журнал© Квант НОЯБРЬ ДЕКАБРЬ 2008 №6

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

Квант

Учредители — Российская академия наук, Фонд поддержки фундаментальной науки и образования (Фонд Осипьяна), ИФТТ РАН

Бюро Квантум

Самая светлая революция и ее творцы

Ю.НОСОВ

Небольшое вступление

Нас уже не удивляет, что во многих светофорах лампочки заменили светодиодами, что подсветка жидких кристаллов полностью перешла к светодиодам, а огромные цветные экраны на стадионах, площадях, эстрадах не только дублируют тех, кого аудитория почти не видит, но и прихорашивают их, а завтра и вовсе заменят – «интеллектуальные», «умные» светодиоды способны на чудеса информационных мистификаций. Светодиодные маяки, створные огни, бакены несоизмеримо эффективнее традиционных; пожаро-, взрыво-, ударобезопасные фонари служат шахтерам, дайверам, спелеологам; ярчайшие, но холодные светильники обеспечивают комфортные условия хирургам, ювелирам, ТВ-дикторам.

А ведь еще совсем недавно, лет десять тому назад, светодиоды были знакомы нам как исключительно скромные, простенькие светлячки в кнопках включения-выключения телевизоров, компьютеров, стиральных машин. Теперь нас не удивляют и «новые места» работы светодиодов: фары дальнего света, салоны самолетов, повсеместная подсветка зданий. Вслед за этим мы без эмоций воспримем и решающий светодиодный прорыв – освещение наших квартир (пока это лишь область фантазии энергетиков, строителей, продвинутых дизайнеров).

Говорят, утрата удивительной способности удивляться есть одно из самых неприятных последствий воздействия технического прогресса на человека – черствеет душа. А удивляться есть чему. Активная область светодиодного чипа, в которой рождается свет, по своему объему в 100000 раз меньше нити накала 60-ваттной лампочки, а светят они почти одинаково; нить накала перегорает через 500 часов, а светодиод может светить «вечно», правда в паспортах для страховки гарантируют «лишь» 50–100 тысяч часов! Светодиоды уже сравнялись с лучшими люминесцентными трубками, но если требуется засвечивать какую-то определенную зону, то светодиоды оказываются экономичнее своих предшественников в десятки раз. И достигается это лишь специальной формой пластмассового корпуса-линзы, без дорогой и громоздкой внешней оптики. Когда необходим какой-нибудь спектрально-однородный свет, светодиоды вообще вне конкуренции – это заложено в их природе, светофильтры им не нужны (как раз наоборот – излучать в широком спектре, свойственном белому свету, светодиоды не могут, но и эту проблему уже решили).

Олег Владимирович Лосев

Итак, светодиодную революцию, начавшуюся в 1990-е годы, в ее внешнем проявлении характеризуют три момента: резкое повышение интенсивности и экономичности свечения («новые» светодиоды называют суперяркими); свечение любого цвета от густо-малинового до фиолетового, включая и белый; формирование требуемого пространственного распределения светового потока. Общий итог – создание бурно развивающейся индустрии «полупроводникового света», способной принципиально преобразовать информационную, развлекательную и осветительную технику. Говоря высоким слогом, к 2020–2025 годам ожидается кардинальное изменение световой, цветовой, информационной, культурообразующей составляющих среды обитания человека.

Содержательная же суть революции сосредоточена в крохотном светодиодном чипе, представляющем собой сложнейшую квантово-механическую структуру, изготавливаемую методами нанотехнологии. Успех на долгом и трудном пути был достигнут общими усилиями американских, русских, японских, немецких исследователей и технологов. А началось все в далеком 1922 году, когда Олег Лосев, девятнадцатилетний лаборант Нижегородской радиолаборатории, занялся кристаллическими детекторами… Но прежде – необходимое отступление.

О том, как мы видим, и о световых измерениях

Свет воспринимается сетчаткой, устилающей глазное дно, именно на нее линзой-хрусталиком фокусируется изображение окружающих предметов (рис.1). Сетчатка содержит около 125 миллионов нервных фоторецепторов, которые из-за их продолговатости называют

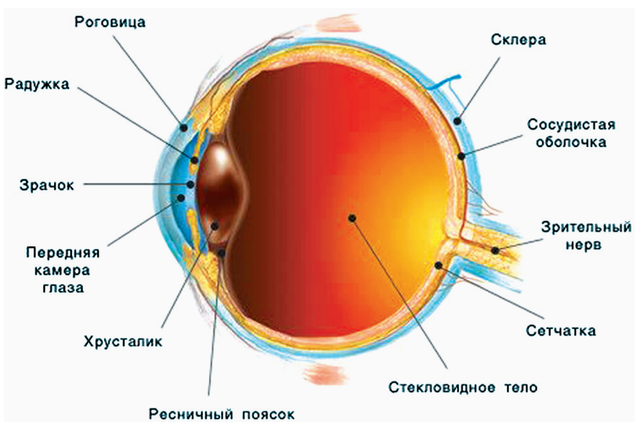


Рис. 1. Глаз человека в разрезе

палочками, и примерно 6–7 миллионов колбочек, получивших свое название из-за конической формы. Палочки сконцентрированы в основном на краях сетчатки, а колбочки располагаются в небольшой центральной зоне. Колбочки в сотни раз менее чувствительны, чем палочки, но зато «различают» цвета, а палочки реагируют лишь на изменения яркости света. Кавычки приходится использовать потому, что зрительный образ формируется в затылочных областях головного мозга, а глаз – это лишь фотоприемник, принимающий внешнюю информацию, преобразующий ее и по нервным волокнам передающий в мозг. Иными словами, «смотрим» мы глазами, а «видим» затылком. Глазная автоматика отлажена Природой так, что днем активны только колбочки, а в сумерках активны только палочки. Поэтому утверждение «ночью все кошки серы…» имеет вполне научное обоснование.

Цветовосприятие – уникальная способность человека; по-видимому, оно доступно исключительно высокоорганизованному мозгу. Видят все животные, многие зорче нас, некоторые почти в полной темноте, но практически все они пребывают в вечных серых сумерках (отличает ли собака сыр от мяса по цвету – до сих пор предмет дискуссии ученых). А нам, пожалуй, просто невозможно представить жизнь без красок, на уровне подсознания психика коррелирует с цветовой средой: лирическое настроение «окрашено» в голубой цвет и, наоборот, голубое погружает нас в лирику; драма – «фиолетова», оранжевое вызывает мажорный энтузиазм, мягкие охристо-коричневые тона ассоциируются с ностальгической грустью.

Обычный человек различает до двухсот цветовых оттенков, художники – до нескольких тысяч (так они утверждают, но, возможно, что-то здесь примешано другое), а в специальных технических цветовых атласах (например, в текстильной промышленности) перенумерованны миллионы цветов. Где еще можно найти такое многообразие – в звуках, запахе, во вкусовых ощущениях? Смешно даже пытаться сравнивать.

Физиологически наше цветовосприятие основано на наличии трех видов колбочек, избирательно чувствительных к красному, зеленому и синему цветам (трихроматное зрение). Используя технические аналогии, можно сказать, что каждый светочувствительный «пиксел» глаза образован R-G-B триадой, как в цветной видеокамере (R,G,B – первые буквы соответствующих английских слов red, green, blue).

