathematica 5). Решение системы дифференциальных уравнений (а наши уравнения – дифференциальные, так как содержат не только функции, но и их производные) в программе Mathematica производится очень просто – достаточно в окне этой программы написать:

```
J0 = 0; R0 = 1;
a11 = 1; a12 = 1; a21 = 1; a22 = 1;
t1 = 5;

NDSolve [ {J′[t] = = a11 J[t] + a12  R[t] , R′[t] == a21 J[t]
+ a22 R[t], J[0] == J0,  R[0] == R0},  {J, R}, {t, 0, t1} ];

Plot [Evaluate[{J[t],  R[t]}/.%], {t, 0, t1}]
```

Здесь первые три строки – это начальные данные $J(0)$ и $R(0)$, значения коэффициентов a_{ik} и продолжительность t_1 интересующего нас промежутка времени (приведены чисто иллюстративные значения), две последующие строки – директива NDSolve для решения нашей системы уравнений (N=Numerical – численный, D=Differential – дифференциальный, Solve – решать) и, наконец, последняя строка – команда представления результатов в виде графика для интервала времени $0 < t < t_1$ (Plot – график, Evaluate – вычислить). Теперь остается только менять параметры модели и анализировать получающиеся результаты. Именно этим мы сейчас и займемся.

Однако прежде введем для удобства последующего изложения несколько терминов-определений:

- *Нарцисс* (H^+) – человек, чья любовь к партнеру *растет* тем быстрее, чем больше он *сам* его любит (Джульетта – Нарцисс, если $a_{11} > 0$, Ромео – Нарцисс, если $a_{22} > 0$);
- *анти-Нарцисс* (H^-) – человек, чья любовь к партнеру *угасает* тем быстрее, чем больше он *сам* его любит (Джульетта – анти-Нарцисс, если $a_{11} < 0$, Ромео – анти-Нарцисс, если $a_{22} < 0$);
- *Дон Жуан* ($ДЖ^+$) – человек, чья любовь к партнеру *угасает* тем быстрее, чем больше *последний* его любит (Джульетта – Дон Жуан, если $a_{12} < 0$, Ромео – Дон Жуан, если $a_{21} < 0$);
- *анти-Дон Жуан* ($ДЖ^-$) – человек, чья любовь к партнеру *растет* тем быстрее, чем больше *последний* его любит (Джульетта – анти-Дон Жуан, если $a_{12} > 0$, Ромео – анти-Дон Жуан, если $a_{21} > 0$).

Для определенности можно считать, что классические персонажи Дон Жуан и Нарцисс (в мужской или женской ипостаси) имеют коэффициенты $a_{21} = +1$ (или $a_{12} = +1$) и $a_{22} = +1$ (или $a_{11} = +1$) соответственно.

В нашей модели существует бесконечное множество пар влюбленных, отличающихся знаком и величиной коэффициентов a_{ik}, а также начальными условиями. Число различных пар велико, даже если считать, что эти коэффициенты и начальные значения любви могут принимать всего лишь три значения: $0, \pm 1$. Количество таких пар равно $3^5 = 243$. Ниже мы ограничимся рассмотрением только этого варианта, в рамках которого проанализируем эволюцию взаимной и неразделенной любви нескольких разных пар.

Взаимная любовь с первого взгляда (J(0) = +1, R(0) = +1)

1. *Пара*: Джульетта – $ДЖ^-$, Ромео – $ДЖ^+$; $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Этот, на первый взгляд простой, случай приводит к довольно интересному результату (рис.1): чувства влюбленных периодически меняют знак, переходя от любви к антипатии. Однако чувства обоих остаются в ограниченном диапазоне значений – ни бесконечной любви, ни бесконечной ненависти не возникает. Соответствующие периодические (гармонические) функции сдвинуты друг относительно друга на четверть периода, так что для бесконечного процесса взаимная любовь ($J > 0$, $R > 0$) имела бы место в течение 25% времени. В ходе первых десяти лет этот процент несколько меньше – только 23,5%. При достаточном терпении наша пара всегда может дождаться момента, когда отношения вновь наладятся.

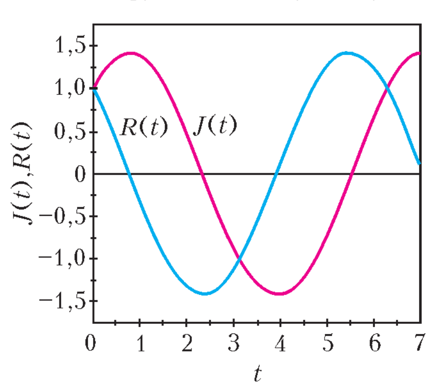


Рис.1. Периодические изменения отношений

2. *Пара*: Джульетта – H^+, Ромео – ($ДЖ^+ + H^+$); $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

По сравнению с предыдущим случаем Джульетта – не анти-Дон Жуан, а Нарцисс. Это приводит к серьезному конфликту отношений. Джульетта руководствуется только собственным положительным чувством к Ромео, и ее любовь к нему непрерывно растет, в то время как чувство Ромео

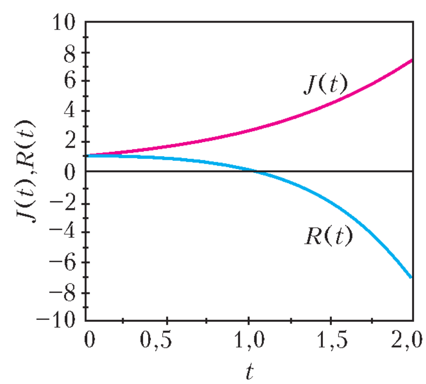


Рис.2. Кризис отношений

постепенно охладевает (рис.2). Взаимная любовь ограничена во времени и исчезает через год, чтобы никогда больше не вернуться. Трагедия!

Этот пример выявляет один из дефектов нашей простой модели – ее результатом может быть *неограниченно* возрастающая (или убывающая) во времени любовь. Очевидно, этот результат противоречит экспериментальным данным. В реальной жизни существует некий механизм ограничения любви и ненависти. Как можно это учесть в нашей модели (и тем самым исправить ее), мы обсудим ниже.

Любовь/антипатия с первого взгляда (J(0) = +1, R(0) = –1)

1. *Пара*: Джульетта – H^+, Ромео – $ДЖ^-$; $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Оказывается, даже в этом, казалось бы безнадежном, случае неудачного знакомства бывает счастливый исход. Немного (чуть более полугода) терпения со стороны Джульетты, и Ромео падает к ее ногам, сраженный силой ее любви (рис.3). Интересно, что похожая ситуация наблюдается и

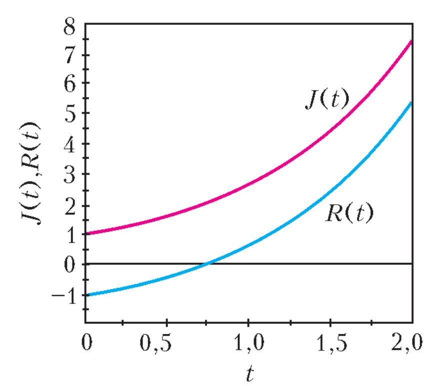


Рис.3. Счастливый исход сложных отношений

при других «конфигурациях» персонажей. Любовь побеждает антипатию, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ или } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Правда, в последнем случае Джульетте надо быть более терпеливой: срок «созревания» Ромео составляет целый год.

2. *Пара*: Джульетта – $ДЖ^-$, Ромео – ($ДЖ^- + H^-$); $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Этот случай интересен сложными душевными переживаниями Джульетты: сначала в ответ на холодность Ромео ее чувство начинает спадать, но через 10 месяцев, пройдя через

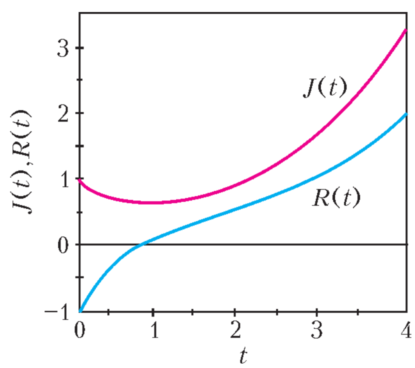


Рис.4. Превратности любви

минимум, устремляется вверх, возбуждая в Ромео все более нарастающее ответное чувство (рис.4). Любовь торжествует!

Равнодушие/любовь с первого взгляда (J(0) = 0, R(0) = +1)

1. *Пара*: Джульетта – $ДЖ^-$, Ромео – H^-; $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Совершенно неожиданный результат развития событий в этом случае: полное равнодушие Джульетты постепенно перерастает в любовь. Жаль только, что поздно – Ромео, в

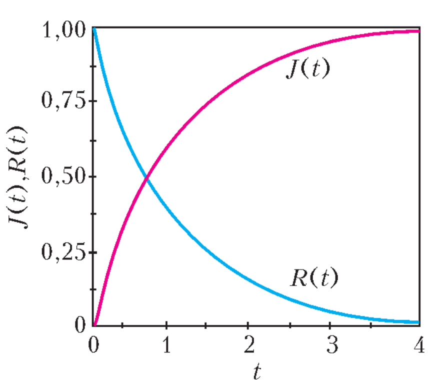


Рис.5. Непродолжительное счастье

отсутствие пылкого ответного чувства, наоборот, становится равнодушен к Джульетте (рис.5). Утешить их может лишь примерно полуторо-двухлетний период взаимного увлечения, когда Джульетта уже неравнодушна к Ромео, а он еще не успел разлюбить ее. Очень жизненная ситуация!

