цвета в таком порядке: самое левое место – красное, стоящее рядом с ним справа – синее, затем зеленое, потом снова красное, синее и зеленое и так далее. Таким образом, имеется по m мест каждого цвета, и все они периодически чередуются. Теперь возьмем числа от 1 до m и поместим их по порядку на красные места *слева направо*. Затем возьмем числа от $m + 1$ до $2m$ и поместим их по порядку на синие места *справа налево*. Наконец, возьмем числа от $2m + 1$ до $3m$ и поместим их по порядку на зеленые места опять же *справа налево*. Для большей наглядности и удобства рассуждений сами записываемые числа окрасим в те же цвета, что и занимаемые ими места. Вот пример расстановки чисел для $n = 15$ (соответственно, $m = 5$):

1 10 15 2 9 14 3 8 13 4 7 12 5 6 11

Убедимся, что такая расстановка удовлетворяет условию. Для этого проверим все имеющиеся тройки соседних чисел. Рассмотрим три вида троек.

1) Тройки, у которых левое число красное (и, соответственно, среднее синее, правое зеленое). В k-й тройке слева (где $1 \le k \le m$) красное число равно k, синее равно $2m - k + 1$, зеленое равно $3m - k + 1$. Зеленое число не меньше суммы красного и синего, поскольку неравенство $3m - k + 1 \ge k + (2m - k + 1)$ равносильно неравенству $m \ge k$, справедливому для всех $1 \le k \le m$.

2) Тройки, у которых левое число синее (и, соответственно, среднее зеленое, правое красное). Всего таких троек $m - 1$. Согласно описанной методике расстановки чисел, в k-й тройке слева (где $1 \le k \le m - 1$) синее число равно $2m - k + 1$, зеленое равно $3m - k + 1$, красное равно $k + 1$. Легко видеть, что и здесь зеленое число не меньше суммы красного и синего, поскольку неравенство $3m - k + 1 \ge (k + 1) + (2m - k + 1)$ равносильно неравенству $m - 1 \ge k$, справедливому для всех $1 \le k \le m - 1$.

3) Тройки, у которых левое число зеленое (и, соответственно, среднее красное, правое синее). Всего таких троек $m - 1$. В k-й тройке слева (где $1 \le k \le m - 1$) зеленое число равно $3m - k + 1$, красное равно $k + 1$, синее равно $2m - k$. Здесь также зеленое число не меньше суммы красного и синего, поскольку неравенство $3m - k + 1 \ge (k + 1) + (2m - k)$ равносильно неравенству $m \ge k$, справедливому для всех $1 \le k \le m - 1$.

Итак, для $n = 3m$ требуемая расстановка чисел существует. Покажем, как из нее можно получить расстановку чисел для $n = 3m + 1$ и $n = 3m + 2$.

Чтобы расставить числа от 1 до $3m + 1$, возьмем вышеописанную расстановку чисел от 1 до $3m$ и допишем к ней *слева* число $3m + 1$. Таким образом, добавится еще одна тройка соседних чисел (в которую теперь входят три самых левых числа), и осталось убедиться, что она удовлетворяет условию. Но эти три числа нам известны: это добавленное число $3m + 1$, а также числа 1 (красное) и $2m$ (синее). Неравенство же $3m + 1 \ge 1 + 2m$ с очевидностью справедливо для любого натурального m. Вот пример расстановки чисел для $n = 16$ (соответственно, $m = 5$), здесь дописанное слева число 16 мы не окрашиваем:

16 1 10 15 2 9 14 3 8 13 4 7 12 5 6 11

Если же $n = 3m + 2$, то к расстановке чисел от 1 до $3m + 1$ припишем *справа* число $3m + 2$. Здесь образуется дополнительная тройка чисел (в которую входят три самых правых числа): $3m + 2$ (добавленное), $2m + 1$ (зеленое) и $m + 1$ (синее). Неравенство $3m + 2 \ge (2m + 1) + (m + 1)$ с очевидностью справедливо для любого натурального m. Вот пример расстановки чисел для $n = 17$ (соответственно, $m = 5$):

16 1 10 15 2 9 14 3 8 13 4 7 12 5 6 11 17

Примечание. Возможность записать в одну строку числа от 1 до n так, чтобы среди любых трех чисел, стоящих подряд, одно число было *больше* суммы двух других, существует для *всех* n, кроме $n = 3, 4, 6$ и 7.

17. Это степени 3^{3k+2} и 2^{3k+1}, где $k = 0, 1, 2, \ldots$

Будем искать натуральные x, y, n и простые p такие, что

$$x^3 + y^3 = p^n . \qquad (1)$$

Если $d = \text{НОД}(x, y)$, то на d^3 должно делиться число p^n. В таком случае, сократив на d^3 обе части уравнения (1), получим уравнение

$$z^3 + t^3 = p^m , \qquad (2)$$

где числа $z = \frac{x}{d}$ и $t = \frac{y}{d}$ взаимно просты, кроме того, числа zt и p тоже взаимно просты, натуральное $m \le n$. Переписав уравнение (2) в виде

$$(z + t)\left(z^2 - zt + t^2\right) = p^m , \qquad (3)$$

рассмотрим две возможности.

1) Пусть $z = t$ и, значит, $z = t = 1$. В таком случае $p = 2$, и, возвращаясь к уравнению (1), имеем $2d^3 = 2^n$. Отсюда $d = 2^k$, $n = 3k + 1$. Числа 2^{3k+1} представимы в виде суммы двух кубов натуральных чисел: $\left(2^k\right)^3 + \left(2^k\right)^3$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

2) Пусть $z \ne t$, тогда $z^2 - zt + t^2 = (z - t)^2 + zt > 1$. Из (3) следует, что $z + t = p^r$, $z^2 - zt + t^2 = p^s$, $r + s = m$, причем, как мы только что убедились, $s > 0$. Следовательно,

$$p^{2r} - p^s = (z + t)^2 - \left(z^2 - zt + t^2\right) = 3zt ,$$

причем левая часть этого равенства делится на p. В силу взаимной простоты zt и p отсюда получаем, что 3 делится на p, т.е. $p = 3$. Число $p^{2r} - p^s$ не делится на 9 (иначе числа zt и p не были бы взаимно просты). Значит, $s = 1$, $z^2 - zt + t^2 = (z - t)^2 + zt = p^s = 3$. Отсюда $(z - t)^2 = 1$, $zt = 2$, т.е. либо $z = 2$, $t = 1$, либо $z = 1$, $t = 2$. Возвращаясь к уравнению (1), имеем $3^2 d^3 = 3^n$, $d = 3^k$, $n = 3k + 2$. Числа 3^{3k+2} представимы в виде суммы двух кубов натуральных чисел:

$\left(3^k\right)^3 + \left(2 \cdot 3^k\right)^3$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

18. Известно, что указанным в условии свойством точки D обладает ортоцентр треугольника ABC (см., например, статью А.Егорова «Ортоцентрический треугольник» в «Кванте» № 4 за 2001 г.). Никакие другие внутренние точки треугольника ABC таким свойством не обладают – в этом можно убедиться следующим образом. Отразим симметрично сторонам треугольника соответствующие дуги описанной около треугольника ABC окружности. Если бы эти дуги пересеклись не только в точке D, но и еще в какой-то другой точке D', то центры окружностей, описанных около треугольников ABD, BCD, ACD, оказались бы лежащими на одной прямой, перпендикулярной DD'. Но этого не может быть, поскольку указанные центры лежат на трех не параллельных прямых – серединных перпендикулярах к сторонам AB, BC, AC.

Итак, точка D – это точка пересечения высот треугольника ABC. Далее воспользуйтесь следующим свойством треугольника $A_1B_1C_1$ (обоснованным в указанной статье А.Егорова): биссектрисы треугольника $A_1B_1C_1$ лежат на тех же прямых, на которых лежат высоты треугольника ABC.

