Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 марта2009 года по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №6–2008» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М2111» или «Ф2118». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений). Решения задач по математике и физике можно присылать также по электронным адресам math@kvant.info и phys@kvant.info соответственно.

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М2112 и М2115 предлагались на XLIX Международной математической олимпиаде, а задача М2113 предлагалась на XXIX Турнире городов.

Задачи М2111 – М2115, Ф2118 – Ф2122

М2111. Одна из клеток бесконечной клетчатой полоски окрашена. Вначале фишка находится на расстоянии n клеток от окрашенной. Бросается игральная кость, и, в случае выпадения k очков ($k \in \{1,2,3,4,5,6\}$), фишка перемещается на k клеток по направлению к окрашенной клетке. Процесс продолжается, пока фишка не попадает в окрашенную клетку (выигрыш) или пока она не проскочит окрашенную клетку (проигрыш). При каком натуральном n вероятность выигрыша p_n наибольшая? Найдите это наибольшее значение вероятности.

В.Лецко

М2112. Пусть H – точка пересечения высот остроугольного треугольника ABC. Окружность с центром в середине стороны BC, проходящая через точку H, пересекает прямую BC в точках A_1 и A_2. Аналогично, окружность с центром в середине стороны CA, проходящая через точку H, пересекает прямую CA в точках B_1 и B_2, и окружность с центром в середине стороны AB, проходящая через точку H, пересекает прямую AB в точках C_1 и C_2. Докажите, что точки $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ лежат на одной окружности.

А.Гаврилюк

М2113. Многочлен степени $n > 1$ имеет различные вещественные корни $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а его производная – корни $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$. Докажите, что среднее арифметическое чисел $x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2$ больше, чем среднее арифметическое чисел $y_1^2, y_2^2, \ldots, y_{n-1}^2$.

М.Мурашкин

М2114. Докажите, что существует бесконечно много точных квадратов, не оканчивающихся нулем, в которых любая отличная от нуля цифра – нечетная.

В.Сендеров

М2115*. Пусть $ABCD$ – выпуклый четырехугольник, в котором $BA \neq BC$. Обозначим окружности, вписанные в треугольники ABC и ADC, через ω_1 и ω_2 соответственно. Предположим, что существует окружность ω, которая касается продолжения отрезка BA за точку A, продолжения отрезка BC за точку C и касается прямых AD и CD. Докажите, что общие внешние касательные к окружностям ω_1 и ω_2 пересекаются на окружности ω.

В.Шмаров

Ф2118. Тележка едет по горизонтальному столу под действием привязанной к ней нерастяжимой нити. Нить переброшена через маленький блок, закрепленный на высоте H над плоскостью стола. Свободный конец нити вытягивают с постоянной скоростью v_0, направленной горизонтально. Найдите скорость тележки и ее ускорение в тот момент, когда угол между нитью и горизонтом составляет $45°$.

М.Учителев

Ф2119. В длинной трубе, наполненной водой, сделана поперечная перегородка из пробки толщиной 1 см, перегородка делит трубу на две части. Если температуры воды в частях трубы отличаются на 1 градус, поток тепла через перегородку составляет 2 Дж/с. Добавим еще одну перегородку – толщиной 2 см, теперь перегородки «выделяют» в трубе цилиндрическую полость. Слева от этой полости будем поддерживать температуру воды $+50\ ^\circ C$, справа – температуру $+20\ ^\circ C$. Определите установившуюся температуру воды в полости. Определите тепловые потоки через каждую перегородку. Теплопроводность стенок трубы пренебрежимо мала.

А.Перегородцев

Ф2120. В сосуде находится порция гелия при температуре 100 К и давлении 1000 Па. Сосуд двигают поступательно со скоростью 1000 м/с. Какой станет температура газа в сосуде через некоторое время после его мгновенной остановки? Стенки сосуда не проводят тепла. Теплоемкость самого сосуда пренебрежимо мала.

З.Повторов

Ф2121. К выводам катушки индуктивностью $L = 2$ Гн подключают заряженный конденсатор емкостью $C = 100$ мкФ, начальное напряжение конденсатора $U_0 = 100$ В. Напряжение конденсатора начинает уменьшаться, и в тот момент, когда оно падает до половины начального значения, параллельно подключают еще один такой же конденсатор и еще одну такую же катушку (все четыре элемента оказываются соединенными параллельно). Найдите максимальное значение тока через вторую катушку. Сопротивление соединяющих элементы проводников довольно мало. Катушки и конденсаторы считать идеальными.

Р.Александров

Ф2122. Лампа дневного света включена в сеть 220 В, 50 Гц последовательно с катушкой индуктивности, причем в горящем состоянии напряжение на катушке в 3 раза больше напряжения на лампе. Во сколько раз можно увеличить «косинус фи» такой цепи, включив параллельно в сеть конденсатор? Как выбрать емкость такого конденсатора?

А.Зильберман

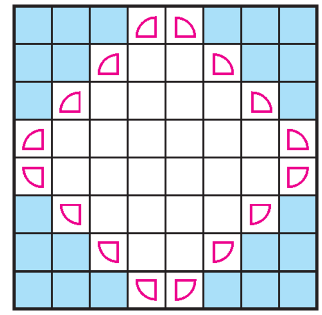
Решения задач М2086 – М2095, Ф2102 – Ф2107

М2086. *Даны две арифметические прогрессии $a_1, a_2, \ldots$ и $b_1, b_2, \ldots$, состоящие из натуральных чисел. Известно, что $a_1 = b_1$ и для каждого номера n числа a_n и b_n имеют равные остатки при делении на n. Докажите, что прогрессии совпадают.*

По условию первые члены прогрессий совпадают, остается доказать совпадение их разностей d и d' . Из условия следует, что для любого натурального n число $b_n - a_n = \left(b_1 + (n-1)d'\right) - \left(a_1 + (n-1)d\right) = (n-1)(d'-d)$ делится на n, значит, и $d'-d$ делится на n. Получаем, что целое число $d'-d$ делится на любое натуральное число, т.е. $d'-d = 0$.

Н.Калинин

М2087. *Шахматная фигура «прожектор» бьет один из углов, на которые делят доску проходящие через нее горизонталь и вертикаль, включая примыкающие к углу клетки горизонтали и вертикали. (Например, прожектор в левом нижнем углу может быть либо одну клетку, либо нижнюю горизонталь, либо левую вертикаль, либо всю доску.) Какое наибольшее число прожекторов можно расставить на шахматной доске так, чтобы они не били друг друга?*



Ответ: 16.

В одной вертикали не могут находиться 3 или более прожекторов, иначе прожектор, который находится между двумя другими, бьет один из них. Следовательно, более $8 \cdot 2 = 16$ прожекторов расставить нельзя. Пример с 16 прожекторами приведен на рисунке.

А.Шаповалов

М2088. *Докажите, что для положительных чисел x, y, z, сумма которых равна 1, выполнено неравенство*

$$\frac{x^2+3xy}{x+y} + \frac{y^2+3yz}{y+z} + \frac{z^2+3zx}{z+x} \le 2 .$$

Заметим, что для положительных чисел a и b справедливо неравенство $\frac{2ab}{a+b} \le \frac{a+b}{2}$, так как

$$4ab \le (a+b)^2 \Leftrightarrow 0 \le a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2 .$$

Отсюда

$$\frac{x^2+3xy}{x+y} = \frac{\left(x^2+xy\right)+2xy}{x+y} = x + \frac{2xy}{x+y} \le x + \frac{x+y}{2} = \frac{3x}{2} + \frac{y}{2} .$$

Аналогично,

$$\frac{y^2+3yz}{y+z} \le \frac{3y}{2} + \frac{z}{2} \quad \text{и} \quad \frac{z^2+3zx}{z+x} \le \frac{3z}{2} + \frac{x}{2} .$$

