# Задачи LXXI Московской математической олимпиады

### 6 класс

**1.** Сегодня 17.02.2008. Наташа заметила, что в записи этой даты сумма первых четырех цифр равна сумме последних четырех. Когда в этом году такое совпадение случится в последний раз?

*Н.Нетрусова*

**2.** Зайчиха купила для своих семерых зайчат семь барабанов разных размеров и семь пар палочек разной длины. Если зайчонок видит, что у него и барабан больше, и палочки длиннее, чем у кого-то из братьев, он начинает громко барабанить. Какое наибольшее число зайчат сможет начать барабанить?

*Д.Баранов*

**3.** На складе лежало несколько целых головок сыра. Ночью пришли крысы и съели 10 головок, причем все ели поровну. У нескольких крыс от обжорства заболели животы. Остальные 7 крыс следующей ночью доели оставшийся сыр, но каждая крыса смогла съесть вдвое меньше сыра, чем накануне. Сколько сыра было на складе первоначально?

*А.Блинков, И.Раскина*

**4.** Разрежьте какой-нибудь квадрат на квадратики двух разных размеров так, чтобы маленьких было столько же, сколько и больших.

*Д.Шноль*

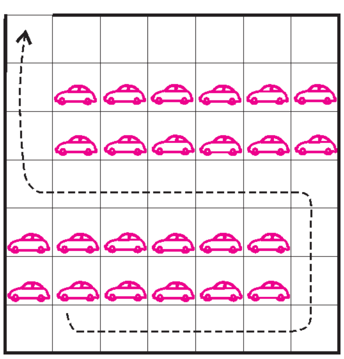


Рис. 1

**5.** Автостоянка в Цветочном городе представляет собой квадрат $7 \times 7$ клеточек, в каждой из которых можно поставить машину. Стоянка обнесена забором, одна из сторон угловой клетки удалена (это ворота). Машина ездит по дорожке шириной в клетку. Незнайку попросили разместить как можно больше машин на стоянке таким образом, чтобы любая могла выехать, когда прочие стоят. Незнайка расставил 24 машины так, как показано на рисунке 1. Попытайтесь расставить машины по-другому, чтобы их поместилось больше.

*А.Хачатурян*

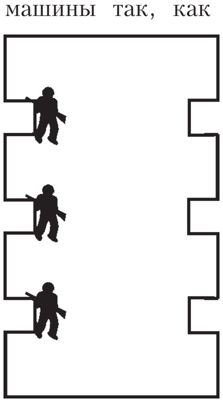


Рис. 2

**6.** Василиса Премудрая решила запереть Кощея в прямом коридоре, разделенном тремя проходами на четыре комнаты, причем в каждом проходе, облокотившись на одну из стен, стоит толстый усталый стражник. Каждый раз, когда Кощей переходит из одной комнаты в другую, стражник переходит к противоположной стене и облокачивается на нее. Если все стражники облокотятся на одну стену (рис.2), она не выдержит и рухнет, а Кощей выйдет на свободу. Может ли Василиса изначально так прислонить стражников и разместить Кощея, чтобы он никогда не смог выбраться?

*Е.Новодворская*

### 7 класс

**1.** Число умножили на сумму его цифр и получили 2008. Найдите это число.

*И.Ященко*

**2.** В кубке Водоканала по футболу участвовали команды «Помпа», «Фильтр», «Насос» и «Шлюз». Каждая команда сыграла с каждой по одному разу (за победу давалось 3 очка, за ничью – 1, за проигрыш – 0). Команда «Помпа» набрала больше всех очков, команда «Шлюз» – меньше всех. Могло ли оказаться так, что «Помпа» обогнала «Шлюз» всего на 2 очка?

*А.Заславский*

**3.** Дима живет в девятиэтажном доме. Он спускается на лифте со своего этажа на первый за 1 минуту. Из-за маленького роста Дима не достает до кнопки своего этажа. Поэтому, поднимаясь наверх, он нажимает ту кнопку, до которой может дотянуться, а дальше идет пешком. Весь путь наверх занимает 1 минуту 10 секунд. Лифт движется вверх и вниз с одной и той же скоростью, а Дима поднимается вдвое медленнее лифта. На каком этаже живет Дима?

*Д.Шноль*

**4.** См. задачу 6 для 6 класса.

**5.** Сережа вырезал из картона две одинаковые фигуры. Он положил их с нахлестом на дно прямоугольного ящика. Дно оказалось полностью покрыто. В центр дна вбили гвоздь. Мог ли гвоздь проткнуть одну картонку и не проткнуть другую?

*С.Маркелов*

**6.** Вася постоял некоторое время на остановке. За это время проехал один автобус и два трамвая. Через некоторое время на эту же остановку пришел Шпион. Пока он там сидел, проехало 10 автобусов. Какое минимальное число трамваев могло проехать за это время? И автобусы, и трамваи ходят с равными интервалами, причем автобусы ходят с интервалом 1 час.

*М.Ахманова*

### 8 класс

**1.** Верно ли, что к любому числу, равному произведению двух последовательных натуральных чисел, можно приписать в конце какие-то две цифры так, что получится квадрат натурального числа?

*Г.Гальперин*

**2.** В кинотеатре 7 рядов по 10 мест каждый. Группа из 50 детей сходила на утренний сеанс, а потом на вечерний. Докажите, что найдутся двое детей, которые на утреннем сеансе сидели в одном ряду и на вечернем тоже сидели в одном ряду.

*И.Осипов (по мотивам классической задачи)*

**3.** На сторонах $AB$ и $BC$ треугольника $ABC$ выбраны точки $K$ и $M$ соответственно так, что $KM \parallel AC$. Отрезки $AM$ и $KC$ пересекаются в точке $O$. Известно, что $AK = AO$ и $KM = MC$. Докажите, что $AM = KB$.

*М.Мурашкин*

**4.** Турнир, в котором участвовали 20 спортсменов, судили 10 арбитров. Каждый сыграл с каждым один раз, и каждую встречу судил ровно один арбитр. После окончания каждой игры оба участника фотографировались с арбитром. Через год после турнира была найдена стопка из всех этих фотографий (по фотографии неясно, кто на ней игроки, а кто – арбитр). Оказалось, что не про каждого можно определить, кем он является – спортсменом или арбитром. Сколько могло быть таких людей?