19. В равенстве $f_{n+1} = \frac{3f_n + \sqrt{5f_n^2 + 4}}{2}$ избавимся от радикала, записав его в виде $2f_{n+1} - 3f_n = \sqrt{5f_n^2 + 4}$ и возведя обе части в квадрат. После очевидных преобразований получим

$$f_{n+1}^2 - 3f_{n+1}f_n + f_n^2 - 1 = 0 , \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Подставив сюда $n - 1$ вместо n, имеем

$$f_n^2 - 3f_nf_{n-1} + f_{n-1}^2 - 1 = 0\,, \quad n = 1,\,2,\,3,\,\ldots$$

Таким образом, числа f_{n+1} и f_{n-1} при $n = 1, 2, 3, \ldots$ являются корнями одного и того же квадратного уравнения (при этом корень f_{n+1} больший, поскольку последовательность возрастающая). По формулам Виета,

$$f_{n+1} = 3f_n - f_{n-1}\,, \quad n = 1,\,2,\,3,\,\ldots \qquad (*)$$

Поскольку начальные числа f_0 и f_1 целые, то далее в результате процесса $(*)$ порождаются только целые числа: 0, 1, 3, 8, 21, … – члены знаменитой последовательности Фибоначчи с четными номерами.

20. Положим $z = x + y + 2m$, где $m = \sqrt{xy+1}$. Тогда $yz + 1 = (y+m)^2$, $zx + 1 = (x+m)^2$, $xy + yz + zx + 1 = (x+y+m)^2$.

ЗАДАЧИ НА СМЕШЕНИЕ ИДЕАЛЬНЫХ ГАЗОВ

1. Давление увеличилось в 2 раза.
2. Абсолютную температуру надо увеличить на 20%.
3. Установится температура $T = 320$ К.

О ДВУХ ВЕЛОСИПЕДИСТАХ И ВИШНЕВОЙ КОСТОЧКЕ

(см. «Квант» №3)

1. Поскольку точка двух велосипедистов равноудалена от точек P_1, P_2 и от точек Q_1, Q_2, то она совпадает с точкой пересечения серединных перпендикуляров соответствующих отрезков.

2. Так как O_1O_2BV – равнобедренная трапеция (O_1 и O_2 – центры окружностей), то отрезок BV параллелен линии центров O_1O_2, которая перпендикулярна общей хорде AB.

3. Так как O_1O_2BV – равнобедренная трапеция, то $O_1V = O_2B = O_2P_2$. Из равенства дуг BP_1 и BP_2 следует, что $\angle BO_1P_1 = \angle BO_2P_2$, а так как $\angle VO_1B = \angle VO_2B$, то $\angle VO_1P_1 = \angle VO_2P_2$. Следовательно, треугольники VO_1P_1 и P_2O_2V равны.

4. При движении в разных направлениях P_1 и P_2 будут равноудалены от точки двух велосипедистов, соответствующей точке A. Доказать это можно с помощью равенства треугольников, как в упражнении 3.

5. Пусть окружность, проходящая через точки B и V, пересекает данные окружности в точках S_1 и S_2. Обозначим центр этой окружности через O, а центры данных окружностей – через O_1, O_2. Так как отрезки O_1O_2 и VB имеют общий серединный перпендикуляр, то точка O лежит на серединном перпендикуляре к отрезку O_1O_2. Следовательно, прямые O_1O и O_2O образуют равные углы с прямой O_1O_2, а значит, и с прямой VB. Отрезок S_1B является общей хордой двух окружностей, он перпендикулярен их линии центров O_1O. Аналогично, S_2B перпендикулярен O_2O. Значит, прямые S_1B и S_2B образуют равные углы с VB, следовательно, эти углы опираются на равные хорды VS_1 и VS_2.

6. а) Имеем $\angle M_1O_1V = \angle M_2O_2V$ и $\angle VO_1B = \angle VO_2B$, поскольку O_2O_1VB – равнобедренная трапеция. Вычитая из первого равенства второе, получаем $\angle M_1O_1B = \angle M_2O_2B$, поэтому $\angle M_1AB = \angle M_2AB$, и значит, прямая M_1M_2 проходит через точку A. С прямой N_1N_2 рассуждения проводятся аналогично.

б) Так как четырехугольник $N_1M_2M_1N_2$ вписанный, то $\angle N_2N_1M_1 = \angle N_2M_2M_1$. С другой стороны, $\angle N_2N_1M_1 = \angle ABM_1$ $\angle N_2M_2M_1 = \angle ABN_2$. Складывая, получаем $\angle M_2BN_2 = 2\cdot\angle N_2N_1M_1 = \angle N_2VM_1$, следовательно, четырехугольник VBM_1N_2 – вписанный. Так же поступаем с четырехугольником VN_1M_2B.

в) Из пункта а) следует, что хорды M_1N_1 и M_2N_2 стягивают на двух окружностях одинаковые углы: $\angle M_1AN_1 = \angle M_2AN_2$, следовательно, $\frac{M_1N_1}{M_2N_2} = \frac{r_1}{r_2}$. Аналогично, $\frac{BM_1}{BM_2} = \frac{BN_1}{BN_2} = \frac{r_1}{r_2}$. Наконец, поскольку четырехугольник $M_1M_2N_1N_2$ вписанный, треугольники M_1AN_1 и N_2AM_2 подобны с коэффициентом $\frac{M_1N_1}{M_2N_2} = \frac{r_1}{r_2}$, а значит, $\frac{AN_1}{AM_2} = \frac{AM_1}{AN_2} = \frac{r_1}{r_2}$.

7. Подсчетом углов несложно показать, что окружности BKC, AKD, ALB и DLC пересекаются в одной точке M. Применив результат задачи 5 к треугольнику AKD и точкам B и C на его сторонах, получаем, что угол OMK – прямой (O – центр окружности $ABCD$). Аналогично, угол OML – прямой.

8. Воспользуйтесь следующим фактом: если через две точки пересечения двух окружностей провести по прямой и на каждой окружности соединить точки ее пересечения с этими прямыми, то полученные хорды будут параллельны.

9. См. решение упражнения 10.

10. Проведем хорды RR' и QQ', параллельные прямой AB. Прямая $R'M$ вторично пересекает окружность в некоторой точке S'. Тогда

$$\angle S'PR = \frac{1}{2}\left(\overset{\smile}{S'A} + \overset{\smile}{AR}\right) = \frac{1}{2}\left(\overset{\smile}{S'A} + \overset{\smile}{R'B}\right) = \angle S'MA\,.$$

Следовательно, точки S', M, L и P лежат на одной окружности. Аналогично, точки S', M, P и L' (точка пересечения хорд AB и $Q'S'$) лежат на одной окружности. Эти окружности имеют три общие точки, а значит, совпадают. Следовательно, $L' = L$. Остается заметить, что симметрия относительно серединного перпендикуляра к хорде AB переводит точки Q, R, M в точки Q', R', N соответственно, а точку L в точку K, откуда $AK = BL$.

11. Осуществим симметрию относительно точки M. Вершина угла K при этом переходит в точку K' – четвертую вершину параллелограмма $AKBK'$, точка A_1 – в точку A_1' на прямой BK', а точка B_2 – в точку B_2' на прямой AK'. Утверждение задачи равносильно тому, что прямые AB, A_2B_1 и $A_1'B_2'$ пересекаются в одной точке. Проще всего это доказать с помощью теоремы Дезарга, примененной к треугольникам AA_2B_2' и BB_1A_1' (точки пересечения сторон AA_2 и BB_1, AB_2' и BA_1', A_2B_2' и B_1A_1' лежат на одной прямой), либо можно применить теорему Менелая к треугольникам AKB и $AK'B$. Наконец, это можно доказать подсчетом длин отрезков с помощью подобий треугольников.

12. Для всех перечисленных фигур верно обобщение теоремы о бабочке, как в упражнении 10.

13. Проведем высоты AA' и BB'. Четырехугольник $AC'A'C$ вписан в окружность с центром D. Следовательно, H – середина хорды этой окружности, лежащей на прямой EF. Применив классическую теорему о бабочке, получаем $HE = HF$.

14. Пусть A, B – точки пересечения окружностей и прямые проводятся через A. Перпендикуляр, опущенный из точки двух велосипедистов V (соответствующей точке B) на прямую PQ, делит отрезок PQ пополам. Следовательно, искомое ГМТ – окружность с диаметром AV.