Складывая три полученных неравенства, получаем

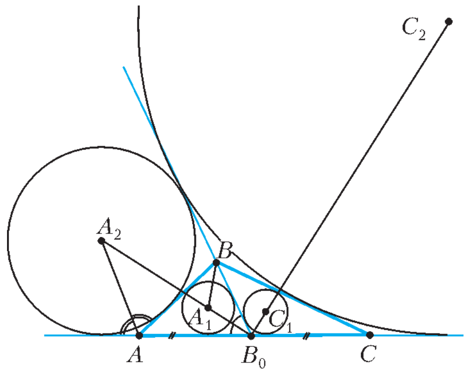
$$\frac{x^2+3xy}{x+y} + \frac{y^2+3yz}{y+z} + \frac{z^2+3zx}{z+x} \le 2(x+y+z) = 2 .$$

П.Кожевников, Р.Пиркулиев

М2089. *Пусть B_0 – середина стороны AC треугольника ABC. Обозначим через A_1 и A_2 центры вписанной и касающейся AB вневписанной окружности треугольника ABB_0 . Аналогично для треугольника CBB_0 определим точки C_1 и C_2 . Докажите, что четырехугольник $A_1A_2C_2C_1$ – вписанный.*

Докажем, что треугольники B_0A_1B и B_0AA_2 подобны по двум углам (см. рисунок). Точки A_1 и A_2 лежат на биссектрисе угла AB_0B , поэтому $\angle A_1B_0B = \angle AB_0A_2$. Далее, так как AA_2 – внешняя биссектриса угла BAB_0 , то

$$\angle A_2AB_0 = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle BAB_0 = 90^\circ + \left(90^\circ - \frac{1}{2}\angle ABB_0 - \frac{1}{2}\angle AB_0B\right) = 180^\circ - \angle A_1BB_0 - \angle A_1B_0B = \angle BA_1B_0 .$$



Из подобия треугольников B_0A_1B и B_0AA_2 вытекает равенство $B_0A_1 \cdot B_0A_2 = B_0A \cdot B_0B$.

Аналогично докажем равенство $B_0C_1 \cdot B_0C_2 = B_0C \cdot B_0B$. Так как $B_0A = B_0C$, то $B_0C_1 \cdot B_0C_2 = B_0A_1 \cdot B_0A_2$, поэтому точки A_1, A_2, C_1, C_2 лежат на одной окружности.

Л.Емельянов

М2090. *Пусть $c_1, c_2, \ldots, c_n$ – действительные числа; $S_1 = c_1$, $S_2 = c_1 + c_2$, $S_3 = c_1 + c_2 + c_3, \ldots$, $S_n = c_1 + c_2 + \ldots + c_n$; M и m – соответственно максимальное и минимальное среди чисел $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n$. Докажите неравенства:*

а) $m \le c_1 + \frac{1}{2}c_2 + \ldots + \frac{1}{n}c_n \le M$;

б) $nm \le nc_1 + (n-1)c_2 + \ldots + c_n \le nM$;

в) если $\alpha_1 \ge \alpha_2 \ge \ldots \ge \alpha_n > 0$, *то* $\alpha_1 m \le \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + \ldots + \alpha_n c_n \le \alpha_1 M$.

Докажем сразу более общее утверждение в). С суммой $S = \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + \ldots + \alpha_n c_n$ произведем тождественное преобразование (иногда называемое *преобразованием Абеля*):

$$S = \alpha_1 S_1 + \alpha_2 (S_2 - S_1) + \ldots + \alpha_n (S_n - S_{n-1}) =$$
$$= (\alpha_1 - \alpha_2) S_1 + (\alpha_2 - \alpha_3) S_2 + \ldots + (\alpha_{n-1} - \alpha_n) S_{n-1} + \alpha_n S_n .$$

После этого сумму можно оценить сверху и снизу, пользуясь тем, что числа

$$\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \ldots, \alpha_{n-1} - \alpha_n, \alpha_n$$

неотрицательные:

$$\alpha_1 m =$$
$$= (\alpha_1 - \alpha_2) m + (\alpha_2 - \alpha_3) m + \ldots + (\alpha_{n-1} - \alpha_n) m + \alpha_n m \le$$
$$\le S \le (\alpha_1 - \alpha_2) M + (\alpha_2 - \alpha_3) M + \ldots + (\alpha_{n-1} - \alpha_n) M +$$
$$+ \alpha_n M = \alpha_1 M .$$

П.Кожевников

М2091. *Докажите, что для любых натуральных $n > 2$ и m существуют n попарно взаимно простых натуральных чисел, больших 10^{10} и таких, что сумма их m-х степеней делится на их сумму.*

Для данного m найдем числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ с нужным свойством.

При $m = 1$ годятся n различных простых чисел, больших 10^{10}.

I. Пусть $m > 1$ – нечетное число.

Если $n = 3$, то положим $a_1 = p - 2$, $a_2 = p$, $a_3 = p + 2$, где p – простое число, большее $10^{10} + 2$. Тогда

$$a_1^m + a_2^m + a_3^m \equiv (-2)^m + 0 + 2^m \equiv 0 \pmod p .$$

Поскольку числа a_1, a_2, a_3 дают различные остатки при делении на 3,

$$a_1^m + a_2^m + a_3^m \equiv (-1)^m + 0 + 1^m \equiv 0 \pmod 3 .$$

Отсюда следует, что $a_1^m + a_2^m + a_3^m$ делится на $3p = a_1 + a_2 + a_3$.

Считаем далее, что $n > 4$. Пусть $p_1 > p_2 > \ldots > p_{n-1}$ – различные простые числа, большие чем $\max\{10^{10}, n^m\}$. Для $i = 1, 2, \ldots, n-1$ положим $a_i = p_i^\alpha$, где $\alpha = (p_1 - 1)(p_2 - 1)\ldots(p_{n-1} - 1)$ (так как α делится на $p_i - 1$, то по малой теореме Ферма число a_i дает остаток 1 при делении на p_j, где $j \ne i$, $j \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, – это условие будет использовано в дальнейшем). Очевидно, что числа $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ попарно взаимно простые и большие 10^{10}. Далее, положим

$$a_n = (a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1})^m -$$
$$- \left(a_1^m + a_2^m + \ldots + a_{n-1}^m\right) - (a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}) .$$

Докажем, что 1) $a_1^m + a_2^m + \ldots + a_n^m$ делится на сумму $s = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, 2) $a_n > 10^{10}$, 3) a_n взаимно просто с числами $a_1, \ldots, a_{n-1}$.

1) Из определения a_n следует, что

$$s = (a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1})^m - \left(a_1^m + a_2^m + \ldots + a_{n-1}^m\right).$$

Так как $a_n \equiv -(a_1 + \ldots + a_{n-1}) \pmod s$, то

$$a_1^m + a_2^m + \ldots + a_n^m \equiv$$
$$\equiv a_1^m + a_2^m + \ldots + a_{n-1}^m - (a_1 + \ldots + a_{n-1})^m \equiv -s \equiv 0 \pmod s.$$

2) Полагая $x = a_1$, $y = a_2 + \ldots + a_{n-1}$ и пользуясь разложением

$$(x + y)^m = x^m + mx^{m-1}y + \ldots + y^m ,$$

имеем

$$a_n \ge \left(a_1^m + ma_1^{m-1}(a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1}) +\right.$$
$$\left. + (a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1})^m\right) - \left(a_1^m + a_2^m + \ldots + a_{n-1}^m\right) -$$
$$- (a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}) \ge$$
$$\ge ma_1^{m-1}(a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1}) - (n-1)a_1 \ge$$
$$\ge a_1\left(10^{10}(n-2) - (n-1)\right) \ge a_1 > 10^{10} .$$

3) Достаточно установить, что a_n не делится на p_i при $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Так как для таких i выполнено $a_i \equiv 0 \pmod{p_i}$ и $a_j \equiv 1 \pmod{p_i}$ при $j \ne i$, $j \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, то $a_n \equiv (n-2)^m - 2(n-2) \pmod{p_i}$. Но $p_i > (n-2)^m - 2(n-2) > 0$, поэтому a_n не делится на p_i.

II. В случае четного m достаточно, рассуждая аналогично случаю нечетного $m > 1$, положить

$$a_n = \left(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}\right)^m + \left(a_1^m + a_2^m + \ldots + a_{n-1}^m\right) - \left(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}\right).$$

В пункте 3), при доказательстве взаимной простоты a_n и a_i ($i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$), получим сравнение $a_n \equiv (n-2)^m \pmod{p_i}$, поэтому a_n не делится на p_i.