Создатели светодиодов стремятся в максимальной степени удовлетворить «требования» глаза. Для освещения нужен белый свет с непрерывным спектром, как у солнца, – этим обеспечивается идеальная цветопередача, естественность окраски окружающих предметов. Для отображения информации надежнее использовать спектрально однородные цвета. Иными словами, в первом случае глаз реагирует на вид и цвет освещенных предметов, во втором – на сам источник света.

Световые измерения также подстраиваются под физиологию глаза, его резко изменяющуюся спектральную чувствительность (рис.2). Одинаковыми считаются воздействия, вызывающие одинаковые зрительные

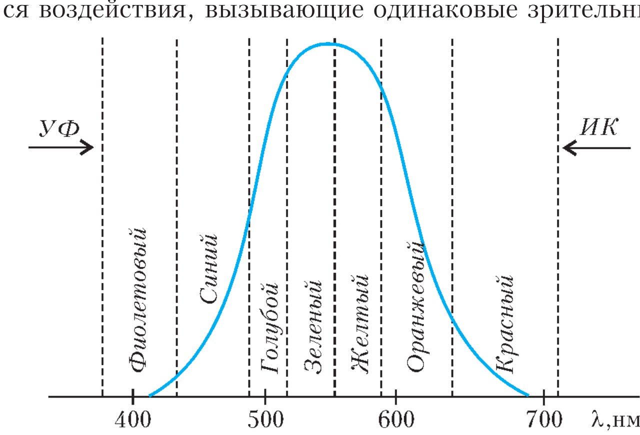


Рис. 2. Спектральная чувствительность человеческого глаза

ощущения, хотя физически они могут сильно различаться.

Мощность световой волны называется световым потоком и измеряется в люменах (лм). Для примера укажем, что «физическая цена» 1 лм в зеленой области составляет 1/680 Вт, в фиолетовой – 1/62 Вт, в красной – 1/6 Вт, точные пересчетные коэффициенты есть для каждой спектральной точки. Шестидесятиваттная лампочка излучает 500 лм, люминесцентная трубка – 5000 лм, уличный натриевый светильник – 10–30 тыс. лм. Светоотдача (лм/Вт) характеризует эффективность преобразования «электричество – свет», у лампочки накаливания это 10–11 лм/Вт, у лампы дневного света 80 лм/Вт.

Светильники, освещающие какую-то площадку (например, настольная лампа), характеризуют силой света (пространственной плотностью светового потока), измеряемой в канделах (1 кд = 1 лм/стер), и углом излучения. Для примера, светодиодный светофор обеспечивает силу света 300–500 кд в угле 20 градусов. Световой поток в 1 лм создает освещенность площадки в 1 $м^2$, равную 1 люксу (1 лк); для чтения вполне комфортно 500 лк, в операционной иногда хотят иметь и 50000 лк. Яркость – это отношение силы света к площади излучения, у светофора она составляет 10 тыс.$кд/м^2$, а у домашнего ТВ экрана – 500 $кд/м^2$.

«Свечение Лосева»

Вернемся к нашей истории.

Лосев, 1922 год... Поначалу он и лаборантом-то не был, его взяли посыльным, т.е. никем и с никакой зарплатой, но главное – разрешили заниматься радиотехникой. Тогда это было «болезнью» любознательного юношества, как в 30-е годы – авиация, в 50-е – атомная физика, сейчас – бизнес. Олег родом из Твери, в Нижнем Новгороде у него не было «ни кола, ни двора», он ночевал в здании лаборатории на предчердачной лестничной площадке, голодал (как все) и работал, работал, работал до восторга и изнеможения.

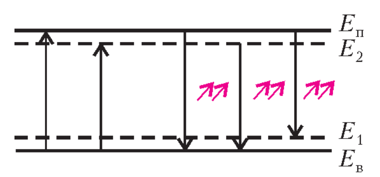
Неожиданно и вопреки всякой логике он обнаружил, что некоторые кристаллические детекторы не только детектировали, но и усиливали радиосигналы – объяснение этому эффекту дали лишь через три десятилетия, после изобретения транзистора. Сконструированный на таком детекторе радиоприемник – *кристадин* – принес Лосеву мировую известность и место в истории техники.

Но здесь речь о его другом, еще более значимом открытии. Олег заметил, что карбидокремниевые детекторы при пропускании через них тока испускают слабый зеленоватый свет, и с 1927 года он занялся этим явлением специально, посвятив ему всего себя. (Увы, жизнь его оказалась обидно короткой – Олег Владимирович Лосев скончался от истощения и холода в блокадном Ленинграде в январе 1942 года.) Его эксперименты показали, что свечение не было связано ни с поверхностными электрическими разрядами, ни с разогревом, «холодный свет» шел из самого кристалла.

Уже в 1930 году Лосев дал удовлетворительную теоретическую трактовку своим опытам на основе существующих квантовых представлений. Говоря сегодняшним языком, он открыл *инжекционную люминесценцию* полупроводников, тогда на Западе названную «свечением Лосева» (Losev Light). Его мировому признанию открыло дверь то обстоятельство, что он оперативно публиковался в немецких научных журналах. По-видимому, существенно и то, что по жизни с ним рядом оказывались такие замечательные ученые, как В.Л.Лёвшин, В.К.Лебединский, М.А.Бонч-Бруевич, А.Ф.Иоффе. Они не были его научными руководителями в общепринятом понимании, но несомненно оказали огромное влияние на его личность и на его признание. («Юноше, обдумывающему житье», подскажем, что попасть в подобную «компанию» не менее важно, чем родиться с талантом.) Характерно, что никто из мэтров не приписывался к Лосеву в соавторы – тогдашняя этика научного сообщества была щепетильна.

Для практических целей «свечение Лосева» было слишком слабым, тогда наука еще не знала, как его усилить, а тем временем грянула вторая мировая война, и интерес к занятному явлению фактически пропал. Лишь спустя почти два десятилетия, уже после изобретения транзистора (1948) и разработки американцем У.Шокли теории p–n-перехода (1949) вновь обратились к объяснению люминесценции полупроводников.

При протекании тока через диод часть электронов полупроводника «забрасывается» с равновесного нижнего энергетического уровня на более высокий уровень возбуждения, решающую роль при этом играет наличие p–n-перехода, потенциальный барьер которого и преодолевают электроны. А обратные переходы электронов с высокого квантового уровня на более низкие сопровождаются выделением энергии в виде фотонов, поток которых образует световое излучение (рис.3). Максимальный энергетический зазор $E_з$ определяется самой природой полупроводника ($E_з = E_п - E_в$, где $E_п$ и $E_в$ – границы зоны проводимости и валентной зоны соответственно) и называется шириной запрещенной зоны, положение других уровней E_1, E_2,... определяется видом вводимых легирующих примесей и неконтролируемыми дефектами. Чем значительнее энергетический «скачок» электрона ΔE, тем меньше длина волны излучения λ, предельные возможности реализуются при $\Delta E = E_з$. Нетрудно видеть, что для генерации «синих» фотонов ($\lambda = 465$ нм) пригоден только нитрид галлия GaN, тогда как красно-желтую часть спектра успешно могут «закрыть» тройные соединения GaAsP и GaAlAs. Отметим, что нередко переходы электронов верхнего уровня на нижний происходят не прямо, а через множество промежуточных уровней с испусканием такого же множества квантов, соответствующих инфракрасному (ИК) излучению. Но это – *безызлучательные переходы*, которые с точки зрения генерации света представляют собой бесполезное растрачивание энергии.