15. Пусть O_1, O_2 – центры окружностей α и β соответственно, а K – одна из точек их пересечения. Тогда треугольники O_1O_2O и O_1O_2K равны по трем сторонам, следовательно, точки O_1, O_2, O и K являются вершинами либо параллелограмма, либо равнобедренной трапеции.

16. В обозначениях упражнения 15 точка O является точкой двух велосипедистов окружностей α и β, соответствующей точке их пересечения K. Пусть A и B – точки касания одной из концентрических окружностей, назовем ее γ, с α и β соответственно. Прямая AK пересекает β вторично в некоторой точке B'. Тогда $OA = OB'$. Следовательно, точка B' также лежит на окружности γ, а значит, совпадает с B.

17. Эта задача предложена на заочном туре IV Геометрической олимпиады им. И.Ф. Шарыгина, поэтому ее решения мы не приводим.

18. Точка является точкой двух велосипедистов данной пары неравных окружностей тогда и только тогда, когда она является общим центром двух других окружностей, которые касаются двух данных. Это свойство сохраняется при инверсии.

19. Нет.

20. Обозначим через $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ векторы скоростей велосипедистов. Пусть в начальный момент велосипедисты находились в точках P_1 и P_2. На серединном перпендикуляре к отрезку P_1P_2 найдется точка V такая, что угол между векторами $\vec{v}_1$ и $\overrightarrow{P_1V}$ равен углу между векторами $\vec{v}_2$ и $\overrightarrow{P_2V}$. Эта точка – искомая.

21. Воспользуйтесь пространственным аналогом задачи 1: трехзвенная ломаная $ABCD$ расположена в пространстве так, что углы ABC и BCD – прямые; тогда середина отрезка AD равноудалена от точек B и C. С помощью этого утверждения докажите, что проекция середины отрезка Q_1Q_2 на прямую P_1P_2 совпадает с серединой отрезка P_1P_2. Из этого непосредственно следует, что проекции отрезков P_1Q_1 и P_2Q_2 на прямую P_1P_2 равны.

22. При решении можно воспользоваться пространственным аналогом задачи 1 (см. указание к упражнению 21).

23. Эта задача – исследовательская, и мы не даем к ней указаний.

ЗАДАЧИ LXXI МОСКОВСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ

6 класс

1. 25 декабря 2008 года.

Нетрудно проверить, что в оставшиеся дни до конца года такого совпадения больше не будет.

2. 6 зайчат.

Все зайчата барабанить не могут, так как заведомо не будет барабанить зайчонок, которому достанется самый маленький барабан. С другой стороны, если дать этому же зайчонку и самые короткие палочки, то все остальные зайчата будут барабанить.

3. 11 головок сыра.

Пусть всего было k крыс ($k > 7$), тогда каждая съела в первую ночь по $10/k$ головок сыра. Во вторую ночь каждая крыса съела вдвое меньше, т.е. $5/k$ головок. Все 7 крыс съели тем самым $35/k$ головок. Это целое число. Единственный делитель числа 35, превышающий 7, – само число 35. Поэтому $35/k = 1$, и всего на складе до нашествия крыс было 10 + 1 = 11 головок сыра.

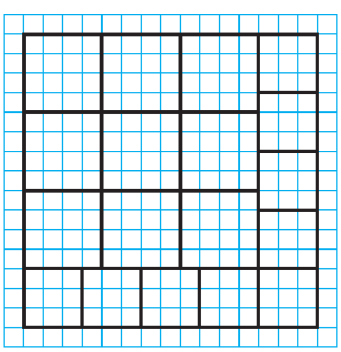

Рис. 2

4. *Первое решение.* Получить это решение можно так. Пусть квадратики одного вида имеют сторону a клеточек, другого – b клеточек, а исходный квадрат – c клеточек. Тогда площадь исходного квадрата равна $c^2 = na^2 + nb^2$. Удовлетворяющие этому равенству числа можно получить, например, умножив равенство $5^2 = 4^2 + 3^2$ на $n = k^2$. Квадрат при $n = 4$ разрезать не удается, при $n = 9$ получим $a = 4$, $b = 3$, $c = 15$. Пример разрезания для данных чисел представлен на рисунке 2.

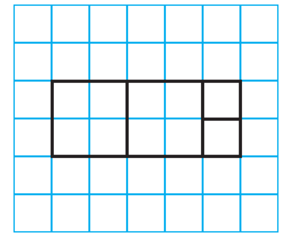

Рис. 3

Второе решение. Составим, например, из двух квадратов 2×2 и двух квадратов 1×1 прямоугольник 5×2 (см. рис.3). Из десяти таких прямоугольников можно составить квадрат 10×10. Разумеется, таким образом можно получить много других решений.

5. Можно поставить 28 машин (рис.4). Можно ли поставить больше – неизвестно.

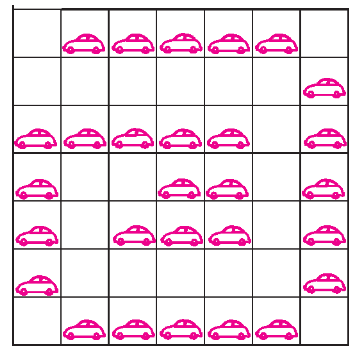

Рис. 4

6. Да, может.

Пусть Василиса посадила Кощея в самую северную комнату, а стражников прислонила так: к западной – к восточной – к западной стене («ЗВЗ»). Заметим, что, как бы Кощей ни ходил, в любой момент стражники южнее Кощея остаются в исходном положении, а положение стражников севернее Кощея отличается от исходного. Действительно, это условие выполнено вначале и не нарушается при переходе Кощея из комнаты в комнату.

Значит, если Кощей в какой-то момент оказался в самой северной комнате, то все стражники остались в положении «ЗВЗ». Если Кощей оказался во второй комнате, то самый северный стражник поменял положение, а два других остались в исходном положении, т.е. стражники приняли положение «ВВЗ». Если же Кощей оказался в третьей комнате, то стражники приняли положение «ВЗЗ». Наконец, если Кощей оказался в самой южной комнате, то стражники приняли положение «ВЗВ».

Значит, ни в какой момент все стражники не прислоняются к одной стене.

7 класс

1. 251.

Искомое число является делителем числа 2008. Разложим число 2008 на простые множители: $2008 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 251$. Выпишем все делители числа 2008: 1, 2, 4, 8, 251, 502, 1004, 2008. Найдя сумму цифр каждого из них, заметим, что условие задачи выполняется только для числа 251:

$2008 = 251 \cdot (2 + 5 + 1)$.

2. Да, могло.

Пример приведен в таблице:

Команда	П	Ф	Н	Ш	О
Помпа	–	1	1	3	5
Фильтр	1	–	3	0	4
Насос	1	0	–	3	4
Шлюз	0	3	0	–	3

Комментарии. 1. Так как «Помпа» обогнала «Фильтр», а «Фильтр» обогнал «Шлюз», разница очков, набранных «Шлюзом» и «Помпой», не может быть меньше двух. Можно показать, что все разницы от 2 до 9 очков между «Помпой» и «Шлюзом» реализуются.

2. Решение единственно с точностью до перестановки «Фильтра» и «Насоса», но доказывать это не требуется.
3. Утверждение задачи выполняется для любого количества команд, большего трех.

3. Дима живет на седьмом этаже.
Рассмотрим ту часть пути, которую Дима вниз едет на лифте, а вверх идет пешком. С одной стороны, путь пешком занимает вдвое больше времени, а с другой – больше на 10 секунд. Значит, эту часть пути он проехал за 10 секунд, а прошел пешком за 20 секунд. Поскольку весь путь на лифте занимает 60 секунд, то пешком Дима шел $1/6$ пути.
Поскольку дом девятиэтажный, пешком он шел 1 промежуток между этажами, а ехал 5. Значит, Дима живет на седьмом этаже.

5. Да, мог.
Пусть картонки квадратные и лежат одна на другой. Немного сдвинем верхнюю картонку вдоль ее края. Получим прямоугольник, но его центр будет лежать внутри обеих картонок (рис.5,*а*). Это можно исправить, заметив, что центр прямоугольника *не совпадает с* центром каждой из картонок. Поэтому, вырезав небольшую дырочку из первой картонки в центре прямоугольника, мы можем получить решение (рис.5,*б*).