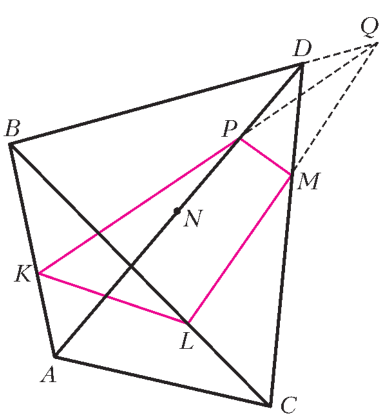
В.Сендеров

М2092. *На ребрах AB, BC, CD, DA тетраэдра ABCD взяты точки K, L, M, N соответственно. Точки K', L', M', N' симметричны точкам K, L, M, N относительно середин ребер AB, BC, CD, DA соответственно. Докажите, что объемы тетраэдров KLMN и $K'L'M'N'$ равны.*

Пусть плоскости KLM и $K'L'M'$ пересекают ребро AD в точках P и P' соответственно. Покажем, что

$$\frac{BK}{AK} \cdot \frac{AP}{DP} = \frac{BL}{CL} \cdot \frac{CM}{DM}. \qquad (1)$$

Если плоскость $KLMP$ пересекает прямую BD в точке Q (см. рисунок), то по теореме Менелая, примененной к треугольникам ABD и CBD с секущими KP и ML, имеем $\frac{BQ}{DQ} = \frac{BK}{AK} \cdot \frac{AP}{DP}$ и $\frac{BQ}{DQ} = \frac{BL}{CL} \cdot \frac{CM}{DM}$, откуда следует (1). Если же плоскость $KLMP$ параллельна ребру BD, то $KP \parallel ML \parallel BD$, и нужное соотношение (1) следует из теоремы Фалеса в гранях ABD и CBD. Аналогично доказывается, что



$$\frac{BK'}{AK'} \cdot \frac{AP'}{DP'} = \frac{BL'}{CL'} \cdot \frac{CM'}{DM'}. \qquad (1')$$

Из условия задачи следует, что $AK = BK'$, $BK = AK'$, $BL = CL'$, $CL = BL'$, $CM = DM'$, $DM = CM'$. Поэтому из (1) и (1′) вытекает, что $\frac{AP}{DP} = \frac{DP'}{AP'}$, т.е. точки P и P' симметричны относительно середины ребра AD (отсюда, в частности, $AP' = DP$, $NP = N'P'$).

Далее будем пользоваться следующей простой *леммой.* Пусть прямая TT' пересекает плоскость треугольника XYZ в точке O. Тогда отношение объемов $\frac{V(XYZT)}{V(XYZT')} = \frac{OT}{OT'}$.

Для доказательства леммы достаточно заметить, что у тетраэдров $XYZT$ и $XYZT'$ общее основание XYZ, а высоты, проведенные к этому основания, относятся как OT к OT'.

Вернемся к задаче. Согласно лемме,

$$\frac{V(KLMN)}{V(KLMD)} = \frac{NP}{DP} = \frac{N'P'}{AP'} = \frac{V(K'L'M'N')}{V(K'L'M'A)}.$$

Теперь достаточно доказать равенство $V(KLMD) = V(K'L'M'A)$.

Снова по лемме,

$$\frac{V(KLMD)}{V(KLCD)} = \frac{MD}{CD} = \frac{CM'}{CD} = \frac{V(K'L'M'A)}{V(K'L'DA)}.$$

Остается доказать, что $V(KLCD) = V(K'L'DA)$.

Далее,

$$\frac{V(KLCD)}{V(KBCD)} = \frac{CL}{BC} = \frac{BL'}{BC} = \frac{V(K'L'DA)}{V(K'CDA)}.$$

Достаточно установить, что $V(KBCD) = V(K'CDA)$.

Но это верно, так как

$$\frac{V(KBCD)}{V(ABCD)} = \frac{BK}{AB} = \frac{AK'}{AB} = \frac{V(K'CDA)}{V(BCDA)}.$$

Замечание. Если зафиксировать тетраэдр $ABCD$, а точкам K, L, M, N позволить двигаться по ребрам AB, BC, CD, DA соответственно, то величина $\pm V(KLMN)$ (знак выбирается в зависимости от ориентации тетраэдра) является функцией от четырех переменных AK/KB, BL/LC, CM/MD, DN/NA, линейной по каждому из аргументов. Фактически, этим соображением мы и пользовались в решении, последовательно «перетаскивая» точки K, L, M, N в вершины тетраэдра $ABCD$.

П.Кожевников

М2093. *Фокуснику завязывают глаза, а зритель выкладывает в ряд N одинаковых монет, сам выбирая, какие орлом вверх, а какие решкой. Ассистент фокусника просит зрителя написать на бумаге любое натуральное число от 1 до N и показать его всем присутствующим. Увидев число, ассистент указывает на одну из монет ряда и просит перевернуть ее. Затем фокуснику развязывают глаза, он смотрит на ряд монет и безошибочно определяет написанное зрителем число. Найдите все N, для которых у фокусника с ассистентом есть способ гарантированно отгадывать число.*

Ответ: N – степень двойки.

Докажем *лемму*: если у фокусника с ассистентом есть способы, позволяющие фокуснику гарантированно отгадывать число для $N = k$, то есть способ и для $N = 2k$.

Мысленно расположив монеты в клетках таблицы $2 \times k$, фокусник пишет под каждым столбцом из двух клеток O, если монеты там лежат одной стороной вверх, и P – если разными сторонами. Эта комбинация сообщает ему число n от 1 до k. Если в верхней строке четное число решек, он называет n, иначе $n + k$.

Пусть зритель назвал число m. Чтобы сообщить его, ассистент тоже мысленно пишет строку из O и P по тому же правилу. Он может изменить одну из букв, чтобы получить код, соответствующий числу m (при $m \le k$) или $m-k$ (при $m>k$). Для этого ему достаточно перевернуть любую из монет в соответствующем столбце. Выбором верхней или нижней монеты он обеспечивает нужную четность числа решек в верхней строке. Лемма доказана.

При $N=1$ способ очевиден, при $N=2$ способ такой: числу 1 соответствует орел, а числу 2 – решка на левой монете. По лемме, последовательно удваивая, получим способы для каждого N вида 2^m.

Докажем теперь, что при других значениях N способов нет. Комбинаций из N монет всего 2^N. Допустим, способ у ассистента и фокусника есть. Рассмотрим какую-нибудь одну комбинацию (она может попасться ассистенту). Изменяя в ней положение ровно одной монеты, можно получить ровно N других комбинаций. Каждая из N этих комбинаций должна обозначать для фокусника свое число от 1 до N (так как есть N вариантов для загаданного числа). Припишем этим комбинациям номера, которые они обозначают. Таким образом можно *каждой* из 2^N комбинаций приписать число, которое она обозначает для фокусника (так как каждую комбинацию можно получить из некой другой описанным выше способом).

Посчитаем, скольким комбинациям приписано число 1. Всего комбинаций 2^N, из каждой можно получить ровно одну комбинацию, которой приписана 1. Всего получаем 2^N комбинаций, которым приписана 1, но при этом каждую такую комбинацию мы посчитали N раз (поскольку каждую комбинацию можно получить ровно из N других). Значит, 1 приписана $2^N/N$ комбинациям. Это число должно быть целым, что возможно только если N является степенью двойки.

Л.Медников, А.Шаповалов

М2094. *На плоскости нарисованы два выпуклых[1] многоугольника P и Q. Для любой стороны многоугольника P многоугольник Q можно зажать между двумя прямыми, параллельными этой стороне. Обозначим через h расстояние между этими прямыми, а через l – длину стороны. Просуммировав все произведения lh по всем сторонам P, получим число, которое обозначим $(P,\ Q)$. Докажите, что $(P,\ Q)=(Q,\ P)$.*

Докажем, что $(P,Q)=\frac{1}{2}\sum\limits_{i,j} a_i b_j \sin\varphi_{ij}=(Q,P)$, где a_i – стороны P, b_j – стороны Q, φ_{ij} – угол между a_i и b_j.

