

Пифагоровы треугольники

Прямоугольные треугольники, длины всех сторон которых выражаются натуральными числами, получили название пифагоровых – по имени великого математика древности Пифагора. Согласно комментатору знаменитых Евклидовых «Начал» Проклу Диадоху (ок. 410–485), Пифагор указал бесконечное множество таких треугольников. А именно: поскольку три натуральных числа m , $\frac{m^2-1}{2}$, $\frac{m^2+1}{2}$, где m – какое-либо большее 1 нечетное число, связаны равенством

$$m^2 + \left(\frac{m^2-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{m^2+1}{2}\right)^2, \quad (1)$$

то треугольник с длинами сторон, равными этим трем числам, – прямоугольный (современный школьник скажет: по теореме, обратной к теореме Пифагора). В частном случае $m = 3$ получается треугольник с длинами сторон 3, 4, 5, известный еще в Древнем Египте.

Тождество (1) Пифагором или его учениками выводилось, скорее всего, так. Если n^2 камешков расположить в виде квадрата (на рисунке 1 показан случай $n = 3$), то, добавив к нему «каемку» (древние говорили – «гномон») из $2n + 1$ камешков, мы получим расширенный квадрат из $(n+1)^2$ камешков. Значит, если из $2n + 1$ камешков также можно выложить квадрат, то сумма старого и добавленного квадратов дает третий квадрат – как раз то, что нужно. Полагая $2n + 1 = m^2$ (m – нечетное), после очевидных преобразований получаем формулу (1).

Согласно Проклу, еще один класс пифагоровых треугольников описал знаменитый философ Платон, получив формулу

$$(2m)^2 + (m^2-1)^2 = (m^2+1)^2, \quad (2)$$

где натуральное число m может быть любым – как четным, так и нечетным. Эту формулу тоже можно вывести, рассуждая «на камешках». А именно: нарастим квадрат из $(n-1)^2$ камешков не одним, а двумя последовательными гномонами, содержащими в совокупности $2(n-1) + 1 + 2n + 1 = 4n$ камешков (рис. 2). Значит, $(n-1)^2 +$

$+ 4n = (n+1)^2$, и, полагая число n равным квадрату, $n = m^2$, получим требуемое.

Более общую формулу доказывает Евклид в десятой книге «Начал» (лемма к Предложению 28):

$$m^2 n^2 p^2 q^2 + \left(\frac{m^2 np - npq^2}{2}\right)^2 = \left(\frac{m^2 np + npq^2}{2}\right)^2, \quad (3)$$

где натуральные числа m и q одной четности, n, p – произвольные натуральные числа. Формулы Пифагора и Платона получаются из формулы Евклида при $n = q = 1$ и $p = 1$ (формула (1)), или $p = 2$ (формула (2)).

Если числа n и p подобрать таким образом, чтобы число $\frac{np}{2}$ оказалось точным квадратом, тогда можно сделать замену $\frac{m^2 np}{2} = a^2$, $\frac{npq^2}{2} = b^2$, где a, b – некоторые натуральные числа, вследствие чего равенство (3) запишется так:

$$(2ab)^2 + (a^2 - b^2)^2 = (a^2 + b^2)^2. \quad (4)$$

В одной из месопотамских глиняных табличек (рис.3), датированной приблизительно 18 веком до нашей эры, содержится математический текст, который историки науки называют «Plimpton-322» – по



«Plimpton-322»

Рис. 3

имени Плимптоновской библиотеки Колумбийского университета в Нью-Йорке, где он хранится. В этой табличке приводится ряд из 15 троек чисел вида $2ab$, $a^2 - b^2$, $a^2 + b^2$, свидетельствующий о том, что пифагоровы числа занимали любителей точного знания еще в глубокой древности. Позже эти числа были предметом пристального внимания древнегреческого математика Диофанта (III в.) и его французского коллеги Пьера Ферма (1601–1665).

Условимся обозначать треугольник Пифагора со сторонами x, y, z символом (x, y, z) , считая, что на последнем месте в скобках стоит число, выражающее длину гипотенузы.

Знаете ли вы, что...

- Из данного пифагорова треугольника (x, y, z) можно получить бесконечное множество подобных ему треугольников (kx, ky, kz) , где k – произвольное натуральное число.
- Среди подобных пифагоровых треугольников существует наименьший – треугольник, катеты которого выражаются взаимно простыми числами. Такой пифагоров треугольник называется *основным*.
- В основном пифагоровом треугольнике (x, y, z) одно из чисел x и y четное, а другое нечетное. Если y четное, то существуют такие взаимно простые числа m и $n > n$ разной четности, что

$$x = m^2 - n^2, \quad y = 2mn, \quad z = m^2 + n^2.$$

- Читатель «Кванта» С.Ш. Кожегельдинов из Семипалатинска заметил, что предыдущую формулу можно немного изменить так, чтобы она описывала уже все основные пифагоровы треугольники. А именно, для любого основного пифагорова треугольника (x, y, z) найдутся такие взаимно простые числа m и $n > n$, что

$$x = \frac{m^2 - n^2}{(2, m - n)}, \quad y = \frac{2mn}{(2, m - n)}, \quad z = \frac{m^2 + n^2}{(2, m - n)}$$

(здесь в знаменателях формул круглыми скобками обозначен наибольший общий делитель чисел, перечисляемых через запятую). Если числа m и n разной четности, получается треугольник с четным y , а если m и n – одной четности, получается треугольник с четным x .

- Всего существует 50 различных пифагоровых треугольников, длины сторон которых меньше 100.
- Существует единственный пифагоров треугольник, стороны которого выражаются последовательными натуральными числами, – это $(3, 4, 5)$. Все пифагоровы треугольники, стороны которых составляют арифметическую прогрессию, имеют вид $(3k, 4k, 5k)$, где k – натуральное.
- Тожество Месснера

$$(10n - 5)^2 + (50n(n - 1) + 12)^2 = (50n(n - 1) + 13)^2$$

(здесь n – произвольное натуральное число) задает множество пифагоровых треугольников, у которых один из катетов на 1 меньше гипотенузы. Есть и другие пифагоровы треугольники, обладающие таким свойством, например $(2n + 1, 2n(n + 1), 2n(n + 1) + 1)$. Существует также бесконечно много пифагоровых треугольников, у которых катеты выражаются последовательными натуральными числами.

- Во всяком пифагоровом треугольнике хотя бы один из катетов делится на 3 и хотя бы один из катетов делится на 4 (это может быть один и тот же катет).

Отсюда следует, что площадь всякого пифагорового треугольника кратна 6.

- В каждом пифагоровом треугольнике хотя бы одна из сторон делится на 5.
- Два пифагоровых треугольника, имеющих одинаковые площади и равные гипотенузы, равны.
- **Теорема Ферма.** Для каждого натурального числа n существует n пифагоровых треугольников, имеющих одинаковые площади, но попарно различные гипотенузы.
- Среди основных пифагоровых треугольников существует бесконечно много таких, у которых один из катетов является квадратом натурального числа, однако совсем нет треугольников, у которых хотя бы две стороны были квадратами.
- Не существует пифагоровых треугольников, площади которых равны квадрату натурального числа.
- В 1643 году в письме к аббату Мерсенну Ферма предложил следующую задачу: найти пифагоровы треугольники, у которых гипотенуза и сумма катетов – квадраты. Ферма указал такой треугольник с наименьшей гипотенузой, имеющий, тем не менее, весьма внушительные размеры:

$$(4565486027761, 1061652293520, 4687298610289).$$

- Между пифагоровыми треугольниками (a, b, c) и рациональными точками дуги окружности $x^2 + y^2 = 1$ в первой четверти системы координат (рис.4) можно установить однозначное соответствие, полагая $x = \frac{a}{c}$ и $y = \frac{b}{c}$. Оказывается, что какие бы две точки надуге ни взять, между ними обязательно найдется точка с рациональными координатами, соответствующая некоторому пифагоровому треугольнику.

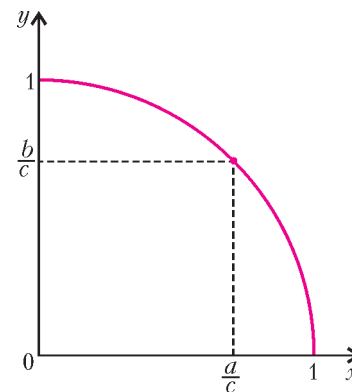
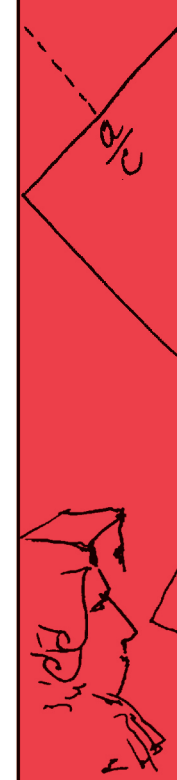


Рис. 4

Для произвольного угла α , $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$, существует прямоугольный треугольник с рациональными сторонами и острым углом, сколь угодно близким к α .

- Из каждого пифагорова треугольника можно получить прямоугольник, стороны и диагонали которого выражаются натуральными числами. В настоящее время неизвестно, существует ли прямоугольный параллелепипед, все стороны и диагонали которого выражаются натуральными числами.

Публикацию подготовил А. Жуков



$$\frac{m^2 np}{2} = b$$

$$(a^2 - b^2)/2 = (a^2 + b^2)$$

$$m^2 np^2 + (m^2 np - b^2)$$

О двух параллелограммах в треугольнике

Г. ФИЛИППОВСКИЙ

Речь пойдет о двух следующих параллелограммах в треугольнике ABC : OM_1E_1A и OM_1HE_1 (рис.1). Здесь O – центр описанной окружности треугольника, H –

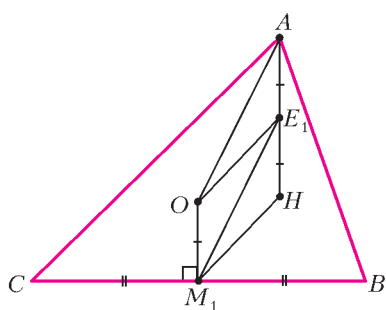


Рис. 1

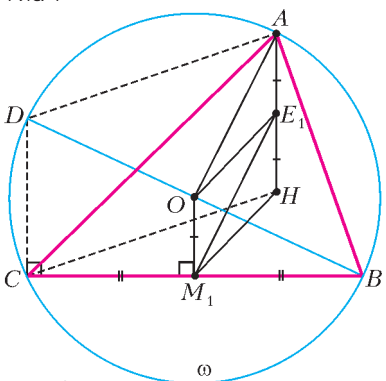


Рис. 2

точка пересечения его высот (ортоцентр), M_1 – середина BC и E_1 – середина AH .