$E_з = E_п - E_в$

$\lambda = \dfrac{1230}{\Delta E, эВ}$ нм

Состав	$E_з$, эВ
GaAs	1,45
GaP	2,25
GaAsP	1,45–2,25
GaAlAs	1,45–2,16
GaN	3,5

Рис. 3. Схема генерации света в полупроводнике

Развитая теория (1951) объяснила, в частности, низкую интенсивность «свечения Лосева» – «вина» полностью ложилась на карбид кремния, где преобладают безызлучательные переходы. Разобрались, что не подходят транзисторные германий и кремний, «вычислили», что именно нужно для эффективной люминесценции, но... таких полупроводников в природе не существовало.

Первый акт светодиодной истории завершился. Успех? Провал? Будущее покажет, а пока – занавес.

Идеальные полупроводники для «свечения Лосева»

Вообще говоря, история «приборного проекта», как показывает опыт, обычно содержит последовательное решение четырех задач: разработка физических основ и изобретение прибора – выбор (или синтез) необходимых материалов и технологий – создание собственно прибора – применение. По счастливому стечению обстоятельств антракт между первым и вторым «действиями» не затянулся.

В 1952–53 годах немец Генрих Велькер предложил теорию создания целого класса искусственных полупроводников, обозначенных как A^3B^5, на основе соединения элементов 3-й и 5-й групп таблицы Менделеева (рис.4) и практически синтезировал некоторые из них. Он также сформулировал подходы к предсказанию свойств еще не созданных соединений. Даже беглый взгляд на рисунок 4 показывает, что перебор возможных вариантов чрезвычайно велик. Кроме того, сразу же становится ясно, что можно соединять не только два элемента, но и три, и четыре все из тех же групп таблицы Менделеева. В первые годы для нужд транзисторной техники и фотоэлектроники, основных потребителей полупроводников, были синтезированы арсенид и фосфид галлия (GaAs, GaP), антимонид и арсенид индия (InSb, InAs), арсенид-фосфид галлия (GaAlP), арсенид галлия-алюминия (GaAlAs). Ожидалось, что использование арсенида галлия позволит повысить рабочую температуру и быстродействие транзисторов (спустя годы это подтвердилось), однако необходимой технологии тогда разработать не смогли.

Группы		
III	IV	V
5 **B** бор	6 **C** углерод	7 **N** азот
13 **Al** алюминий	14 **Si** кремний	15 **P** фосфор
Sc 21 скандий	**Ti** 22 титан	**V** 23 ванадий
31 **Ga** галлий	32 **Ge** германий	33 **As** мышьяк
Y 39 иттрий	**Zr** 40 цирконий	**Nb** 41 ниобий
49 **In** индий	50 **Sn** олово	51 **Sb** сурьма
La 57 лантан	**Hf** 72 гафний	**Ta** 73 тантал
81 **Tl** таллий	82 **Pb** свинец	83 **Bi** висмут
Ac 89 актиний	**Rf** 104 резерфордий	**Db** 105 дубний

Рис. 4. Фрагмент периодической таблицы химических элементов

Возвратимся однако немного назад. Еще в 1950 году, т.е. за 2 года до публикаций Велькера, аспирантка Ленинградского физико-технического института Нина Горюнова синтезировала сурьмянистый индий (InSb) и предсказала его полупроводниковые свойства. Но зарубежной публикации не последовало, и Запад ее открытия не заметил. Горюнова, как химик, руководствовалась принципом кристаллохимического подобия новых соединений, и это не очень воспринималось окружающими ее физиками, ей не верили – трудно стать пророком в своем отечестве. Трудно, но сильных духом это не останавливает.

Когда в 1946 году Горюнова пришла в ленинградский Физтех, позади были химфак Университета, работа инженером в заводской лаборатории, война, голодные месяцы в блокаде, эвакуация. Теперь ей уже 30, у нее четырехлетний сын и годовалая дочь, надо растить детей и выживать самой – прозаическое трудовое будущее вроде бы вполне определилось. А она поступает в аспирантуру, да еще к самому академику А.Ф.Иоффе – патриарху отечественных физиков. Абрам Федорович определил в качестве ее темы исследование так называемого «серого» олова – одной из модификаций этого металла, образующегося на поверхности обычного «белого» олова при длительном хранении на холоде (в просторечии это «оловянная чума»). Тема – так себе, ожидать в ней ярких открытий не приходилось, но академик был методичен и планомерно осваивал клеточку за клеточкой в полупроводниковом пространстве. А для аспирантки «оловянная чума» на несколько лет стала важнее всего в мире, ей она отдает всю энергию, страсть, настойчивость. Горюнова пробивается в запасники Эрмитажа (!), где ей разрешают с потемневших старинных оловянных потиров наскрести пригоршню злосчастной серой дряни. В 1951 году – блестящая защита диссертации. Само «серое олово», как и ожидалось, интереса не представило, но развитые в работе Горюновой общие подходы к химии сложных полупроводников позволили ей выйти на соединения A^3B^5, к которым пришел и физик Велькер. И лишь «после Велькера» и после ряда технологически блистательных достижений американцев начали заниматься исследованиями указанных соединений у нас, но приоритет Горюновой 1950 года оказался, увы, безвозвратно утраченным – сложившееся мнение научного сообщества практически невозможно изменить.

В дальнейшем профессор Н.А.Горюнова внесла огромный вклад в технологию получения новых полупроводниковых соединений и в научные обобщения по этой группе веществ, совершив, по словам Нобелевского лауреата Н.Н.Семенова, «переворот в неорганической химии». Согласитесь, в XX веке претендовать на такое могут не многие.

При всей несхожести личностей О.В.Лосева и Н.А.Горюновой в их судьбах и путях к открытиям есть много общего. Оба пришли в науку в тяжелейшие для страны голодные годы, когда многие думали лишь о выживании, и пошли по избранному пути исключительно целеустремленно и с полной самоотдачей. Оба открыли новое там, где никто не искал, где, казалось бы, и найти-то было нечего, обоих отличала удивительная интуиция. Оба вращались в высокоинтеллектуальной научной среде и при этом сумели сохранить независимость суждений и самостоятельность в выборе пути, вполне в духе принципиального индивидуализма. И обоим сопутствовала удача.