*Б.Френкин*

**5.** Поставьте на плоскости 9 точек так, чтобы никакие 4 не лежали на одной прямой, но из любых шести нашлись 3, лежащие на одной прямой. (На рисунке проведите все прямые, на которых лежат по три отмеченные точки.)

*А.Акопян*

**6.** У игрока есть $M$ золотых и $N$ серебряных монет. В начале каждого раунда игрок ставит какие-то монеты на красное, какие-то на черное (можно вообще ничего не ставить на один из цветов, часть монет можно никуда не ставить). В конце каждого раунда крупье объявляет, что один из цветов выиграл. Ставку на выигравший цвет крупье отдает игроку, удваивая в ней количество монет каждого вида, а ставку на проигравший цвет забирает себе. Игрок хочет, чтобы монет одного вида у него стало ровно в три раза больше, чем другого (в частности, его устроит остаться совсем без денег). При каких $M$ и $N$ крупье не сможет ему помешать?

*А.Чеботарев*

### 9 класс

**1.** Две команды КВН участвуют в игре из четырех конкурсов. За каждый конкурс каждый из шести судей выставляет оценку – целое число от 1 до 5; компьютер находит среднее арифметическое оценок за конкурс и округляет его с точностью до десятых. Победитель определяется по сумме четырех полученных компьютером значений. Может ли оказаться, что сумма всех оценок, выставленных судьями, у проигравшей команды больше, чем у выигравшей?

*А.Горбачев*

**2.** Велосипедист путешествует по кольцевой дороге, двигаясь в одном направлении. Каждый день он проезжает 71 км и останавливается ночевать на обочине. На дороге есть аномальная зона длиной 71 км. Если велосипедист останавливается в ней на ночлег на расстоянии $y$ км от одной границы зоны, просыпается он в противоположном месте зоны, на расстоянии $y$ км от другой ее границы. Докажите, что в каком бы месте велосипедист ни начал свое путешествие, рано или поздно он в этом месте заснет или проснется.

*Г.Колюцкий*

**3.** Пусть $AL$ – биссектриса треугольника $ABC$, $O$ – центр описанной около этого треугольника окружности, $D$ – такая точка на стороне $AC$, что $AD = AB$. Докажите, что прямые $AO$ и $LD$ перпендикулярны.

*Р.Женодаров*

**4.** Назовем *усложнением* числа приписывание к нему одной цифры в начало, в конец или между любыми двумя его цифрами. Существует ли натуральное число, из которого невозможно получить полный квадрат с помощью ста усложнений?

*А.Горбачев*

**5.** У Васи есть 100 банковских карточек. Вася знает, что на одной из карточек лежит 1 рубль, на другой 2 рубля, и так далее, на последней 100 рублей, но не знает, на какой из карточек сколько денег. Вася может вставить карточку в банкомат и запросить некоторую сумму. Банкомат выдает требуемую сумму, если она на карточке есть, не выдает ничего, если таких денег на карточке нет, а карточку съедает в любом случае. При этом банкомат не показывает, сколько денег было на карточке. Какую наибольшую сумму Вася может гарантированно получить?

*И.Митрофанов*

**6.** Покажите, что существует выпуклая фигура, ограниченная дугами окружностей, которую можно разрезать на несколько частей и из них сложить две выпуклые фигуры, ограниченные дугами окружностей.

*И.Иванов-Погодаев, А.Малистов*

### 10 класс

**1.** Аудитория имеет форму правильного шестиугольника со стороной 3 м. В каждом углу установлен храпометр, определяющий число спящих студентов на расстоянии, не превышающем 3 м. Сколько всего спящих студентов в аудитории, если сумма показаний храпометров равна 7?

*А.Каибханов*

**2.** Андрей и Борис играют в следующую игру. Изначально на числовой прямой в точке $p$ стоит робот. Сначала Андрей говорит расстояние, на которое должен сместиться робот. Потом Борис выбирает направление, в котором робот смещается на это расстояние, и т.д. При каких $p$ Андрей может добиться того, что за конечное число ходов робот попадет в одну из точек 0 или 1 вне зависимости от действий Бориса?

*Д.Баранов*

**3.** Все целые числа от $-33$ до 100 включительно расставили в некотором порядке и рассмотрели суммы каждых двух соседних чисел. Оказалось, что среди них нет нулей. Тогда для каждой такой суммы нашли число, ей обратное. Полученные числа сложили. Могло ли в результате получиться целое число?

*И.Богданов*

**4.** Докажите, что если некоторый многочлен с целыми коэффициентами принимает в $k$ целых точках значения среди чисел от 1 до $k-1$, то при $k \geq 6$ эти значения равны.

*М.Малкин*

**5.** Высоты $AA'$ и $CC'$ остроугольного треугольника $ABC$ пересекаются в точке $H$. Точка $B_0$ – середина стороны $AC$. Докажите, что точка пересечения прямых, симметричных $BB_0$ и $HB_0$ относительно биссектрис углов $ABC$ и $AHC$ соответственно, лежит на прямой $A'C'$.

*А.Заславский*

**6.** Натуральные числа покрашены в $N$ цветов. Чисел каждого цвета бесконечно много. Известно, что цвет полусуммы двух различных чисел одной четности зависит только от цветов слагаемых (например, полусумма синего и красного всегда желтая).

а) Докажите, что полусумма чисел одной четности одного цвета всегда окрашена в тот же цвет.

б) При каких $N$ такая раскраска возможна?

*А.Шаповалов*

### 11 класс

**1.** Числа $p$ и $q$ таковы, что параболы $y = -2x^2$ и $y = x^2 + px + q$ пересекаются в двух точках, ограничивая некоторую фигуру. Найдите уравнение вертикальной прямой, делящей площадь этой фигуры пополам.

*И.Сергеев*

**2.** Найдите наименьшее натуральное $n$, для которого число $n^n$ не является делителем числа $2008! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2008$.

*В.Ушаков*

**3.** На едином экзамене 333 ученика допустили в общей сложности 1000 ошибок. Возможно ли при этом, что учеников, сделавших более чем по 5 ошибок, оказалось больше, чем учеников, сделавших менее чем по 4 ошибки?