Покажем, что четырехугольники OM_1E_1A и OM_1HE_1 действительно являются параллелограммами. Опишем около треугольника ABC окружность ω и проведем диаметр BD (рис.2). Очевидно, $ADCH$ – параллелограмм ($DC \parallel AH$, поскольку оба отрезка перпендикулярны к стороне BC ; аналогично $DA \parallel CH$), OM_1 – средняя линия в треугольнике BCD , т.е.

$$OM_1 = \frac{1}{2} CD.$$

$$OM_1 = \frac{1}{2} AH.$$

Следовательно, $OM_1 = AE_1 = E_1H$.

Последние три отрезка к тому же параллельны (все они перпендикулярны к BC). Поэтому OM_1E_1A и OM_1HE_1 – параллелограммы.

Прежде чем перейти к разговору о замечательных свойствах указанных параллелограммов, отметим: в тупоугольном треугольнике формула $OM_1 = \frac{1}{2} AH$ и сами параллелограммы сохраняются (покажите!).

Задача 1. Докажите, что отрезок M_1E_1 равен радиусу R описанной окружности треугольника ABC .

Доказательство. В параллелограмме OM_1E_1A отрезок $OA = R$ (см. рис.1). Следовательно, $M_1E_1 = OA = R$.

Задача 2. Докажите, что точки, симметричные точке O относительно середин медиан, принадлежат высотам треугольника.

Доказательство. Точка T пересечения диагоналей параллелограмма OM_1E_1A – середина медианы AM_1 (рис.3). Точка E_1 симметрична O относительно T . Она лежит на высоте AH_1 .

Задача 3. Докажите, что (см. рис.3):

а) $AH = 2R |\cos \alpha|$;

б) $AH^2 = 4R^2 - a^2$.

Доказательство. Поскольку $OM_1 = R |\cos \alpha|$ (из $\triangle OM_1C$), а $OM_1^2 = R^2 - \frac{a^2}{4}$ (теорема Пифагора для того же треугольника), то

$$AH = 2OM_1 = 2R |\cos \alpha|$$

и

$$AH^2 = 4OM_1^2 = 4R^2 - a^2.$$

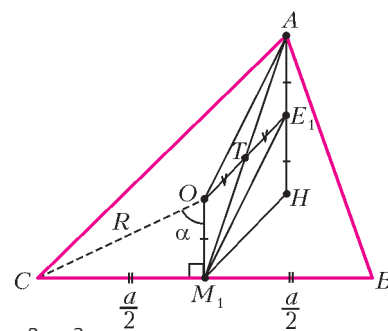


Рис. 3

Задача 4. Пусть биссектриса AL_1 треугольника ABC пересекает M_1E_1 в точке N . Докажите, что (рис.4):

а) $NE_1 = E_1A$;

б) $\angle ANH = 90^\circ$.

Доказательство. а) Известно, что биссектриса угла A треугольника ABC совпадает с биссектрисой угла OAH (докажите!), т.е. $\angle 1 = \angle 2$. Но $\angle 3 = \angle 1$, так как OM_1E_1A – параллелограмм и $OA \parallel M_1E_1$. Тогда $\angle 3 = \angle 2$, и $NE_1 = E_1A$.

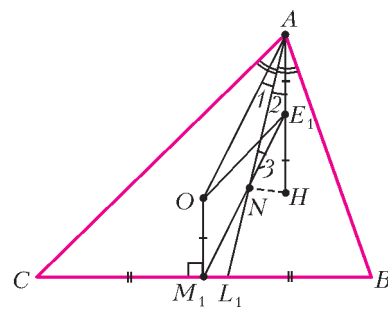


Рис. 4

б) Поскольку $NE_1 = AE_1 = E_1H$, то $\angle ANH = 90^\circ$.

Задача 5. Докажите, что точка E – середина OH – является центром окружности Эйлера (окружности девяти точек).

Доказательство. Пусть диагонали параллелограмма OM_1HE_1 пересекаются в точке E (рис.5). Соединим E с H_1 – основанием высоты, проведенной из вершины A . Тогда $H_1E = EM_1 = EE_1$ (медиана, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы). Таким образом, E – центр окружности, проходящей через H_1, M_1, E_1 . Аналогично можно показать, что на этой же окружности находятся точки E_2 и E_3 – середины BH и CH соответственно; H_2 и H_3 – основания высот, проведенных из вершин B и C ; M_2 и M_3 – середины AC и AB соответственно.

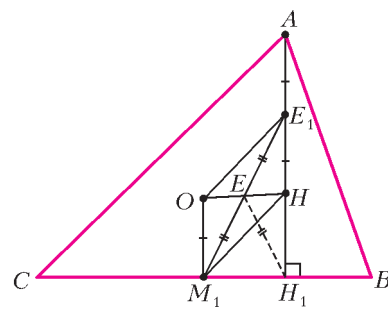


Рис. 5

Задача 6. Найдите радиус окружности Эйлера.

Решение. Непосредственно из рисунка 5 получаем

$$M_1E = EE_1 = \frac{1}{2} M_1E_1 = \frac{1}{2} R.$$

Задача 7. Докажите, что:

а) точка M пересечения медиан треугольника ABC , а также точки O и H лежат на одной прямой (прямой Эйлера);

б) $2OM = MH$.

Доказательство. а) Два наших параллелограмма, взятые вместе, составляют трапецию OM_1HA , в которой основание

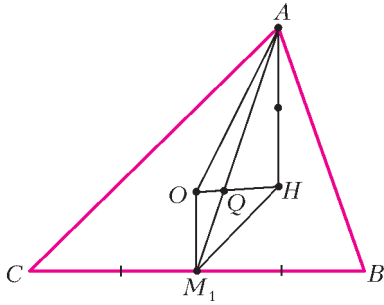


Рис. 6

б) Очевидно, что и $\frac{HQ}{OQ} = \frac{AH}{OM_1} = \frac{2}{1}$. Поскольку точки Q и M совпадают, то $\frac{HM}{MO} = \frac{2}{1}$, или $2OM = MH$.

Задача 8. Докажите, что прямая E_1M проходит через точку, диаметрально противоположную вершине A.

Доказательство. Воспользуемся так называемой леммой о трапеции: точка пересечения диагоналей трапеции, точка пересечения продолжений ее боковых сторон и середины оснований лежат на одной прямой (докажите!). Следовательно, прямая E_1M пройдет через точку D пересечения продолжений AO и HM_1 трапеции AHM_1O (рис.7). Но $OM_1 \parallel AH$ и $OM_1 = \frac{1}{2}AH$. Значит, OM_1 – средняя линия в треугольнике AHD . Тогда $AO = OD$ и AD – диаметр описанной окружности треугольника ABC.

Задача 9. Точки, симметричные ортоцентру H относительно середин сторон треугольника ABC, лежат на его описанной окружности. Докажите это.

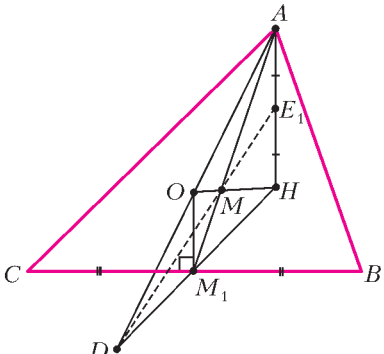


Рис. 7

Доказательство. Пусть F – точка, симметричная ортоцентру H относительно стороны BC треугольника ABC (рис.8). Связка исходных параллелограммов позволяет, удвоив OM_1 , получить параллелограмм $OGHA$, в котором $GH = OA = R$. Поскольку $OGFH$ – равнобокая трапеция, то $OF = GH = R$.

Головоломки в бутылках

(Начало см. на с. 25)

ваться какими-либо инструментами, приспособлениями, любыми предметами, не имеющими отношение к данной головоломке.

В качестве примера попробуйте разобраться с «хитрой» бутылкой с деревянным цилиндром внутри, о которой рассказывается на 4-й странице обложки журнала.

Сразу предупредим, что бесполезны все попытки перевертывать и встряхивать бутылку в надежде случайно попасть торцом цилиндра в отверстие трубки. Сделать это практически невозможно.

AH в два раза больше основания OM_1 (рис. 6). Пусть Q – точка пересечения диагоналей этой трапеции. Тогда $\frac{AQ}{QM_1} = \frac{AH}{OM_1} = \frac{2}{1}$ (треугольники AQH и M_1QO подобны). Но и $\frac{AM}{MM_1} = \frac{2}{1}$. Значит, точки Q и M совпадают.

А это означает, что точка F принадлежит описанной окружности треугольника ABC.

Задача 11. Докажите справедливость следующей формулы:

$$OH^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2),$$

где a, b, c – стороны треугольника ABC, R – радиус описанной около него окружности.

Доказательство. Пусть AM_1 – медиана в треугольнике ABC (рис.9). Тогда, по формуле медианы,

$$AM_1^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}.$$

Далее воспользуемся формулой суммы квадратов диагоналей параллелограмма для OM_1E_1A :

$$OE_1^2 = 2(OA^2 + OM_1^2) - AM_1^2. \quad (1)$$

По той же формуле для параллелограмма OM_1HE_1 :

$$OH^2 = 2(OE_1^2 + OM_1^2) - M_1E_1^2, \quad (2)$$

где $OM_1^2 = R^2 - \frac{a^2}{4}$ (из треугольника OM_1C), а $M_1E_1 = OA = R$. Подставим сюда значение OE_1^2 из предыдущей формулы:

$$OH^2 = 2(2OA^2 + 2OM_1^2 - AM_1^2 + OM_1^2) - M_1E_1^2,$$

или

$$OH^2 = 6OM_1^2 + 4OA^2 - 2AM_1^2 - M_1E_1^2,$$

или

$$OH^2 = 6\left(R^2 - \frac{a^2}{4}\right) + 4R^2 - \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{2} - R^2,$$

откуда получаем

$$OH^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2).$$

Предложенная серия задач показывает эффективность использования параллелограммов OM_1E_1A и OM_1HE_1 при доказательстве важных фактов геометрии треугольника.