Итак, в 1950-е годы соединения A^3B^5 в транзисторную электронику не пошли, однако выяснилось, что арсенид галлия и арсенид-фосфид галлия – идеальные полупроводники для реализации «свечения Лосева». Тогда же ученые всего мира устремились в новую область физики и техники – квантовую электронику – и сосредоточились на разработке лазеров. В 1960 году были созданы рубиновый и газовый лазеры, а в сентябре 1962 года – полупроводниковый лазер на основе арсенида галлия, правда излучал он в ближней инфракрасной области. В ноябре того же года один из не самых удачливых участников «лазерного проекта» американец Ник Холоньяк сообщил о создании светодиодов красного свечения на основе соединения арсенид-фосфид галлия и о начале их полупромышленного выпуска. Светодиод (рис.5) родился как бы сам собой, легко и просто, едва был

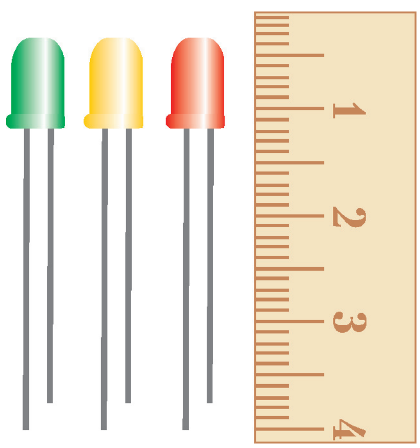


Рис. 5. Миниатюрные светодиоды

создан необходимый полупроводник. Его презентацию озаглавили «Свет надежды», вроде бы обычный журналистский штамп, а оказалось – пророчество. (И вновь мы упустили свой приоритет: на полгода раньше в одном из « почтовых ящиков» был организован выпуск довольно-таки ярких карбидокремниевых светодиодов для ядерной техники, но все засекретили, и первопроходцем в историю вполне оправдано вошел Холоньяк, получивший в 2003 году российскую премию «Глобальная энергия».)

Так фактически совместились второй и третий этапы «светодиодного проекта», успешно завершившегося к середине 1960-х годов. Разумеется, жизнь на этом не остановилась, расширялись производство и применение светодиодов, совершенствовались их устройство и характеристики, порой – принципиально. В 1970-е годы ученые ленинградского Физтеха, возглавляемые Ж.И.Алферовым, предложили технологию гетороструктур – геторосветодиоды оказались значительно ярче и долговечнее своих предшественников. (О гетероструктурах, за которые Ж.И.Алферов удостоен Нобелевской премии 2000 года, написано предостаточно, так что не будем здесь повторяться.)

Японский вызов

Все это замечательно, но в завершенном «светодиодном проекте» был существенный изъян – он охватил лишь красную область спектра и отчасти оранжевую и желтую, зеленого и синего света не получилось, а без этого невозможно реализовать белый свет. В световом пространстве нельзя довольствоваться частью, сделанное наполовину – это не младенец, который со временем повзрослеет, это – одноногий инвалид. Что-то вроде настенной живописи не знавших синего ацтеков – огненно-рыжий окрас, искажение пропорций, бешеная энергетика. Постоишь у стены минут десять – во рту пересыхает.

Как получить недостающие цвета спектра, наука прекрасно знала еще в 1970-е годы – надо просто использовать широкозонный полупроводник (см. таблицу на рисунке 3). Хорошо смотрелся нитрид галлия – замещая в нем частично галлий индием, можно было надеяться получить любые цвета свечения от фиолетового до зеленого. Все бы хорошо, да вот незадача – удавалось синтезировать GaN только *n*-типа, и ни при каких обработках он не превращался в полупроводник *p*-типа. А без этого нет *p*–*n*-перехода и нет светодиода. Родился даже тезис о принципиальной недостижимости этого – неудачникам как-то надо было оправдаться. На нитриде галлия фактически поставили крест. К счастью, не все.

В 1991 году японец Судзи Накамура опубликовал статью о создании сверхпрецезионной установки для выращивания тончайших и совершенных слоев GaN (InGaN), через полгода – о получении *p*–*n*-переходов и их ярком голубом свечении, а с 1993 года фирма «Ниче», где работал Накамура, начала производить на продажу голубые светодиоды силой света 1 кд! (Заметим, что этой условной границы суперяркости «красные» светодиоды тогда уже достигли благодаря использованию соединения AlInGaP– это было «круто», но вполне ожидаемо и в освоенной спектральной области.)

«Японский вызов» стал шоком для светодиодного мира: фирма «Ниче» занималась люминофорами для осветительных ламп, гигантам электроники «эти химики» вообще не были известны, а золушки становятся принцессами только в сказках и при обязательном содействии доброй феи. Фея для «Ниче» нашлась ...

Накамура пришел на фирму в 1979 году, ему было 25 лет, и он сумел убедить руководство в перспективности светодиодов. За три года он разработал отличную технологию «красного» светодиода, включая и соответствующий полупроводник, но продать разработку электронной промышленности не удалось – в традиционных направлениях уже наступило насыщение. Та же судьба постигла и два последующих проекта. Однако Накамура был упорен, к тому же за 10 лет приобрел важный опыт: решающей для светодиодов является технология исходного полупроводника. Фирма поставила на него еще раз, дала 3 млн долларов на изготовление установки, но сотрудников не выделила, так что он делал все своими руками. И стену, перед которой остановилась высокая наука, пробила технология. (Забегая вперед, отметим, что на успехе Накамуры фирма стала зарабатывать по 200 млн долларов прибыли ежегодно – такова цена удачной инновации.)

В 1989 году некий стажер одного из японских университетов, изучая воздействие электронного луча на GaN-пленки, как-то раз забыл выключить установку на ночь, а утром обнаружил необычайно яркое свечение образца – активация примеси, превращающей GaN в полупроводник *p*-типа, состоялась. (Как часто в истории науки случаются открытия, сделанные по нерадивости, забывчивости, неграмотности, лености их авторов! Это не призыв забывать выключать установки на ночь, важно другое – не проглядеть счастливую случайность.) Несколькими годами раньше похожий результат получили и исследователи из Московского университета. Однако обе публикации научный мир не заметил, нитрид галлия был уже не в моде, все разом переключились на селенид цинка, а вскоре так же дружно отвернулись и от него. (Удивляет, как глубокие независимые умы вдруг словно по команде бросают все и бегут на какую-нибудь яркую вспышку, которая частенько оборачивается миражом. А может они в массе не такие уж «глубокие и независимые»?)

Накамура увидел в публикациях главное – активация нитрида галлия и превращение его в полупроводник *p*-типа возможны. Этой процедуре он нашел удачное технологическое воплощение, которое и стало основой производства «синих» светодиодов в 1993 году. А вскоре он изящно использовал традиционные наработки фирмы «Ниче»: если на «синий» чип нанести подходящий люминофор, то, благодаря преобразованию части светового потока в зелено-желто-красные тона, можно, как итог, получить белый свет. Тем самым, светодиоды сделали серьезную заявку на вторжение в осветительную технику, и начиная с 2000–2001 годов светодиодная революция получила колоссальное ускорение.

Напомним, что «героем» всех этих пафосных событий является скромный, миниатюрный светодиодный чип площадью 2–4 мм^2 и толщиной в доли миллиметра. Но его внутренняя структура – это букет супердостижений физики и технологии твердого тела. Нитрид галлия удается получать только в виде тонких пленок, поэтому в качестве подложки берут пластину карбида кремния (он структурно близок к GaN) и на ней выращивают несколько десятков слоев состава GaN и его производных InGaN и AlGaN. Некоторые из них имеют вспомогательное технологическое назначение, а в активной зоне, т.е. там, где рождается свет, чередуются попеременно излучающие пленки InGaN и барьерные пленки чистого GaN (рис.6). Такие образования называют *сверхрешетками,* в них состав пленки изменяется на расстояниях, соизмеримых с размерами атомов, и ни одна из областей фактически не является однородной и независимой от соседей. Свойства сверхрешеток существенно отличаются от свойств тех же полупроводников в виде массивных образцов или в виде толстых пленок. Технология сверхрешеток открыла неисчерпаемые возможности перед создателями новых материалов, неизвестных и недоступных природе.