2. *Пара*: Джульетта – ($ДЖ^- + H^-$), Ромео – ($ДЖ^- + H^-$); $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

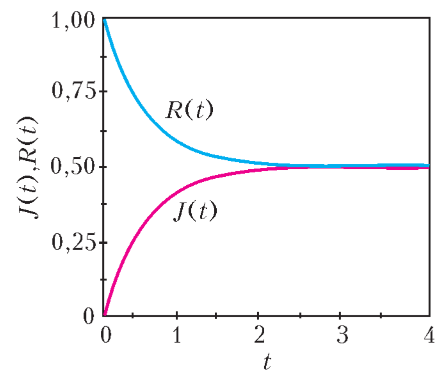


Рис.6. Вечная любовь

Когда люди схожи характером (а это – тот самый случай), происходит маленькое чудо: достаточно одному из них полюбить другого – и через какие-нибудь пару лет этот другой (вначале совершенно равнодушный) воспылает любовью к первому (рис.6). Наступит идиллия – они будут любить друг друга одинаково крепко, и это будет длиться вечно!

Но настоящее чудо происходит в последнем из приводимых здесь примеров.

Взаимная антипатия с первого взгляда (J(0) = –1, R(0) = –1)

Пара: Джульетта – ($ДЖ^+ + H^-$), Ромео – ($ДЖ^- + H^-$); $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Необходимое условие настоящего чуда: оба партнера – анти-Нарциссы, но один из них – Дон Жуан, а другой – анти-Дон Жуан. В этом случае взаимная антипатия непостижимым образом перерастает во взаимную любовь. Впрочем, это

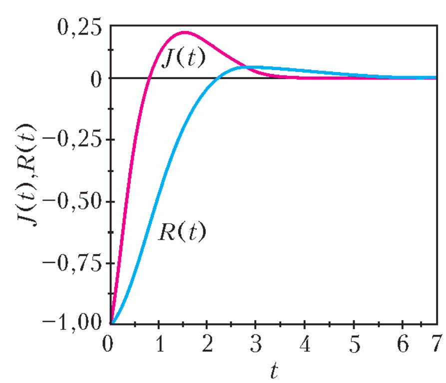


Рис.7. От ненависти до любви – один шаг

чудо не вечно: любовь сменяется полным равнодушием друг к другу (рис.7). Но год общего счастья гарантирован!

Выше уже отмечалось, что наша простая модель в ряде случаев приводит к выводу о возможности неограниченного роста любви (или антипатии). Но так можно и здоровье подорвать! Между тем, давно замечено:

Люби умеренно – пролюбишь дольше.

(В.Шекспир, «Ромео и Джульетта»)

Ошибка заключается в том, что мы не ввели в наши кинетические уравнения (1) никаких ограничений роста функций $J(t)$ и $R(t)$ – правые части этих уравнений линейны по J и R. Ограничить функции $J(t)$ и $R(t)$ можно введением нелинейности в кинетические уравнения. Добавим, например, в их правые части дополнительные слагаемые, квадратичные по J и R:

$$\frac{dJ}{dt} = a_{11}J + a_{12}R - \gamma J^2 , \qquad (2)$$

$$\frac{dR}{dt} = a_{21}J + a_{22}R - \gamma R^2 .$$

Параметр γ должен быть положительным – тогда с ростом J и R скорости dJ/dt и dR/dt изменения этих функций будут падать, что и предотвратит их неограниченный рост.

Посмотрим, как повлияет эта нелинейность на развитие событий в уже рассмотренном выше случае «Любовь/антипатия с первого взгляда» для второй пары (см. рис.4). Чтобы не менять полученные ранее результаты в том интервале, где $J(t)$ и $R(t)$ не очень велики, надо выбрать $\gamma \ll 1$ – тогда дополнительными нелинейными слагаемыми в уравнениях (2) можно пренебречь. Положим, например, $\gamma = 0{,}1$ (и, естественно, добавим новые слагаемые в программу Mathematica). Результат решения подправленной системы уравнений показан на рисунке 8. Видно, что любовь партнеров через 10 лет насыщается.

Итак, ограничение любви (или ненависти) можно объяснить нелинейностью чувств, заложенной в нас Природой.

Нужно ли всерьез относиться ко всему вышеизложенному? И да, и нет. Конечно, наивно думать, что столь простая модель действительно может описать все многообразие отношений между влюбленными. Например, она не включает в себя взаимодействие персонажей с другими людьми. Еще одно неучтенное осложнение состоит в том, что вид уравнений или, по крайней мере, значения входящих в него параметров могут меняться со временем. Это называется неавтономностью, и поэты давно ее заметили:

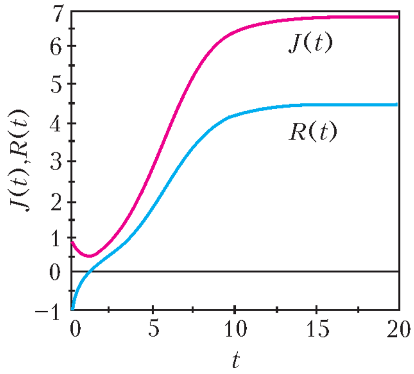


Рис.8. Насыщение отношений

Весной фантазия мужчины
Легко склоняется к любви.
(А.Теннисон, «Локсли-Холл»)

Но даже у примитивных моделей есть то положительное свойство, что их опровержение или усовершенствование заставляет глубже взглянуть на суть явления, выявить новые, не учтенные ранее факторы, оценить границы применимости старой модели, выработать другой язык описания и, в конечном счете, предложить более точную новую модель.

Хотелось бы, однако, чтобы в рассматриваемом случае такая модель не появлялась как можно дольше!

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

Золотое сечение и числа Фибоначчи

В.БУГАЕНКО

Основные определения

Пусть на отрезке AB расположена точка M. Она делит отрезок на две части. Если отношение длин большей части к меньшей равно отношению длины всего отрезка к длине большей части, то говорят, что точка делит отрезок *в крайнем и среднем отношении*, а само это отношение называют *золотым сечением*. Если считать, что $AM \geq MB$, то приведенное условие записывается в виде соотношения

$$\frac{AB}{AM} = \frac{AM}{MB} . \qquad (1)$$

Существование и единственность золотого сечения мы докажем чуть ниже.

Последовательность, первые два члена которой равны единице, а каждый следующий равен сумме двух предыдущих, называется *последовательностью Фибоначчи*, а ее члены – *числами Фибоначчи*. Вот несколько первых членов последовательности Фибоначчи:

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ 144,\ldots$$

На первый взгляд, золотое сечение и числа Фибоначчи никак не связаны между собой. Более того, они относятся к разным разделам математики: золотое сечение – к геометрии, а числа Фибоначчи – к алгебре. Однако же удивительным образом во многих задачах, связанных с золотым сечением, возникают числа Фибоначчи. И наоборот, в задачах о числах Фибоначчи появляется золотое сечение. С некоторыми такими примерами мы познакомимся в этой статье. Кроме того, мы увидим, что золотое сечение является пределом некоторых естественным образом возникающих числовых последовательностей. Таким образом, мы получим наглядную иллюстрацию того, что вся математика едина, а различные ее разделы (алгебра, геометрия, математический анализ) тесно взаимосвязаны.

Для начала рассмотрим две несложные геометрические задачи, приводящие к понятию золотого сечения.

Золотой прямоугольник

Задача 1. *Существует ли прямоугольник, который можно разрезать на две части, одна из которых является квадратом, а вторая – прямоугольником, подобным исходному?*

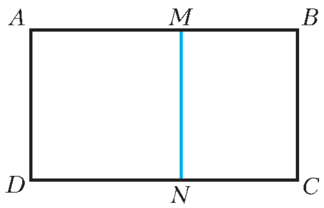


Рис. 1

Решение. Очевидно, что, для того чтобы прямоугольник был разрезан на два прямоугольника, линия разреза должна быть параллельна его стороне. Пусть данный прямоугольник $ABCD$ разрезан прямой MN так, что образовались квадрат $AMND$ и прямоугольник $BCNM$ (рис.1). Тогда условие подобия прямоугольников $ABCD$ и $BCNM$ запишется в виде

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{MB};$$

учитывая, что $BC = AM$, получаем соотношение (1), а это и означает, что точка M делит отрезок AB в крайнем и среднем отношении. Поэтому такой прямоугольник существует, и отношение его сторон равно золотому сечению. Будем называть его *золотым прямоугольником*.

Золотые треугольники

Задача 2. *Существует ли равнобедренный треугольник, который можно разрезать на два различных равнобедренных треугольника, один из которых подобен данному?*

Решение. Обозначим исходный треугольник ABC. Линия разреза, очевидно, должна проходить через одну из его

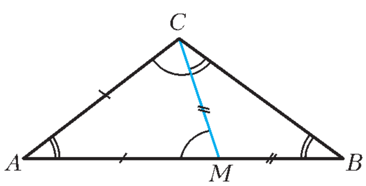


Рис. 2

вершин. Пусть линией разреза будет отрезок CM, где M – точка на стороне AB. Разберем отдельно два случая, когда AB – основание и когда AB – боковая сторона треугольника.