*А.Галочкин*

**4.** Через центр $O$ вписанной в треугольник $ABC$ окружности проведена прямая, перпендикулярная прямой $AO$ и пересекающая прямую $BC$ в точке $M$. Из точки $O$ на прямую $AM$ опущен перпендикуляр $OD$. Докажите, что точки $A$, $B$, $C$ и $D$ лежат на одной окружности.

*В.Филимонов*

**5.** Станок выпускает детали двух типов. На ленте его конвейера выложены в одну линию 75 деталей. Пока конвейер движется, на станке готовится деталь того типа, которого на ленте меньше. Каждую минуту очередная деталь падает с ленты, а подготовленная кладется в ее конец. Через некоторое число минут после включения конвейера может случиться так, что расположение деталей на ленте впервые повторит начальное. Найдите: а) наименьшее такое число; б) все такие числа.

*В.Алексеев*

**6.** Игрок на компьютере управляет лисой, охотящейся за двумя зайцами. В вершине $A$ квадрата $ABCD$ находится нора: если в нее, в отсутствие лисы, попадает хотя бы один заяц, то игра проиграна. Лиса ловит зайца, как только оказывается с ним в одной точке (возможно, в точке $A$). Вначале лиса сидит в точке $C$, а зайцы – в точках $B$ и $D$. Лиса бегает повсюду со скоростью не больше $v$, а зайцы – по лучам $AB$ и $AD$ со скоростью не больше 1. При каких значениях $v$ лиса сможет поймать обоих зайцев?

*А.Канунников*

**7.** Среди вершин любого ли многогранника можно выбрать четыре вершины тетраэдра, площадь проекции которого на любую плоскость составляет от площади проекции (на ту же плоскость) исходного многогранника: а) больше чем $\frac{1}{4}$; б) не меньше чем $\frac{1}{9}$; в) не меньше чем $\frac{1}{7}$?

*О.Косухин*

*Публикацию подготовил Б.Френкин*

# Избранные задачи Московской физической олимпиады

## Первый теоретический тур

### 7 класс

**1.** Строение кристалла некоторого металла схематически показано на рисунке 1. Атомы находятся в вершинах кубиков и образуют кубическую кристаллическую решетку. Известно, что плотность этого металла $\rho = 7900$ кг/м$^3$, а масса одного атома $m_0 = 9{,}3 \cdot 10^{-26}$ кг. Найдите объем $V_0$ одного кубика – элементарной ячейки данной кристаллической решетки.

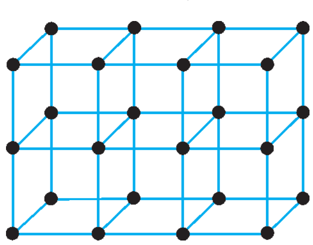


Рис. 1

*М.Ромашка*

**2.** Ученик измерил плотность деревянного бруска, покрытого краской, и она оказалась равной $\rho = 600$ кг/м$^3$. На самом деле брусок состоит из двух частей, равных по массе, но плотность одной части в два раза больше плотности другой. Найдите плотности $\rho_1$ и $\rho_2$ обеих частей бруска. Массой краски можно пренебречь.

*М.Ромашка*

**3.** На рисунке 2 изображены рычаги, на которых имеются крючки, прикрепленные через одинаковые расстояния. Крючки пронумерованы от –3 до 3, причем 0 приходится на середину рычага. К некоторым крючкам прикреплено по нескольку грузов одной и той же массы. Имеется еще один такой же не подвешенный груз. К крючку с каким номером $n$ его нужно подвесить, чтобы рычаг находился в равновесии? Решите задачу для каждого из трех случаев, представленных на рисунке.

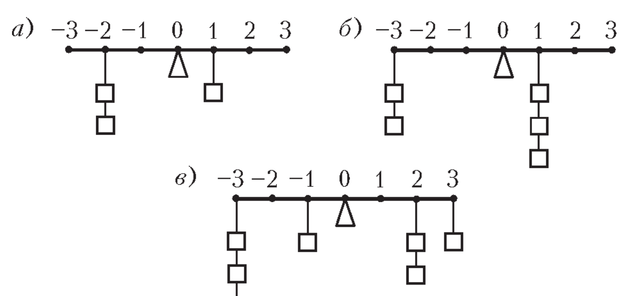



Рис. 2

*М.Ромашка*

**4.** К потолку над горизонтальным столом подвешена пружина. Если к ее концу прикрепить груз и дождаться установления равновесия, груз окажется на столе при условии, что его масса $m$ превосходит значение $m_0 = 400$ г. С какой силой $F$ груз массой $m > m_0$ будет давить на стол?

Размерами груза по сравнению с растяжением пружины можно пренебречь. Отношение действующей на груз силы тяжести к массе груза (эта величина называется ускорением свободного падения) равно $g = 10$ Н/кг $= 10$ м/с$^2$. Решите задачу в общем случае и при $m = 1$ кг.

*М.Ромашка*

**5.** Поплавок для рыболовной удочки имеет объем $V = 5$ см$^3$ и массу $m = 2$ г. К поплавку на леске прикреплено свинцовое грузило, и при этом поплавок плавает, погрузившись на половину своего объема. Найдите массу грузила $M$. Плотность воды $\rho_в = 1000$ кг/м$^3$, плотность свинца $\rho_с = 11300$ кг/м$^3$.

*М.Ромашка*

### 8 класс

**1.** Два экскурсионных автобуса со школьниками должны были отправиться из Москвы в Санкт-Петербург, но один из автобусов задержался с отправлением. Когда задержавшийся автобус выехал, первый автобус находился на расстоянии $s = 20$ км от места отправления. За время, за которое задержавшийся автобус проехал 20 км, первый автобус проехал $s_1 = 16$ км. На прохождение расстояния $\Delta s = 1$ км второй автобус затрачивает на $\Delta t = 12$ с меньше, чем первый. На каком расстоянии $L$ от места отправления второй автобус догонит первый? Чему равны скорости автобусов $v_1$ и $v_2$? Считайте, что пробок на дороге нет и скорости автобусов не меняются.

*М.Ромашка*

**2.** В сосуды, соединенные трубкой с краном, налита вода (рис.3). Гидростатические давлении в точках $A$ и $B$ равны $p_A = 4$ кПа и $p_B = 1$ кПа соответственно, площади поперечного сечения левого и правого сосудов составляют $S_A = 3$ дм$^2$ и $S_B = 6$ дм$^2$ соответственно. Какие гидростатические давления установятся в точках $A$ и $B$, если открыть кран?