Зафиксируем некоторую сторону a_i, зажмем многоугольник Q между прямыми, параллельными a_i, и выберем две вершины C и D, лежащие на этих двух прямых. Контур Q разбивается на две ломаные с концами C и D. Ввиду выпуклости проекция такой ломаной на перпендикулярную a_i прямую m складывается из проекций звеньев ломаной. Значит, проекция многоугольника Q на m покрывается проекциями его сторон ровно два раза, т.е. сумма длин проекций сторон равна удвоенному расстоянию h_i между зажимающими Q прямыми. Длина проекции b_j на m равна $b_j\cos\left(90^\circ-\varphi_{ij}\right)=b_j\sin\varphi_{ij}$, значит, $2h_i=\sum\limits_j b_j\sin\varphi_{ij}$, а $a_ih_i=\frac{1}{2}\sum\limits_j a_ib_j\sin\varphi_{ij}$. Складывая такие суммы по всем i, получим нужную формулу.

Л.Медников, А.Шаповалов

М2095. *Перед Алешей 100 закрытых коробочек, в каждой-либо красный, либо синий кубик. У Алеши на счету есть рубль. Он подходит к любой закрытой коробочке, объявляет цвет и ставит любую сумму (можно нецелое число копеек, но не больше, чем у него на счету на данный момент). Коробочка открывается, и Алешин счет увеличивается или уменьшается на поставленную сумму в зависимости от того, угадан или не угадан цвет кубика. Игра продолжается, пока не будут открыты все коробочки. Какую наибольшую сумму на счету может гарантировать себе Алеша, если ему известно, что синих кубиков ровно n?*

Ответ: $\dfrac{2^{100}}{C_{100}^n}$.

Рассмотрим общую ситуацию: Алеша знает, что есть m красных и n синих кубиков в $m+n=K$ коробочках. Попросим его в таком случае поставить $\dfrac{|n-m|}{K}$-ю часть своего капитала на тот цвет, которого больше (в частности, при $m=n$ Алеша ничего не ставит). Докажем индукцией по K, что, действуя так, Алеша увеличит свой капитал в $\dfrac{2^K}{C_K^n}$ раз.

Когда коробочка всего одна, утверждение очевидно: Алеша увеличивает капитал в два раза. Пусть теперь утверждение верно для $K-1$ коробочки, докажем его для K коробочек.

Пусть для определенности $m \le n$. Если на первом шаге открыт синий кубик, то на этом шаге Алеша увеличил капитал в $1+\dfrac{n-m}{K}=\dfrac{2n}{K}$ раз, остались $n-1$ синий кубик и $K-1$ коробочка, что, по предположению, даст увеличение капитала в $\dfrac{2^{K-1}}{C_{K-1}^{n-1}}$ раз. Перемножая эти числа и учитывая, что $C_{K-1}^{n-1}\cdot\dfrac{K}{n}=C_K^n$, получим требуемое $\dfrac{2^K}{C_K^n}$. Если на первом шаге открыт красный кубик, капитал уменьшился, умножившись на $1-\dfrac{n-m}{K}=\dfrac{2m}{K}$, и остались n синих кубиков и $K-1$ коробочка, что, по предположению, даст увеличение капитала в $\dfrac{2^{K-1}}{C_{K-1}^n}$ раз. Перемножая, учтем, что $C_{K-1}^n\cdot\dfrac{K}{m}=C_{K-1}^{m-1}\dfrac{K}{m}=$ $=C_K^m=C_K^n$, и снова получим требуемое.

Покажем теперь индукцией по K, что в большее число раз Алеша капитал увеличить не может. Для случая

[1] *В условии задачи, опубликованном в «Кванте» №3 за 2008 год, была допущена неточность – пропущено слово «выпуклый».*

одной коробочки это очевидно. Если коробочек несколько, и Алеша поставит на синий цвет долю, большую указанной в алгоритме, то при выпадении красного он получит меньше, чем по алгоритму. А если он поставит долю меньше, чем по алгоритму (в том числе отрицательную, если ставит на красный), он получит меньше, чем по алгоритму при выпадении синего.

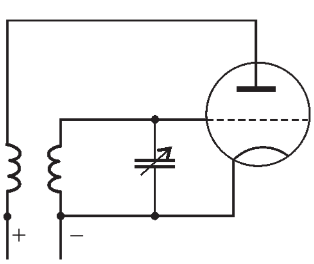
Приведем также план решения, не использующего индукцию.

Заметим, что поставить x (рублей) на красный цвет это то же самое, что поставить $-x$ на синий. Поэтому можно считать, что Алеша ставит x на синий цвет, где $|x|$ не превосходит имеющейся у него суммы.

Предположим, что после каждого шага Алеша платит налог в размере половины имеющихся денег (в итоге он получит в 2^{100} раз меньше денег, чем в условиях задачи). При наличии перед очередным шагом суммы S и ставке x у него после этого шага остается либо $\frac{S+x}{2}$, либо $\frac{S-x}{2}$, что в сумме снова дает S. Поэтому можно считать, что Алеша каждый раз просто раскладывает свои деньги на 2 кучки – на случай того или иного цвета кубика. Если учесть все возможные варианты распределения кубиков по коробочкам, все деньги (1 рубль) будут разложены на 2^{100} кучек. Из них C_{100}^n кучек соответствуют наборам из n синих кубиков, и в них должно лежать денег поровну – по $\frac{1}{C_{100}^n}$ (иначе в одном из вариантов «выигрыш» меньше), а в остальных – 0. Умножив на 2^{100}, получаем ответ.

Л.Медников, А.Шаповалов

Ф2102. *Генератор незатухающих колебаний собран по обычной «ламповой» схеме – потери в колебательном LC-контуре компенсируются подкачкой энергии через дополнительную катушку, включенную в анодную цепь лампы-триода. Частота колебаний перестраивается за счет изменения емкости конденсатора, включенного в контур (настройка при помощи конденсатора переменной емкости). Генератор работает на заданной частоте, но его настроили неправильно – если мы хотя бы немного уменьшим подкачку энергии (например, уменьшим число витков вспомогательной катушки на один виток), колебания просто не возникнут. Перестроим частоту колебаний на 5%, уменьшив емкость конденсатора. Как нужно изменить число витков вспомогательной катушки, чтобы генератор мог работать на этой частоте? Считайте, что потери энергии в колебательном контуре связаны главным образом с сопротивлением провода, которым намотана катушка индуктивности. Упрощенная схема генератора приведена на рисунке.*



Запишем уравнение для собственных колебаний в колебательном контуре, состоящем из катушки индуктивности, конденсатора и резистора малого сопротивления:

$$LI' + rI + \frac{1}{C}q = 0\text{, или } q'' + \frac{r}{L}q' + \frac{1}{LC}q = 0\,.$$

Для получения незатухающих колебаний второе слагаемое нужно скомпенсировать, «включив» в контур дополнительную ЭДС. В приведенной схеме генератора это достигается при помощи катушки, включенной в анодную цепь лампы: $\mathscr{E}_{\text{доп}} = -MI'_{\text{а}}$, где M – коэффициент взаимной индукции катушек, $I_{\text{а}}$ – анодный ток. Впрочем, можно этого и не знать – нужно только записать для «дополнительного» магнитного поля соотношение $B \sim n_2 I_{\text{а}}$, где n_2 – число витков вспомогательной катушки. Тогда

$$B = k_1 n_2 \left(I_0 + S\frac{q}{C} \right)\text{, и } \mathscr{E}_{\text{доп}} \sim -B' = -k_2 n_2 \frac{S}{C} q'\,.$$

Здесь I_0 – начальный анодный ток (при нулевом напряжении между сеткой и катодом), S – крутизна вольт-амперной характеристики лампы, коэффициент k_2 включает и площадь витка основной катушки, и число ее витков, и еще некоторые геометрические характеристики контура, которые в нашем случае не изменяются. Окончательно получим

$$k_2 n_2 \frac{S}{C} q' = \frac{r}{L} q'\text{, или } n_2 = \frac{rC}{L}\frac{1}{k_3}\,.$$

Для увеличения частоты генератора на 5 % емкость придется уменьшить примерно на 10 %. Для сохранения прежнего условия возникновения колебаний в генераторе следовало бы уменьшить примерно на 10 % число витков вспомогательной катушки, но этого можно не делать – колебания возникнут и при прежнем числе витков. При этом увеличится амплитуда колебаний (должна была бы измениться и форма «выходного сигнала», но благодаря контуру колебания останутся «почти» гармоническими). Отсюда следует, что, изменяя частоту генератора, не обязательно «перематывать» катушку.