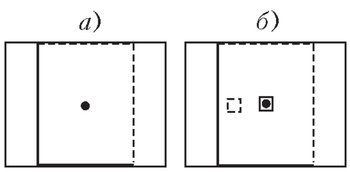

Рис. 5

У задачи существуют и другие решения – например, см. рис.6. Обратите внимание: в этом решении вторую картонку, прежде чем переносить, нужно *перевернуть.*

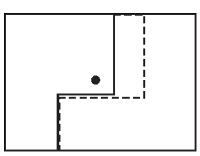
Рис. 6

*Комментарий***.** Если картонки не накладываются друг на друга и полностью покрывают дно прямоугольного ящика, то гвоздь в центре ящика обязательно воткнется на границе, разделяющей картонки. Это утверждение кажется очевидным, но строго доказать его удалось лишь в 2002 году (см.: А.Я.Канель-Белов. Решение задачи 1.5 // Математическое просвещение, вып. 6, 2002, с.139–140).

6. 4 трамвая.
Приведем сначала пример, когда за время наблюдений Шпиона проехало четыре трамвая (рис.7).

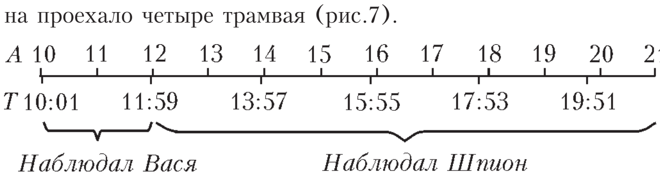

Рис. 7

Пусть автобусы ходят в 9:00, 10:00, ..., а трамваи ходят с интервалом 1 час 58 минут – в 10:01, 11:59, 13:57, 15:55, 17:53, 19:51, 21:49, ... Тогда Вася мог стоять с 10:01 до 11:59, а Шпион наблюдать с 12:00 до 21:00.
Докажем теперь, что за время наблюдений Шпиона не могло пройти меньше четырех трамваев. Вначале докажем, что интервал трамвая меньше двух часов. Действительно, если интервал составляет хотя бы два часа, то Вася стоял не менее двух часов, а значит за это время проехало по крайней мере два автобуса, что противоречит условию.
С другой стороны, пока наблюдал Шпион, прошло десять автобусов. Между 1-м и 3-м из них прошло два часа, значит, за это время проехал хотя бы один трамвай. Аналогично, между 3-м и 5-м автобусом, между 5-м и 7-м и между 7-м и 9-м проехало еще хотя бы три трамвая. Значит, Шпион увидел по крайней мере четыре трамвая.

8 класс

1. Верно.
Обозначим через n меньшее из этих двух последовательных чисел. Тогда их произведение равно $n(n+1)$. Припишем к нему два нуля. Получим $n(n+1)\cdot 100 = 100n^2 + 100n$. Выделим полный квадрат. Получим $(10n+5)^2 - 25$, т.е., если к произведению приписать 25, получится квадрат натурального числа.
Комментарий. Обратная задача широко известна как быстрый способ возводить в квадрат числа, оканчивающиеся на 5: $\left(\overline{n5}\right)^2 = \overline{m25}$, где $m = n(n+1)$.

2. Если в каждом из 7 рядов сидит не более 7 детей, то всего детей не более 49. На самом деле их 50, значит, на утреннем сеансе хотя бы в одном ряду сидели по крайней мере 8 детей. Поскольку рядов всего 7, хотя бы двое из этих детей окажутся в одном ряду на вечернем сеансе.

3. Пусть $\angle AKO = \alpha$ (рис.8). Тогда $\angle AOK = \alpha$, так как треугольник AKO равнобедренный; $\angle MOC = \angle AOK = \alpha$ (как вертикальные). Пусть $\angle MKC = \beta$. Тогда $\angle MCK = \angle MKC = \beta$, так как треугольник MKC равнобедренный. Поскольку $KM \parallel AC$, угол ACO равен β. Из треугольника AKC получаем, что $\angle CAK = 180° - \alpha - \beta$; из треугольника MOC получаем, что $\angle OMC = 180° - \alpha - \beta$. Таким образом, $\angle CAK = \angle AMC$. Заметим, что $\angle MKB = \angle CAK$ и $\angle ACM = \angle KMB$ ввиду параллельности KM и AC. Отсюда $\Delta AMC = \Delta BKM$ по стороне и двум углам. Следовательно, $AM = KB$.

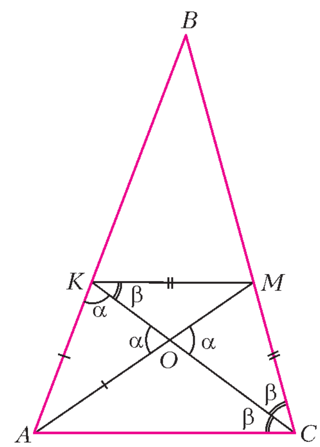

Рис. 8

4. Двое.
Назовем человека *подозрительным,* если про него нельзя определить, спортсмен это или арбитр. Заметим, что каждый из арбитров фотографировался только со спортсменами, т.е. не более чем с 20 людьми. С другой стороны, каждый из спортсменов сфотографировался со всеми остальными спортсменами и хотя бы с одним арбитром, т. е. не менее чем с 20 людьми. Значит, каждый подозрительный человек оказался на фотографиях ровно с 20 людьми.
Заметим, что если спортсмен фотографировался ровно с 20 людьми, то все его 19 игр судил один и тот же арбитр, т.е. на всех фотографиях вместе с ним присутствует один и тот же человек.
Пусть X – какой-нибудь подозрительный человек. Так как мы можем принять X за спортсмена, то, ввиду сказанного выше, на всех фотографиях с ним присутствует некий Y. Эти двое сфотографированы вместе 19 раз, значит, один из них – точно арбитр. Следовательно, третий человек на каждой из этих фотографий – точно спортсмен.
Так мы сможем определить 19 спортсменов, а оставшийся спортсмен – кто-то из пары X и Y. Все остальные – арбитры. Если можно определить статус хотя бы одного из пары X и Y, то можно определить и оставшегося, и подозрительных вообще нет. Значит, всего подозрительных людей двое – X и Y.
*Комментарий***.** Отметим, что количество спортсменов и арбитров можно определить по стопке фотографий. Действительно, по количеству игр можно определить количество игроков, а далее по общему количеству людей на фотографиях определить количество арбитров.

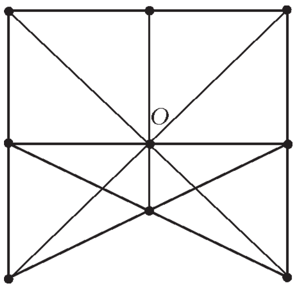

Рис. 9

5. Пример показан на рисунке 9. Докажем, что среди любых 6 из этих точек найдутся 3, лежащие на одной прямой. Будем называть *важной* прямую, на которой лежат 3 отмеченные точки. Докажем, что какие бы три точки из 9 мы ни выкинули, найдется важная прямая, из которой мы не выкинули ни одной точки. Предположим, что можно выкинуть 3 точки из 9 отмеченных так, чтобы из каждой важной прямой пропала хотя бы одна точка. Точка O лежит на наибольшем количестве важных прямых – на 4. Если мы точку O не выкинули, то нам надо выкинуть какую-то другую точку из каждой из этих прямых, т.е. выкинуть хотя бы 4 точки. А мы можем выкинуть только три. Противоречие. Значит, нам надо выкинуть точку O. Получаем картинку, как на рисунке 10. Остается 5 важных прямых, и каждая точка лежит не более чем на двух из них. Следовательно, после удаления еще двух точек останется хотя бы одна важная прямая, из которой не выкинуто ни одной точки.