*М.Ромашка*

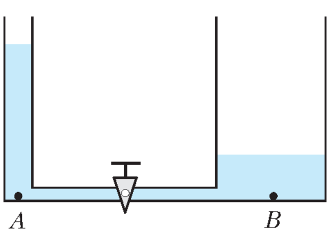


Рис. 3

**3.** Парафиновая свечка горит так, что ее длина уменьшается со скоростью $u = 5 \cdot 10^{-5}$ м/с, а испаряющийся парафин полностью сгорает, не стекая вниз. Свечка плавает в широком сосуде с водой. Ее слегка поддерживают в вертикальном положении, чтобы она не опрокидывалась. С какой скоростью $v$ свечка движется относительно сосуда во время сгорания? Плотность воды $\rho_в = 1000$ кг/м$^3$, плотность парафина $\rho_п = 900$ кг/м$^3$.

*М.Ромашка*

### 9 класс

**1.** К вертикальной стенке через равные интервалы прикреплены баскетбольные кольца, пронумерованные от 0 до 10 (рис.4). Стремясь попасть в одно из колец, школьник бросил мяч из точки $A$ точно по направлению к кольцу с номером 0. В некоторый момент полета мяч находился в точке $B$. В какое из баскетбольных колец он попадет? Влиянием воздуха пренебречь.

*С.Варламов*

**2.** Коробка массой $M$ подвешена на нитке к потолку комнаты (рис.5). Внутри коробки на легкой пружине подвешен груз массой $m$. Нитку пережигают. Найдите ускорения

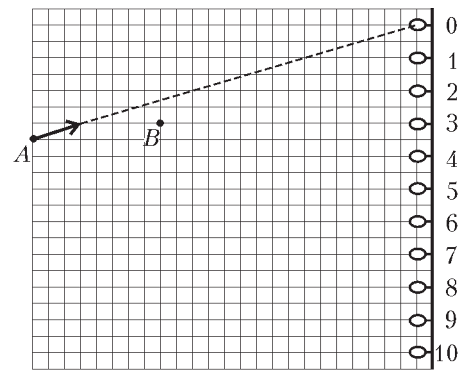


Рис. 4

груза и коробки сразу после пережигания нити. Ускорение свободного падения равно $g$.

*М.Ромашка*

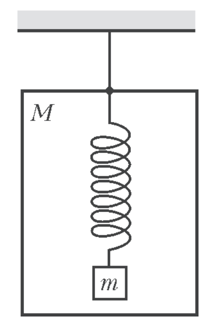


Рис. 5

**3.** На станции глубокого заложения в Московском метрополитене длина эскалатора $L = 100$ м, угол его наклона к горизонту $\alpha = 22{,}5°$, а скорость движения $v = 1{,}2$ м/с. Какова должна быть минимальная мощность $N$ электромотора, приводящего в движение эскалатор, чтобы в «час пик», когда эскалатор плотно заполнен людьми, этот мотор мог справиться с нагрузкой при движении вверх? Считать, что люди в среднем имеют массу $m = 70$ кг и располагаются в два ряда на среднем расстоянии друг от друга (по горизонтали) $l = 50$ см, а КПД механической части эскалатора $\eta = 0{,}7$.

*М.Семенов*

**4.** Электрическая цепь, схема которой изображена на рисунке 6, подключена к батарейке. Вольтметры $V_1$ и $V_2$ показывают напряжения $U_1 = 1$ В и $U_2 = 0{,}1$ В, а амперметр А показывает силу тока $I = 1$ мА. Найдите сопротивления приборов. Вольтметры считайте одинаковыми.

*О.Шведов*

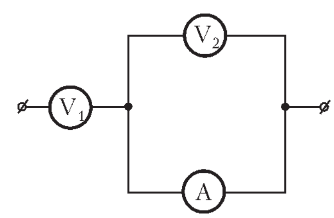


Рис. 6

### 10 класс

**1.** В открытой прямоугольной коробке сидит кузнечик (рис.7), который умеет прыгать с начальной скоростью $v_0 = 3$ м/с под любым углом к горизонту. На какой минимальный угол $\alpha$ к горизонту нужно наклонить коробку, чтобы кузнечик смог из нее выпрыгнуть? Считать, что каждая грань коробки является квадратом со стороной $h = 52$ см. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с$^2$. Сопротивлением воздуха пренебречь.

*И.Горбатый*

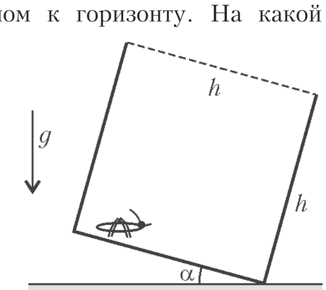


Рис. 7

**2.** Железный кубик со стороной $a$ подвешен на пружине жесткостью $k$ и в начальный момент касается нижней горизонтальной гранью поверхности воды в сосуде (рис.8). В сосуд начинают медленно доливать воду так, что ее уровень поднимается со скоростью $v_1$. С какой скоростью $v_2$ относительно сосуда будет при этом двигаться кубик? Плотность

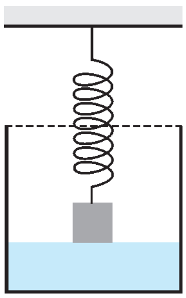


Рис. 8

воды равна $\rho$, ускорение свободного падения равно $g$.

*И.Горбатый*

**3.** Легкая доска подвешена за края на двух пружинах жесткостью $k$ каждая, к другим концам которых прикреплены нерастяжимые нити, перекинутые через неподвижные блоки и соединенные с грузами *1* и *2* массой $M$ каждый (рис.9). На середине доски лежит шайба массой $0{,}01M$, к доске снизу под шайбой подвешен груз *3* массой $1{,}99M$. В некоторый момент времени нить, связывающая доску и груз *3*, обрывается. На какую максимальную высоту $h$ относительно своего первоначального положения подскочит шайба? Нити, блоки и пружины считать невесомыми, трение отсутствует, ускорение свободного падения равно $g$.