А.Контуров

Ф2103. *Навстречу друг другу по одной прямой с одинаковыми скоростями $v = 1$ м/с движутся шарики с массами $m = 10$ г и $3m = 30$ г. Какую максимальную скорость может приобрести легкий шарик после лобового удара шариков?*

Для определения максимальной скорости малого шарика нужно понять, какой это был удар. Многие школьники уверены, что удар может быть либо абсолютно упругим, либо абсолютно неупругим. Однако это не так – часть энергии шариков может перейти в тепло (не абсолютно упругий удар), но не столько, сколько выделилось бы при абсолютно неупругом ударе. Будем исходить из того, что закон сохранения импульса при любом виде удара выполняется, а вместо закона сохранения механической энергии нам придется записать условие «неувеличения» полной механической энергии, т.е. получится одно уравнение и одно неравенство.

Обозначим скорость легкого шара после удара u, а скорость тяжелого v. Направим обе скорости в ту сторону, куда была направлена начальная скорость v_0 тяжелого шара. Полной уверенности в том, что шары после столкновения будут двигаться именно туда, у нас нет – ну и не надо: если ответ получится отрицательным, это будет означать, что соответствующая скорость направлена в противоположную сторону. Итак, запишем

$$-m \cdot v_0 + 3m \cdot v_0 = m \cdot u + 3m \cdot v ,$$

$$m \cdot v_0^2 + 3m \cdot v_0^2 \geq m \cdot u^2 + 3m \cdot v^2 .$$

Теперь можно выразить из уравнения скорость v и подставить в неравенство:

$$v = \frac{2v_0 - u}{3}, \quad 4v_0^2 \geq u^2 + \frac{4v_0^2 - 4v_0 u + u^2}{3},$$

$$12v_0^2 \geq 3u^2 + \left(4v_0^2 - 4v_0 u + u^2\right),$$

$$u^2 - v_0 u - 2v_0^2 \leq 0 .$$

Максимальное значение скорости u находим обычным способом – запишем уравнение $u^2 - v_0 u - 2v_0^2 = 0$ и найдем тот корень, что побольше:

$$u = 2v_0 = 2 \text{ м/с} .$$

Это и есть ответ задачи. Кстати, получается это значение именно при абсолютно упругом ударе. Интересно, это вам было заранее понятно?

А.Простов

Ф2104. *Легкая нить намотана множеством витков на гладкую неподвижно закрепленную катушку радиусом R (рис.1). На свободном конце нити закреплен маленький шарик массой m, другой конец нити начинают вытягивать через отверстие в катушке, постепенно увеличивая скорость вдоль поверхности катушки до величины v. В результате через большое время движение шарика устанавливается. Найдите скорость установившегося движения шарика и радиус траектории его движения. Сила тяжести отсутствует, сила трения шарика о воздух пропорциональна его скорости: $F_{\text{тр}} = ku$.*

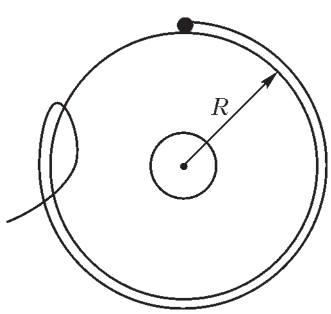


Рис. 1

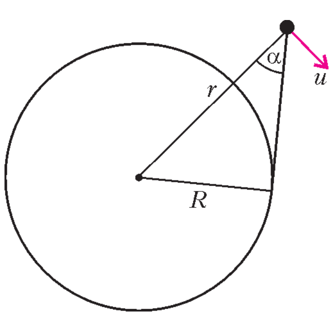


Рис. 2

При вытягивании нити шарик оторвется от катушки, поскольку нет сил, которые обеспечивали бы его движение по дуге окружности радиусом R. Под действием окружающей среды шарик займет равновесное положение на некоторой орбите радиусом r, имея скорость u (рис.2). Запишем уравнение второго закона Ньютона в проекциях на направления вдоль этого радиуса и перпендикулярно ему:

$$m\frac{u^2}{r} = F\cos\alpha , \quad 0 = F\sin\alpha - ku ,$$

где F – сила натяжение нити. Учитывая следующие соотношения:

$$v = u\sin\alpha, \quad R = r\sin\alpha ,$$

получаем

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{kR}{mv} ,$$

откуда

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{mv}{kR}\right)^2}} .$$

В итоге находим искомые скорость шарика u и радиус траектории r:

$$u = \frac{v}{\sin\alpha} = v\sqrt{1 + \left(\frac{mv}{kR}\right)^2} , \quad r = \frac{R}{\sin\alpha} = R\sqrt{1 + \left(\frac{mv}{kR}\right)^2}$$

М.Гырдымов

Ф2105. *Цикл тепловой машины проводят с порцией гелия. Он состоит из двух изобар с отношением давлений 2:1 и двух изохор. Найдите максимально возможный термодинамический КПД такого цикла.*

Пусть минимальный объем в цикле V, максимальный объем в цикле nV, давления на изобарах p и $2p$. Тогда работа в цикле равна

$$A = p(n-1)V .$$

Тепло газ получает на участках изохорического нагревания и изобарического расширения. Для точки с минимальной температурой $pV = \nu RT$, максимальная температура в $2n$ раз выше минимальной, поэтому полученное в цикле количество теплоты равно

$$Q = 2pV(n-1) + 1{,}5pV(2n-1) .$$

В таком случае термодинамический коэффициент полезного действия цикла составляет

$$\eta = \frac{A}{Q} = \frac{pV(n-1)}{2pV(n-1) + 1{,}5pV(2n-1)} .$$

После простого анализа формулы видно, что чем больше n, тем больше η. При очень большом значении n получается $\eta = 0{,}2$.

А.Старов

Ф2106. *Конденсатор емкостью C = 100 мкФ подключен к батарейке напряжением U = 6 В последовательно с резистором сопротивлением r = 100 кОм. Вольтметр, имеющий сопротивление R = 200 кОм, периодически подключают параллельно конденсатору и отключают от него. Время подключения составляет каждый раз τ = 0,05 с, а время, в течение которого вольтметр отключен, составляет каждый раз 2τ. Что показывает вольтметр?*

При такой частоте переключений стрелка прибора немного «дрожит», но вольтметр показывает какое-то определенное напряжение. Условие постоянства этого напряжения – заряд конденсатора остается почти постоянным. При отключении вольтметра заряд немного увеличивается, при подключении – на такую же величину уменьшается. Пусть искомое напряжение равно U_1. Тогда «прибыль» заряда за время 2τ получится

$$\Delta Q = \frac{2\tau\left(U - U_1\right)}{r}.$$

При подключении вольтметра стекающий с верхней обкладки конденсатора заряд должен оказаться таким же:

$$\Delta Q = \frac{\tau U_1}{R} - \frac{\tau\left(U - U_1\right)}{r}.$$

Приравнивая правые части, получим

$$U_1 \approx 5{,}1 \text{ В}.$$

Нам не понадобилось значение емкости конденсатора, и для получения ответа нужно знать не сами сопротивления, а только их отношение. Значения сопротивлений и емкости нужны только для того, чтобы проверить выполнение условия $rC \gg \tau$. В числах: $1 \cdot 10^5 \cdot 1 \cdot 10^{-4} = 10 \gg 0{,}05$. Выполняется! Это означает, что конденсатор за время подключения/отключения изменяет заряд действительно на ничтожно малую долю.

З.Рафаилов

Ф2107. *Цилиндрический магнит небольшого размера создает на своей оси магнитное поле $B_0 = 0{,}001$ Тл в точке, находящейся на расстоянии $L = 5$ м от торца магнита. Проволочный виток с током $I = 2$ А расположен в указанной точке на оси магнита так, что плоскость кольца перпендикулярна оси магнита, а ось проходит через центр кольца. Найдите силу, действующую в магнитном поле на кольцо. Кольцо сделано из тонкой проволоки. Магнитная индукция на оси магнита на расстоянии $L_1 = 5{,}1$ м составляет $B_1 = 0{,}94B_0$.*

Автор забыл задать в условии задачи радиус кольца, а от него явно зависит ответ. Добавим в условие задачи значение $r = 1$ см. Если взять кольцо большого размера (например, $r = 20$ см), то точки кольца будут лежать далеко от оси и мы не сможем найти величину магнитной индукции там, где течет ток, – а значит, и не получится посчитать величину действующей на кольцо силы.