Как же решить задачу? Обратите внимание, что изготовленная вами головоломка не похожа на ту, что показана на фотографии. Дело не в форме бутылки и не в размерах трубки или цилиндра. Вашей головоломке не хватает... конверта с решением! Этот конверт есть в редакции, и мы его открывали, надеясь найти внутри текст решения и прочитать его. Но текста не было. В конверте лежал чистый листок бумаги! И все-таки головоломка была решена. Поэтому советуем вам взять конверт, написать на нем слово «Решение», положить внутрь лист бумаги и решать головоломку Уилла Страйбоса.

А.Калинин

Квантовая телепортация

А. АРУТЮНОВ

КВАНТОВАЯ ТЕЛЕПОРТАЦИЯ – ОДНО ИЗ НАИБОЛЕЕ ИНТЕРЕСНЫХ И ПАРАДОКСАЛЬНЫХ ПРОЯВЛЕНИЙ КВАНТОВОЙ ПРИРОДЫ МАТЕРИИ, ВЫЗЫВАЮЩЕЕ В ПОСЛЕДНИЕ ГОДЫ ОГРОМНЫЙ ИНТЕРЕС СПЕЦИАЛИСТОВ. Термин «телепортация» взят из научной фантастики, однако в настоящее время он широко используется в научной литературе. Когда физики говорят о телепортации, они вовсе не имеют в виду мгновенную транспортировку предметов и живых существ на далекие расстояния, о которой так много пишут авторы современной научной фантастики. Квантовая телепортация означает мгновенный перенос квантового состояния из одной точки пространства в другую, удаленную на большое расстояние.

Первые идеи квантовой информатики зародились сразу же после работ А.Эйнштейна, М.Планка, Н.Бора и других отцов-основателей квантовой физики. Существенное развитие они получили с созданием квантовой механики в представлениях Э.Шрёдингера и В.Гейзенберга. Огромное влияние на развитие теории квантовых вычислений оказали также работы Р.Фейнмана.

Явление квантовой телепортации проявляется в существовании мгновенного взаимодействия между частицами микромира, входящими в единую квантовую систему. Система квантово связанных частиц образуется всякий раз, когда частицы вступают во взаимодействие друг с другом или рождаются в одном процессе и после этого не вступают во взаимодействие с другими частицами. Как только одна из частиц квантово связанной пары начинает взаимодействовать с внешним миром, ее квантовые характеристики изменяются, и в тот же самый миг изменяются характеристики второй частицы пары. Обмен информацией о состояниях между связанными частицами происходит без каких-либо полей, мгновенно и не зависит от расстояния. Такая связь кажется на первый взгляд мистической, но на языке физиков она достаточно тривиальна – просто взаимодействующие частицы имеют общую так называемую пси-функцию. Квантовая физика описывает состояние частиц этой самой пси-функцией (по-другому – волновой функцией), которая, хотя и похожа на некоторое поле, поскольку имеет распределение в пространстве, но в действительности не является таковым. Скорее, это чисто математический объект и поэтому может изменяться мгновенно и во всем пространстве без нарушений законов физического мира. Пси-функция любой системы микрочастиц создается и разрушается (коллапсирует во всем пространстве) при каждом новом взаимодействии.

На странную возможность существования нефизической связи между удаленными частицами первым обратил внимание А.Эйнштейн. Он не поверил в реальность такой связи и интерпретировал это как доказательство ошибочности квантовой теории. Совместно со своими коллегами-физиками – Б.Подольским и Н.Розеном – он опубликовал в 1935 году статью о парадоксе квантовой механики, который теперь известен как парадокс ЭПР. Суть парадокса состоит в следующем. Есть две частицы, которые какое-то время

взаимодействуют, образуя единую систему. С позиций квантовой механики, эту связанную систему можно описать некоей волновой функцией. Когда взаимодействие прекращается и частицы разлетаются очень далеко, их по-прежнему будет описывать та же функция. Но состояние каждой отдельной частицы неизвестно в принципе: это вытекает из соотношения неопределенностей. И только когда одна из частиц попадает в приемник, регистрирующий ее параметры, у другой появляются (именно появляются, а не становятся известными!) соответствующие характеристики. Таким образом, возможна мгновенная «пересылка» квантового состояния частицы на неограниченно большое расстояние. Однако телепортации самой частицы, передачи массы при этом не происходит. Квантовый объект, в качестве которого могут выступать, например, два связанных фотона, в процессе разделения сохраняет некое подобие информационной связи – эффект «спутывания», «связывания», «зацепления». При этом квантовое состояние одного фотона, скажем состояние поляризации, может мгновенно передаваться на другой фотон, который становится аналогом первого, первый же фотон коллапсирует, исчезает, и наоборот. Расстояние между фотонами может быть любым. Как синоним этого парадокса принят также термин «квантовая нелокальность», подчеркивающий мгновенную распределенность, нелокальность в пространстве состояний связанных элементарных частиц.

Стоит подробнее пояснить, что подразумевается под словами «зацепленное состояние». Речь идет о системе, состоящей из двух взаимодействующих подсистем, например частиц, которая в какой-то момент времени распадается на две невзаимодействующие подсистемы. Для такого зацепленного состояния значение какой-либо физической величины не определено ни для одной из подсистем. Однако если мы произведем измерение над одной из подсистем и определим значение выбранной физической величины, то мы с достоверностью будем знать значение этой физической величины и для другой подсистемы. Примером системы, находящейся в зацепленном состоянии, является система двух фотонов, появившихся в результате спонтанного распада фотона, распространяющегося в нелинейной среде. Для зацепленных фотонов нельзя указать, какова поляризация каждого из фотонов пары, но если измерить поляризацию одного фотона, то и поляризация другого фотона также станет определенной. Подчеркнем, что, производя измерение над одной частицей, мы в тот же момент определяем и состояние другой частицы, как бы далеко эти частицы друг от друга ни находились. Таким образом, связь между частицами носит принципиально нелокальный характер.

Казалось бы, при этом нарушается принцип причинности – следствие и причина не разделены временем, если понимать время как способ организации последовательности событий. Поэтому Эйнштейн и соавторы оценивали свою чисто теоретическую, но жестко формализованную модель как неприложимую к практике, эксперименту. Это состояние противоречия теории и видимой физической реальности длилось около 30 лет.

Первую принципиальную схему эксперимента по реализации взаимодействия связанных частиц предложила в 1993 году группа специалистов Исследовательского центра ИВМ, возглавляемая Ч.Беннетом. Тогда же ими был введен и термин «квантовая телепортация». Беннет показал, что полную информацию, необходимую для того, чтобы восстановить состояние объекта, можно разделить на две части – квантовую и классическую. Первую можно передать мгновенно, что и подтверждено экспериментально, но нельзя

использовать без второй, передаваемой обычными методами – со скоростью, не превышающей скорость света. Иными словами, Беннет показал, что в принципе сцепленные частицы могут служить своего рода «транспортном». Посредством присоединения третьей – «информационной» – частицы к одной из сцепленных частиц можно передавать ее свойства другой, причем даже без измерения этих свойств.

Пионерами по осуществлению экспериментальной реализации канала такой связи стали работы двух исследовательских групп – группы австрийских исследователей из Института экспериментальной физики университета в Инсбруке, возглавляемой А.Цайлингером, и группы итальянских исследователей из университета в Риме под руководством Ф. Де Мартини. Опыты этих групп доказали выполнимость принципов ЭПР на практике для передачи через световоды состояний поляризации между двумя фотонами посредством третьего на расстояниях до 10 километров, т.е. наблюдалась телепортация квантового состояния на гигантских (в масштабах микромира) расстояниях.

Вместо того чтобы использовать отдельный «фотон-посланник», итальянские исследователи предложили рассматривать одновременно две характеристики каждой связанной частицы: поляризацию и направление движения. Это позволяет теоретически описывать их как отдельные частицы и в то же самое время, проводя измерения только с первой частицей, получать характеристики второй, не трогая ее, т.е. осуществлять телепортацию.

Аналогичные экспериментальные результаты были получены и в других лабораториях Европы, США и Азии, так что фотонная телепортация теперь стала для физиков вполне привычным делом. Однако до сих пор еще никому не удавалось телепортировать столь тяжелые (по меркам микромира) объекты, как атомы с многонуклонными ядрами. Физики из американского Национального института стандартов и технологии добились успеха с ионами бериллия-9, а их коллеги из университета Инсбрука работали с еще более массивными ионами кальция-40.

Поведение каждой квантовой системы, будь то фотон, элементарная частица, атом или молекула, описывается некоторым набором параметров – квантовых чисел. Такие параметры в своей совокупности обеспечивают всю полноту информации об объекте, достижимую в рамках квантовой механики. Например, одиночный электрон, свободно летящий в пустом пространстве, описывается всего двумя параметрами – импульсом и спином. Для полного описания электрона, входящего в состав атома водорода, нужны уже четыре параметра: главное квантовое число, которое определяет его энергию, орбитальное квантовое число, которое задает величину углового момента электрона, магнитное квантовое число, характеризующее ориентацию этого момента, и, наконец, опять-таки спин. Другие квантовые объекты могут требовать иных квантовых чисел. Полный набор квантовых чисел любого квантового объекта, для простоты назовем его частицей, как раз и называется его состоянием.

Оба упомянутых научных коллектива, американский и австрийский, работали с плененными в ловушки ионами, которыми они манипулировали с помощью лазерных импульсов. В этих условиях динамику каждой частицы можно было описывать с помощью лишь одного квантового параметра – спина. Величина спина у каждой частицы была одной и той же, а вот его направление могло меняться. Интересно, что каждый акт телепортации занимал лишь 4 миллисекунды, причем он осуществлялся по командам компьютера. У австрийцев точность переноса информации составила 75%, а у американцев – 78%.