*С.Варламов*

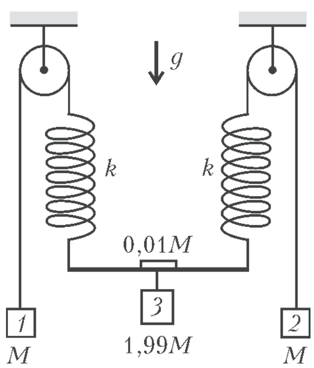



Рис. 9

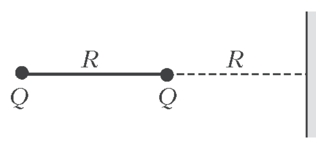



Рис. 10

**4.** Непроводящий стержень длиной $R$ имеет два одинаковых точечных заряда $Q$ на своих концах и расположен перпендикулярно проводящей незаряженной плоскости большого размера (рис.10). Расстояние от плоскости до ближайшего к ней конца стержня также равно $R$. Определите силу $F$, действующую на стержень с зарядами со стороны плоскости.

*Р.Компанеец*

### 11 класс

**1.** Две материальные точки *1* и *2* массами $m_1$ и $m_2$ соответственно находятся на абсолютно гладкой горизонтальной плоскости и связаны невесомой нерастяжимой нитью длиной $L$. Вначале точка *1* закреплена, а точка *2* движется вокруг нее по окружности. Затем точку *1* освобождают, и точка *2* начинает двигаться по траектории, изображенной на рисунке 11. Найдите шаг траектории $h$ и ширину петли $d$.

*М.Ромашка*

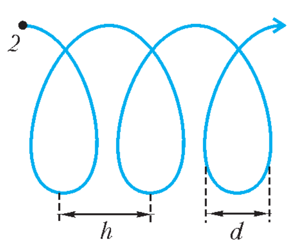



Рис. 11

**2.** Явление застоя заключается в том, что максимальная сила трения покоя при контакте двух тел немного больше, чем сила трения скольжения. Для изучения этого явления провели следующий опыт. К лежащему на горизонтальном столе бруску массой $m$ прикрепили пружину жесткостью $k$. Свободный конец пружины начали прямолинейно, равномерно и очень медленно перемещать, удаляя его от бруска. В этом опыте брусок двигался скачками, перемещаясь на протяжении одного скачка все время в одном направлении на расстояние $s$. Найдите максимальную силу трения покоя $F$ между столом и бруском. Коэффициент трения скольжения бруска о стол равен $\mu$ не зависит от скорости. Ускорение свободного падения равно $g$.

*М.Ромашка*

**3.** Цикл тепловой машины состоит из двух изобар и двух изотерм, причем работа при изобарическом расширении такая же, как и при изотермическом. Найдите КПД такого цикла, если рабочим веществом является гелий, а максимальная температура в процессе вдвое больше минимальной.

*А.Зильберман*

**4.** Положительный $q_1$ и отрицательный $q_2$ точечные заряды закреплены на оси $X$ по разные стороны от гладкой непроводящей пластины, плоскость которой перпендикулярна этой оси. Маленький положительно заряженный шарик также находится на оси $X$, упираясь в пластину, как показано на рисунке 12. Первоначально пластина расположена вблизи отрицательного заряда, шарик при этом находится в равновесии. Пластину начинают поступательно перемещать вдоль оси $X$, медленно увеличивая расстояние $l$ между пластиной и отрицательным зарядом. Когда $l$ достигает $1/3$ расстояния между зарядами, шарик «улетает» с оси $X$. Определите отношение $q_1/q_2$. Влиянием вещества пластины на электрическое поле, а также силой тяжести пренебречь.

*И.Горбатый*

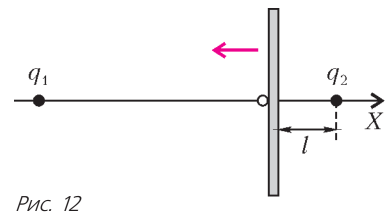



Рис. 12

**5.** Тележка с водой движется по горизонтальной поверхности с постоянным ускорением. На тележку под углом $\alpha$ к вертикали падает луч света, который после отражения распространяется под углом $\gamma$ к вертикали. Направления ускорения тележки и лучей показаны на рисунке 13. Найдите величину ускорения $a$ тележки. Ускорение свободного падения равно $g$.

*А.Гуляев*

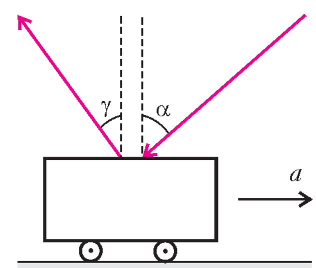



Рис. 13

## Второй теоретический тур

### 8 класс

**1.** Заяц убегает от Волка по прямой, двигаясь равномерно. В начальный момент времени расстояние между Зайцем и Волком $s = 36$ м, а скорость Волка $v_0 = 14$ м/с. Волк устает и через каждые $\Delta t = 10$ с (в моменты времени $\Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, \ldots$, считая от начала движения) уменьшает свою скорость на $\Delta v = 1$ м/с. С какой скоростью $v$ должен бежать Заяц, чтобы Волк его не поймал?

*М.Ромашка*

**2.** Школьнику поручили полить сад на даче. Чтобы не таскать воду в лейке, он проложил толстый шланг через грядки на огороде так, как показано на рисунке 14, продул шланг, вставил в него небольшую воронку и начал медленно наливать в нее воду. Через некоторое время воронка запол-


Рис. 14

нилась, вода в ней перестала опускаться, но из другого конца шланга не полилась. Тогда школьник поднял воронку выше и налил в нее еще воды. Приблизительно до какой высоты $H$ над землей ему надо поднять воронку, чтобы вода начала вытекать из шланга? Высота каждой грядки $h = 40$ см, число грядок $n = 5$.

*В.Росляков, М.Семенов*

**3.** В чашку налили раствор кофе при температуре $t_1 = 100$ °С и бросили туда несколько кубиков льда, взятого при температуре $t_0 = 0$ °С. Когда лед растаял, температура раствора оказалась равной $t_2 = 50$ °С. На сколько процентов уменьшилась концентрация кофе в растворе? Теплообмен раствора кофе с окружающей средой не учитывать. Удельные теплоемкости раствора кофе и воды одинаковы и равны $c = 4{,}2$ кДж/(кг · °С), удельная теплота плавления льда $\lambda = 330$ кДж/кг. Под концентрацией понимается отношение массы чистого кофе ко всей массе раствора.