Важно, что нас интересует только «перпендикулярная» составляющая вектора магнитной индукции – проекция на ось нам не годится, так как она растягивает кольцо, а не пытается его сместить. На оси магнита магнитная индукция имеет только продольную составляющую B_1. Поперечная составляющая B_2 появляется лишь при удалении «вбок» от оси. Найдем составляющую B_2 на расстоянии r от оси – там, где течет ток. Для этого нарисуем вокруг оси тонкий цилиндр радиусом r, его ближнее основание расположено на расстоянии L от торца магнита (там, где поле B_0), высота цилиндра H (его верхний торец там, где магнитная индукция B_1). Разность магнитных потоков через основания цилиндра равна потоку через его боковую поверхность. Будем считать поле B_2 одинаковым во всех точках боковой поверхности цилиндра, тогда запишем

$$\pi r^2\left(B_0 - B_1\right) = 2\pi r H B_2, \text{ откуда } B_2 = \frac{0{,}03B_0 r}{H}.$$

Сила направлена параллельно оси магнита (куда именно, от магнита или к магниту, неизвестно – это зависит от направления тока кольца), величина силы составляет

$$F = 2\pi r I B_2 = \frac{2\pi r^2 I \cdot 0{,}03B_0}{H} =$$
$$= \frac{6{,}3 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot 0{,}03 \cdot 0{,}001}{0{,}1} \text{ Н} \approx 3{,}8 \cdot 10^{-7} \text{ Н}.$$

Очень маленькая сила.

А.Зильберман

КОЛЛЕКЦИЯ ГОЛОВОЛОМОК

Шкатулка с секретом

(Начало см. на 4-й с. обложки)

Специальная страничка «Коллекция головоломок» впервые появилась в «Кванте» в 1993 году. Последние семь лет она присутствует в каждом номере журнала. За эти годы читатели познакомились с десятками самых новых, самых популярных и самых трудных головоломок из разных стран мира. На страницы журнала головоломки попадали при обязательном выполнении двух условий: они были трудны в решении и просты в изготовлении.

В «Коллекции» собраны практически все виды «умных игрушек»: сборно-разборные узлы, задачи на упаковки и перестановки, проволочные и шнурковые головоломки и даже «невозможные предметы». Не хватало очень интересной разновидности головоломок – «шкатулок с секретами». И сегодня этот пробел будет восполнен.

Конструкцию секретного замка придумала Татьяна Матвеева из Подмосковья. Предлагаемое запорное устройство, изображенное на обложке, находится внутри пластинки из фанеры размером $45 \times 45 \times 6$ мм, в которой просверлены три канала. Их диаметры зависят от размеров штифтов, поэтому изготовление замка лучше всего начать с них. Стальные штифты делают из обычных гвоздей толщиной 2,5 мм и длиной 30 мм. Один конец каждого штифта аккуратно стачивают надфилем до диаметра 1 мм на длину около 6 мм. Для немагнитного штифта используют отрезок медной или латунной проволоки длиной 35 мм и чуть большего диаметра, чем стальные штифты.

Самая ответственная часть работы – сверление каналов. Сначала сверлят два тонких канала диаметром 1,5 мм насквозь, через всю пластину. Эту работу следует выполнять осторожно, но на большой скорости, постоянно следя за тем, чтобы сверло не «уводило» в сторону от вертикали. После этого каналы рассверливают с одной стороны до диаметра 4 мм, затем сверлят поперечный канал диаметром 4,5 мм. Каналы очищают от заусенцев круглым надфилем, штыри ставят на свои места и проверяют их свободное скольжение. Ориентируясь на рисунок, один из каналов вскрывают для установки магнита. Углубление

(Продолжение см. на с. 34)

Задачи

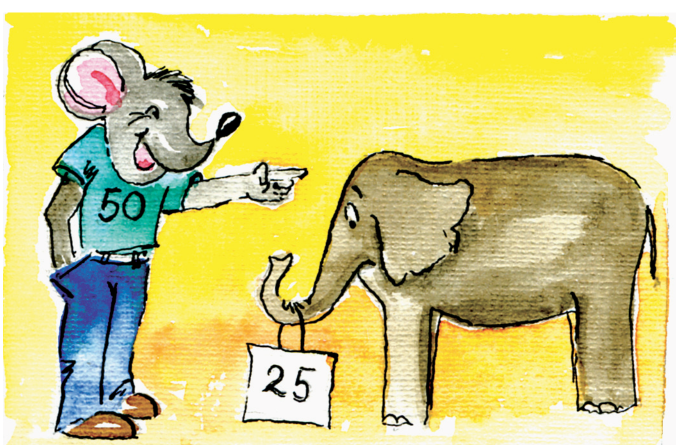
1. На доске написано неверное равенство:

Проведите один прямолинейный отрезок так, чтобы получилось верное равенство.

А.Анджанс

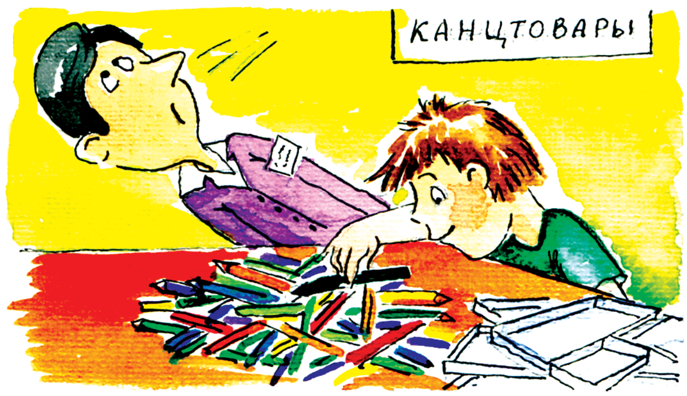
2. Даны пятьдесят различных натуральных чисел, двадцать пять из которых не превосходят 50, а остальные больше 50, но не превосходят 100. При этом никакие два из них не различаются ровно на 50. Найдите сумму этих чисел.

В.Произволов



3. В 10 коробках лежат карандаши (пустых коробок нет). Известно, что в разных коробках разное число карандашей, причем в каждой коробке все карандаши разных цветов. Докажите, что из каждой коробки можно выбрать по карандашу так, что все они будут разных цветов.

П.Кожевников



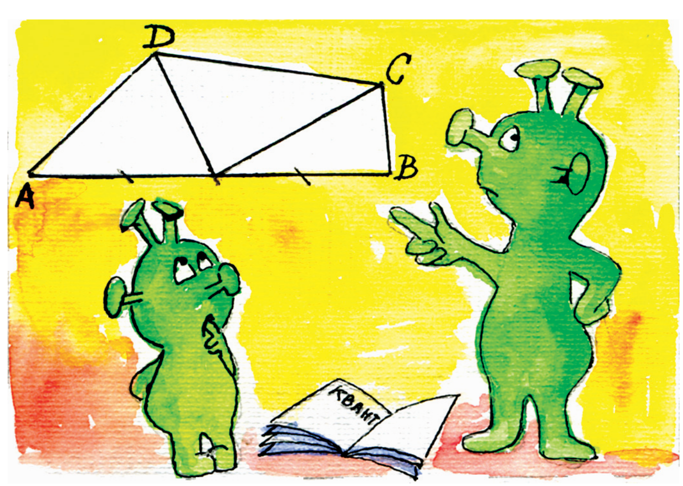
4. Найдите все тройки натуральных чисел (a, b, c), для которых

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+b+c}=1.$$

Г.Гальперин

5. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ сторона CD видна из середины стороны AB под прямым углом. Докажите, что $AD + BC \geq CD$.

Д.Калинин



Иллюстрации Д.Гришуковой

Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6 – 8 классов.

Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»

Мы продолжаем очередной конкурс по решению математических задач для учащихся 6–8 классов. Решения задач высылайте в течение месяца после получения этого номера журнала по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» или по электронному адресу:* math@kvant.info *(с пометкой «Конкурс «Математика 6–8»). Не забудьте указать имя, класс и домашний адрес.

Как и прежде, мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и математических кружков. Руководителей кружков просим указать электронный адрес или контактный телефон. По традиции, кружки-победители заочного конкурса приглашаются на финальный очный турнир.

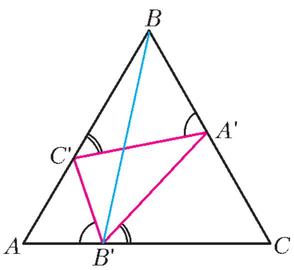


Рис. 1

11. Треугольник $A'B'C'$ вписан в равносторонний треугольник ABC так, как показано на рисунке 1. Известно, что углы $BA'C'$ и $C'B'A$ равны, а также углы $BC'A'$ и $A'B'C$ равны. Докажите, что прямая $B'B$ делит угол $A'B'C'$ пополам.

В.Произволов

12. Докажите, что разность $9^{9^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{9}}}}} - 8^{8^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{8}}}}}$, где число девяток не меньше двух, а число восьмерок любое, всегда делится на 7.

Г.Гальперин

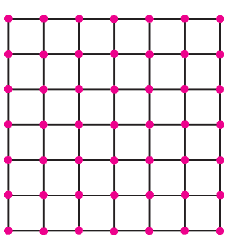


Рис. 2

13. На плоскости отмечены 49 точек, являющихся узлами клетчатой таблицы 6×6 (рис.2). Докажите, что у любой замкнутой ломаной, вершинами которой являются все эти точки, найдутся два параллельных звена.

А.Грибалко

14. Перед вами три суперкомпьютера: американский, китайский и российский. На вид они неразличимы, и вам неизвестно, где какой компьютер. Разрешается задать только один вопрос, на который можно ответить «да» или «нет», какому-нибудь одному из компьютеров, после чего этот компьютер даст ответ. Беда в том, что правдиво на вопросы отвечает лишь американский компьютер, а два других сломаны: китайский всегда отвечает неправду, а российский отвечает что попало.

Можно ли придумать вопрос, который позволит гарантированно купить:

а) не российский компьютер;

б) не китайский компьютер?

Компьютеры знают все друг о друге.

Фольклор

15. В прямоугольную коробку положили 40 батареек (рис.3). Батарейки лежат «вплотную» – ни одну нельзя подвинуть. После этого нашли еще одну батарейку. Как теперь упаковать все батарейки в ту же коробку?

С.Посицельский, М.Семёнова

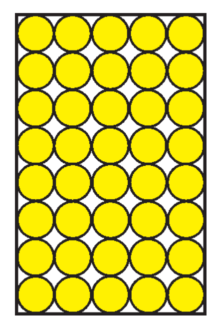


Рис. 3

Шкатулка с секретом

(Начало см. на 4-й с. обложки)

для магнита можно сделать фрезой или тупо заточенным сверлом. Перед тем как закрепить (приклеить) магнит, в канал вставляют стальной штифт и, поворачивая магнит, ориентируют его для получения максимальной силы притяжения. Магнит можно вырезать из магнитной наклейки или игрушки. Он должен надежно удерживать штифт, не давая ему оторваться при случайном резком движении замка.

После проверки правильности установки всех штырей и их скольжения нужно деревянными пробочками-заглушками заклеить лишние отверстия в пластинке (на рисунке они показаны пунктиром). Изготовление замка закончено, остается только приклеить его к внутренней крышке шкатулки. Затем нужно установить внутри коробочки запорную жестяную скобу, за которую будут зацепляться тонкие кончики штифтов, и шкатулка с секретом готова.

В исходном (после изготовления) состоянии шкатулка отперта, нижний (как изображено на рисунке) штифт прижат к магниту, а верхнему штифту мешает двигаться медный штифт. Чтобы запереть шкатулку, нужно закрыть крышку, наклонить коробочку вперед, «на себя», и резко ударить передней стороной шкатулки о ладонь. Нижний штифт оторвется от магнита, и шкатулка окажется запертой на один штифт. Теперь верните ее в исходное положение и наклоните вправо. Медный штифт скользнет вниз в своем канале и освободит путь верхнему стальному штифту. Снова верните шкатулку в исходное положение и наклоните «на себя». В результате верхний стальной штифт зацепится за запорную скобу. Верните шкатулку в исходное положение, наклоните ее влево, снова верните в исходное положение, а затем наклоните «от себя». Медный штифт скользнет в канале, запрет верхний штифт и освободит путь нижнему стальному штифту, который притянется к магниту. Шкатулка окажется надежно запертой.

Все эти наклоны, удары и повороты кажутся вам слишком сложными? Но ведь уже говорилось о том, что в «Коллекцию головоломок» попадают самые новые, самые популярные, самые трудные в решении и самые умные игрушки. А сделать шкатулку с секретом достаточно просто.

А.Калинин

Дюжина задач о среднем арифметическом

А. ШЕНЬ

Если девяти школьникам дать сто конфет, то хотя бы один из них получит 12 конфет или больше. Почему? Рассуждаем «от противного». Если это не так, то каждый из 9 школьников получил 11 конфет или меньше. Тогда всего они получили не более $9 \cdot 11 = 99$ конфет, а не 100. Противоречие – значит, так быть не может.

По существу, то же самое рассуждение можно изложить иначе. Если 9 школьников получили 100 конфет, то в *среднем* на каждого школьника пришлось по $\frac{100}{9} = 11\frac{1}{9}$ конфеты, и потому хотя бы один должен быть получить больше 11 конфет.

Что означают здесь слова «в среднем»? Речь идет о *среднем арифметическом*. Среднее арифметическое двух чисел a и b равно их полусумме $(a+b)/2$, среднее трех чисел a, b, с равно $(a + b + c)/3$ и так далее: среднее арифметическое n чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ равно сумме всех чисел, деленной на их количество, т.е.

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

В нашем примере $n = 9$ (девять школьников), $a_1, a_2, \ldots, a_9$ – количество конфет, полученных каждым из них, общее число конфет $a_1 + a_2 + \ldots + a_9$ равно 100, и среднее равно $\frac{100}{9} = 11\frac{1}{9}$.

Среднее арифметическое можно объяснить так: если мы хотим сравнять все числа, не меняя их суммы, то каждое из них надо заменить на среднее арифметическое.

Задачи

1. Найдите среднее арифметическое чисел 1, 2, 3, 4, ..., 19, 20.

2. Найдите среднее арифметическое чисел

$$-19, -18, -17, -16, \ldots, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots, 19, 20.$$

3. Найдите среднее арифметическое всех целых чисел от 1 до 1000.

4. Когда в комнату вошел четвертый человек, средний возраст находящихся в ней людей увеличился с 11 лет до 14. Сколько лет вошедшему?

5. Среднее арифметическое чисел a и b делит пополам отрезок с концами a и b на числовой оси. Найдите координату точки, которая делит этот отрезок в отношении 3 : 5.

6. Одного из школьников 7 А класса перевели в 7 Б, отчего средний рост школьников в обоих классах (7 А и 7 Б) увеличился. Могло ли так быть?

7. Желая найти среднюю годовую оценку по математике у всех семиклассников, завуч попросил учителей математики седьмых классов вычислить средние оценки в каждом из классов и потом взял среднее арифметическое этих оценок. Прав ли он?

8. Говорят, что средний доход 10% самых богатых жителей города в 15 раз превосходит средний доход всех жителей города. Докажите, что это выдумки.

9. В прямоугольной таблице из трех строк и двух столбцов средние арифметические в трех строках равны a, b, c, а среднее арифметическое в первом столбце равно d. Найдите среднее арифметическое всех чисел таблицы и среднее арифметическое во втором столбце.

10. Может ли среднее арифметическое каждого столбца прямоугольной таблицы быть положительным, а среднее арифметическое каждой строки – отрицательным?

11. Таблица умножения на обороте школьной тетради содержит все произведения однозначных чисел от 1 до 9 (всего 81: сначала 1 умножается на все числа от 1 до 9, потом 2 и т.д.). Найдите среднее арифметическое всех произведений в таблице.