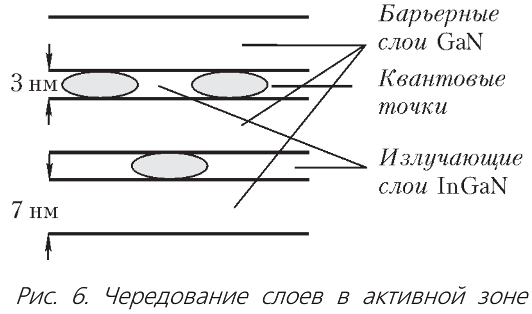


Рис. 6. Чередование слоев в активной зоне светодиода с квантовыми точками

Излучающий слой при ближайшем рассмотрении оказывается существенно неоднородным по площади, добавки индия скапливаются в небольших образованиях, занимающих не более 10% пленки. Это так называемые *квантовые точки* – «последний писк» полупроводниковой моды, которой, правда, уже лет двадцать. Именно через квантовые точки протекает ток светодиода, в них же рождается излучение, все остальное в кристалле – наподобие постамента под статуей, вроде бы и не обязателен, а без него нельзя.

Современные светодиоды – ярчайшая иллюстрация могущества нанотехнологии, только благодаря ей эффективность преобразования электричества в свет приблизилась к 50% по белому свету, а по спектрально-однородным цветам она еще выше.

Вернемся к земным делам, здесь было множество занимательных событий. Несколько лет фирме «Ниче» удавалось никого не подпускать к своей технологии и получать сверхприбыль, торгуя готовыми чипами, но когда на кону миллиарды долларов, ни патенты, ни суды не спасают от промышленного шпионажа, и секреты разглашаются. Накамура перебрался в США, и начались судебные разборки фирмы с перебежчиком, а в сентябре 2006 года Накамура получил престижную премию Миллениум (1 млн евро) – мир признал его лидерство.

Эпилог

Неблагодарное дело писать историю революции во время самой этой революции. Только-только автор придумает какую-то схему изложения событий, как вдруг – бац! – появляется открытие, перечеркивающее все его построения. Если отдаться безудержной фантазии, то можно ожидать многого. Например, создания полупроводниковых структур с таким многообразием энергетических уровней, которые позволят получать любое свечение и внешними командами управляемо изменять его. Тогда отпадет необходимость в люминофорах, повысится светоотдача, улучшится «качество» света, возрастет долговечность и температурная стабильность светодиодов.

Быть может, завтра эту фантазию превратит в реальность кто-то из наших читателей. Так что не будем подводить итоги, тема остается открытой…

Арифметические треугольники

В.ТИМОРИН

Треугольник назовем *арифметическим*, если квадраты длин всех его сторон – целые числа. Возможно, что такие треугольники называются как-то по-другому, но я не встречал никакого названия и поэтому придумал название сам. Тем не менее, арифметические треугольники чрезвычайно важны для теории чисел (и в этой статье мы увидим некоторые их применения). Дело просто в том, что обычно пользуются другим языком, более алгебраическим. Вообще, теория чисел изучает числа, а не фигуры. Поэтому многие рассказы про теорию чисел оперируют формулами и почти не содержат рисунков. Но, с другой стороны, очень полезно представлять себе математические объекты наглядно. Поэтому мы будем говорить про треугольники.

На геометрическом языке, наша задача состоит в описании классов арифметических треугольников. Дадим несколько определений.

Заметим, что в любом параллелограмме каждая его диагональ делит параллелограмм на два равных треугольника. Все эти треугольники мы будем называть половинками данного параллелограмма. Два треугольника называются *соседями*, если они равны половинкам одного и того же параллелограмма, причем первый получается при проведении одной из диагоналей этого параллелограмма, а второй – при проведении другой диагонали (рис.1).

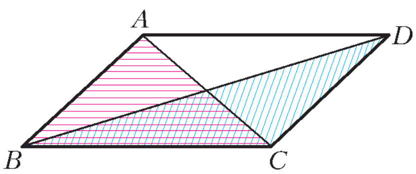


Рис.1. Переход к соседнему треугольнику. Треугольник ABC соседний для треугольника DBC

Другими словами, сосед данного треугольника получается так. Сначала мы выбираем одну из сторон треугольника. Затем достраиваем треугольник до параллелограмма так, что выбранная сторона будет его диагональю. После этого проводим в этом параллелограмме другую диагональ. Она делит параллелограмм на два равных треугольника – это один и тот же сосед для исходного треугольника (мы не делаем различия между равными треугольниками).

Докажем, что любой сосед арифметического треугольника тоже будет арифметическим. Достаточно показать, что если квадраты сторон и одной из диагоналей данного параллелограмма целые, то квадрат другой диагонали – тоже целый. Это вытекает из известной геометрической теоремы о том, что сумма

Иллюстрация М.Сумниной

квадратов всех сторон параллелограмма равна сумме квадратов его диагоналей. (Эту теорему нетрудно доказать, например, с помощью теоремы косинусов.)

Теперь мы можем написать формулу. Арифметический треугольник определяется тройкой натуральных чисел, а именно, квадратами длин всех сторон. Таким образом, (a, b, c) будет означать арифметический треугольник со сторонами $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ и $\sqrt{c}$ (заметим, что порядок чисел a, b и c не важен). Как мы только что видели, каждой стороне треугольника (a, b, c) соответствует некоторый соседний треугольник. Например, стороне c соответствует треугольник $(a, b, 2(a + b) - c)$ (что следует из сформулированной выше геометрической теоремы). Таким образом, одно из чисел a, b, c вычитается из удвоенной суммы двух остальных.

Например, рассмотрим треугольник $(2, 1, 1)$ (заметим, что это прямоугольный равнобедренный треугольник с катетом 1 и гипотенузой $\sqrt{2}$). Из него можно получить соседний треугольник $(2, 1, 5)$ (заменяя 1 на $2(2 + 1) - 1 = 5$). Из треугольника $(2, 1, 5)$ мы можем получить обратно треугольник $(2, 1, 1)$, а также два других треугольника – $(10, 1, 5)$ и $(2, 13, 5)$, и т.д. В общем случае из каждого арифметического треугольника получается три других арифметических треугольника, соседних данному (впрочем, некоторые из этих трех треугольников могут равняться друг другу или исходному треугольнику).

Скажем, что два арифметических треугольника *эквивалентны*, если один можно получить из другого путем последовательного перехода к соседним треугольникам. Класс эквивалентности определяется как множество всех треугольников, эквивалентных данному.