*М.Ромашка*

### 9 класс

**1.** Человек поднялся вдоль верхнего участка стены здания на высоту $h = 2$ м с помощью системы, состоящей из груза массой $m = 25$ кг, нерастяжимой веревки, трех блоков и люльки, прикрепленной к одному из блоков (рис.15). В начальный момент вся система вместе с человеком была неподвижна. Когда человек поднимался, конец веревки в его руках двигался относительно стены со скоростью $v = 1{,}2$ м/с. Сколько времени длился подъем? Какую работу совершил человек? Блоки, люлька и веревка невесомы, трения нет, ускорение свободного падения $g = 10$ м/с$^2$.

*М.Ромашка, М.Семенов*

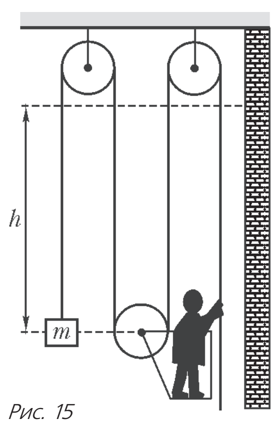



Рис. 15

**2.** На раскаленной плите стоит сосуд с кипящей водой, начальная масса которой $m_0$, а температура кипения $t_к$. Вода испаряется, часть пара конденсируется на куске льда, расположенном над сосудом, и стекает обратно. Начальная масса льда $m$, его начальная температура 0 °С. Когда весь лед растаял, масса воды в сосуде оказалась равной $m_1$. Какая доля $w$ от всего пара сконденсировалась на куске льда? Какое количество теплоты $Q$ было передано от плиты к сосуду? Доля конденсирующегося пара все время постоянна. Удельная теплоемкость воды $c$, удельная теплота плавления льда $\lambda$, удельная теплота парообразования воды $r$. Контактным теплообменом воды и льда с окружающей средой пренебречь.

*М.Ромашка*

### 10 класс

**1.** Порция гелия объемом $V_0 = 1$ л находится под давлением $p_0 = 1$ атм при температуре 0 °С. Гелий расширяют в равновесном процессе таким образом, что отданное им в окружающую среду количество теплоты в четыре раза меньше совершенной гелием работы. Найдите максимально возможное значение работы $A$ газа в таком процессе.

*А.Зильберман*

**2.** В вершинах правильного $N$-угольника расположены электрические заряды, величины которых последовательно образуют геометрическую прогрессию со знаменателем 2 и равны $q$, $2q$, …, $2^{N-1}q$. Расстояние от центра многоугольника до любой из его вершин равно $R$. Найдите величину $E$ напряженности электрического поля в центре многоугольника.

*С.Кротов*

**3.** Школьники Вова и Дима собрали электрическую цепь, состоящую из самодельной батареи с ЭДС $\mathcal{E}$, резистора сопротивлением $R = 20$ кОм, конденсатора емкостью $C$ и двухпозиционного ключа $K$ (рис.16). В момент времени $t = 0$ они включили секундомер, замкнули ключ в положение *1* и спустя некоторое время переключили его в положение *2*. Получившаяся у Вовы и Димы зависимость напряжения $U$ на конденсаторе от времени $t$ показана на рисунке 17. Проанализировав этот график, они смогли определить, чему равны емкость $C$ и ЭДС $\mathcal{E}$, а также внутреннее сопротивление $r$ батареи. Найдите эти значения.

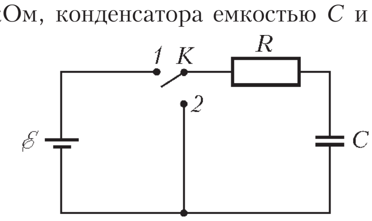



Рис. 16

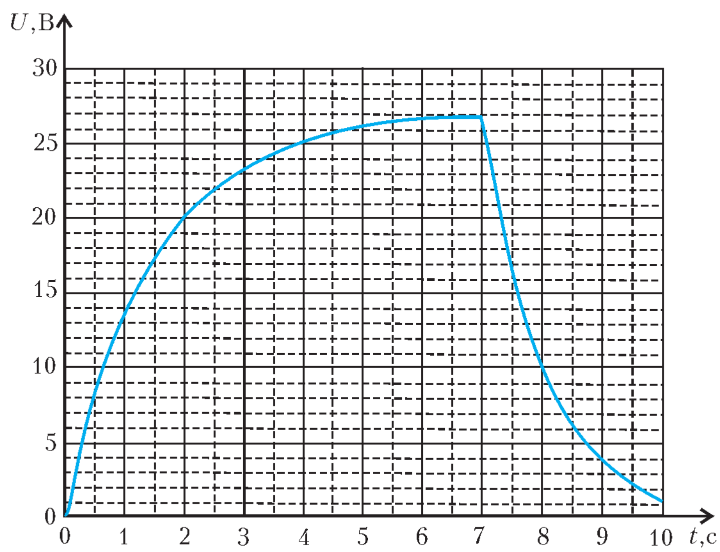



Рис. 17

*Ю.Старокуров*

### 11 класс

**1.** На горизонтальном столике лежит маленькая шайба массой $m = 100$ г. Столик покрыт такой смазкой, что при движении шайбы со скоростью $v$ возникает сила вязкого трения $\vec{F}_{тр} = -\gamma\vec{v}$, где $\gamma = 0{,}4$ кг/с. Сухого трения нет. На шайбу начинают действовать силой, вектор которой вращается в горизонтальной плоскости с угловой скоростью $\omega = 3$ рад/с, а модуль не меняется со временем и равен $F = 0{,}3$ Н. В установившемся режиме шайба движется с постоянной скоростью по окружности. Найдите ее радиус $R$.

*М.Ромашка*

**2.** С порцией гелия проводят циклический процесс, состоящий из изобарного расширения, изохорного охлаждения и адиабатного сжатия. Может ли КПД такого цикла оказаться больше 50%? Чему равен максимально возможный КПД $\eta$ такого цикла?