Пусть AB – основание, а C – вершина равнобедренного треугольника ABC (рис.2). Пусть треугольник CMB подобен треугольнику ABC, а ACM – не равный ему равнобедренный треугольник. Тогда $AM = AC = BC$, $MB = MC$. Из подобия следует

$$\frac{AC}{MB} = \frac{AB}{BC};$$

заменяя AC в числителе левой части и BC в знаменателе правой части на AM, получаем соотношение (1). А это и означает, что точка M делит отрезок в крайнем и среднем отношении. Таким образом, искомый равнобедренный треугольник таков, что отношение его основания к боковой стороне равно золотому сечению.

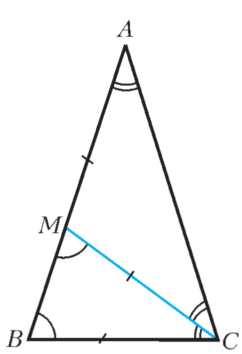


Рис. 3

Теперь пусть основанием треугольника является BC (рис.3). Очевидно, что из двух частей подобным треугольнику ABC может являться только BCM. Имеем $BC = CM = MA$ и $AB = AC$. Из подобия следует

$$\frac{BC}{MB} = \frac{AB}{BC},$$

и, заменяя BC на AM, опять получаем соотношение (1). Значит, и в этом случае точка M делит отрезок в крайнем и среднем отношении. В этом треугольнике отношение стороны к основанию равно золотому сечению.

Итак, мы нашли два типа искомых треугольников. В обоих случаях отношение сторон такого треугольника равно золотому сечению. Во втором случае это отношение боковой стороны к основанию, и треугольник получается остроугольным, а в первом случае – наоборот, золотому сечению равно отношение основания к боковой стороне, и в этом случае треугольник тупоугольный. Каждый из двух типов золотых треугольников разрезается на два золотых треугольника разных типов.

Золотое сечение

Пришло время доказать существование и единственность золотого сечения, а заодно и вычислить его значение. Итак, пусть точка M делит отрезок AB в крайнем и среднем отношении, и предположим, что $AM > MB$. Обозначим $AM = a$, $MB = b$, $a/b = \varphi$. По условию, $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$, или $1 + \frac{b}{a} = \frac{a}{b}$, откуда получаем равенство

$$1 + \frac{1}{\varphi} = \varphi, \qquad (2)$$

которое сводится к квадратному уравнению относительно φ:

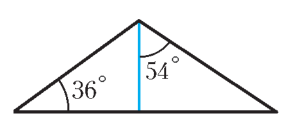
$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0. \qquad (3)$$

Это квадратное уравнение имеет корни $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, однако лишь один из них является положительным числом. Следовательно, искомое отношение φ равно $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Углы золотых треугольников

Найдем, чему равны углы золотых треугольников. Сначала рассмотрим тупоугольный золотой треугольник (см. рис.2). Обозначим угол при его основании через α. Тогда $\angle CAB = \angle CBA = \angle BCM = \alpha$. Следовательно, $\angle AMC = 2\alpha$, как внешний угол треугольника MBC. Отсюда $\angle ACM = \angle AMC = 2\alpha$, и $\angle ACB = 3\alpha$. Получаем, что сумма углов треугольника ABC равна 5α, откуда $\alpha = 36°$. Итак, углы тупоугольного золотого треугольника равны $36°$, $36°$ и $108°$.

Теперь перейдем к остроугольному золотому треугольнику (см. рис.3). На этот раз обозначим через α угол BAC при вершине. Тогда $\angle ACM = \alpha$, поскольку треугольник MAC равнобедренный, и $\angle BCM = \alpha$, поскольку треугольники ABC и CMB подобны. Таким образом, угол при основании треугольника ABC равен 2α, поэтому сумма углов треугольника равна 5α, откуда $\alpha = 36°$. Итак, углы остроугольного золотого треугольника равны $36°$, $72°$ и $72°$.



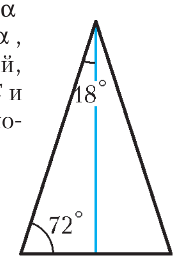


Рис. 4

Разрезав золотые треугольники по оси симметрии на два равных прямоугольных треугольника (рис. 4), можно легко найти тригонометрические функции некоторых углов, связанных с этими треугольниками:

$$\sin 54° = \cos 36° = \frac{\sqrt{5}+1}{4}; \quad \sin 18° = \cos 72° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

Эти равенства дают возможность найти тригонометрические функции всех углов, кратных $18°$. Они дополняют хорошо известные «табличные» синусы и косинусы углов, кратных $30°$ и $45°$.

Правильный пятиугольник

Если провести все диагонали правильного пятиугольника $ABCDE$ (рис.5), то получится правильная пятиконечная звезда, высекающая внутри себя меньший правильный пятиугольник $A_1B_1C_1D_1E_1$. Углы правильного пятиугольника равны $108°$, а углы при лучах правильной пятиконечной звезды равны $36°$. Эти же величины являются углами золотых треугольников. Поэтому в получившейся конструкции можно найти много золотых треугольников, некоторые из них разрезаны на меньшие золотые треугольники описанным выше способом. Например, золотой тупоугольный треугольник ABC разрезан линией BD_1 на два золотых треугольника. Один из них – треугольник BD_1C – в свою очередь разрезан на два меньших золотых треугольника отрезком BE_1. А отрезок AE_1 разрезает золотой остроугольный треугольник ABD на два золотых треугольника.

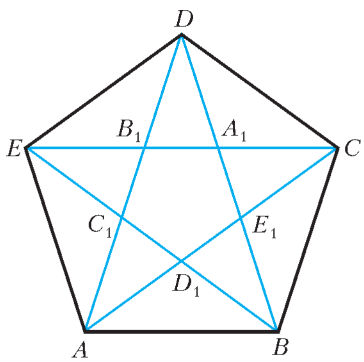


Рис. 5

Золотые треугольники могут быть построены с помощью циркуля и линейки. Действительно, для этого достаточно построить два отрезка, отношения длин которых равно φ. Затем из двух длинных и одного короткого получается остроугольный золотой треугольник, а из двух коротких и одного длинного – тупоугольный. Осталось показать, как увеличить данный отрезок в φ раз. Один из возможных способов – это действовать «в лоб». Пусть мы имеем отрезок длины b. Сначала строим прямоугольный треугольник с катетами b и $2b$. Его гипотенуза равна $\sqrt{5}b$. Затем эту гипотенузу удлиняем на b и результат делим пополам.

Тем самым, мы умеем строить с помощью циркуля и линейки угол в $108°$, являющийся углом правильного пятиугольника. А значит, мы попутно нашли решение классической задачи о построении правильного пятиугольника. Действительно, для этого достаточно построить пятизвенную ломаную с равными звеньями и углами по $108°$. После откладывания пятого звена она замкнется, и тем самым будет получен правильный пятиугольник. Основанный на той же идее, но более изящный способ построения правильного пятиугольника приведен в упражнении 2.

Число φ и последовательность Фибоначчи

Найдем приближенное значение числа φ: $\varphi = 1{,}61803\ldots$ Обратная величина к φ равна $0{,}61803\ldots$ Золотое сечение – единственное положительное число, обратное к которому получается вычитанием единицы. Это следует из равенства (2). Аналогично, из равенства (3) получаем, что для возведения числа φ в квадрат достаточно добавить к нему единицу: $\varphi^2 = 1 + \varphi$. Зададимся вопросом: можно ли так же просто вычислить другие степени числа φ? Воспользовавшись формулой для квадрата, получаем искомые формулы для последующих степеней:

$$\varphi^3 = \left(\varphi^2\right)\varphi = (1+\varphi)\varphi = \varphi + \varphi^2 = \varphi + (1+\varphi) = 1 + 2\varphi;$$

$$\varphi^4 = \left(\varphi^3\right)\varphi = (1+2\varphi)\varphi = \varphi + 2\varphi^2 = \varphi + 2(1+\varphi) = 2 + 3\varphi;$$

$$\varphi^5 = \left(\varphi^4\right)\varphi = (2+3\varphi)\varphi = 2\varphi + 3\varphi^2 = 2\varphi + 3(1+\varphi) = 3 + 5\varphi;$$

…

Нетрудно заметить закономерность:

$$\varphi^n = f_{n-1} + f_n\varphi, \qquad (4)$$

где f_n – последовательность Фибоначчи. Ее легко доказать, используя метод математической индукции. В качестве базы индукции можно взять уже проверенные равенства для $n = 2$ и 3. А шаг индукции заключается в простой выкладке:

$$\varphi^{n+1} = \left(\varphi^n\right)\varphi = \left(f_{n-1} + f_n\varphi\right)\varphi =$$
$$= f_{n-1}\varphi + f_n\varphi^2 = f_{n-1}\varphi + f_n(\varphi+1) =$$
$$= \left(f_{n-1} + f_n\right)\varphi + f_n = f_n + f_{n+1}\varphi.$$

Рассмотрим теперь число $\bar{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ – отрицательный корень уравнения (3). Для его n-й степени выполняется такая же формула, как и для числа φ:

$$\bar{\varphi}^n = f_{n-1} + f_n\bar{\varphi}. \qquad (5)$$

Действительно, доказывая формулу (4), мы пользовались лишь тем, что число φ является корнем уравнения (3), а значит, она останется верной при замене φ на другой корень того же уравнения. Вычтя (5) из (4), получаем $\varphi^n - \bar{\varphi}^n = f_n(\varphi - \bar{\varphi})$, откуда следует $f_n = \frac{\varphi^n - \bar{\varphi}^n}{\varphi - \bar{\varphi}}$, или, после замены φ и $\bar{\varphi}$ на их явные выражения,

$$f_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}. \qquad (6)$$

Эта формула позволяет вычислять число Фибоначчи непосредственно через его номер, не вычисляя все предыдущие, и называется *формулой Бинэ*. На первый взгляд может показаться удивительным, что иррациональное выражение, стоящее в ее правой части, дает целое число при любом n.