Как найти все треугольники, эквивалентные данному? Строго говоря, это невозможно, так как всякий класс эквивалентности состоит из бесконечного числа треугольников. С другой стороны, в произвольном классе можно легко выписать сколь угодно много треугольников. При этом удобно пользоваться такой схемой (ее идея принадлежит Дж. Конвею). Начнем опять с треугольника $(2, 1, 1)$. Изобразим его в виде точки. Из этой точки ведут три отрезка, соединяющие треугольник $(2, 1, 1)$ с тремя соседними ему треугольниками. В данном случае один из этих треугольников равен исходному, а два других равны $(2, 1, 5)$. Напишем числа 2, 1, 1 между отрезками, выходящими из нашей точки. Тем самым, треугольник можно восстановить по изображающей его точке, просто прочитав, какие числа написаны в примыкающих к точке областях (рис. 2). Идем вдоль отрезка, разделяющего области 1 и 2. На конце этого отрезка появляется новая точка, а из нее выходят два новых отрезка, ограничивающих новую область. Нам нужно только понять, что написать в новой области. Мы берем числа, написанные в соседних областях, в нашем случае 1 и 2. Берем их удвоенную сумму, т.е. 6. Теперь из полученного числа вычитаем число, написанное в области, примыкающей к противоположному концу отрезка и не соседней с нашей новой областью. В данном случае нужно вычесть число 1. Получаем $6 - 1 = 5$. Теперь в новой точке можно прочесть новый треугольник $(2, 1, 5)$, соседний треугольнику $(2, 1, 1)$. Продолжая этот процесс, можно довольно быстро получить много арифметических треугольников, эквивалентных треугольнику $(2, 1, 1)$ (рис.3). Итак, мы описали схему построения эквивалентных треугольников. Будем называть эту схему *схемой Конвея*.

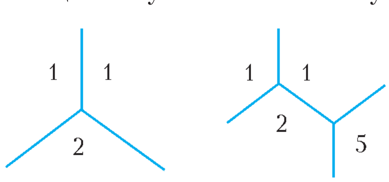


Рис. 2

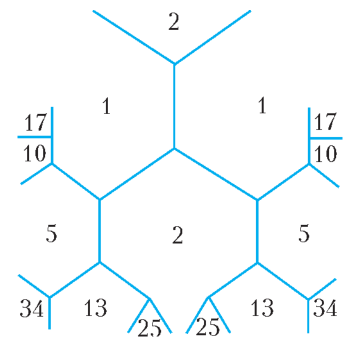


Рис.3. Построение схемы Конвея для треугольника (2, 1, 1)

Обсудим, какими могут быть квадраты сторон треугольников, эквивалентных данному. Например, что можно сказать о числах, являющихся квадратами сторон треугольников, эквивалентных треугольнику $(2, 1, 1)$? Заметим, что это в точности числа, написанные в схеме Конвея. Глядя на схему, можно попытаться угадать правило, которому подчиняются записанные в ней числа. Это не очень просто, и если вы хотите найти правило самостоятельно, отложите чтение – в следующем предложении сообщается ответ. Ответ такой: натуральное число является квадратом стороны треугольника, эквивалентного треугольнику $(2, 1, 1)$, тогда и только тогда, когда оно представляется в виде $x^2 + y^2$, где x и y – взаимно простые целые числа (в частности, если одно из этих чисел ноль, то второе должно быть единицей). Как только утверждение сформулировано, его нетрудно доказать по индукции. Однако мы можем несколько упростить рассуждение таким образом. Во-первых, заметим, что схема Конвея имеет смысл для произвольной тройки целых чисел (a, b, c) (и даже не обязательно целых) – не важно, являются ли числа a, b и c квадратами сторон арифметического треугольника. Например, некоторые из этих чисел могут быть отрицательными или равны нулю. Во-вторых, если мы сложим две тройки почленно (почленной суммой троек (a, b, c) и (a', b', c') называется тройка $(a + a', b + b', c + c')$), то все числа, написанные в соответствующих местах схемы Конвея, тоже сложатся.

Теперь рассмотрим тройку чисел $(1, 1, 0)$. Она, конечно, не соответствует никакому настоящему треугольнику, но можно ее представлять себе как вырожденный равнобедренный треугольник, у которого основание равно 0, а боковая сторона равна 1. Поэтому мы эту тройку все равно будем называть треугольником. Построим схему Конвея для треугольника $(1, 1, 0)$ (рис.4). Сразу же видно, что в этой схеме написаны точные квадраты. Можно взглянуть на схему повнимательней и заметить, что в областях, примыкающих к вершине, написаны числа вида x^2, y^2 и z^2, где x, y и z – взаимно простые целые числа, знаки которых

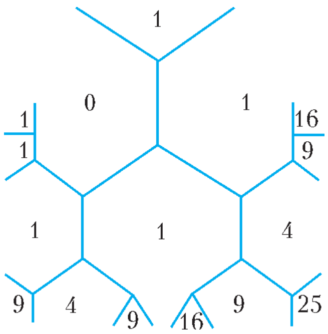


Рис.4. Схема Конвея для вырожденного треугольника (1, 1, 0)

можно выбрать так, что будет выполнено равенство $x + y + z = 0$. Сформулируем это в виде теоремы.

Теорема 1. *Любой треугольник, эквивалентный треугольнику $(1,\ 1,\ 0)$, имеет вид $\left(x^2, y^2, z^2\right)$, где x, y и z – (попарно) взаимно простые целые числа такие, что $x + y + z = 0$. Обратно, любой треугольник такого вида эквивалентен треугольнику $(1,\ 1,\ 0)$.*

Доказательство. Для доказательства того, что любой треугольник, эквивалентный треугольнику $(1,\ 1,\ 0)$, имеет указанный вид, достаточно показать, что треугольник, соседний треугольнику вида

$$\left(x^2, y^2, z^2\right), \quad x + y + z = 0,$$

тоже имеет такой вид. В самом деле, рассмотрим треугольник $\left(x^2, y^2, 2\left(x^2 + y^2\right) - z^2\right)$ (для двух остальных треугольников рассуждение аналогично). Имеем

$$2\left(x^2 + y^2\right) - z^2 = 2\left(x^2 + y^2\right) - (x + y)^2 = (x - y)^2 .$$

Другими словами, новый треугольник равен $\left(x^2, (-y)^2, (y - x)^2\right)$, т.е. имеет указанный вид (если числа x, y, $-(x + y)$ были взаимно простыми, то числа x, $-y$, $y - x$ тоже будут взаимно простыми).

Доказательство того, что любой треугольник указанного вида эквивалентен треугольнику $(1, 1, 0)$, мы пока отложим. □

Непосредственным следствием теоремы 1 является следующая

Теорема 2. *Квадрат стороны любого треугольника, эквивалентного треугольнику $(2, 1, 1)$, имеет вид $x_1^2 + x_2^2$, где x_1 и x_2 – взаимно простые целые числа.*

Для доказательства теоремы 2 заметим, что треугольник $(2,\ 1,\ 1)$ является суммой треугольников $(1,\ 1,\ 0)$ и $(1,\ 0,\ 1)$. Следовательно, треугольник, эквивалентный треугольнику $(2,\ 1,\ 1)$, является суммой треугольников $\left(x_1^2, y_1^2, z_1^2\right)$ и $\left(x_2^2, y_2^2, z_2^2\right)$, где x_i, y_i и z_i – целые числа такие, что $x_i + y_i + z_i = 0$ $(i = 1, 2)$. Кроме того, выполнены равенства

$$x_1y_2 - x_2y_1 = x_1z_2 - x_2z_1 = y_1z_2 - y_2z_1 = \pm 1 ,$$

что нетрудно проверить, заметив, что для исходных треугольников эти равенства справедливы и что при переходе к соседним треугольникам они сохраняются (проверьте!). В частности, квадрат стороны треугольника, эквивалентного треугольнику $(2,\ 1,\ 1)$, равен $x_1^2 + x_2^2$. Числа x_1 и x_2 взаимно просты, так как $x_1y_2 - x_2y_1 = \pm 1$.