Телепортация не только фотонов, но и других частиц – электронов, атомов и даже ионов – позволит передавать квантовое состояние от короткоживущей частицы к более стабильной. Таким способом можно будет создавать запоминающие устройства, где информация, принесенная фотоном, будет храниться на ионах, изолированных от окружающей среды. После создания надежных методов квантовой телепортации возникнут реальные предпосылки для создания квантовых вычислительных систем. Телепортация обеспечит надежную передачу и хранение информации на фоне мощных помех, когда все другие способы оказываются неэффективными, и может быть использована для связи между несколькими квантовыми компьютерами. Кроме того, разработанные исследователями методы имеют огромное значение для будущих экспериментов по квантовой механике, для проверки и уточнения целого ряда современных физических теорий.

В различных странах обсуждаются программы по применению эффекта квантовой телепортации для создания квантовых оптических компьютеров, где носителями информации будут фотоны. Скорость работы и объемы информации квантовых компьютеров будут на десятки порядков превосходить таковые у существующих компьютеров. Квантовая телепортация может сыграть значительную роль в будущих системах передачи информации. Если когда-либо будет создана квантово-механическая ЭВМ, теоретические основы которой были заложены Р.Фейнманом в конце 70-х – начале 80-х годов прошлого столетия, то информация в ней будет храниться в виде набора квантовых состояний. Эффекты ЭПР и квантовой телепортации позволяют вести копирование и обмен информацией внутри квантового компьютера. И не только компьютера – можно будет телепортировать данные в любых цифровых системах. Преимущество телепортационного способа передачи информации заключается в том, что из одной точки пространства в другую переносится точная копия состояния, являющегося элементарной ячейкой памяти. Таким образом, появляется возможность передавать информацию без потерь, со 100-процентной эффективностью. Именно перспектива создания принципиально новых систем связи с абсолютной невозможностью несанкционированного доступа к данным и определяет нынешний научный ажиотаж вокруг квантовой телепортации. Впрочем, что касается инженерных решений этой задачи, то не следует думать, что они будут найдены завтра: технологические проработки только начались.

По сути дела, до самого последнего времени физики отрицали возможность телепортации прежде всего потому, что любые частицы являются одновременно и частицами, и волнами. В этом и заключается сложность: чтобы создать точный дубликат какой-либо частицы, необходимо прежде определить ее скорость и ее волновые свойства, в частности импульс. Но это запрещено принципом неопределенности Гейзенберга. Согласно этому принципу, невозможно одновременно определить и волновые, и корпускулярные свойства частицы. А теперь (как уже было сказано) во многих научно-исследовательских лабораториях мира экспериментально разрешается этот «квантовый парадокс».

Опыты, проведенные датскими учеными в конце сентября 2001 года, доказали практическую возможность такой телепортации. Экспериментаторы добились квантовой связи между двумя облаками охлажденных почти до абсолютного нуля паров цезия, расположенными на значительном расстоянии друг от друга. Датчанам удалось связать около миллиона атомов цезия, правда на очень короткое время – на доли миллисекунды. Связь должна приводить к взаимному влиянию облаков пара. По версии экспериментаторов, воздей-

ствие на оригинал влечет аналогичное изменение параметров копии. Исследователи планируют изучение свойств полученного канала с целью реализации в будущем возможности передачи копий структур из атомов. Даже при самых успешных разработках именно этого вида телепортации «перенести» человека таким способом не получится – он содержит на 20 порядков больше атомов, а методов считывания структуры такой сложности пока не существует даже в принципе.

Летом 2002 года появилось сообщение от физиков из Австралии: им удалось телепортировать луч лазера на расстояние 1 метр. Выглядело это как исчезновение луча в одной точке и появление его в другой. В Японии объявлено о прорыве в области мгновенной передачи данных на неограниченные расстояния, открывающем путь к созданию сверхскоростных квантовых компьютеров и неуязвимых для взломов систем шифровки информации. Группа физиков во главе с профессором Токийского университета А.Фурусавой впервые в мире осуществила квантовую телепортацию между тремя частицами. Физики из Венского университета сумели телепортировать частицы света на расстояние 600 метров – с одного берега Дуная на другой. Для этого эксперимента использовалась канализационная система под руслом реки, по которой был протянут оптоволоконный кабель. Линия, проложенная под Дунаем, соединила между собой две лаборатории, одну из которых назвали «Алиса», а другую – «Боб». Алиса передала три разных квантовых состояния фотонов, а Боб сумел их воспроизвести. При этом процесс телепортации происходил не мгновенно, поскольку он ограничен скоростью света. Ученые говорят, что ценность нынешнего эксперимента заключается в том, что он проведен в условиях, максимально приближенных к реальным.

Две любопытные статьи – теоретическая и экспериментальная – были недавно опубликованы в журнале «Nature» («Природа»). Они ведут разными путями, но к одной заветной цели – к созданию квантового компьютера, способного решать задачи, принципиально непосильные современным вычислительным машинам.

В теоретической статье профессор Национального института стандартов и технологии США Э.Нилл предложил новую иерархическую архитектуру квантового компьютера. По утверждению автора, эта архитектура позволяет построить квантовый вычислитель на основе уже реализованных в эксперименте компонентов. Главным препятствием на пути создания квантовых компьютеров является быстрое разрушение нежной квантовой информации внешним шумом. Единица квантовой информации, кубит, способная представлять либо логический ноль, либо единицу, либо то и другое одновременно, реализуется в виде квантового состояния фотона, атома, иона или другой микрочастицы. Это – базовый блок квантового компьютера. Пока в научных лабораториях удалось провести квантовые вычисления лишь для нескольких кубитов, чего, разумеется, недостаточно для практических расчетов. И чем больше кубитов в квантовом компьютере, тем быстрее разрушается информация. Чтобы обойти эту трудность, Нилл предложил организовать все кубиты квантового компьютера в простую пирамидальную структуру из небольших блоков кубитов. Квантовые данные будут телепортироваться с уровня на уровень и постоянно проверяться на целостность. При такой иерархической структуре компьютера вычисления можно будет проводить, даже если вероятность ошибки одного кубита за время расчетов составляет три процента. А этот уровень уже достигнут в экспериментах на ионных квантовых компьютерах. Нет проблем и с телепортацией квантовой информации. Сегодня, чтобы обеспечить надежную работу всего пары кубитов, нужно будет создать три уровня иерархии и оперировать с 36

кубитами только на нижнем уровне. Однако это все же лучше, чем ничего. И баланс между избыточностью и надежностью вычислений в схеме Нилла заметно лучше, чем при других подходах. Тем более что требования к избыточности архитектуры компьютера могут быть значительно снижены при уменьшении уровня ошибок. Пока работоспособность новой архитектуры проверена лишь в многомесячных вычислительных экспериментах на обычной рабочей станции. Выводы автора еще нуждаются в строгих математических доказательствах и в экспериментальной проверке.

В работе большой группы европейских ученых, координируемой из Венского университета, впервые удалось экспериментально реализовать «однаправленные» квантовые вычисления, предложенные теоретиками. Одна направленный квантовый компьютер принципиально отличается от обычного квантового компьютера и даже заставляет ученых переосмыслить саму концепцию квантовых вычислений. В обычном квантовом компьютере сначала готовятся начальные квантовые состояния кубитов, затем алгоритм вычислений реализуется путем последовательности обратимых во времени манипуляций с состояниями кубитов, а результат вычислений измеряется. Именно осуществление обратимых манипуляций, т.е. «перепутывания» состояний кубитов, которые легко разрушаются любым шумом, и вызывает основные трудности. В однонаправленном квантовом компьютере кластер из квантовых частиц изначально готовится в сильно «перепутанном» состоянии, а алгоритм квантовых вычислений сводится к последовательности необратимых измерений состояний кубитов.

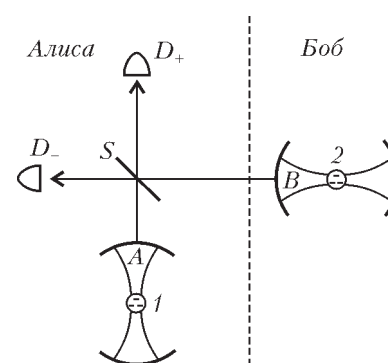
Необратимость вычислений, которые гораздо меньше портятся шумом, и заставляет называть такой компьютер однонаправленным. Теоретики показали, что однонаправленным способом можно реализовать алгоритм поиска, к которому удастся свести все остальные «неподъемные» алгоритмы, решаемые на обычном компьютере лишь прямым перебором всех вариантов ответа. В эксперименте был сооружен однонаправленный компьютер на четырех кубитах, физически реализуемых состояниями поляризации четырех фотонов. Экспериментальная установка представляет собой сложную комбинацию импульсных лазеров, поляризационных фильтров, нелинейных оптических кристаллов и фотоприемников. Четыре фотона были приготовлены в «перепутанном» квантовом состоянии, а затем ряд измерений их поляризации позволил успешно выполнить упомянутый алгоритм. Разумеется, четыре кубита – это немного, но на данном этапе важнее всего экспериментальное подтверждение концепции.

Пока сравнительно молодое направление однонаправленных квантовых вычислений развито слабее традиционного. Однако именно с ним ряд специалистов связывают большие надежды на создание в обозримом будущем квантовых компьютеров для практических вычислений. Удастся ли это ученым, сказать трудно, но, судя по тому что постоянно предлагаются новые решения старых проблем, их надежды отнюдь не беспочвенны. В последнее время происходит слияние квантовых компьютеров с квантовой коммуникацией (телепортацией), естественно воображаемое, поскольку ни того, ни другого пока не существует. Поговаривают уже о квантовом Интернете. Дело в том, что в квантовом компьютере очень сложно устроить двухкубитные операции, которые как раз и приводят к запутанным состояниям – основе квантовых вычислений. Может оказаться более простым (дешевым) приемом поставлять потребителю уже готовые запутанные кубиты с некоего суперкомпьютера, подключенного к сети квантовой коммуникации.