Записав формулу Бинэ в виде разности

$$f_n = \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} - \frac{\bar{\varphi}^n}{\sqrt{5}}, \qquad (7)$$

заметим, что вычитаемое в правой части является числом, по модулю меньшим $1/\sqrt{5}$, а его знак зависит от четности n. Поэтому n-е число Фибоначчи можно вычислить как ближайшее целое число к $f_n = \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}$. При этом округление происходит в меньшую сторону при четных n и в большую сторону при нечетных n.

Замечательные пределы, связанные с золотым сечением

Фундаментальное значение золотого сечения обосновывается также тем, что φ является пределом некоторых простых и естественным образом определенных числовых последовательностей. В качестве примера приведем два бесконечных выражения для числа φ:

$$\varphi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \ldots}}}}, \qquad (8)$$

$$\varphi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}}. \qquad (9)$$

(Продолжение см. на с. 34)

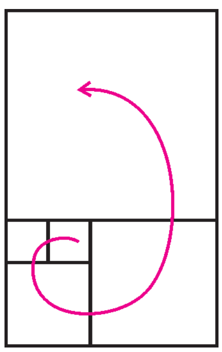
Бесконечность в задачах

В каждой задаче этого калейдоскопа речь идет так или иначе о чем-то бесконечном (например, о плоскости или десятичной дроби). Разумеется, можно придумать сколь угодно много задач, в которых участвует нечто бесконечное. Мы же ограничимся очень небольшим числом тем, и в каждой приведем несколько красивых примеров.

Фигуры на плоскости

1. *Можно ли покрыть плоскость бесконечным числом квадратов, среди которых ровно два одинаковых? Квадраты не могут перекрываться.*

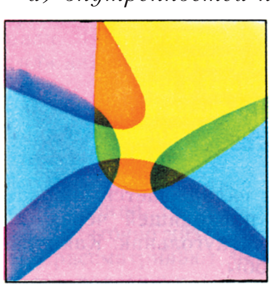
Ответ: да, можно. Нарисуем квадрат со стороной 1, приставим к нему слева квадрат со стороной 1, чтобы получился прямоугольник 1×2, к этому прямоугольнику приставим снизу квадрат со стороной 2, чтобы получился прямоугольник 2×3, к нему приставим справа квадрат со стороной 3 и так далее: будем заполнять плоскость «по спирали», каждый раз приставляя к имеющейся фигуре квадрат так, чтобы его сторона совпала с одной из сторон фигуры. Ясно, что любая точка плоскости будет покрыта одним из квадратов. Кстати, длины сторон этих квадратов образуют последовательность Фибоначчи 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...– подробно о ней рассказано в этом номере журнала в рубрике «Математический кружок».



Подумайте над более сложным вопросом: можно ли покрыть плоскость бесконечным числом неперекрывающихся квадратов, среди которых нет одинаковых?

2. *Можно ли покрыть плоскость конечным числом а) внутренностей парабол;*

б) внутренностей углов, сумма которых меньше 360°?

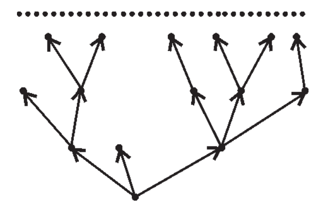


Приведем решение пункта а). Ответ: нельзя. Предположим, что такие параболы найдутся. Заметим, что внутренность параболы пересекается с прямой по бесконечному куску только в случае, если прямая параллельна оси параболы. Проведем прямую, не параллельную ни одной из осей наших парабол (это возможно, так как их конечное число). Тогда каждая парабола пересечет эту прямую по отрезку, а так как отрезков будет конечное число, то даже эта прямая не будет покрыта.

Бесконечные графы

3. *Пусть известно, что человечество бессмертно, а каждый человек смертен. Число людей в каждом поколении конечно. Докажите, что найдется бесконечная цепочка мужчин, начинающаяся с Адама (каждый следующий в цепочке – сын предыдущего).*

Построим такую картинку. На первом этаже разместим одну точку – она будет изображать Адама. Из нее выпустим столько стрелок, сколько было у Адама сыновей, на второй этаж (концы стрелок соответствуют сыновьям Адама). Из каждой точки–человека второго этажа выпустим стрелки на третий этаж (стрелки опять соответствуют сыновьям), и так далее. Получим систему точек и стрелок из бесконечного числа этажей (так как человечество бессмертно), но на каждом этаже будет конечное число точек.



Ясно, что есть бесконечное количество конечных путей, идущих по стрелкам, с началом в точке первого этажа. Надо доказать, что есть бесконечный путь. Объясним, как его найти. Первой в нем будет точка первого этажа. Так как есть бесконечно много путей, ведущих из точки первого этажа, то на втором этаже найдется точка, через которую проходит бесконечно много путей. Эта точка будет второй в нашем пути. Рассмотрим все пути, проходящие через выбранные две точки, – их бесконечно много, и значит, на третьем этаже найдется точка, через которую проходит бесконечно много из них. Выберем ее третьей. Каждый раз мы сможем достраивать наш путь, увеличивая его длину, и в итоге получится бесконечный путь.

4. *Имеется язык с конечным алфавитом. Словом в этом языке называется любая (конечная или бесконечная) последовательность букв из алфавита этого языка. Часть слов (конечной длины) в языке – неприличные. Назовем слово абсолютно приличным, если в нем нет неприличных подслов. Известно, что существуют сколь угодно длинные абсолютно приличные слова. Докажите, что существует бесконечно длинное абсолютно приличное слово.*

Преследования на плоскости

5. *Игра происходит на плоскости. Играют двое: первый передвигает одну фишку-волка, второй – 99 фишек-овец. После хода волка ходит одна из овец, затем после следующего хода волка – опять какая-нибудь из овец и т.д. И волк, и овцы передвигаются за один ход в любую сторону не более чем на один метр. Верно ли, что при любой первоначальной позиции волк поймает хотя бы одну овцу (окажется с ней в одной точке)?*

Ответ: неверно. Нарисуем на плоскости 100 параллельных прямых так, чтобы расстояние между соседними прямыми равнялось 3 метрам. Разместим овец на разные прямые, каждая в дальнейшем будет двигаться только по своей прямой. Волка поместим на сотую прямую.

Приведем алгоритм поведения овец, при котором расстояние от волка до любой овцы перед ходом волка всегда будет больше метра. Если расстояние от волка до каждой из овец больше метра, двигаем любую овцу (вдоль ее прямой) так, чтобы она удалилась от волка. Как только волк приближается к какой-то из овец на расстояние 1 метр или ближе (такая овца может быть ровно одна), сдвигаем овцу по ее прямой в одну из сторон на 1 метр так, чтобы расстояние между ней и волком стало больше метра.

6. *Город представляет собой бесконечную клетчатую плоскость (линии – улицы, клеточки – кварталы). На одной из улиц через каждые 100 кварталов на перекрестках стоит по милиционеру. Где-то в городе есть бандит (его местонахождение неизвестно, но перемещается он только по улицам). Цель милиции – увидеть бандита. Есть ли у милиции алгоритм наверняка достигнуть своей цели? Максимальные скорости милиции и бандита – какие-то конечные, но неизвестные нам величины (у бандита скорость может быть больше, чем у милиции). Милиция видит вдоль улиц во все стороны на бесконечное расстояние.*

Выберем систему координат так, чтобы милиционеры стояли на улице $y = 0$ в точках $(0; 0)$, $(100; 0)$, $(-100; 0)$, $(200;0)$, $(-200;0)$ и т.д. Пусть милиционеры, стоящие в точках вида $(200k;\ 0)$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, останутся на месте. Тогда бандит окажется внутри некоторой полосы между прямыми $x = 200m$ и $x = 200(m + 1)$; он сможет двигаться внутри это полосы, но не сможет выбраться за ее пределы.

Остальные милиционеры (назовем их патрульными) пусть движутся по улице $y = 0$ в направлении точки $(0; 0)$ до ближайшего к ней перекрестка, до которого еще не доходил никто из патрульных. Дойдя до перекрестка $(n; 0)$, патрульный сворачивает на перпендикулярную улицу и движется по ней до точки $(n; n)$ и там останавливается. В результате постепенно патрульные будут занимать все перекрестки на прямой $y = x$. Докажите, что, действуя таким образом, милиционеры через некоторое время смогут увидеть бандита.