12. В строчку написаны сто чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$, при этом $a_1 = 1$, $a_{100} = 100$ и каждое число в строчке (кроме двух крайних) не больше среднего арифметического двух соседей: $a_2 \le (a_1 + a_3)/2$, $a_3 \le (a_2 + a_4)/2$ и так далее. Докажите, что $a_{43} \le 43$.

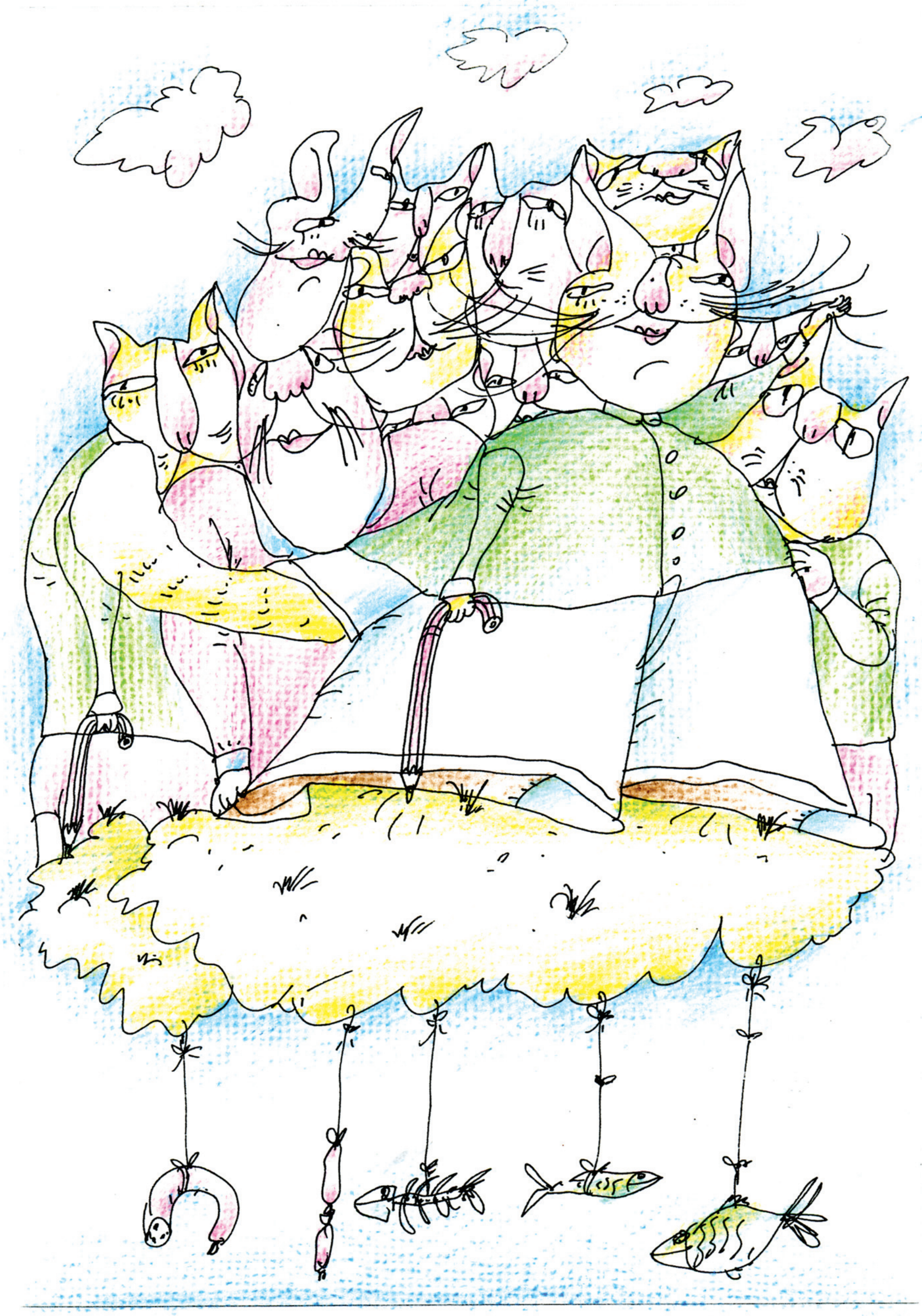
Решения задач

1. Сумма всех 20 чисел равна 210, поэтому среднее арифметическое равно $210/20 = 10{,}5$.

2. Тут 19 отрицательных чисел, 20 положительных и ноль, всего 40 чисел. При суммировании все числа, кроме 0 и 20, попарно сокращаются. Значит, среднее арифметическое равно $20/40 = 0{,}5$.

3. Здесь удобно сгруппировать числа в пары: 1 и 1000, затем 2 и 999 и так далее. Получится 500 пар, последняя будет 500 и 501. В каждой паре сумма составляет 1001 и среднее равно 500,5. Поэтому и среднее всех чисел равно 500,5.

4. Сначала среднее арифметическое трех чисел было равно 11, т.е. их сумма равнялась 33. Затем среднее четырех чисел было равно 14, т.е. их сумма равнялась 56. Значит, вошедшему было $56 - 33 = 23$ года.



Тогда сумма всех годовых оценок в классе А равна $25a$, а в классе Б равна $29b$. Сумма всех оценок в двух классах равна $25a + 29b$, и это надо разделить на $25 + 29 = 54$. Поэтому средняя оценка всех семиклассников равна

$$\frac{25a+29b}{54} = \frac{25}{54}a + \frac{29}{54}b,$$

а не полусумме a и b. Это число называют *взвешенным средним* чисел a и b.

8. Если 1/10 самых богатых жителей города имеют доход в 15 раз больше среднего, то их общий доход в полтора раза больше суммарного дохода всех жителей города, включая их самих.

9. Так как все строки содержат поровну элементов, то среднее арифметическое всех чисел таблицы равно $(a + b + c)/3$. По аналогичным причинам оно равно $(d + x)/2$, где x — неизвестное среднее арифметическое во втором столбце. Отсюда

$$x = \frac{2}{3}(a+b+c) - d.$$

10. Нет, поскольку тогда среднее всех чисел таблицы окажется положительным и отрицательным одновременно.

11. Если раскрыть скобки в произведении

$$(1+2+\ldots+8+9)(1+2+\ldots+8+9),$$

то получится как раз сумма всех чисел таблицы, поэтому она равна 45^2, а среднее равно $45^2/9^2 = 5^2 = 25$. Можно пытаться объяснить этот ответ по-простому: средний сомножитель (среднее арифметическое чисел от 1 до 9) равен 5, и потому среднее произведение равно 25. Но это опасная логика: так можно решить, что среднее чисел $1^2, 2^2, \ldots, 9^2$ равно 5^2, а это совсем не так.

12. Докажем, что $a_i \le i$ при всех $i = 1, 2, \ldots, 100$. Для этого рассмотрим числа $b_i = a_i - i$. Два крайних (b_1 и b_{100}) равны нулю, а каждое из остальных не больше полусуммы соседей. Надо доказать, что среди b_i нет положительных. Пусть это не так и пусть наибольшее из них b_i. Оно не может быть крайним, так как с краев нули, поэтому равно полусумме соседей. Соседи не могут быть больше b_i и, значит, равны b_i: рядом с наибольшим стоят тоже наибольшие. Двигаясь к краю, получаем противоречие.

5. Пусть, скажем, $a < b$ (случай $a > b$ рассматривается аналогично). Искомая координата x должна составлять пропорцию $(x - a) : (b - x) = 3 : 5$, откуда получаем уравнение $5(x - a) = 3(b - x)$, $5x - 5a = 3b - 3x$, $8x = 5a + 3b$, $x = \frac{5}{8}a + \frac{3}{8}b$.

6. Да, например, если этот школьник был самым низким в 7 А, но оказался самым высоким в 7 Б. Вообще, такое происходит, если школьник был ниже среднего в 7 А и выше среднего в 7 Б.

7. Такой способ годится, только если во всех классах поровну учеников. Пусть, скажем, в классе А учатся 25 школьников, а в классе Б учатся 29 школьников и средние арифметические в этих классах равны a и b.