Сем телепортации квантовых состояний уже было предложено огромное количество. Ученые из Англии, например,

считают, что изобретенная ими схема телепортации является наиболее реалистической и обеспечивает большую вероятность успешной телепортации. Мотивация практической ценности их работы ясна. Квантовую информацию лучше записывать и обрабатывать на атомных состояниях или им подобных, поскольку там она может достаточно долго храниться. А вот передавать эту информацию лучше всего с помощью фотонов, которые могут быстро распространяться на большие расстояния без потери когерентности. Авторы рассматривают трехуровневый атом, у которого есть два вырожденных основных состояния и одно возбужденное. Атом помещается в микрорезонатор, обладающий собственной частотой, несколько меньшей частоты резонансного возбуждения на верхний уровень. Такова же частота лазерного луча, освещающего микрорезонатор. Все это находится в распоряжении Алисы (см. рисунок). Точно такая же установка у Боба. Требуется передать состояние атома Алисы, представляющее собой смесь основных состояний атома, на атом Боба. Для этого требуется еще одно устройство, а именно делитель, на который попадают фотоны, выходящие из микрорезонаторов Алисы и Боба, а также два детектора фотонов, находящихся в распоряжении Алисы. В один и тот

же момент времени Алиса и Боб включают лазеры на определенные, но разные промежутки времени, а затем Алиса ждет щелчка детектора и сообщает Бобу (по телефону), какой детектор сработал. В зависимости от этого Боб определяет, получил ли он состояние атома Алисы или для этого надо еще произвести простейшую унитарную операцию (поворот фазы) над его атомом. Запутывание состояний атомов, необходимое для телепортации, происходит в момент срабатывания детектора, т.е. измерения, производимого над системой фотонов.



Устройство телекоммуникации атомного состояния: A — резонатор, 1 — атом, S — делитель луча и D_+ и D_- — детекторы, принадлежащие Алисе; B — резонатор и 2 — атом, принадлежащие Бобу

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

О разрезании треугольника на подобные ему

Б. ФРЕНКИН

РАЗРЕЗАНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУР — ТЕМА МНОГИХ интересных задач. Как правило, они не требуют знания каких-либо сложных теорем, зато хорошо тренируют комбинаторное мышление и зрительное восприятие.¹ Одна из популярных тем в этой области — разбиение многоугольника (например, треугольника) на части, подобные между собой.² В частности, в книге Гарднера рассматривается разрезание многоугольника на равные подобные ему много-

угольники. Здесь мы займемся проблемой, родственной по характеру. Сузим класс разрезаемых фигур: ограничимся треугольниками, но ослабим условие на само разрезание — полученные части не обязательно одинаковы. Решая эту проблему, а затем обобщая ее, мы встретимся с некоторыми любопытными фактами, уже отмеченными в литературе. Однако главный результат — описание треугольников, которые можно разрезать на пять подобных им, — видимо, не был известен; в статье С.А. Jones, Р. Jones and А.В. Bolt, упомянутой во второй сноске, он сформулирован в качестве вероятной гипотезы.

Итак:

Пусть n — натуральное число, $n > 1$. Какие треугольники можно разрезать на n треугольников, подобных исходному?

В качестве разминки вам предлагается несложная

Задача 1. Разрежьте произвольный треугольник на четыре одинаковых подобных ему треугольника.

Нетрудно и обобщить этот результат:

Задача 2. Пусть $n \geq 6$ — натуральное число. Разрежьте произвольный треугольник на n подобных ему треугольников.

Заметим, что на этот раз треугольники уже не обязательно одинаковы. Не слишком сложно решается и

Задача 3. Найдите все треугольники, которые можно разрезать на два подобных им треугольника (не обязательно одинаковых).

Задача 4. Тот же вопрос для разрезания на три треугольника.

Осталось неисследованным всего одно значение n , а именно 5. Из предыдущего вытекает, что любой прямоугольный треугольник можно разрезать на 5 (как и на любое другое количество) подобных ему. Поэтому в дальнейшем нас интересует следующий вопрос:

Существуют ли (и если да, то какие) прямоугольные треугольники, которые можно разрезать на 5 треугольников, подобных исходному?

¹ Такие задачи можно найти, например, в книгах М. Гарднера «Математические досуги» (М.: Мир, 2000, гл. 11, 24) и Г. Линдгрена «Занимательные задачи на разрезание» (М.: Мир, 1977). Разрезанию треугольников посвящена книга А. Соифера «How does one cut a triangle» (СЕМЕ, 1990).

² См. в частности, статьи Ю. Шапкина «Разрезание фигур» (МИФ, №1/1998–1999) и С.А. Jones, Р. Jones and А.В. Bolt «Dissections of triangles into five similar triangles» (The Mathematical Gazette, vol. 82, № 494 (July 1998), pp. 225–234).

Здесь нас ожидают трудности иного уровня, чем в предыдущих случаях. Нужно разрезать прямоугольный треугольник на пять треугольников и выяснить, когда их можно взять подобными исходному. Но эти пять треугольников могут образовывать много разных конфигураций. (Сколько вершин этих треугольников находятся на сторонах исходного? А в его вершинах? Со сколькими другими треугольниками граничит каждый из этих треугольников? – и т.п.) Так что первая проблема, стоящая перед нами, – как-то обозреть всю совокупность возможных конфигураций. Оказывается, эта проблема вполне разрешима. Первым шагом к этому служит

Задача 5. Существует ли прямоугольный треугольник, который разрезается на пять подобных ему таким образом, что углы при его вершинах не разрезаются?

Понятно, что вершины «малых» треугольников (т.е. полученных при разрезании) находятся не только в вершинах исходного, но и в каких-то других точках. Эти другие точки назовем узлами. Как устроен узел? Во-первых, он может находиться на стороне исходного треугольника или на стороне, но не в вершине, одного из малых треугольников (рис. 1,а). Во-вторых, узел может находиться внутри исходного треугольника и служить вершиной всех примыкающих треугольников (рис. 1,б).

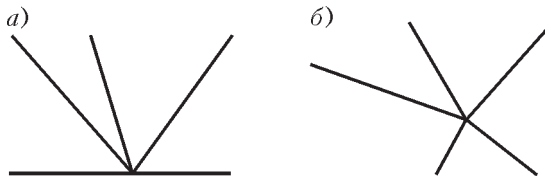


Рис. 1

Задача 6. Предположим, что прямоугольный треугольник разрезан на пять подобных ему, причем разрезан хотя бы один из углов при вершинах. Оцените сверху количество узлов.

Задача 7. Докажите, что в этой ситуации существует узел типа, изображенного на рисунке 1,б.

Задача 8. Найдите возможные конфигурации треугольников, примыкающих к узлу из задачи 7. (Сколько может быть таких треугольников? Могут ли они образовывать невыпуклый многоугольник?)

В итоге с перебором конфигураций мы справились. Остается последняя, но самая сложная

Задача 9. Исследуйте найденные конфигурации.

Решив нашу исходную задачу, естественно заняться ее обобщением:

Пусть n – натуральное число, $n > 1$. Какие треугольники можно разрезать на n треугольников, подобных друг другу (но не обязательно – исходному треугольнику)?

Для $n = 4$ и $n \geq 6$ ответ содержится в предыдущем (задачи 1 и 2). Не представляет большой трудности и

Упражнение 1. Покажите, что на два подобных между собой треугольника можно разрезать любой прямоугольный, равнобедренный или равносторонний треугольник и никакой другой.

Кстати:

Упражнение 2. а) Докажите, что при любом натуральном n любой треугольник можно разрезать на n^2 одинаковых подобных ему треугольников.

б) Докажите, что треугольник можно разрезать на два одинаковых треугольника (не обязательно подобных ему) тогда и только тогда, когда он равнобедренный или равносторонний.

в) Какие треугольники можно разрезать на два одинаковых подобных им?

Существуют также треугольники, которые можно разрезать на 3, на 5 одинаковых треугольников, подобных исходному (см. книгу М.Гарднера «Математические досуги»).

Несколько более сложно

Упражнение 3. Найдите все треугольники, которые разрезаются на три подобных друг другу треугольника.

О ситуации для разрезания на 5 попарно подобных треугольников см. в конце статьи.

Ответы и решения

Задача 1. Проведем в исходном треугольнике средние линии.

Задача 2. Пусть n четно. Одну из сторон исходного треугольника разобьем на $n/2$ равных частей. Дальнейшее очевидно из рисунка 2,а.

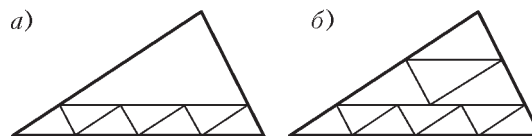


Рис. 2

Пусть теперь n нечетно и не меньше 7. Разрежем треугольник на $n - 3$ треугольника в соответствии с рис. 2,а, а затем разрежем один из них средними линиями (рис. 2,б).

Задача 3. Ответ: все прямоугольные треугольники и только они. Действительно, разрез обязательно соединяет вершину треугольника с точкой на противоположной стороне (рис. 3). Если углы при этой точке различны, то их сумма меньше π , поскольку они равны двум углам исходного треугольника. Значит, углы равны, и тогда они прямые. Обратно, любой прямоугольный треугольник можно разрезать на два подобных ему, опустив высоту из вершины прямого угла.

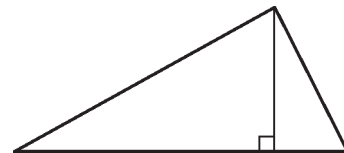


Рис. 3

Попутно мы установили простой, но полезный факт, которым будем пользоваться в дальнейшем.

Факт 1. Если имеется узел вида, изображенного на рисунке 4, т.е. к узлу примыкают только два малых треугольника, то исходный треугольник прямоугольный.

Если возникла ситуация из факта 1, будем говорить для краткости, что «получена прямоугольность».

Задача 4. Ответ таков же, как в задаче 3: все прямоугольные треугольники и только они.

Действительно, разрезав прямоугольный треугольник на два ему подобных, можно аналогично разрезать один из полученных и получить разрезание на три. С другой стороны, пусть треугольник разрезан на три подобных ему. Наименьший из его углов не может быть разрезан. У малого треугольника, который содержит этот угол, все вершины – на сторонах исходного. Либо одна, либо

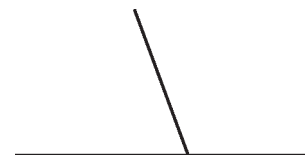


Рис. 4



Рис. 5

две из этих вершин совпадают с вершинами исходного треугольника. В первом случае (рис.5,а) остается выпуклый четырехугольник, а во втором (рис.5,б) – треугольник. В обоих случаях убеждаемся несложным перебором, что при дальнейшем разрезании на два треугольника получаем прямоугольность.