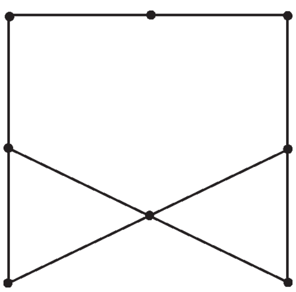

Рис. 10

Комментарий. Придумать этот пример можно следующим образом. Сначала расположим 9 точек в виде квадрата 3×3. Этот пример не годится, так как можно взять 6 точек, обведенных кружочком (рис.11). Проблема в том, что есть несколько «малополезных» точек, которые лежат только на 2 важных прямых. Попробуем передвинуть одну из них на место получше. Получим правильный пример.

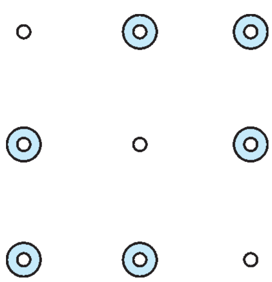

Рис. 11

6. При M и N, отличающихся не более чем в 3 раза.

Пусть перед каким-то раундом у игрока осталось A золотых и B серебряных монет, и он поставил на красное x золотых и p серебряных, а на черное – y золотых и q серебряных монет. Тогда либо количество золотых увеличится на $z = x - y$, а серебряных – на $r = p - q$, либо количество монет каждого типа уменьшится на эти числа. Ясно, что $|z| \le A$ и $|r| \le B$ и что любые z и r в указанных диапазонах можно получить.

Предположим, что A и B отличаются более чем втрое, например, $A > 3B$. Тогда крупье может добиться того, чтобы это неравенство сохранилось и после раунда. В самом деле, если оно нарушается при любом выборе крупье, то $A - z < 3(B - r)$ и $A + z < 3(B + r)$. Складывая эти неравенства, получаем, что $2A < 6B$, что неверно. Значит, если в начале количества монет отличаются более чем в 3 раза, крупье может сделать так, чтобы они все время отличались более чем в 3 раза. При $M = 3N$ или $N = 3M$ задача уже решена. Пусть теперь $M < 3N$ и $N < 3M$.

Подберем z и r так, чтобы при любом исходе отношение количеств монет стало равно трем. Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} A + z = 3(B + r), \\ 3(A - z) = B - r. \end{cases}$$

Решая ее, находим $z = \frac{5}{4}A - \frac{3}{4}B$ и $r = -\frac{5}{4}B + \frac{3}{4}A$. При A и B, отличающихся менее чем в 3 раза, $|z| < A$, $|r| < B$. Если $A + B$ кратно четырем, то z и r будут также целыми. Значит, в этом случае игрок сможет достичь цели за один раунд. Осталось показать, что игрок может сделать $A + B$ кратным четырем. Действительно, поставив все монеты на красное, игрок добьется, чтобы либо все пропало (что его устраивает), либо общее количество монет удвоилось. Повторив эту процедуру еще раз, игрок сделает так, что общее число монет будет делиться на 4. При этом соотношения $A < 3B$ и $B < 3A$ сохранятся.

9 класс

1. Может.

Пусть оценки судей для первой команды за каждый из первых трех конкурсов 333334, за четвертый 334444, а для второй команды за все конкурсы 333344. Значения, полученные компьютером для первой команды: 3,2; 3,2; 3,2; 3,7. Значения, полученные для второй: 3,3; 3,3; 3,3; 3,3. Первая команда победила со счетом 13,3 : 13,2. При этом сумма оценок, выставленных судьями первой команде, 79, второй команде – 80.

2. Назовем точки трассы A и A' симметричными, если длина пути от точки A до одной границы зоны в одном направлении равна длине пути от точки A' до другой границы в противоположном направлении. Очевидно, если одна из симметричных точек принадлежит аномальной зоне, то и другая тоже принадлежит.

Докажем лемму: если велосипедист стартует в некоторой точке, рано или поздно он заснет в симметричной точке. Действительно, пусть велосипедист стартовал в точке A_0. Вечером он заснет в некоторой точке A_1, на следующий вечер – в точке A_2 и т.д. Так как его дневной пробег равен длине аномальной зоны, в какой-то вечер он заснет в аномальной зоне в некоторой точке A_n. Тогда просыпается он в точке A'_n, симметричной A_n. Вечером велосипедист засыпает в точке A'_{n-1}, симметричной A_{n-1}, и так далее, пока не заснет в точке A'_0, симметричной A_0. Лемма доказана.

Пусть велосипедист стартовал из точки A вне аномальной зоны. По доказанной лемме однажды он заснет (и проснется) в точке A', симметричной точке старта. Теперь применим лемму к точке A': рано или поздно велосипедист заснет в симметричной ей точке, т.е. в точке A. Если же велосипедист стартовал из точки A в аномальной зоне, то однажды он заснет в симметричной ей точке A', и тогда он проснется в точке A.

3. Обозначим угол ABC через β (рис.12). Пусть $\beta < 90°$. Тогда $\angle AOC = 2\beta$ как центральный к $\angle ABC$. Поскольку треугольник ACO равнобедренный, $\angle OAC = 90° - \beta$. Треугольники ABL и ADL равны по двум сторонам и углу между ними, поэтому $\angle ADL = \beta$. Обозначим точку пересечения AO

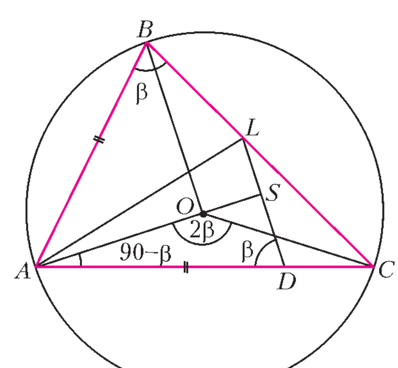

Рис. 12

и DL через S. Тогда $\angle SAD + \angle SDA = 90°$, так что треугольник ASD прямоугольный, что и требовалось доказать.
Случай $\beta > 90°$ рассматривается аналогично: $\angle SAD = \beta - 90°$, $\angle SDA = 180° - \beta$.
В случае $\beta = 90°$ точка D лежит на луче AO и треугольники ABL и ADL равны, поэтому $\angle ADL = 90°$, что и требовалось.
4. Существует.
Докажем, что среди чисел от 0 до $N - 1$, где $N = 10^{500}$, найдется искомое число. Если любое число из этого диапазона усложнить 100 раз, получится число, меньшее $10^{600} = \left(10^{300}\right)^2$. Существует ровно 10^{300} полных квадратов, меньших 10^{600}.
Зафиксируем k – один из этих квадратов. Количество чисел, из которых его можно получить описанной в условии операцией, не превосходит количества способов зачеркнуть в нем 100 цифр. Это количество строго меньше количества способов выбрать из его цифр произвольный набор. Последнее же количество равно $2^{(\text{количество цифр в } k)} \le 2^{600}$. Таким образом, общее количество чисел от 0 до $N - 1$, из которых может быть получен полный квадрат, не превосходит

$$10^{300} \cdot 2^{600} = 10^{300} \cdot 8^{200} < 10^{500} = N.$$

Отсюда следует, что на промежутке от 0 до $N - 1$ найдется число, из которого 100-кратным усложнением нельзя получить полный квадрат, что и требовалось.
5. 2550 рублей.
Эту сумму Вася получит, если 100 раз запросит 50 рублей (или 100 раз 51 рубль). Докажем, что Вася не может гарантировать себе бо́льшую сумму.
Можно считать, что рядом с Васей стоит банкир Коля, который знает номиналы карточек. Вася называет сумму, а Коля выбирает одну из карточек и вставляет ее в банкомат. Предложим следующую стратегию для Коли. Когда Вася называет сумму, Коля вставляет произвольную карточку с номиналом, меньшим названной суммы, если таковая имеется, и карточку с максимальным номиналом из имеющихся на руках в противном случае. В первом случае карточка после использования называется *выкинутой,* во втором – *реализованной.*
Ясно, что Вася получает деньги только с реализованных карточек, причем карточки реализуются в порядке убывания номиналов.
Пусть наибольший платеж составляет n рублей и этот платеж реализует карточку с номиналом m рублей, $m \ge n$. Тогда к моменту этого платежа карточки с номиналом, меньшим n рублей, уже съедены (иначе Коля вставил бы одну из таковых в банкомат). Все эти карточки выкинуты. Действительно, карточка с номиналом k рублей при $k < n$ не могла быть реализована раньше карточки с номиналом m рублей, поскольку $k < m$.
Таким образом, общее число реализованных карточек не превосходит $100 - n + 1$. С каждой реализованной карточки Вася получает не более n рублей, поэтому общая сумма, полученная Васей, не превосходит $n \cdot (100 - n + 1)$; максимум этой величины достигается при $n = 50$ и $n = 51$, и он равен 2550 руб.