*А.Зильберман*

**3.** В вершинах правильного $N$-угольника расположены электрические заряды, величины которых последовательно образуют арифметическую прогрессию с разностью $q$ и равны $q$, $2q$, …, $Nq$. Расстояние от центра многоугольника до любой из его вершин равно $R$. Найдите величину напряженности $E$ электрического поля в центре многоугольника.

*С.Кротов*

**4.** Участок гибкого провода массой $m$ подвешен так, что его концы закреплены на одной и той же высоте (рис.18). Провод находится в однородном горизонтальном магнитном поле с индукцией $B$, по нему течет ток $I$. Силы, действующие на провод в точках подвеса, образуют угол $\alpha$ с горизонтом. Найдите силу $T$ натяжения провода в его нижней точке. Размеры $L$ и $h$ известны.

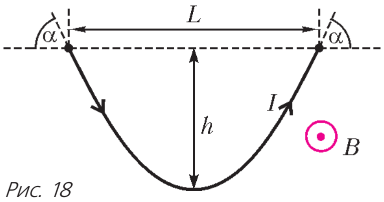


Рис. 18

*М.Ромашка*

**5.** Тонкая собирающая линза с фокусным расстоянием $F = 30$ см создает изображение движущегося точечного источника света. Когда источник света пересекал главную оптическую ось линзы, двигаясь под углом $\alpha = 60°$ к ней, угол между скоростью его изображения и этой осью составлял $\beta = 30°$. На каком расстоянии $d$ от линзы в этот момент находился источник света?

*О.Шведов*

*Публикацию подготовили М.Семенов, А.Якута*

# Международный турнир «Компьютерная физика»

Турнир «Компьютерная физика» – часть программы Международного интеллект-клуба «Глюон». Цель турнира – поддержка талантливой молодежи, проявившей интерес к фундаментальным наукам и новым информационным технологиям. Задача организаторов турнира – создание временных творческих коллективов для решения современных научных проблем. В такие коллективы входят школьники, учителя, студенты, аспиранты, ученые.

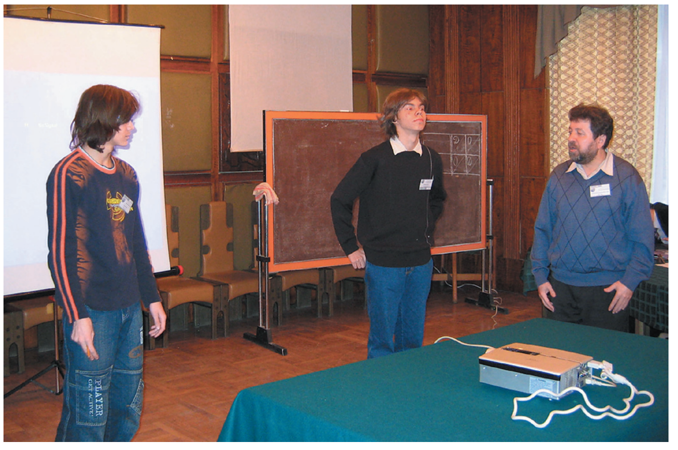
Турнир проводится в виде интеллектуального соревнования между командами (по 5 человек в каждой) в два тура – заочный и очный.

Заочный тур XII Турнира «Компьютерная физика» начался в сентябре 2007 года рассылкой задания заочного тура по заявкам в лицеи, школы и гимназии (задание было опубликовано также в журнале «Квант» №4 за 2007 год, что значительно увеличило число команд-участниц турнира). Четыре лучшие команды были приглашены на финал – очный тур соревнований.

Очный тур XII Турнира был проведен с 27 января по 3 февраля 2008 года в городе Протвино на базе Института физики высоких энергий при участии и поддержке Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова, фонда «Династия», компаний «Кирилл и Мефодий», «Физикон» и «1С», журналов «Квант» и «Физика в школе» и Издательского дома «Первое сентября». Оргкомитет турнира выражает благодарность всем названным организациям за помощь в проведении турнира и поддержку одаренных школьников и талантливых студентов.

По итогам двух туров абсолютным победителем XII Турнира стала сборная команда города Ижевска, получившая переходящий приз «Хрустальный глобус». Она же была награждена дипломом I степени и памятным знаком. Диплом II степени в этом году жюри не вручало, а диплом III степени получили команды МТЛ города Самары, ФМЛ 1580 при Московском государственном техническом университете (МГТУ) им. Н.Э.Баумана и Самарского аэрокосмического лицея. Участникам соревнований было вручено множество призов от спонсоров и организаторов турнира.

В рамках турнира был проведен конкурс компьютерного творчества, включающий три направления: обучающие программы, физика и техника, прикладное программирование и дизайн, а также конкурс «Виртуальная физическая лаборатория», разработанный компанией «Физикон».



Международный интеллект-клуб (МИК) «Глюон» приглашает региональные центры, гимназии и школы, работающие с одаренными детьми, принять участие в XIII Турнире «Компьютерная физика», очный тур которого состоится в январе – феврале 2009 года.

Заявки на участие присылайте по адресу: 115522 Москва, Пролетарский пр., 15/2, МИК «Глюон»

Телефон: (495)517-8014, факс: (495)396-8227

E-mail: gluon@yandex.ru

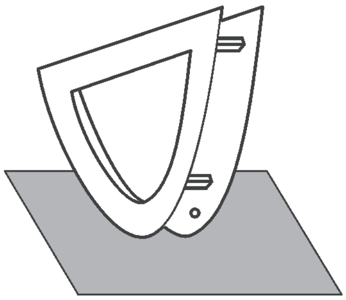
Сайт для информации: www. gluon.ru

Ниже приводится заочное задание XIII Турнира «Компьютерная физика».

### Заочный тур «Маятник-качалка»

Колебательное движение твердого тела – один из основных видов движения в природе и технике. К задаче исследования колебаний твердого тела приводит изучение качки корабля и вращения антенны радиолокатора, перемещения частей установок в легкой и пищевой промышленности и элементов строительно-дорожных машин. Понимание закономерностей колебательного движения, в частности условий устойчивости свободных колебаний твердого тела, необходимо для разработки эффективного и безопасного использования большого количества технических устройств.

В предлагаемой задаче исследуется устойчивость движения твердого тела по твердой плоской горизонтальной поверх-



ности на примере простой модели, называемой качалкой. Будем рассматривать качалки (см. рисунок), представляющие собой прямые цилиндры, направляющими которых являются плоские кривые второго порядка: эллипс, парабола или гипербола.