Мы установили еще один полезный факт.

Факт 2. Пусть исходный треугольник имеет углы $\alpha \leq \beta \leq \gamma$. Тогда угол α не может быть разрезан. Все вершины малого треугольника, который его накрывает, лежат на границе исходного треугольника. Этот малый треугольник мы будем называть α -треугольником.

Задача 5. Если углы исходного треугольника не разрезаются, то они принадлежат трем разным малым треугольникам. Остальные вершины этих треугольников лежат на сторонах исходного. Предположим, что на какой-то стороне имеется промежуток между вершинами указанных треугольников (рис.6,а). Чтобы на его концах не получить прямоугольность, нужно провести не менее двух разрезов. Но нам

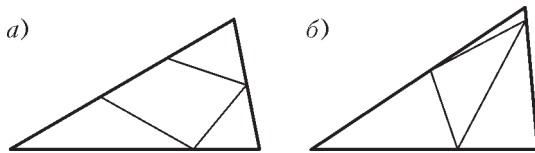


Рис. 6

остается провести лишь один разрез. Если же стороны данных трех треугольников полностью покрывают стороны исходного, то в центре остается треугольник, который нужно разрезать на два (рис.6,б). Как в задаче 3, получаем прямоугольность.

Задача 6. Узлов не может быть больше трех. Действительно, в пяти малых (полученных при разрезании) треугольниках всего имеется 15 углов. Из них не менее 4 находится при вершинах исходного треугольника (поскольку хотя бы один из его углов разрезан), и на все узлы остается не более 11 углов. Если исходный треугольник непрямоугольный, то к каждому узлу примыкает не менее трех углов (см. факт 1). Четыре узла дали бы по меньшей мере $3 \cdot 4 = 12$ углов, поэтому узлов не более трех.

Задача 7. Общая сумма углов пяти малых треугольников равна 5π . Из них π приходится на вершины исходного треугольника, а на узлы остается 4π . Согласно задаче 6, имеется не больше трех узлов. Значит, в некотором узле сумма углов больше π . Но сумма углов при узле с рисунка 1,а равна π . Поэтому имеется узел с рисунка 1,б (с суммой углов 2π).

Задача 8. К узлу с суммой углов 2π примыкает не менее трех углов малых треугольников. Но и не более четырех – ввиду факта 2: такой узел лежит строго внутри исходного треугольника, а все вершины α -треугольника находятся на его границе, поэтому α -треугольник не примыкает к этому узлу.

Пусть к узлу примыкают четыре треугольника. Если они образуют невыпуклый многоугольник, то образовавшуюся

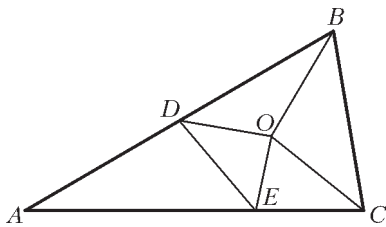


Рис. 7

выемку должен заполнить α -треугольник, но тогда его вершина находится строго внутри исходного треугольника – снова противоречие с фактом 2. Если же четыре треугольника в совокупности образуют треугольник, то

на его границе получаем прямоугольность. Значит, вокруг узла образуется выпуклый четырехугольник. Одна из его сторон должна совпасть со стороной α -треугольника, чтобы получился исходный треугольник (рис.7).

Пусть теперь к рассматриваемому узлу примыкают три треугольника. Предположим, что вершина какого-либо из них лежит на стороне, но не в вершине, другого. Тогда получается выемка, которую надо заполнить углами двух оставшихся треугольников. Но α -треугольник в этом участвовать не может ввиду факта 2. Если же используется только один из оставшихся треугольников, то получаем прямоугольность (ввиду факта 1). Поэтому на самом деле три треугольника при узле образуют треугольник (рис.8; не показаны два примыкающие к узлу).

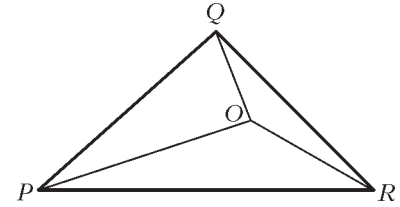


Рис. 8

Задача 9. а) Рассмотрим конфигурацию,

изображенную на рисунке 7. Пусть исходный треугольник имеет углы $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ при вершинах A, B, C . Ясно, что угол β может быть разрезан лишь на углы, равные α . Значит, $\beta = 2\alpha$. Угол $\angle BCO$ меньше γ и не может быть равен α , так как угол α в треугольнике BCO уже есть (а именно $\angle CBO$). Значит, $\angle BCO = \beta$. Если $\angle ECO = \alpha$, то получаем $\alpha + \beta = \gamma = \pi/2$, и исходный треугольник прямоугольный. Значит, в интересующем нас непрямоугольном случае $\angle ECO = \beta$, т.е. $\gamma = 2\beta$. Отсюда получаем

$$\alpha = \frac{\pi}{7}, \beta = \frac{2\pi}{7}, \gamma = \frac{4\pi}{7}. \quad (*)$$

Из четырех углов таких размеров нужно сложить угол 2π (при точке O). Нетрудно убедиться, что такое представление единственно, а именно $3\gamma + \beta$.

В треугольниках BCO и ECO угол β уже есть (при точке C). Поэтому $\angle COB = \angle COE = \gamma$, и треугольники BCO и ECO равны по общей стороне и двум прилежащим углам. Отсюда $BO = EO$. В треугольнике BDO сторона DO лежит против наименьшего угла α и, значит, $DO < BO$, откуда $DO < EO$ и потому $\angle EDO \neq \alpha$. Углы $\angle BDO$ и $\angle ADE$ также не равны α , поскольку в соответствующих треугольниках угол α уже есть. Сумма трех перечисленных углов равна π . Но нетрудно проверить, что из трех углов, имеющих размеры из формулы (*), можно сложить угол π только одним способом: $\alpha + \beta + \gamma$. Получено противоречие, т.е. рассматриваемая конфигурация в непрямоугольном случае невозможна.

б) Перейдем к конфигурации с рисунка 8. По сравнению с предыдущим нам предстоит легкая прогулка вокруг треугольника. Пусть два угла при точке O не равны. Так как они равны углам исходного треугольника, то их сумма меньше 180° . То же верно для третьего угла, и общая сумма получается слишком малой. Значит, в действительности все три угла равны. Тогда они составляют по 120° и, следовательно, равны наибольшему углу исходного треугольника, γ в наших обозначениях. Значит, углы $\angle OPQ$ и $\angle OQP$ равны (в каком-то порядке) α и β . Положим $r = OP/OQ$. Так как углы $\angle OQR$ и $\angle ORQ$ тоже равны (в каком-то порядке) α и β , отношение OQ/OR равно либо r , либо $1/r$. То же верно для OR/OP . Перемножим по кругу: $OP/OQ \cdot OQ/OR \cdot OR/OP = 1$. Левая часть равна r в ненулевой (поскольку нечетной) степени. Отсюда $r = 1$ и $\alpha = \beta = 30^\circ$. Треугольник с углами $120^\circ, 30^\circ, 30^\circ$ разрезается на пять подобных ему, как показано на рисунке 9. Таким образом, нам удалось найти единственный (с точно-

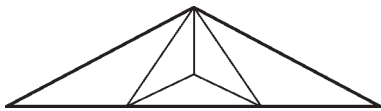


Рис. 9

Итак, задача, поставленная в начале статьи, полностью решена. Просуммируем.

На n треугольников, подобных исходному, можно разрезать:

- при $n = 2, 3$ – любой прямоугольный треугольник и никакой другой;
- при $n = 4$ и $n \geq 6$ – любой треугольник;
- при $n = 5$ – любой прямоугольный треугольник, а также треугольник с углами $120^\circ, 30^\circ, 30^\circ$.

Упражнение 1. Для прямоугольных треугольников результат следует из задачи 3. Для равнобедренных и равносторонних он очевиден: проведем высоту. Обратное, пусть треугольник разрезан на два подобных. Они прямоугольны (аналогично решению задачи 3). Два неразрезанных угла либо равны между собой (т.е. треугольник равнобедренный или равносторонний), либо равны двум разным острым углам прямоугольного треугольника. Тогда их сумма равна 90° , и исходный треугольник – прямоугольный.

Упражнение 2. а) Разделим каждую сторону треугольника на n равных частей. Через точки деления проведем прямые, параллельные сторонам треугольника.

б) Аналогично упражнению 1 получаем, что малые (полученные при разрезании) треугольники прямоугольные и имеют общий катет. Так как треугольники равны, то вторые катеты тоже равны. Это означает, что в исходном треугольнике одна из высот является медианой, т.е. прилежащие стороны равны.

в) Из решения п. б) с учетом задачи 3 видно, что треугольник – равнобедренный и прямоугольный. Такой треугольник, очевидно, допускает требуемое разрезание.

стью до подобия) непрямоугольный треугольник, который можно разрезать на пять подобных ему.

Упражнение 3. Ответ тот же, что в упражнении 1: все прямоугольные, равнобедренные и равносторонние треугольники и только они. Для таких треугольников разрезание на три подобных понятно из предыдущего. Обратное, пусть треугольник разрезан на три подобных. Если разрезаны все три его угла, то получаем конфигурацию с рисунка 8; рассуждая как в п.б) решения задачи 9, получаем, что треугольник равносторонний. Если один из углов не разрезан, то, рассуждая как при решении задач 4 и 3, получаем, что малые треугольники прямоугольные и еще один угол исходного треугольника не разрезан. Тогда либо один из неразрезанных углов прямой, либо два таких угла равны между собой (и треугольник равнобедренный или равносторонний), либо они равны двум разным острым углам малого треугольника. В последнем случае их сумма составляет 90° , и исходный треугольник прямоугольный.