Подобным же образом, можно вывести и много других интересных фактов, например: квадрат стороны любого треугольника, эквивалентного треугольнику $(2,\ 2,\ 2)$, имеет вид $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, где x_1, x_2 и x_3 – попарно взаимно простые целые числа такие, что $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ (докажите это!).

Пусть даны два арифметических треугольника. Как понять, эквивалентны они или нет? Во-первых, есть очень простой тест: сравнить площади треугольников. Нетрудно видеть, что площади эквивалентных треугольников совпадают. Значит, если площади разные, то треугольники не могут быть эквивалентными. Площадь треугольника $(a,\ b,\ c)$ находится по формуле Герона:

$$S = \sqrt{p\left(p - \sqrt{a}\right)\left(p - \sqrt{b}\right)\left(p - \sqrt{c}\right)},$$

$$p = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}{2} .$$

Несложные вычисления показывают, что

$$16S^2 = 4ac - (a + c - b)^2 = 4ab - (a + b - c)^2 =$$

$$= 4bc - \left(b + c - a^2\right) = 2(ab + bc + ac) - \left(a^2 + b^2 + c^2\right).$$

Эта величина $\left(16S^2\right)$ называется *дискриминантом* треугольника $(a,\ b,\ c)$. Заметим, что дискриминант арифметического треугольника всегда является целым числом и что два треугольника имеют одинаковые дискриминанты тогда и только тогда, когда у них одинаковые площади.

Упражнение 1. Докажите, что дискриминант арифметического треугольника либо делится на 4, либо дает 3 в остатке при делении на 4. Наоборот, любое натуральное число, дающее в остатке при делении на 4 либо 0, либо 3, является дискриминантом некоторого арифметического треугольника.

Итак, чтобы понять, эквивалентны ли два треугольника, нужно прежде всего сравнить их дискриминанты. Если дискриминанты разные, то треугольники не эквивалентны. Например, треугольник $(1,\ 1,\ 1)$ с дискриминантом 3 не может быть эквивалентен треугольнику $(2,\ 1,\ 1)$ с дискриминантом 4.

Что делать, если дискриминанты совпадают? Тогда нужно попытаться привести оба треугольника к наиболее простому виду. Один из способов такой: найти треугольник, эквивалентный данному и имеющий самый маленький периметр. Напомним, что периметр треугольника $(a,\ b,\ c)$ равен $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$, но можно вместо периметра минимизировать величину $a + b + c$, это не так важно. Важно то, что если, например, $a + b < c$, то можно заменить треугольник $(a,\ b,\ c)$ эквивалентным треугольником $(a,\ b,\ 2(a + b) - c)$. Заметим, что $2(a + b) - c < c$, т.е. две стороны не изменились, а третья уменьшилась. Геометрически неравенство $a + b < c$ означает, что угол, лежащий против стороны $\sqrt{c}$, тупой (это следует, например, из теоремы косинусов). Поскольку в параллелограмме против тупого угла лежит бóльшая диагональ, мы в этом случае, переходя к соседнему треугольнику, просто заменяем в соответствующем параллелограмме бóльшую диагональ на меньшую.

Действуя таким образом, мы будем все время уменьшать периметр (а также число $a + b + c$), пока не получим треугольник (a, b, c) такой, что

$$a + b \geq c, \quad b + c \geq a, \quad a + c \geq b .$$

Это значит, что треугольник (a, b, c) не имеет тупых углов. Такой треугольник называется *приведенным*. Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 3. *Любой арифметический треугольник эквивалентен приведенному треугольнику, т.е. треугольнику без тупых углов.*

Следующий вопрос состоит в том, как описать приведенные треугольники данного дискриминанта. Пусть (a, b, c) – приведенный треугольник дискриминанта Δ. Без ограничения общности, можно считать, что $b \geq a, c$. Поскольку треугольник приведенный, имеем также $0 \leq a + c - b \leq a, c$. Отсюда следует, что $(a + c - b)^2 \leq ac$, а значит,

$$3ac = 4ac - ac \leq 4ac - (a + c - b)^2 = \Delta .$$

Очевидно, существует лишь конечное число пар положительных целых чисел a, c, удовлетворяющих этому неравенству. Если a и c фиксированы, то b определяется из квадратного уравнения $4ac - (a + c - b)^2 = \Delta$. Напомним, что квадратное уравнение такого вида не может иметь более двух решений. Поэтому имеется лишь конечное число приведенных треугольников данного дискриминанта.

Например, перечислим все приведенные треугольники дискриминанта 4. Неравенству $3ac \leq 4$ удовлетворяет только пара $a = c = 1$. Теперь найдем b из уравнения $4 - (2 - b)^2 = 4$, получим $b = 2$. Таким образом, единственным приведенным треугольником дискриминанта 4 является треугольник (1, 2, 1) или, что то же самое, треугольник (2, 1, 1). Отсюда вытекает, что любые два арифметических треугольника дискриминанта 4 эквивалентны. В самом деле, любой арифметический треугольник дискриминанта 4 эквивалентен приведенному треугольнику, т.е. треугольнику (1, 2, 1).

Упражнение 2. Перечислите все приведенные треугольники дискриминантов 7, 8, 11.

Окончание доказательства теоремы 1. Нам осталось доказать, что треугольник вида (x^2, y^2, z^2), где x, y и z – попарно взаимно простые целые числа такие, что $x + y + z = 0$, эквивалентен треугольнику (1, 1, 0). Мы уже знаем, что любой треугольник, эквивалентный треугольнику такого вида, имеет тот же вид. Следовательно, достаточно рассмотреть приведенные треугольники указанного вида. Нетрудно проверить, что дискриминант треугольника вида (x^2, y^2, z^2), где $x + y + z = 0$, равен 0. Пусть $y \geq x, z$. Тогда, согласно неравенству $3x^2z^2 \leq \Delta$, либо x, либо z равно нулю. Допустим, $z = 0$. Тогда $x = -y$, и при этом x взаимно просто с y. Следовательно, $x, y = \pm 1$, т.е. $x^2 = y^2 = 1$. Таким образом, единственный приведенный треугольник рассматриваемого вида – это треугольник (1, 1, 0). □

Теорема 4. *Если два приведенных треугольника эквивалентны, то они равны.*

При помощи этой теоремы мы, наконец, можем эффективно проверить, эквивалентны ли два треугольника. Как мы уже говорили, сначала надо посчитать дискриминанты. Если они разные, то треугольники не эквивалентны. Если дискриминанты совпадают, то нужно заменить оба треугольника эквивалентными им приведенными треугольниками. Исходные треугольники эквивалентны тогда и только тогда, когда полученные приведенные треугольники равны.