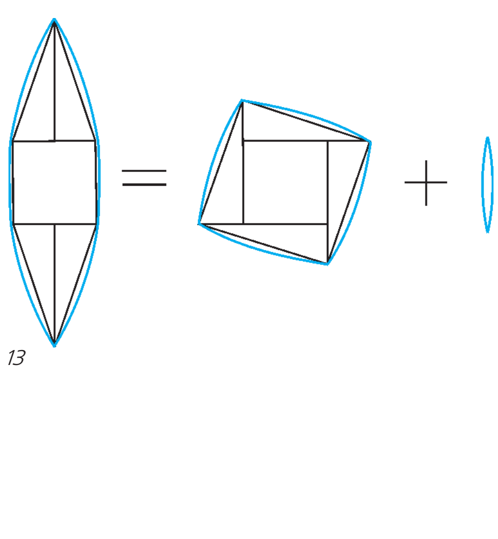

Рис. 13

6. Разрезав криволинейный шестиугольник с дугами в качестве сторон, можно сложить криволинейный квадрат и линзу (рис.13).

10 класс

1. 3 студента.
Как видно из рисунка 14, каждого студента видит 2, 3 или 6 храпометров. Значит, 7 разбивается в сумму слагаемых, каждое из которых равно 2, 3 или 6 и количество которых равно количеству студентов. Заметим, что ни одно из слагаемых не может равняться 6, потому что $7 - 6 = 1$ не представляется в виде суммы 2, 3 или 6. Значит, все слагаемые равны 2 или 3. Если студентов ≤ 2, то храпометры в сумме покажут не более $2 \cdot 3 = 6$, что меньше 7. Если студентов ≥ 4, то храпометры в сумме покажут не менее $4 \cdot 2 = 8$, что больше 7. Значит, единственный возможный вариант – 3 студента. И действительно, $7 = 3 + 2 + 2$.

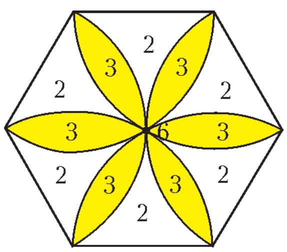

Рис. 14

2. $p = \frac{m}{2^n}$, где m и n целые неотрицательные, а дробь несократима, $m \le 2^n$.
Заметим, что если $p < 0$ или $p > 1$, то Борис выиграет (ему достаточно все время выбирать направление от 1, тем самым увеличивая расстояние от робота до отрезка).
Докажем, что при $p \in [0; 1]$ Андрей выигрывает тогда и только тогда, когда $p = \frac{m}{2^n}$, где m и n целые неотрицательные, а дробь несократима.
Докажем часть «тогда». Пусть на некотором шаге координата робота имеет указанный вид и лежит между 0 и 1. Тогда Андрей назовет число $\frac{1}{2^n}$. Борис вынужден будет сместить робота в одну из точек $\frac{m+1}{2^n}$ или $\frac{m-1}{2^n}$. Эти точки того же вида $\frac{k}{2^l}$, но $l < n$ (так как m нечетно). Если $n > 0$, то эти точки лежат между 0 и 1. Так как знаменатель рано или поздно станет равным 1, то робот попадет в 0 или 1, и выиграет Андрей.
Докажем часть «только тогда». Пусть на некотором шаге координата x робота не представима в указанном виде. Тогда для любого d хотя бы одно из чисел $x - d$, $x + d$ не имеет такого вида, так как иначе их полусумма x тоже имела бы такой вид. Значит, Борис может добиться того, чтобы новая координата робота не представлялась в указанном виде. Так как 0 и 1 имеют такой вид, то Борис выиграет.
3. Могло.
Рассмотрим последовательность 100, –33, 99, –32, …, 34, 33. Тогда, если первое число пары стоит на нечетном месте, сумма равна 67. А если на четном месте, то 66. Обратные величины будут равны соответственно $\frac{1}{67}$ и $\frac{1}{66}$, причем первых 67, а вторых 66. Итоговая сумма равна 2.
4. Обозначим через P данный многочлен и через $x_1 < \ldots < x_k$ данные k целых точек. Так как $P(x_k) - P(x_1)$ делится на $x_k - x_1 \ge k - 1$ и не превосходит по модулю $k - 2$, то

$P(x_k) - P(x_1) = 0$. Поэтому $P(x) = P(x_1) +$ $+ (x - x_1)(x - x_k)Q(x)$ для некоторого многочлена Q. Если $P(x_i) \neq P(x_1)$ для некоторого $i = 3, 4, \ldots, k-3, k-2$, то $Q(x_i) \neq 0$. Тогда

$$|P(x_i) - P(x_1)| \geq |(x_i - x_1)(x_i - x_k)| \geq 2(k-2) > k-2.$$

Это противоречие показывает, что $P(x_i) = P(x_1)$. Итак, $P(x_3) = \ldots = P(x_{k-2}) = P(x_1)$. Поэтому

$$P(x) = P(x_1) + (x - x_1)(x - x_3)(x - x_4)\ldots$$
$$\ldots(x - x_{k-3})(x - x_{k-2})(x - x_k)R(x)$$

для некоторого многочлена R.

Если $P(x_2) \neq P(x_1)$, то $R(x_2) \neq 0$. Тогда

$$|P(x_2) - P(x_1)| \geq (k-4)!(k-2) > k-2.$$

Это противоречие показывает, что $P(x_2) = P(x_1)$. Аналогично, $P(x_{k-1}) = P(x_1)$.

5. Заметим, что четырехугольник $AC'A'C$ – вписанный (рис.15). Значит, $\angle BAC = \angle BA'C'$ и $\angle BCA = \angle BC'A'$. Рассмотрим треугольник A^*BC^*, симметричный треугольнику $A'BC'$ относительно биссектрисы угла ABC. Этот треугольник гомотетичен треугольнику ABC с центром в точке B. Значит, BB_0 проходит через середину отрезка A^*C^*. Поэтому прямая, симметричная BB_0 относительно биссектрисы $\angle ABC$, проходит через середину отрезка $A'C'$. Очевидно, что AC' и CA' – высоты треугольника AHC. Отсюда, аналогично предыдущему рассуждению, имеем, что прямая, симметричная HB_0 относительно биссектрисы $\angle AHC$, проходит через середину отрезка $A'C'$. Значит, прямые из условия пересекаются на прямой $A'C'$.

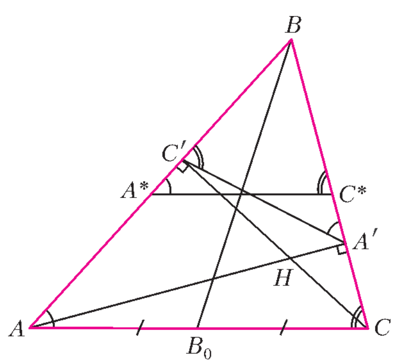

Рис. 15

6. а) Рассмотрим какой-нибудь цвет, например красный. Найдем два числа красного цвета, разность которых делится на 8 (такие найдутся, потому что число остатков при делении на 8 конечно). Обозначим эти числа через a и b, а цвет числа

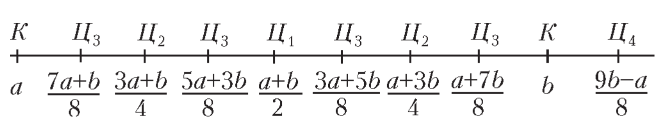

Рис. 16

$\frac{a+b}{2}$ – через Ц$_1$ (рис.16). При этом $\frac{3a+b}{4}$ и $\frac{a+3b}{4}$ имеют один и тот же цвет Ц$_2$ (полусумма чисел красного цвета и Ц$_1$). Числа $\frac{7a+b}{8}$, $\frac{5a+3b}{8}$, $\frac{3a+5b}{8}$ и $\frac{a+7b}{8}$ имеют один и тот же цвет Ц$_3$ (полусумма чисел красного цвета и Ц$_2$).