Для однозначного определения плоской кривой второго порядка необходимо указать прямую (директрису), точку (фокус) и эксцентриситет, задающий отношение расстояний от точки кривой до фокуса и до директрисы. Уравнение невырожденной плоской кривой второго порядка имеет вид

$$y^2 = 2px - \left(1 - \varepsilon^2\right)x^2,$$

где $x$, $y$ – координаты точек кривой, $\varepsilon$ – эксцентриситет, $p$ – фокальный параметр, определяемый расстоянием между фокусом и директрисой (это расстояние равно $p/\varepsilon$). Для параболы $\varepsilon = 1$, для эллипса $\varepsilon < 1$, для гиперболы $\varepsilon > 1$. Вершина кривой лежит на перпендикуляре, опущенном из фокуса на директрису, т.е. на фокальной оси. Эллипс и гипербола имеют по два фокуса и по две директрисы, у параболы один фокус и одна директриса.

В данной задаче предлагается рассмотреть движение эллиптической, параболической и гиперболической качалок. Пусть качалка имеет очень малую массу. При исследовании движения будем помещать большую точечную массу в различные точки на фокальной оси качалки. Во всех случаях качалка до начала движения находится в таком положении, что ее вершина касается опорной горизонтальной плоскости, а фокальная ось вертикальна. В начальный момент точка фокуса приобретает ударом (т.е. практически мгновенно) начальную скорость, направленную перпендикулярно фокальной оси. Проскальзывание отсутствует.

Моделирование движения системы может быть проведено путем численного интегрирования уравнений Ньютона, описывающих движение качалок.

*Задание*

1. Установите закон движения эллиптической качалки с фокальным параметром $p = 1$ см в зависимости от эксцентриситета $\varepsilon$ и положения точечной массы на фокальной оси при различных значениях начальной скорости. Рекомендуемый диапазон эксцентриситета: $\varepsilon > 0{,}05$. Диапазон исследуемых скоростей: $0{,}01$ см/с $< v <$ 50 см/с.

2. Установите закон движения параболической качалки в зависимости от фокального параметра $p$ и положения точечной массы на фокальной оси при различных значениях начальной скорости. Рекомендуемый диапазон фокальных параметров: 0,05 см $< p <$ 20 см. Диапазон исследуемых скоростей: $0{,}01$ см/с $< v <$ 50 см/с.

3. Установите закон движения гиперболической качалки с фокальным периметром $p = 1$ см в зависимости от эксцентриситета $\varepsilon$ и положения точечной массы на фокальной оси при различных значениях начальной скорости. Рекомендуемый диапазон эксцентриситета: $\varepsilon < 20$. Диапазон исследуемых скоростей: $0{,}01$ см/с $< v <$ 50 см/с.

*Публикацию подготовили*
*В.Альминдеров, А.Попов, О.Поповичева*

# ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

## КМШ

### ЗАДАЧИ

*(см. «Квант» № 3)*

**1.** Не делится. Решая ребус, находим F = 1, O = 9, U = 6, R = 0, V = 7, E = 5, N = 3, буква I может принимать одно из трех значений: 2, 4 или 8. Ни в одном из этих трех случаев число NINE не делится на 9.

**2.** Нет. Предположим, что нам удалось разбить числа требуемым образом. Сумма чисел в каждой паре не меньше 1 + 2 = = 3 и не больше 15 + 16 = 31. Выпишем все простые числа из этого отрезка: 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31. Сумма чисел в каждой паре должна содержаться в данном наборе. Однако заметим, что числа 29 и 31 не могут одновременно встречаться среди сумм, поэтому, если сложить все суммы в парах, то полученный результат будет меньше 3 + 5 + 7 + 11 + 13 + + 17 + 19 + 23 + 31 = 129. С другой стороны, данный результат есть сумма всех натуральных чисел от 1 до 16, т.е. 136. Полученное противоречие доказывает, что числа разбить нужным образом нельзя.

**3.** *Указание*: воспользуйтесь тем, что медиана $BM$ делит пополам среднюю линию $PQ$, а средняя линия $PQ$ делит пополам высоту $BH$.

**4.** Верно. Так как число $a^2 + 2b + 1$ является квадратом некоторого натурального числа $x$, то $b \ge a$ (иначе было бы $a^2 < x^2 < (a+1)^2$, что для натуральных чисел $a$ и $x$ невозможно). Точно так же, поскольку число $b^2 + 2c + 1$ является квадратом, то $c \ge b$, а поскольку число $c^2 + 2a + 1$ является квадратом, то $a \ge c$. Итак, $b \ge a \ge c \ge b$, откуда $a = b = c$.

**5.** Предположим, что нам удалось разрезать таблицу $4 \times 4$ на 4 различные четырехклеточные фигурки. При шахматной раскраске таблицы все фигурки, кроме Т-образной, содержат две белые клетки, а Т-образная – одну или три. Так как всего белых клеток 8, т.е. четное число, то данная фигурка не может присутствовать. Следовательно, при разрезании использовались все остальные 4 фигурки. Раскрасим теперь таблицу так, как показано на рисунке 1. Тогда каждая фигурка, кроме Г-образной, будет содержать четное число белых клеток, а Г-образная – нечетное. Белых клеток в данном случае тоже 8, поэтому и эта фигурка не может участвовать в разрезании. Таким образом, наше предположение было неверным, и среди фигурок обязательно найдутся две одинаковые.

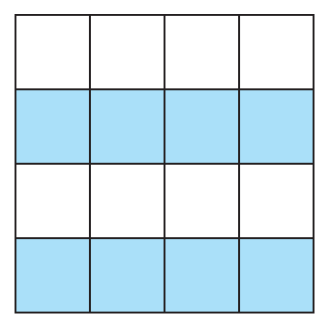


Рис. 1

### КОНКУРС «МАТЕМАТИКА 6–8»

*(см. «Квант» №1)*

**16.** Такое можно сделать для всех натуральных $n > 2$. Приведем описание способа расстановки чисел. Сначала рассмотрим случай $n = 3m$. Заготовим заранее для выписываемых чисел $3m$ «мест» слева направо, причем окрасим их в