Доказательство теоремы 4. Доказательство основано на таком простом соображении: если треугольник тупоугольный, то у него только один тупой угол, а значит, есть только один соседний ему треугольник, периметр которого меньше, чем периметр данного треугольника. (Ведь мы, переходя к соседнему треугольнику, фактически меняем в соответствующем параллелограмме одну диагональ на другую, и если диагональ лежала против острого (или прямого) угла, она заменится на более длинную (или такую же) диагональ.) В терминах схемы Конвея, можно сказать так: у вершины, соответствующей данному тупоугольному треугольнику, есть только одна соседняя вершина с меньшим периметром. Теперь допустим, что мы идем по ребрам схемы Конвея, причем никогда не возвращаемся по тому же ребру, по которому уже прошли. В этом случае, если на каком-то участке пути периметр увеличился, он будет увеличиваться и дальше; другими словами, он не может сначала увеличиваться, а потом уменьшаться. Рассмотрим приведенный треугольник и соседний ему треугольник, не равный исходному. Тогда второй треугольник будет иметь больший периметр по сравнению с первым треугольником или тот же самый периметр. Значит, в любой цепочке соседних треугольников, начинающейся в исходном приведенном треугольнике, периметр будет либо увеличиваться, начиная с некоторого места, либо останется тем же самым. Следовательно, такая цепочка не может вести к другому приведенному треугольнику, поскольку, как легко видеть, два соседних треугольника одинакового периметра равны. □

Мы должны обосновать законность названия, выбранного для арифметических треугольников, т.е. продемонстрировать некоторые применения арифметических треугольников в арифметике. Таких применений множество, но мы укажем только одно, выбранное из соображений простоты.

Теорема 5. *Предположим, что натуральное число a делит число вида $z^2 + 1$, где z – целое. Тогда a представляется в виде суммы квадратов двух взаимно простых целых чисел.*

Доказательство. Имеем $ac = z^2 + 1$ для некоторого натурального числа c. Следовательно,

$$4ac - (2z)^2 = 4 .$$

Найдем целое число b из условия $a + c - b = 2z$. Можно проверить, что число b будет положительным, а числа $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$ будут удовлетворять неравенствам треугольника (сделайте это!). Арифметический треугольник $(a,\ b,\ c)$ имеет дискриминант 4. Следовательно, он эквивалентен треугольнику $(1,\ 2,\ 1)$. В частности, квадрат любой стороны треугольника $(a,\ b,\ c)$ имеет вид x^2+y^2, где x и y – взаимно простые целые числа. Например, a имеет такой вид, что и требовалось доказать. □

Следующее упражнение довольно сложное и предполагает хорошее знание свойств взаимно простых чисел.

Упражнение 3. Пусть $a=x^2+y^2$, где x и y взаимно просты. Тогда все натуральные делители числа a тоже представляются в таком виде. Выясните, верны ли аналогичные утверждения для x^2+2y^2, x^2+3y^2, x^2+5y^2.

Теория, которую мы затронули в этой статье, классическая и обязана своим существованием Лагранжу и Гауссу. Лагранж и Гаусс, правда, пользовались другим языком. Они изучали свойства целых чисел, представимых данной *квадратичной формой*, т.е. представимых в виде $Ax^2+Bxy+Cy^2$ для заранее заданных целых значений A, B, C и для некоторых (произвольных) целых значений x и y. Квадратичной формой называется само выражение $Ax^2+Bxy+Cy^2$, в котором x и y рассматриваются как переменные. Началось все с Ферма, который описал значения квадратичных форм x^2+y^2, x^2+2y^2 и x^2+3y^2.

Упражнение 4. Можно ли число 7 представить в виде x^2+y^2 для некоторых целых x и y? А число 1007? Если a и b можно представить в таком виде, то всегда ли это верно для ab? А для $a+b$?

Выяснилось, что есть большие классы квадратичных форм, которые представляют одни и те же числа. Лагранж и Гаусс разработали теорию, позволяющую эффективно перечислять эти классы и работать с ними.

Упражнение 5. Докажите, что число a представляется в виде x^2+y^2 для некоторых целых x и y тогда и только тогда, когда оно представляется в виде $5u^2+6uv+2v^2$ для некоторых целых u и v.

Связь между арифметическими треугольниками и квадратичными формами такая. Треугольнику $(a,\ b,\ c)$ сопоставляется квадратичная форма

$$ax^2+(a+c-b)\,xy+cy^2\,.$$

Попробуйте понять, почему именно такая квадратичная форма и в чем ее смысл. Для этого полезно замостить плоскость треугольниками, равными данному. Эквивалентность арифметических треугольников имеет естественное описание на языке квадратичных форм. Намек на это описание содержится в следующем непростом упражнении.

Упражнение 6. Докажите, что существует арифметический треугольник со стороной $\sqrt{d}$, эквивалентный треугольнику $(a,\ b,\ c)$, тогда и только тогда, когда $d=ax^2+(a+c-b)\,xy+cy^2$ для некоторых взаимно простых целых чисел x и y.

Интереснейший материал о квадратичных формах, схеме Конвея и еще о многом другом можно найти в замечательной книге Джона Конвея «Квадратичные формы, данные нам в ощущениях» (М.: МЦНМО, 2008).

В заключение мы укажем, в каком направлении может развиваться дальнейшая теория. Это направление действительно активно развивается, но люди, в основном, пользуются другим языком, более алгебраическим. Оказывается важным рассмотрение не просто арифметических треугольников, а арифметических треугольников с *ориентацией*. Это означает, что треугольники, получающиеся друг из друга отражением, считаются разными. Треугольники, полученные друг из друга вращением или параллельным переносом, по-прежнему отождествляются. Мотивируется это тем, что отражение нельзя осуществить, не выходя из плоскости. В наших обозначениях, треугольник $(a,\ b,\ c)$ – это то же самое, что треугольники $(b,\ c,\ a)$ и $(c,\ a,\ b)$, но, вообще говоря, не то же самое, что треугольник $(b,\ a,\ c)$. Понятия эквивалентности и классов легко переносятся на ориентированные арифметические треугольники.

Из результатов Гаусса следует, что ориентированные арифметические треугольники одинакового дискриминанта можно, в некотором смысле, перемножать. Результат умножения зависит только от классов эквивалентности сомножителей, а не от самих сомножителей. Этот результат определен лишь с точностью до эквивалентности. Таким образом, умножение является на самом деле операцией над классами ориентированных арифметических треугольников, а не над самими треугольниками. Умножение обладает привычными свойствами: переместительным (коммутативность) и сочетательным (ассоциативность). Кроме того, можно делить треугольники друг на друга, т.е. существует операция, обратная к умножению. Заметим, что число классов ориентированных арифметических треугольников данного дискриминанта по-прежнему конечно. Таким образом, имеется естественная, и обладающая хорошими свойствами, операция умножения на конечном множестве. Эта операция очень важна для теории чисел. Но ее подробное обсуждение уже не вписывается в формат этой статьи.

Вот только одно замечательное свойство умножения треугольников: умножим класс треугольника со стороной $\sqrt{a}$ на класс треугольника со стороной $\sqrt{b}$. Тогда полученный класс содержит треугольник со стороной $\sqrt{ab}$! Отсюда вытекает такое утверждение (попробуйте его доказать): если числа $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ и $\sqrt{c}$ являются сторонами трех эквивалентных арифметических треугольников, то число $\sqrt{abc}$ тоже является стороной некоторого арифметического треугольника, эквивалентного данным.

Вместо списка литературы для дальнейшего чтения (который был бы слишком велик), я просто перечислю важнейшие ключевые слова. Как уже упоминалось, понятие арифметического треугольника не используется. Вместо этого, говорят про *классы квадратичных форм*. Операция умножения этих классов называется *композицией*. Также говорят, что классы образуют *группу*, называемую *группой классов*. Есть много книг и статей, в которых объясняется смысл этих терминов и развивается дальнейшая теория.