Так как числа $\frac{a+b}{2}$, $\frac{a+3b}{4}$ и $\frac{3a+5b}{8}$ являются полусуммами чисел цвета Ц$_3$, то цвета Ц$_1$, Ц$_2$ и Ц$_3$ совпадают.

Пусть число $\frac{9b-a}{8}$ имеет цвет Ц$_4$. Тогда $\frac{a+7b}{8}$ и b являются полусуммами чисел цвета Ц$_4$ и Ц$_1$ и поэтому имеют одинаковые цвета. Таким образом, Ц$_1$ – это красный цвет, что и требовалось доказать.

б) При четных N.

Если N нечетно, то можно покрасить число в цвет $j \in \{0, \ldots, N-1\}$, если оно имеет остаток j от деления на N. Легко видеть, что такая раскраска удовлетворяет условию задачи.

Пусть теперь некоторая раскраска удовлетворяет условию задачи. Пусть $a_1 < a_2 < \ldots$ – последовательность всех чисел, окрашенных в некоторый цвет (например, красный). Докажем индукцией по n, что $a_1, \ldots, a_n$ – арифметическая прогрессия с нечетной разностью.

При $n = 1$ в прогрессии один член. При $n = 2$ разность $a_2 - a_1$ нечетна, потому что иначе число $\frac{a_1 + a_2}{2}$ было бы красного цвета (по пункту а).

Пусть для $n = k$ утверждение верно. Докажем его для $n = k + 1$. Если $a_{k+1} - a_k$ четно, то число $\frac{a_k + a_{k+1}}{2}$ красного цвета (по пункту а). Противоречие. Значит, $a_{k+1} - a_k$ нечетно. Тогда по предположению индукции $a_{k+1} - a_{k-1}$ четно. Значит, $\frac{a_{k+1} + a_{k-1}}{2}$ красное. Поэтому $\frac{a_{k+1} + a_{k-1}}{2} = a_k$, что и требовалось.

Пусть теперь $d_1, \ldots, d_N$ – разности прогрессий. Докажем, что $\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{d_j} = 1$. Пусть $a = \max_{1 \leq j \leq N} b_j$, где b_j – минимальное число цвета j. Далее, пусть D – наименьшее общее кратное всех d_j. Тогда среди чисел $a + 1, \ldots, a + D$ ровно D/d_j чисел цвета j (так как числа цвета j образуют прогрессию с разностью d_j). Значит, $D = \sum_{j=1}^{N} \frac{D}{d_j}$, и $\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{d_j} = 1$.

Приведем все дроби к общему знаменателю. Так как все d_j нечетны, получим в знаменателе нечетное число, а в числителе – сумму N нечетных слагаемых, равную знаменателю и, значит, нечетную. Поэтому N нечетно.

11 класс

1. $x = -p/6$.

Если x_1, x_2 – абсциссы точек пересечения данных парабол, то для каждого значения $x_0 \in [x_1; x_2]$ площадь части исходной фигуры, расположенной слева от вертикальной прямой с абсциссой x_0, равна

$$S(x_0) = \int_{x_1}^{x_2} \left(-2x^2 - \left(x^2 + px + q\right)\right)dx = \int_{x_1}^{x_0} \left(-3x^2 - px - q\right)dx,$$

т.е. совпадает с площадью соответствующей части новой фигуры, ограниченной осью абсцисс и новой параболой

$$y = -3x^2 - px - q.$$

Но новая парабола пересекает ось x в точках с абсциссами x_1, x_2, а значит, симметрична относительно вертикальной прямой с абсциссой $\frac{x_1 + x_2}{2}$. Следовательно, площадь новой фигуры (равно как и исходной) разделится пополам, когда

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{-p}{2 \cdot (-3)} = -\frac{p}{6}.$$

Комментарий. Равенство площадей соответствующих частей исходной и новой фигур можно обосновать и без использования интеграла – например, с помощью *принципа Кавальери,* т.е. из равенства длин соответствующих вертикальных отрезков

$$\left[-2x^2; x^2+px+q\right] \text{ и } \left[-3x^2-px-q; 0\right]$$

при каждом значении $x \in \left[x_1; x_0\right]$.

2. 47.

Если $n^2 \le 2008$, то 2008! делится на n^n (так как числа n, $2n$, …, $(n-1)n$ и n^2 содержатся среди чисел 1, 2, …, 2007, 2008). Поскольку $44^2 < 2008 < 45^2$, достаточно проверить делимость 2008! на n^n при $n \ge 45$.

1) 2008! делится на $45^{45} = 5^{45} \cdot 3^{90}$, так как среди чисел 1, 2, …, 2007, 2008 заведомо найдется 45 чисел, кратных 5, и 90 чисел, кратных 3 (поскольку $5 \cdot 45 = 225 < 2008$ и $3 \cdot 90 = 270 < 2008$).

2) 2008! делится на $46^{46} = 2^{46} \cdot 23^{46}$, так как среди чисел 1, 2, …, 2007, 2008 заведомо найдется 46 чисел, кратных 2, и 46 чисел, кратных 23 ($23 \cdot 46 = 1058 < 2008$).

3) 2008! не делится на 47^{47}, так как число 47 простое, и поэтому среди чисел 1, 2, …, 2007, 2008 есть лишь 42 числа, кратных 47 ($47 \cdot 42 = 1974 < 2008 < 2021 = 43 \cdot 47$).

Легко заметить, что для произвольного натурального x наименьшим натуральным n, для которого x! не делится на n^n, является наименьшее простое число p, такое, что $p^2 > x$.

3. Невозможно.

Пусть x – число школьников, сделавших не более чем по 3 ошибки, y – число школьников, сделавших по 4 или по 5 ошибок, а z – число школьников, сделавших не менее чем по 6 ошибок. Тогда $x + y + z = 333$.

Предположим, что $z > x$. Тогда $z = x + t$, где $t \ge 1$. В этом случае должны выполняться неравенства

$$1000 \ge 0 \cdot x + 3y + 6z = 3y + 3(x+t) + 3z =$$

$$= 3(x+y+z) + 3t = 999 + 3t \ge 1002,$$

а это невозможно.

4. Так как OD – высота в прямоугольном треугольнике MAO, то $MO^2 = MA \cdot MD$ (рис.17). Поскольку O – центр

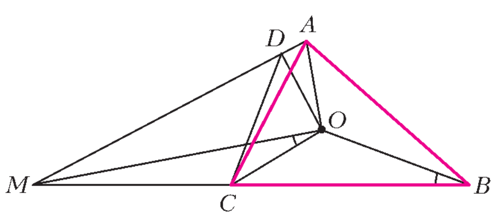

Рис. 17

вписанной окружности, то $\angle CAO + \angle ACO + \angle OBC = \dfrac{\pi}{2}$. С другой стороны, из треугольника AOC получаем, что

$$\angle AOC = \pi - (\angle CAO + \angle ACO) =$$

$$= \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \angle OBC\right) = \frac{\pi}{2} + \angle OBC > \frac{\pi}{2}.$$

Отсюда

$$\angle MOC = \angle AOC - \frac{\pi}{2} = \angle OBC,$$

и $\Delta MOB \sim \Delta MCO$ ($\angle OMC$ – общий). Следовательно,

$$\frac{MO}{MC} = \frac{MB}{MO},$$

откуда получаем, что $MO^2 = MB \cdot MC$. Из равенства $MA \cdot MD = MB \cdot MC$ получаем, что $\Delta MAB \sim \Delta MCD$. Следовательно, $\angle MBA = \angle MDC = \pi - \angle ADC$, т.е. вокруг четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность.

Существует другое решение, использующее тот факт, что OM является общей касательной к двум окружностям, описанным около треугольников ADO и OBC соответственно.

5. а) 2; б) 2, 4, 38, 76.