7*. *В городе из предыдущей задачи трое полицейских ловят вора (местонахождение вора неизвестно, но перемещается он только по улицам). Максимальные скорости у полицейских и вора одинаковы. Вор считается пойманным, если он оказался на одной улице с полицейским. Как полицейским поймать вора?*

Бесконечные десятичные дроби

8. *Докажите, что любое действительное положительное число можно представить в виде суммы девяти чисел, десятичная запись каждого из которых состоит только из цифр 0 и 8.*

Легко представить любое положительное число в виде суммы девяти чисел, запись которых состоит только из нулей и единиц (проверьте). Теперь решим исходную задачу. Пусть нам надо представить число a. Представим сначала число $a/8$ в виде суммы девяти чисел, записи которых состоят только из нулей и единиц, а затем домножим каждое из этих чисел на 8 – получим искомые 9 чисел, сумма которых равна a.

9. *Докажите, что в любой бесконечной десятичной дроби можно так переставить цифры, что полученная дробь станет периодической (возможно, с предпериодом).*

Если в записи дроби есть цифры, встречающиеся в этой записи конечное число раз, то перенесем их все в начало (запишем подряд сразу после запятой). Остальные цифры встречаются бесконечное число раз. Пусть это, например, цифры 2, 5, 7 и 8. Тогда можно переносить их последовательно в начало так, чтобы они шли в порядке 257825782578... В итоге получится периодическая дробь.

Роботы на клетчатой плоскости

Робот – это машина с конечной памятью, способная выполнять программу конечной длины. У робота есть несколько флажков. Робот может выполнять следующие действия:

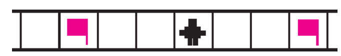
– попав в клетку, проверить, есть ли там флажок;

– сдвинуться на одну из соседних клеток (на плоскости – влево, вправо, вверх, вниз);

– установить или снять флажок в клетке, где робот находится.

10. *Робот с двумя флажками стоит на одной из клеток бесконечной клетчатой полоски шириной в одну клетку. Как ему действовать, чтобы обойти всю полоску, т.е. побывать на каждой ее клетке хотя бы раз?*

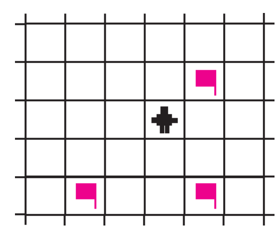
Ставим в клетку флажок, сдвигаемся влево, ставим в клетку второй флажок. Далее действуем по очень простому алгоритму: сдвигаемся вправо, пока не дойдем до флажка, снимаем флажок, сдвигаемся еще на клетку вправо, ставим флажок и движемся влево до флажка, передвигаем его на клетку влево и возвращаемся в начало алгоритма (движемся вправо до флажка и т.д.).



11. *Как роботу с четырьмя флажками обойти клетчатую плоскость? Можно ли обойтись тремя флажками?*

Алгоритм «обходить плоскость по спирали», чередуя ходы влево, вверх, вправо и вниз, периодически увеличивая длину хода на 1 клетку, не годится: роботу придется запоминать все бóльшие и бóльшие числа, а его память конечна.

Расположим четыре флажка в клетках квадрата 2×2. Далее будем «расширять» квадрат, например так. Сдвигаем левый верхний флажок влево и вверх, идем из этой клетки вправо, проверяя, нет ли под нами флажка. Если есть, сдвигаем его вправо и вверх, затем из этой клетки идем вниз, проверяя, нет ли слева от нас флажка, и так далее. В результате мы будем обходить плоскость, двигаясь «по спирали».



Оказывается, достаточно даже трех флажков (подсказка изображена на рисунке).

12. *Сможет ли робот обойти клетчатое трехмерное пространство, имея всего три флажка?*

13. *Как роботу обойти клетчатую полуплоскость, имея всего один флажок? Граница полуплоскости является стенкой. Изначально робот стоит у стенки. Робот видит стенку, когда оказывается рядом с ней.*

14. *На плоскость высадили двух совершенно одинаковых роботов. У каждого есть несколько флажков. Робот отличает свои флажки от чужих. Как им встретиться? Программы у них должны быть одинаковыми.*

Если бы у роботов могли быть разные программы, то организовать встречу было бы легко: один робот стоит на месте, а другой обходит плоскость, используя три флажка. Но роботы сделаны на одном конвейере, и программы поведения у них одинаковые. Попробуйте придумать программу, позволяющую роботам встретиться, используя как можно меньше флажков.

Материал подготовили
С.Дориченко, А.Николаев

(Начало см. на с. 29)

Для обоснования формулы (8) рассмотрим задаваемое ею число φ (мы пока не знаем, что это и есть золотое сечение, а лишь будем это доказывать). Заметим, что в правой части формулы под знаком корня стоит сумма двух слагаемых – единицы и выражения, совпадающего со всей правой частью формулы. Отсюда получаем уравнение $\varphi = \sqrt{1+\varphi}$, легко сводящееся к квадратному уравнению (3). Нам подходит лишь положительный корень этого уравнения, следовательно, рассматриваемое число φ и есть золотое сечение. Аналогично, формула (9) сводится к уравнению $\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$, которое опять же приводит нас к квадратному уравнению (3). А значит, число φ, определяемое формулой (9), также равно золотому сечению.

Конечно же, приведенные в предыдущем абзаце рассуждения не являются вполне строгими. Чтобы избавиться от этого недостатка и придать им строгость, нужно прежде всего определить, что означают бесконечные выражения в правых частях формул (8) и (9). Правая часть формулы (8) – это, по определению, предел последовательности

$$a_n = \underbrace{\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots+\sqrt{1}}}}_{n\ \text{корней}}. \qquad (10)$$

Она задается рекуррентным соотношением

$$a_1 = 1,\ a_n = \sqrt{1+a_{n-1}}.$$

Таким образом, уравнение $\varphi = \sqrt{1+\varphi}$ возникает как переход к пределу в правой и левой частях рекуррентного соотношения. Такой переход допустим, если рассматриваемая последовательность сходится. То же самое касается и правой части формулы (9), означающей предел последовательности

$$b_n = \left.1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{1}}}}\right\}\ n\ \text{«этажей»}, \qquad (11)$$

которая может быть задана рекуррентно:

$$b_1 = 1,\ b_n = 1 + \frac{1}{b_{n-1}}.$$

Переход к пределу в этом соотношении приводит нас к уравнению $\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$. Обе рассматриваемые последовательности состоят из положительных чисел, поэтому искомый предел не может быть отрицательным, а значит, можно ограничиться рассмотрением лишь неотрицательных корней уравнений. Для завершения доказательства формул (8) и (9) осталось лишь доказать, что рассматриваемые последовательности (10) и (11) сходятся. Оставим это в качестве упражнения для читателей, знакомых с теоремой Больцано–Вейерштрасса.

Напоследок докажем, что отношение двух последовательных чисел Фибоначчи стремится к золотому сечению. Применяя формулу Бинэ и воспользовавшись тем, что $\frac{\bar{\varphi}}{\varphi} < 1$, получаем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_{n+1}}{f_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\varphi^{n+1}-\bar{\varphi}^{n+1}}{\varphi^n-\bar{\varphi}^n} = \varphi\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{\bar{\varphi}}{\varphi}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{\bar{\varphi}}{\varphi}\right)^{n}} = \varphi.$$

Более подробную информацию о числах Фибоначчи можно почерпнуть в книге Н.Н.Воробьева [1]. Советуем также прочитать соответствующие главы из книг замечательного популяризатора математики Мартина Гарднера [2, 3] и посвященную золотому сечению главу из классической книги Гарольда Коксетера [4].

Упражнения

1. Обоснуйте следующий способ деления отрезка AB в крайнем и среднем отношении с помощью циркуля и линейки (рис.6). На перпендикуляре к отрезку AB в точке B откладывается отрезок BC, равный половине отрезка AB. Точки A и C соединяются отрезком и на нем откладывается отрезок CK, равный CB. На отрезке AB откладывается отрезок AM, равный AK. Точка M является искомой.

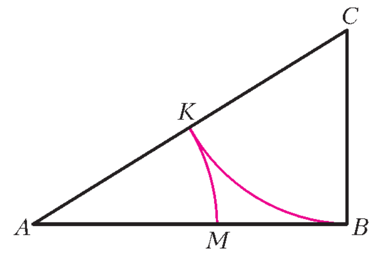


Рис. 6

2. Обоснуйте следующий способ построения правильного пятиугольника с помощью циркуля и линейки (рис.7). В окружности с центром O проводится диаметр BC и перпендикулярный ему радиус OA. Далее радиус OB делится пополам точкой D. На отрезке DC откладывается отрезок DE, равный DA. Отрезок AE равен стороне правильного пятиугольника, вписанного в исходную окружность. Осталось отложить его последовательно пять раз в виде хорд исходной окружности.

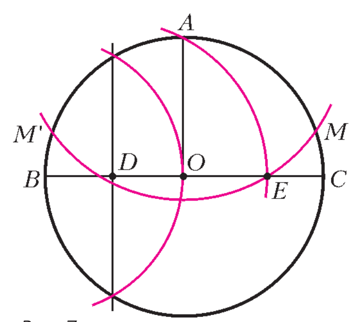


Рис. 7

3. Перечислите все равнобедренные треугольники, которые можно разрезать на два равнобедренных треугольника.

4. Докажите с помощью формулы бинома Ньютона, что правая часть формулы Бинэ является целым числом при любом n.