Осталось неисследованным единственное значение: $n = 5$. Не всякий треугольник разрезается на 5 попарно подобных треугольников.³ Из упражнения 1 и задачи 3 видно, что годятся все прямоугольные, равнобедренные и равносторонние треугольники: разрезаем их на два подобных прямоугольных, а затем режем один из них на четыре подобных ему. Заметим, что и треугольник с рисунка 9 – равнобедренный. Тем не менее, в статье С.А. Jones, Р. Jones and А.В. Bolt, упомянутой выше, приведены шесть неравнобедренных и непрямоугольных треугольников, допускающих разрезание на 5 попарно подобных. Неизвестно, можно ли расширить этот список. Возможно, кто-то из заинтересовавшихся читателей сумеет это доказать (или опровергнуть). Автор признателен С.В. Маркелову за сведения об указанной статье и о некоторых других публикациях, упомянутых выше.

³ В «Кванте» №7 за 1990 год опубликована задача А. Сойфера (M1234) на эту тему (а два ее решения опубликованы А. Сойфером и Н. Васильевым в №12 за тот же год).

ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»

Устоит ли наш кораблик?

С. БОГДАНОВ, О. ПОПОВ, Д. ТАРАСОВ

МНОГИЕ ИЗ НАС МАЛЬЧИШКАМИ МАСТЕРИЛИ КОРАБЛИКИ – из досок, брусков, коробок, а иногда и из скорлупы ореха или старой калоши. Они получались разными: то легкими и верткими, как индейские каноэ, то тяжелыми и неповоротливыми, как старинные броненосцы. Некоторые были вовсе неказистыми, плавали лишь на боку, с креном, или даже переворачивались. Были и разные книги с рисунками сказочных по красоте судов с замысловатым такелажем, гордыми форштевнями и полным парусным вооружением. Был, наконец, и курс механики в университете – с отточенной простотой формул и емкими формулировками, строго очерчивающими реалии и границы возможного: «судно остойчиво, если метацентр расположен выше центра

тяжести». Все доказательно, четко и понятно, и ясны алгоритмы расчета и принципы совершенствования корпусов судов, их обводных линий, килей и шпангоутов.

И все же, притягивает то далекое, когда все было впереди и, хотя неопределенно и туманно, все было возможно. Когда чувство гордости мастера и профессионала еще не заменяло безотчетной радости от неожиданных открытий в простых делах, с обычными вещами...

А простые вещи по-прежнему дают повод и для удивления, и для маленьких открытий. А иногда позволяют по-новому посмотреть и на сложное.

Наш кораблик. Рассмотрим, например, длинный брусок прямоугольного сечения – чем не модель судна, ведь это основа корпуса, а остальное можно довообразить и потом достроить. Как водится, будем даже для простоты считать брусок бесконечно длинным (или, как сказал бы корабель, откажемся от рассмотрения дифферента и возможных продольных ко-

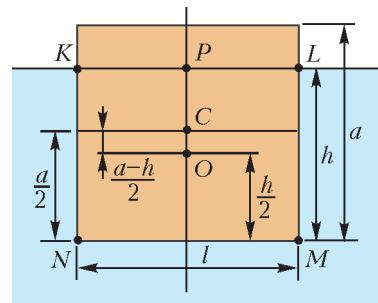


Рис. 1

лебаний). Задача ставится просто: какое из возможных положений равновесия бруска в воде будет устойчивым? В частности: при каких условиях он будет плавать «плашмя», как показано на рисунке 1?

Обозначим стороны сечения бруска l и a , а глубину погруженной части – h . Центры тяжести бруска и его погруженной части в положении равновесия обозначим точками C и O соответственно. Очевидно, что точка O совпадает с точкой приложения архимедовой силы. Из условия равновесия непосредственно следует

$$h = \frac{a\rho}{\rho_0},$$

где ρ и ρ_0 – плотности бруска и воды соответственно. Плотность бруска, естественно, считается меньше плотности воды, так что $h < a$ (условие плавания).

Чтобы выяснить, является ли положение равновесия устойчивым, следует рассмотреть малое угловое отклонение бруска от вертикали на угол α (рис.2). Погруженная в воду часть бруска будет теперь представлять собой прямоугольную трапецию $NK'L'M$ с основаниями $h+s$ и $h-s$ и высотой l . Величину $s = KK' = LL'$ – смещение «ватерлинии» – можно выразить через угол α непосредственно из треугольника KPK' :

$$s = \frac{l}{2} \operatorname{tg} \alpha.$$

Очевидно, что при отклонении от положения равновесия точка приложения архимедовой силы сместится вверх и вправо – в новое положение O' , соответствующее центру тяжести указанной трапеции. Это смещение легко рассчитать. Введем систему координат XOY , как показано на рисунке 2, ее начало совпадает с точкой O приложения архимедовой силы в положении равновесия. Трапецию можно представить как сумму трех простых фигур: прямоугольника $KLMN$, треугольника PLL' и (со знаком «минус») треугольника PKK' . В выбранной системе координат центры тяжести этих фигур задаются координатами $(0, 0)$, $(l/3, h/2 + s/3)$, $(-l/3, h/2 - s/3)$ соответственно. Учитывая также, что массы фигур пропорциональны их площадям (брусок считается однородным) lh , $ls/4$ и $ls/4$, для координат (x, y) точки O' нетрудно получить

$$x = \frac{sl}{6h}, \quad y = \frac{s^2}{6h}.$$

Устой ли? В смещенном положении на брусок действует пара сил: направленная вертикально вниз сила тяжести mg , приложенная к точке C , и направленная вверх архимедова сила $F_{\text{арх}}$, приложенная к точке O' . Очевидно, эта пара создаст возвращающий момент, если точка O' окажется правее вертикальной прямой, проходящей через точку C . Поскольку $CO = (a - h)/2$, уравнение этой прямой в выбранной системе координат имеет вид

$$y = \frac{a - h}{2} - x \operatorname{ctg} \alpha.$$

Соответственно, чтобы точка оказалась правее этой линии,

ее координаты должны удовлетворять неравенству¹

$$y + x \operatorname{ctg} \alpha > \frac{a - h}{2}.$$

Подставляя сюда выражения для координат точки O' и учитывая соотношение $s = (l/2) \operatorname{tg} \alpha$, условие устойчивости запишем так:

$$\frac{l^2}{12h} - \frac{a - h}{2} + \frac{s^2}{6h} > 0.$$

Поскольку угловое смещение α , а значит, и величина s предполагаются малыми, последним слагаемым в неравенстве можно пренебречь (как малой второго порядка). Учитывая теперь выражение $h = a\rho/\rho_0$, окончательное неравенство можно представить в следующем изящном виде:

$$\tilde{\rho}^2 - \tilde{\rho} + \frac{1}{6} \left(\frac{l}{a} \right)^2 \geq 0,$$

где $\tilde{\rho} = \rho/\rho_0$ – относительная плотность. Это неравенство задает искомые условия устойчивости в состоянии равновесия. Оно представляет собой некоторое ограничение на значения параметров $\tilde{\rho}$ и l/a .

Переходя к анализу полученного ограничения, вначале проанализируем некоторые частные случаи.

При заданном значении l/a выражение в левой части неравенства представляет собой квадратный трехчлен по отношению к параметру $\tilde{\rho}$. При $l > a\sqrt{3/2}$ дискриминант этого трехчлена отрицателен, и неравенство выполняется при любых допустимых значениях $\tilde{\rho}$. Это означает, что при указанном соотношении ширина-высота брусок всегда будет плавать плашмя (большая сторона параллельна поверхности воды) и это положение будет устойчивым.

В предельном случае $l/a \rightarrow 0$ неравенство принимает особенно простой вид: $\tilde{\rho}^2 - \tilde{\rho} \geq 0$, или, что эквивалентно, $\tilde{\rho} \leq 0$, $\tilde{\rho} \geq 1$. Но это противоречит условию задачи ($\tilde{\rho} \in (0; 1)$), откуда приходим к заключению, что вертикальное устойчивое положение в указанном пределе невозможно.

В общем случае полученное решение поставленной задачи для наглядности удобно представить графически на плоскости с осями l/a и $\tilde{\rho}$ (рис.3). Граница области устойчивого равновесия, определяемой исследуемым неравенством, зада-

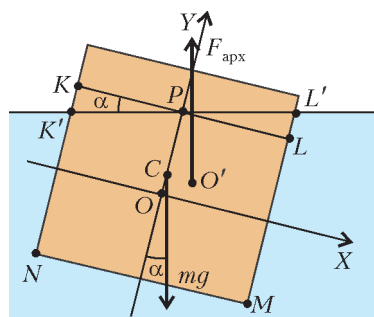


Рис. 2

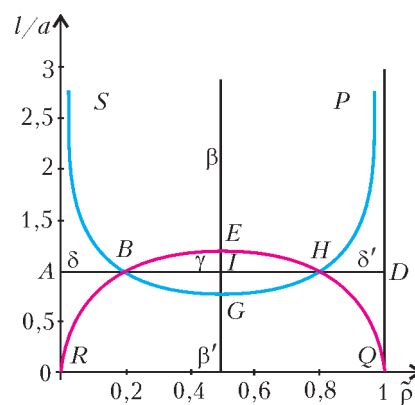


Рис. 3

¹ Это неравенство можно интерпретировать и другим, более каноническим образом. Точка S пересечения вертикали, проходящей через O' , с осью OY называется метacentром, а отрезок CS , длина которого как раз определяется левой частью неравенства, – метацентрической высотой h_0 . Таким образом, неравенство можно записать в очень простом виде: $h_0 > 0$, что фактически эквивалентно приведенному в начале статьи «теоретическому» условию устойчивого плавания.

ется уравнением

$$\left(\frac{l/a}{\sqrt{3/2}}\right)^2 + \left(\frac{\bar{\rho} - 1/2}{1/2}\right)^2 = 1, \quad (*)$$

которому соответствует эллипс с полуосями $(1/2, \sqrt{3/2})$.

Область вне эллипса соответствует значениям параметров, при которых положение равновесия устойчиво. В частности, область, ограниченная снизу контуром $ABEHD$, отвечает устойчивому плаванию в положении «плашмя» ($l > a$). С другой стороны, двухсвязная область вне эллипса, ограниченная сверху отрезками AB и HD , соответствует таким положениям равновесия, когда большая сторона сечения расположена вертикально.