Указания. Пусть через t минут на ленте лежат $m(t)$ деталей типа A и $k(t)$ деталей типа B. Так как $m(t)$ и $k(t)$ имеют разную четность, то $|m(t) - k(t)|$ может принимать только значения 1, 3, 5, … Поскольку по условию исходное расположение периодически повторяется, можно показать, что величина $|m(t) - k(t)|$ не изменяется. Далее можно показать, что $|m(t) - k(t)| = 1$ при всех t. Отсюда получаем, что среди последовательных 76 деталей типы A и B встречаются по 38 раз и потому 76 – период последовательности типов. Если ситуация на конвейере впервые повторилась через n минут, то n – минимальный период последовательности и потому делит 76. Так как на любом отрезке длины 76 детали A и B встречаются одинаковое число раз, это же верно и для периода длины n. Отсюда следует, что n – четное число. Тогда n = 2, 4, 38 или 76. Нетрудно показать, что все эти значения реализуются.

6. $v \ge 1 + \sqrt{2}$.

Указания. Введем прямоугольную систему координат, начало которой совпадает с точкой A, а точки B, C и D имеют координаты (0, 1), (1, 1) и (1, 0) соответственно. По условию лиса вначале находится на прямой $y = x$. В момент, когда лиса находится на некоторой прямой $y = x + a$, зайцы всегда смогут находиться в точках с координатами $\left(0, 1 + \dfrac{a}{v\sqrt{2}}\right)$ и $\left(1 - \dfrac{a}{v\sqrt{2}}, 0\right)$ соответственно (пока эти координаты неотрицательны). При $\dfrac{v\sqrt{2}}{v\sqrt{2} - 1} > v \cdot \dfrac{v\sqrt{2} - 2}{v\sqrt{2} - 1}$, т.е. при $v < 1 + \sqrt{2}$, такое поведение зайцев позволяет спастись одному из них.

Пусть теперь $v \ge 1 + \sqrt{2}$. Допустим, что сначала лиса бежит по прямой $y = x$ к точке A с максимальной скоростью. Обязательно настанет такой момент, что расстояние от лисы до этой точки станет равным наименьшему из расстояний от зайцев до точки A. Без ограничения общности можно считать, что наименьшим будет расстояние от первого зайца до A, а координаты лисы и первого зайца в этом момент равны (a, a) и $\left(0, a\sqrt{2}\right)$ соответственно. Тогда, двигаясь прямолинейно с максимальной скоростью сначала в точку с координатой $(0, 2a)$, а затем в точку A, лиса поймает первого зайца и окажется в точке A не позже второго. Побежав затем по лучу AD, лиса поймает и его.

7. а) Нет; б) да; в) да.

Указания. а) В правильном октаэдре нельзя выбрать четыре вершины с указанным в этом пункте свойством.

б, в) В произвольном многограннике нужно взять такие четыре вершины, что образованный ими тетраэдр обладает наибольшим возможным объемом.

ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ МОСКОВСКОЙ ФИЗИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ

Первый теоретический тур

7 класс

1. $V_0 = \dfrac{m_0}{\rho} \approx 1{,}18 \cdot 10^{-29}$ м^3.

2. $\rho_1 = \dfrac{3}{2}\rho = 900$ кг/м^3, $\rho_2 = \dfrac{3}{4}\rho = 450$ кг/м^3.

3. Во всех случаях $n = 3$. **4.** $F = (m - m_0)g = 6$ Н.

5. $M = \dfrac{(\rho_в V/2) - m}{1 - (\rho_в/\rho_с)} \approx 0{,}55$ г.

8 класс

1. $L = \dfrac{s^2}{s - s_1} = 100$ км, $v_1 = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}\left(1 - \dfrac{s_1}{s}\right) = 60$ км/ч,

$v_2 = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}\left(\dfrac{s_1}{s} - 1\right) = 75$ км/ч.

2. $p = \dfrac{p_A S_A + p_B S_B}{S_A + S_B} = 2$ кПа.

3. $v = \dfrac{u\rho_п}{\rho_в} = 4{,}5 \cdot 10^{-5}$ м/с.

9 класс

1. Мяч попадет в кольцо номер 6.
2. Ускорение груза равно нулю, а ускорение коробки направлено вниз и равно $a = \dfrac{M + m}{M} g$.

3. $N = \dfrac{Lmgv \sin 2\alpha}{l\eta} \approx 170$ кВт.

4. $R_A = \dfrac{U_2}{I} = 0{,}1$ кОм, $R_V = \dfrac{U_1 - U_2}{I} = 0{,}9$ кОм.

10 класс

1. $\alpha = \arccos \dfrac{v_0^2}{2gh} \approx 30°$.

2. $v_2 = v_1 \dfrac{\rho g a^2}{\rho g a^2 + k}$ при $t \le \dfrac{a}{v_1}\left(1 + \dfrac{\rho g a^2}{k}\right)$, при дальнейшем доливе воды скорость кубика будет равна нулю.

3. $h \approx \dfrac{100Mg}{k}$.

4. Сила равна $F = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{77Q^2}{144R^2}$ и направлена к плоскости.

11 класс

1. $h = \dfrac{2\pi m_2 L}{m_1 + m_2}$, $d = \dfrac{2L}{m_1 + m_2}\left(\sqrt{m_1^2 - m_2^2} - m_2 \arccos \dfrac{m_2}{m_1}\right)$, петлеобразное движение происходит при $m_1 > m_2$.

2. $F = \mu mg + \dfrac{ks}{2}$. **3.** $\eta = \dfrac{1}{7} \approx 14\%$. **4.** $\dfrac{q_1}{q_2} = -8$.

5. $a = g \operatorname{tg} \dfrac{\alpha - \gamma}{2}$.

Второй теоретический тур

8 класс

1. $v > 11{,}8$ м/с. **2.** $H \approx nh = 2$ м. **3.** На 28%.

9 класс

1. $\tau = \dfrac{3h}{v} = 5$ с, $A = 4mgh + \dfrac{2}{9}mv^2 = 2008$ Дж.

2. $w = \dfrac{\lambda m}{\lambda m + (r + ct_к)(m_0 + m - m_1)}$,

$Q = r(m_0 + m - m_1) + \lambda m + cmt_к$.

10 класс

1. $A = 1{,}2 p_0 V_0 = 120$ Дж. **2.** $E = \dfrac{q\left(2^N - 1\right)}{4\pi\varepsilon_0 R^2 \sqrt{5 - 4\cos \dfrac{2\pi}{N}}}$.

3. $\mathscr{E} \approx 27$ В, $C \approx 50$ мкФ, $r \approx 10$ кОм.

11 класс

1. $R = \dfrac{F}{\omega\sqrt{(m\omega)^2 + \gamma^2}} = 0{,}2$ м. **2.** Не может, $\eta = 40\%$.

3. $E = \dfrac{Nq}{8\pi\varepsilon_0 R^2 \sin \dfrac{\pi}{N}}$. **4.** $T = IBh + \dfrac{mg + IBL}{2} \operatorname{ctg} \alpha$.

5. $d = F\left(1 + \dfrac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}\right) = 40$ см или $d = F\left(1 - \dfrac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}\right) = 20$ см.

Информацию о журнале «Квант» и некоторые материалы из журнала можно найти в ИНТЕРНЕТЕ по адресам:

Редакция журнала «Квант»
kvant.info
Московский центр непрерывного математического образования
kvant.mccme.ru
Московский детский клуб «Компьютер»
math.child.ru
Костромской центр дополнительного образования «Эврика»
ceemat.ru

Квант журнал ©

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ
С.А.Дориченко, А.А.Егоров, А.В.Жуков, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ
Д.Н.Гришукова, В.В.Иванюк, А.Е.Пацхверия, Н.М.Сурова

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР
Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА
Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:
119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»
Тел.: 930-56-48
E-mail: admin@kvant.info, math@kvant.info, phys@kvant.info

Отпечатано в ОАО ордена Трудового Красного Знамени «Чеховский полиграфический комбинат»
142300 г.Чехов Московской области,
Сайт: www.chpk.ru E-mail: marketing@chpk.ru
Факс: 8(49672) 6-25-36, факс: 8(499) 270-73-00
Отдел продаж услуг многоканальный: 8(499) 270-73-59