5. Назовем последовательность, каждый член которой, начиная с третьего, равен сумме двух предыдущих (а первые два члена могут быть произвольными), *обобщенной последовательностью Фибоначчи*. Найдите формулу, выражающую произвольный член обобщенной последовательности Фибоначчи через ее номер n и два первых члена a и b.

6. Докажите, что последовательности (10) и (11) сходятся.

7. Докажите, что общий член последовательности (11) может быть записан в виде $b_n = \frac{f_{n+1}}{f_n}$.

Литература

1. *Н.Н.Воробьев.* Числа Фибоначчи. (М.: Наука, 1992)

2. *М.Гарднер.* Математические головоломки и развлечения. Глава 23: Число φ – золотое сечение. (М.: Мир, 1999)

3. *М.Гарднер.* Математические новеллы. Глава 32: Числа Фибоначчи. (М.: Мир, 2000)

4. *Г.С.М.Коксте*р. Введение в геометрию. Глава 11: Золотое сечение и филлотаксис. (М.: Наука, 1966)

Движение проводника в магнитном поле

А.ЧЕРНОУЦАН

Закон электромагнитной индукции утверждает, что электродвижущая сила (ЭДС) индукции в контуре возникает *при любом изменении* магнитного потока через контур и по модулю равна скорости изменения магнитного потока:

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\Phi'(t) . \qquad (1)$$

Знак «минус» формально отражает правило Ленца для определения направления ЭДС индукции (точнее – индукционного тока) и имеет практический смысл только в том случае, если контур предварительно ориентирован, т.е. взаимосвязанно определены положительное направление нормали к контуру и положительное направление его обхода.

Слова «при любом изменении» выделены для того, чтобы подчеркнуть универсальность формулы (1): она дает правильный ответ в двух существенно различных случаях.

Первый случай: контур неподвижен, магнитное поле зависит от времени. В этой ситуации роль сторонней силы, приводящей в движение заряды в контуре, играет *сила со стороны вихревого электрического поля*, которое возникает при любом изменении магнитного поля со временем.

Второй случай: магнитное поле не меняется, магнитный поток изменяется за счет перемещения в пространстве всего контура или его частей. В такой ситуации роль сторонней силы выполняет *сила Лоренца*, действующая на свободные заряды проводника при его движении.

Универсальность формулы (1) является следствием принципа относительности Эйнштейна. При переходе из одной инерциальной системы отсчета в другую меняется состав электромагнитного поля, т.е. соотношение между электрическим и магнитным полями, но индукционный ток в контуре наблюдается в любом случае. В качестве примера рассмотрим проводящее кольцо, которое с постоянной скоростью приближается к неподвижному магниту. С точки зрения неподвижного наблюдателя, ток в кольце возникает под действием только сил Лоренца. Если же перейти в систему отсчета, связанную с кольцом, то индукционный ток создается только вихревым электрическим полем (сила Лоренца на неподвижные заряды не действует).

В этой статье мы рассмотрим задачи, связанные со вторым случаем, т.е. с движением проводников в постоянном магнитном поле. Для вычисления электродвижущей силы индукции можно использовать как формулу (1), так и прямое определение ЭДС через работу сторонних сил, т.е. в данном случае силы Лоренца. В некоторых ситуациях нужно использовать первый подход, в других одинаково удобны оба подхода, но в ряде случаев, как мы убедимся, второй подход имеет существенное преимущество.

Задача 1. *Медное кольцо радиусом $r = 5$ см помещают в однородное магнитное поле с индукцией $B = 8$ мТл перпендикулярно линиям индукции. Какой заряд пройдет по кольцу, если его повернуть на 180° вокруг оси, совпадающей с его диаметром? Сопротивление единицы длины кольца $\rho_l = 2$ мОм/м.*

Решение. Эту задачу надо решать с помощью формулы (1). Начальный магнитный поток равен $\Phi_1 = BS$ (нормаль выбрана вдоль вектора $\vec{B}$), конечный поток составляет $\Phi_2 = -BS$, и прошедший заряд вычисляется так:

$$|q| = |I_{\text{ср}}\Delta t| = \left|\frac{\mathcal{E}_{\text{ср}}}{R}\Delta t\right| = \left|-\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\frac{\Delta t}{R}\right| = \left|-\frac{\Delta\Phi}{R}\right| = \frac{2BS}{R}$$

(мы применили закон Ома для полной цепи $I = \frac{\mathcal{E}}{R}$). Подставляя $S = \pi r^2$, $R = \rho_l \cdot 2\pi r$, получим

$$q = \frac{Br}{\rho_l} = 200 \text{ мКл} .$$

Задача 2. *Сторона прямоугольного каркаса, имеющая длину $l = 10$ см, скользит со скоростью $v = 1$ м/с по двум другим сторонам, оставаясь с ними в электрическом контакте. Плоскость прямоугольника перпендикулярна линиям индукции однородного магнитного поля $B = 0{,}01$ Тл. Найдите силу тока в прямоугольнике через $t = 0{,}9$ с после начала движения. Сопротивление единицы длины провода $\rho_l = 1$ Ом/м. В начальный момент площадь прямоугольника равна нулю.*

Решение. В этой задаче ЭДС индукции одинаково просто получить и из формулы (1), и через силу Лоренца.

Направив положительную нормаль вдоль вектора $\vec{B}$ (рис. 1), получим $\Phi = Blx$, $\Delta\Phi = Bl\Delta x$, откуда

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -Bl\frac{\Delta x}{\Delta t} = -Bvl .$$

Знак «минус» позволяет найти направление ЭДС – против положительного направления обхода (см. рис.1). Величину тока в контуре находим из закона Ома для полной цепи $I = \mathcal{E}/R$, где сопротивление контура в данный момент времени равно $R = \rho_l(2l + 2vt)$. Окончательно получаем

$$I = \frac{Bvl}{\rho_l(2l + 2vt)} = 500 \text{ мкА}.$$

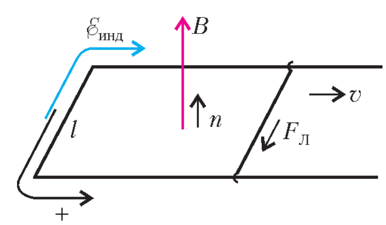


Рис. 1

Теперь посмотрим, как находить ЭДС индукции прямо из определения – через работу сторонних (не электростатических) сил по переносу единичного пробного заряда. В данном случае сторонняя сила – это сила Лоренца, возникающая за счет движения зарядов вместе с проводником:

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = \frac{A_{\text{стор}}}{q} = \frac{(qvB)l}{q} = Bvl . \qquad (2)$$

Видим, что модуль ЭДС совпадает с полученным выше. Совпадают и направления индукционного тока: оно в данном подходе определяется направлением силы Лоренца, которое находится мгновенно (без необходимости ориентировать контур и выбирать нормаль).

Основное преимущество второго подхода состоит в том, что он позволяет естественным образом вычислять ЭДС индукции в изолированном проводнике, движущемся в магнитном поле. Применение формулы (1) затрудняется тем, что иногда в задаче отсутствует контур из проводников и приходится вводить воображаемый «заметаемый» контур. Вывод формулы (2) свободен от этих недостатков. Более того, этот подход позволяет легко разобраться с вычислением ЭДС индукции при произвольном взаимном расположении проводника, вектора его скорости (при поступательном движении проводника) и вектора магнитной индукции. Поскольку в работу силы Лоренца войдет только ее составляющая, направленная вдоль проводника, то у векторов $\vec{v}$ и $\vec{B}$ надо оставить только составляющие, перпендикулярные к проводнику. Если угол между этими составляющими равен α, то

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = \frac{\left(qv_\perp B_\perp \sin\alpha\right) l}{q} = B_\perp v_\perp l \sin\alpha\,. \qquad (3)$$

Задача 3. *Самолет летит горизонтально со скоростью $v = 900$ км/ч. Найдите разность потенциалов, возникающую между концами его крыльев, если вертикальная составляющая индукции магнитного поля Земли $B_{\text{верт}} = 50$ мкТл, а размах крыльев $l = 12$ м.*

Решение. Изолированный проводник, движущийся в магнитном поле, надо рассматривать как источник в разомкнутой цепи, а разность потенциалов на зажимах такого источника равна его ЭДС. Более подробно: сторонние силы (сила Лоренца) вызывают перемещение свободных зарядов до тех пор, пока возникшее электростатическое поле разделенных зарядов не уравновесит действие сторонних сил. Поскольку крылья самолета и его скорость горизонтальны, то остается только вертикальная составляющая магнитного поля $B_{\text{верт}}$ (в формуле (3) $B_\perp \sin\alpha = B_{\text{верт}}$). Получаем

$$\Delta\varphi = B_{\text{верт}} v l = 150 \text{ мВ}.$$

Подход с силой Лоренца позволяет вычислять ЭДС индукции и разность потенциалов не только при поступательном, но и при вращательном движении проводника.

Задача 4. *С какой угловой скоростью надо вращать прямой проводник вокруг оси, проходящей через один его конец, в плоскости, перпендикулярной линиям однородного магнитного поля с индукцией $B = 0{,}2$ Тл, чтобы в проводнике возникла ЭДС индукции $\mathcal{E}_{\text{инд}} = 0{,}3$ В? Длина проводника $l = 20$ см.*

Решение. В этом случае сила Лоренца, действующая на пробный заряд q, зависит от расстояния x до оси вращения:

$$F_{\text{Л}} = qvB = q\omega x B\,,$$

но поскольку зависимость линейная, то работа этой силы вдоль проводника легко вычисляется:

$$A_{\text{стор}} = \frac{1}{2}\left(0 + q\omega l B\right) l\,.$$

Тогда ЭДС индукции, возникающая в проводнике, равна

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = \frac{A_{\text{стор}}}{q} = \frac{1}{2} B\omega l^2\,,$$

откуда

$$\omega = \frac{2\mathcal{E}_{\text{инд}}}{l^2 B} = 75 \text{ рад/с}\,.$$

Наиболее важное преимущество подхода с вычислением $\mathcal{E}_{\text{инд}}$ через силу Лоренца проявляется в задачах с разветвленной схемой, где движущийся проводник входит не в один, а, скажем, в два контура.

Задача 5. *Из проволоки, сопротивление единицы длины которой $\rho_l = 0{,}1$ Ом/м, сделали квадрат и поместили его в однородное магнитное поле с индукцией $B = 4$ мТл перпендикулярно линиям поля. По двум противоположным сторонам квадрата скользит со скоростью $v = 0{,}3$ м/с перемычка из такой же проволоки, оставаясь параллельной двум другим сторонам. Чему равен ток через перемычку в тот момент, когда она делит квадрат пополам?*

Решение. При попытке использовать формулу (1) мы сталкиваемся с тем, что $\mathcal{E}_{\text{инд}}$ каким-то образом (формула не конкретизирует) распределена как в левом, так и в правом контуре (рис.2,*а*), которые имеют общее сопротивление – движущуюся перемычку. Нарисовать в этих условиях эквивалентную схему для расчета токов представляется затруднительным.

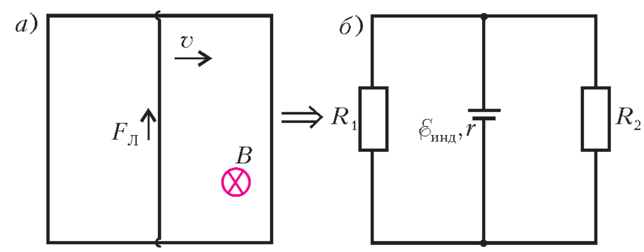


Рис. 2

Напротив, при втором подходе мы знаем, что сторонние силы и $\mathcal{E}_{\text{инд}}$ локализованы только в движущейся перемычке, а в остальных частях контура сторонние силы отсутствуют. Это позволяет однозначно составить эквивалентную схему (рис.2,*б*), в которой $\mathcal{E}_{\text{инд}} = Bva$, $r = \rho_l a$, $R_1 = R_2 = \rho_l \cdot 2a$, где a – сторона квадрата. Полное внешнее сопротивление равно $R = R_1R_2/\left(R_1 + R_2\right) = \rho_l a$, и ток через перемычку (через источник) равен

$$I = \frac{\mathcal{E}_{\text{инд}}}{r + R} = \frac{Bva}{\rho_l a + \rho_l a} = \frac{Bv}{2\rho_l} = 6 \text{ мА}.$$

Вычисление ЭДС индукции через силу Лоренца обладает еще одним важным преимуществом. Такой подход позволяет применить энергетические соображения, опирающиеся на очень простое свойство силы Лоренца: поскольку эта сила перпендикулярна скорости заряда, полная работа сил Лоренца над всеми зарядами проводника равна нулю. Это значит, что работа постоянного магнитного поля над зарядами в замкнутом контуре в качестве сторонней силы точно равна по величине и противоположна по знаку механической работе магнитного поля (силы Ампера) над движущимся проводником с током.

Задача 6. *Длинную проволоку согнули под углом α таким, что $\sin\alpha = 0{,}6$, и поместили в однородное магнитное поле с индукцией $B = 0{,}1$ Тл перпендикулярно линиям поля. Вдоль сторон угла равномерно перемещают перемычку из такой же проволоки так, что она все время образует прямой угол с одной из его сторон. В начальный момент перемычка находится на расстоянии $x_1 = 0{,}2$ м, а через время $t = 1$ с – на расстоянии $x_2 = 0{,}6$ м от вершины угла. Какое количество теплоты выделилось в системе за это время? Сопротивление единицы длины проволоки $\rho_l = 0{,}01$ Ом/м.*

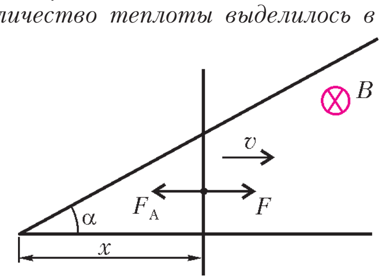


Рис. 3

Решение. Начнем с того, что вычислим ток в контуре. Если в какой-то момент перемычка находится на расстоянии x от вершины угла (рис.3), то длина перемычки между точками контакта равна $l = x\,\mathrm{tg}\,\alpha$, откуда для ЭДС индукции получаем

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = Bvl = Bvx\,\mathrm{tg}\,\alpha ,$$

где $v = (x_2 - x_1)/t$. Сопротивление контура в этот же момент равно

$$R = \rho_l\left(x + x\,\mathrm{tg}\,\alpha + \frac{x}{\cos\alpha}\right).$$

Видно, что сила тока в цепи

$$I = \frac{\mathcal{E}_{\text{инд}}}{R} = \frac{Bv\,\mathrm{tg}\alpha}{\rho_l\left(1 + \mathrm{tg}\alpha + \dfrac{1}{\cos\alpha}\right)} = \frac{Bv\sin\alpha}{\rho_l\,(1 + \sin\alpha + \cos\alpha)} = 1\ \text{А}$$

не зависит от x, т.е. остается постоянной.

Тепловая мощность $P = I^2R$ линейно зависит от x, а значит, и от t. Это позволяет вычислить выделившееся тепло в лоб, используя график зависимости $P(t)$ (или интегрируя). Попробуйте сделать это самостоятельно, мы же пойдем несколько иным путем.

Поскольку выделившееся количество теплоты (точнее, увеличение внутренней энергии системы) равно работе сторонних сил, а эта работа, в свою очередь, равна работе силы Ампера (с противоположным знаком), то можно вместо количества теплоты вычислить механическую работу. Сила Ампера

$$F_{\text{А}} = IBl = IBx\,\mathrm{tg}\,\alpha$$

линейно зависит от x, поэтому ее работа (по модулю) равна

$$|A| = \frac{1}{2}(F_1 + F_2)(x_2 - x_1) = \frac{1}{2}IB\,\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\left(x_2^2 - x_1^2\right) = 12\ \text{мДж}.$$

Задача 7. *По П-образной рамке, помещенной в однородное магнитное поле, перпендикулярное плоскости рамки, движется без трения с постоянной скоростью v = 2 м/с перемычка, сопротивление которой R = 2 Ом. К перемычке приложена сила F = 4 Н. Найдите силу тока в перемычке. Сопротивлением рамки пренебречь. Силу тяжести не учитывать.*

Решение. На перемычку, кроме внешней силы F, действует сила Ампера $F_{\text{А}}$, направленная против движения. Это можно проверить в лоб, найдя направление силы Лоренца в перемычке и тем самым направление силы тока (сделайте это), мы же приведем энергетический аргумент. Поскольку работа магнитного поля в качестве ЭДС контура положительна (других ЭДС нет), то механическая работа магнитного поля отрицательна (еще раз напомним, что полная работа сил Лоренца равна нулю). Значит, сила Ампера направлена против движения.

Второй закон Ньютона для перемычки имеет вид

$$F - F_{\text{А}} = 0 ,$$

где

$$F_{\text{А}} = IBl, \quad I = \frac{\mathcal{E}_{\text{инд}}}{R} = \frac{Bvl}{R}.$$

Исключая лишние переменные, получаем

$$I^2R = Fv, \ \text{и}\ I = \sqrt{\frac{Fv}{R}} = 2\ \text{А}.$$

Обратите внимание на то, что написанное слева соотношение имеет простой энергетический смысл и, подумав немного, его можно было бы написать сразу. Тепловая мощность тока равна мощности сторонних сил (сил Лоренца), а та, в свою очередь, равна мощности силы Ампера (с противоположным знаком), которая равна мощности внешней силы F. Иными словами, магнитное поле, не совершая работу, позволяет осуществить преобразование механической работы в работу электрического тока.

Задача 8. *По П-образной рамке, наклоненной под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту и помещенной в однородное вертикальное магнитное поле, начинает соскальзывать без трения перемычка массой m = 30 г. Длина перемычки l = 10 см, ее сопротивление R = 1 мОм, индукция магнитного поля B = = 0,1 Тл. Найдите установившуюся скорость движения перемычки. Сопротивлением рамки пренебречь.*

Решение. Запишем второй закон Ньютона для равномерно движущейся перемычки (рис.4) в проекции на направление скорости:

$$mg\sin\alpha - F_{\text{А}}\cos\alpha = 0 ,$$

формулу для силы Ампера:

$$F_{\text{А}} = IBl ,$$

закон Ома для полной цепи:

$$I = \frac{\mathcal{E}_{\text{инд}}}{R}$$

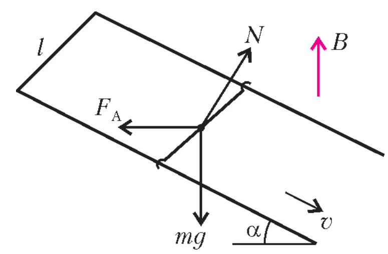


Рис. 4

и формулу для ЭДС индукции:

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = Bvl\sin\left(90^\circ + \alpha\right) = Bvl\cos\alpha .$$

Из этих уравнений найдем

$$v = \frac{mgR\sin\alpha}{B^2l^2\cos^2\alpha} = 2\ \text{м/с}.$$

Разберем теперь пример, когда ток в контуре определяется совместным действием магнитного поля и дополнительного источника.

Задача 9. *Замкнутый контур образован двумя вертикальными рейками, между нижними концами которых включен источник тока с ЭДС $\mathcal{E}$ = 60 мВ и внутренним сопротивлением r = 1 мОм, а верхние концы замкнуты перемычкой длиной l = 10 см и массой m = 10 г. Контур находится в перпендикулярном его плоскости однородном магнитном поле с индукцией B = 0,1 Тл. Когда перемычку освобождают, она начинает опускаться. Пренебрегая сопротивлением реек и перемычки, а также трением, найдите установившуюся скорость перемычки.*

Решение. В начальный момент сила тока определяется только источником: $I_0 = \mathcal{E}/r$. Легко убедиться, что в этот момент величина силы Ампера $F_{\text{А}0} = I_0Bl = \mathcal{E}Bl/r = 0{,}6$ Н больше силы тяжести mg = 0,1 Н. В условии сказано, что перемычка после освобождения стала опускаться. Следовательно, источник включен таким образом, что сила Ампера в начальный момент направлена вниз (рис.5,*а*).

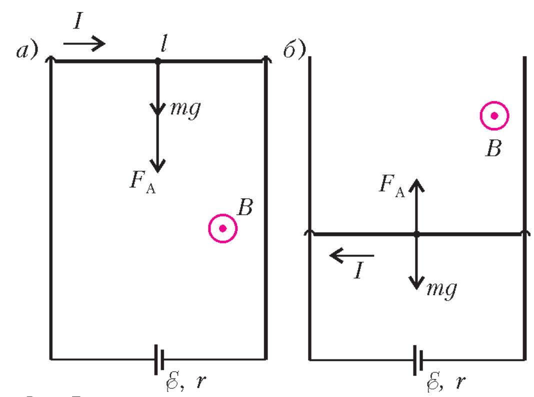


Рис. 5

С увеличением скорости перемычки растет ЭДС индукции, направленная против тока (полная мощность магнитного поля равна нулю). Когда ЭДС индукции сравняется с ЭДС источника, а затем превысит ее, ток поменяет направление. В дальнейшем сила Ампера направлена вверх и возрастает до тех пор, пока не сравняется с силой тяжести (рис.5,*б*). На втором этапе движения (после смены направления тока) ЭДС индукции направлена по току, а ЭДС источника – против. Второй закон Ньютона и закон Ома для полной цепи имеют вид

$$mg - IBl = 0, \quad I = \frac{Bvl - \mathcal{E}}{r}.$$

Отсюда получаем

$$v = \frac{mgr}{B^2l^2} + \frac{\mathcal{E}}{Bl} = 7 \text{ м/с}.$$

В следующей задаче система не переходит в режим установившейся скорости, и надо следить за ее ускорением.

Задача 10. *По вертикальной П-образной рамке, помещенной в однородное магнитное поле, перпендикулярное плоскости рамки, может без трения скользить перемычка. В короткую сторону рамки включена катушка индуктивностью L = 0,4 мГн. Масса перемычки m = 10 г, ее длина l = 10 см, индукция поля B = 0,1 Тл. Перемычку сначала удерживают на месте, затем отпускают. Пренебрегая сопротивлениями всех элементов цепи, найдите максимальную скорость и максимальное смещение перемычки.*

Решение. Поскольку сопротивления всех элементов цепи пренебрежимо малы, сумма всех ЭДС контура равна нулю:

$$L\frac{\Delta I}{\Delta t} = Bl\frac{\Delta x}{\Delta t},$$

откуда получаем

$$LI = Blx.$$

Это означает, что сила Ампера, действующая на перемычку и направленная вверх (рис.6), пропорциональна ее смещению:

$$F_A = IBl = \frac{B^2l^2}{L}x.$$

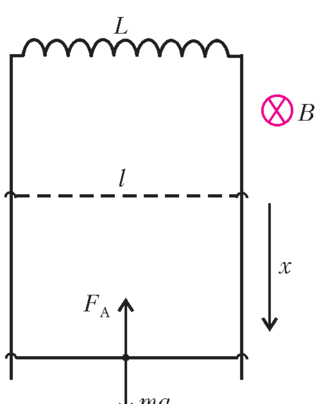


Рис. 6

Уравнение движения перемычки (второй закон Ньютона)

$$ma = mg - \frac{B^2l^2}{L}x$$

совпадает с уравнением движения груза, подвешенного на пружине жесткостью $k = B^2l^2/L$ и отпущенного без начальной скорости. Следовательно, перемычка совершает колебания с такими циклической частотой и амплитудой:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{B^2l^2}{mL}}, \quad A = \frac{mgL}{B^2l^2}.$$

Максимальная скорость перемычки равна

$$v_{\max} = \omega A = \frac{g\sqrt{mL}}{Bl} = 2 \text{ м/с},$$

а ее максимальное смещение равно

$$x_{\max} = 2A = \frac{2mgL}{B^2l^2} = 0{,}8 \text{ м}.$$

Максимальные скорость и смещение можно найти также с помощью закона сохранения энергии

$$\frac{LI^2}{2} - mgx + \frac{mv^2}{2} = 0,$$

подставив сюда $I = Blx/L$.

Упражнения

1. Максимальная ЭДС индукции, возникающая в прямоугольной рамке, вращающейся в однородном магнитном поле, $\mathcal{E}_{\max}$ = 3 В. С какой угловой скоростью вращается рамка, если максимальный магнитный поток через рамку $\Phi_{\max}$ = 0,05 Вб? Ось вращения рамки проходит через середины ее противоположных сторон и перпендикулярна линиям индукции поля.

2. Чему равна максимальная ЭДС, которая может возникнуть при движении самолета со скоростью v = 900 км/ч, если размах его крыльев l = 20 м? Горизонтальная составляющая магнитного поля Земли $B_г$ = 0,03 мТл, вертикальная составляющая $B_в$ = 0,04 мТл.

3. Из проволоки, сопротивление единицы длины которой ρ_l = 0,1 Ом/м, сделали правильный треугольник и поместили его в однородное магнитное поле с индукцией B = 7 мТл перпендикулярно линиям поля. По треугольнику со скоростью v = 0,5 м/с скользит перемычка из такой же проволоки, оставаясь параллельной его стороне. Чему равен ток через перемычку в тот момент, когда она проходит через середины сторон треугольника?

4. По П-образной рамке, наклоненной к горизонту под углом α таким, что $\sin\alpha$ = 0,8, и помещенной в однородное вертикальное магнитное поле, соскальзывает перемычка массой m = 20 г. Длина перемычки l = 10 см, ее сопротивление R = 1,2 мОм, индукция поля B = 0,1 Тл, коэффициент трения между перемычкой и рамкой μ = 0,5. Найдите установившуюся скорость движения перемычки. Сопротивлением рамки пренебречь.

5. Замкнутый контур образован двумя вертикальными рейками, между концами которых включены одинаковые резисторы сопротивлением R = 4 мОм. Расстояние между рейками l = 10 см, их сопротивления очень малы. Контур находится в однородном магнитном поле с индукцией B = 0,1 Тл, линии которого перпендикулярны плоскости контура. По рейкам без трения соскальзывает перемычка массой m = 10 г, сопротивление которой r = 4 мОм. Найдите установившуюся скорость перемычки.

6. Замкнутый контур образован двумя вертикальными рейками, между верхними концами которых включен источник тока с ЭДС $\mathcal{E}$ = 60 мВ и внутренним сопротивлением r = 1 мОм, а нижние концы замкнуты перемычкой, длина которой l = 10 см, а масса m = 10 г. Контур находится в перпендикулярном его плоскости однородном магнитном поле с индукцией B = 0,1 Тл. Когда перемычку освобождают, она начинает подниматься. Пренебрегая сопротивлениями реек и перемычки, а также трением, найдите установившуюся скорость перемычки.

7. По П-образной рамке, наклоненной под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту и помещенной в однородное вертикальное магнитное поле, соскальзывает без трения перемычка. В короткую сторону рамки включен конденсатор емкостью C = 4 мФ. Масса перемычки m = 2 г, ее длина l = 25 см, индукция поля B = 4 Тл. Пренебрегая сопротивлениями всех элементов цепи, найдите ускорение перемычки.

8. По горизонтальной П-образной рамке, помещенной в однородное вертикальное магнитное поле, может без трения скользить перемычка. В короткую сторону рамки включена катушка с индуктивностью L = 0,4 мГн. Масса перемычки m = 10 г, ее длина l = 10 см, индукция поля B = 0,1 Тл. Перемычке сообщают начальную скорость v_0 = 2 м/с вдоль рамки. Пренебрегая сопротивлениями всех элементов цепи, найдите максимальное смещение перемычки.