Анализ устойчивости равновесия для значений параметров, соответствующих внутренней части эллипса, требует более тщательного рассмотрения. Основным результатом здесь тоже интерпретируется легко: при этих значениях параметров отвечающие им положения равновесия неустойчивы. В частности, область, ограниченная сверху контуром $RBHQ$, соответствует неустойчивому плаванию на меньшей стороне (на торце), а криволинейный треугольник BEH соответствует значениям параметров, при которых неустойчиво положение «плашмя».

Эти выводы, однако, можно существенно усилить и дополнить, если принять во внимание, что каждому брусу соответствуют в действительности два значения геометрического параметра – «основное» l/a и обратное ему a/l – и, как следствие, две точки на графике. Таким образом, полный вывод о всех возможных положениях равновесия каждого тела можно сделать, принимая во внимание положение обеих этих точек. В этой связи для более наглядной интерпретации результатов удобно использовать и «инверсную» по отношению к эллипсу линию $SBGHP$, которая также приведена на рисунке 3. Действительно, две эти линии разбивают физическую область на три домена, которым соответствуют различные типы равновесия.

Первый из них, задаваемый двухсвязной областью δ и δ' в устойчивой зоне, характерен тем, что «инвертирование» любой точки не выводит ее за пределы этого домена. Физически это соответствует возможности устойчивого равновесия в обоих положениях: и «плашмя», и на торце.

Второй домен также состоит из двух частей: области β из устойчивой зоны и области β' из неустойчивой зоны внутри эллипса. Ранее было показано, что в области β' плавание на торце неустойчиво. Однако, как теперь становится ясным, у этой неустойчивости есть альтернатива. Ведь каждой из точек области β' соответствует инверсная точка в области β , описывающей устойчивое плавание «плашмя». Другими словами, обеим областям этого домена соответствует устойчивое плавание «плашмя».

Наконец, третий домен ограничен контуром $BEHG$ в неустойчивой зоне, и инверсия не выводит его точки за пределы этого контура. Это означает, что любое горизонтальное – «плашмя» или на торце – положение равновесия будет здесь неустойчивым. Более подробный анализ устойчивости в этом случае представляет собой самостоятельную и довольно трудную задачу. Однако в качестве дополнения можно сделать два замечания, относящихся к особой точке I и точкам контура $BEHG$; здесь физика достаточно прозрачна.

Точка I соответствует брусу квадратного сечения с относительной плотностью $\bar{\rho} = 1/2$. Здесь в положении устойчивого равновесия ватерлиния совпадает с диагональю квадрата.

Верхней границе BEH домена соответствуют значения параметров l/a и $\bar{\rho}$, при которых нестрогое неравенство обращается в равенство. Физически это означает, что брусок будет находиться в состоянии безразличного равновесия: точка приложения архимедовой силы при любом отклонении от исходного равновесного состояния будет оставаться на вертикали, проходящей через центр тяжести S бруска, и пара сил будет обладать нулевым моментом.

«Ходовые испытания». При планировании и проведении опытов целесообразно принять во внимание некоторые «реперные» значения параметров. К ним можно, в частности, отнести координаты точек $E(0,5, \sqrt{3/2})$ и инверсной ей точки $G(0,5, \sqrt{2/3})$, а также «точек ветвления» $B((1 - 1/\sqrt{3})/2, 1)$ и $H((1 + 1/\sqrt{3})/2, 1)$. Как следствие, можно, например, сразу сделать вывод о том, что для наблюдения устойчивого плавания на торце нужно использовать материалы с относительной плотностью $\bar{\rho} \leq (1 - 1/\sqrt{3}) \approx 0,2$ или $\bar{\rho} \geq (1 + 1/\sqrt{3}) \approx 0,8$.

Результаты некоторых экспериментов, проведенных с брусками² различного типа, приведены в таблице и проиллюстрированы рисунком 4. В большинстве случаев «критические» значения параметров, при которых происходит смена режима устойчивости, удалось установить достаточно точно

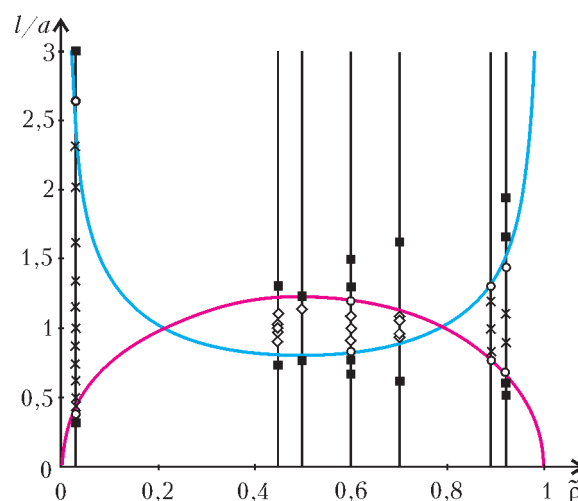


Рис. 4. Брусок плавает: \times на обеих сторонах, \diamond — наклонно, \circ — неустойчиво, \blacksquare — плашмя

и в хорошем соответствии со значениями, рассчитанными по формуле (*). В частности, для пенопластовых ($\bar{\rho} \approx 0,03$) и восковых ($\bar{\rho} \approx 0,92$) брусков устойчивое плавание на меньшей стороне (на торце) наблюдалось лишь при $2,64 \geq l/a \geq 0,38$ и $1,44 \geq l/a \geq 0,69$ при соответствующих расчетных значениях 0,42 и 0,66.

Вместо заключения. Мы достигли своей цели, если результат оказался читателям неожиданным и простым или — неожиданно простым. Далее — дело техники: соотношение (*) и соответствующий ему рисунок 3 можно использовать как простой краткий справочник: под данный материал ($\bar{\rho}$) выбрать значение параметра l/a (например, из устойчивой зоны β , с известным запасом прочности) — и основа корпуса готова. Остается выстрогать по контуру обводные линии и укрепить мачту. Кораблик готов и, хоть и плоскодонный, будет плавать устойчиво.

² Очевидно, экспериментировать можно и с пустыми коробками: все выкладки и выводы справедливы и для этого случая.

Таблица

«Критические» значения геометрического параметра: экспериментальные и расчетные (последние отмечены звездочкой)

Материал	$\tilde{\rho}$	$(l/a)^*$	$(a/l)^*$	l	a	l/a	a/L	Плавают
Пенопласт	0,03	2,39	0,42	8,10	8,10	1,00	1,00	на обеих сторонах
				8,10	7,00	1,16	0,86	на обеих сторонах
				8,10	6,00	1,35	0,74	на обеих сторонах
				8,10	5,00	1,62	0,62	на обеих сторонах
				8,10	4,00	2,03	0,49	на обеих сторонах
				8,10	3,50	2,31	0,43	на обеих сторонах
				8,10	3,07	2,64	0,38	неустойчиво
8,10	2,70	3,00	0,33	плашмя				
Ель	0,6	1,20	0,83	6,00	5,50	1,09	0,92	наклонно
				9,00	7,50	1,20	0,83	неустойчиво
				9,00	6,00	1,50	0,67	плашмя
				6,50	5,00	1,30	0,77	плашмя
8,50	8,50	1,00	1,00	наклонно, практически на ребре				
Воск (свечной)	0,92	1,50	0,66	3,50	1,80	1,94	0,51	плашмя
				3,00	1,80	1,67	0,60	плашмя
				2,60	1,80	1,44	0,69	неустойчиво
				2,00	1,80	1,11	0,90	на обеих сторонах

Если же хочется построить нечто более изящное и надежное, можно рассмотреть брусок более сложного, например трапециидального, сечения, близкого к реальным профилям судов. Наверное, значительно повлияет на результат учет килля, балласта.

Отдельная тема – обводные линии. Пробуйте – может быть, удастся получить что-то еще более простое и неожиданное.

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

Задачи на смешение идеальных газов

А. ЧЕРНОУЦАН

В ЭТОЙ СТАТЬЕ МЫ ОСТАНОВИМСЯ НА ЗАДАЧАХ, ГДЕ ДВА идеальных газа переходят из начального состояния в конечное смешиваясь друг с другом. Задачи такого типа встречаются в двух разделах – в газовых законах и в термодинамике. Если начальные и конечные температуры газов заданы в условии, то в решении используются только газовые законы – уравнение состояния идеального газа и закон Дальтона для парциальных давлений. Если же для определения конечных параметров нужен закон сохранения энергии, то такие задачи относятся к термодинамике.

Задача 1. Под каким давлением надо наполнить воздухом баллон емкостью 10 л, чтобы при соединении его с баллоном емкостью 30 л, содержащим воздух при давлении 100 кПа, установилось общее давление 200 кПа? Температура постоянна.

Решение. Эту задачу можно решать двумя способами – либо через закон Дальтона, который позволяет разделить газы и следить за изменением состояния каждого газа в отдельности, либо через уравнение состояния Менделеева–Клапейрона и закон сохранения количества вещества.

Способ 1. Конечное давление p' равно сумме парциальных конечных давлений p'_1 и p'_2 обеих порций воздуха:

$$p' = p'_1 + p'_2,$$

каждое из которых связано с соответствующим начальным давлением уравнением изотермического процесса:

$$p_1 V_1 = p'_1 (V_1 + V_2),$$

$$p_2 V_2 = p'_2 (V_1 + V_2).$$

Сложив два последних уравнения, с учетом первого уравнения получим

$$p_1 V_1 + p_2 V_2 = p' (V_1 + V_2), \tag{1}$$

откуда найдем искомое давление:

$$p_1 = \frac{p' (V_1 + V_2) - p_2 V_2}{V_1} = 500 \text{ кПа}.$$

Способ 2. Запишем уравнение Менделеева–Клапейрона

для двух начальных состояний и для одного конечного:

$$\begin{aligned} p_1 V_1 &= \nu_1 RT, \\ p_2 V_2 &= \nu_2 RT, \\ p'(V_1 + V_2) &= \nu' RT. \end{aligned} \quad (2)$$

Выразив из каждого уравнения соответствующее количество молей и подставив в закон сохранения количества вещества

$$\nu_1 + \nu_2 = \nu',$$

снова получим уравнение (1).

Задача 2. Два сосуда, содержащие один и тот же идеальный газ, соединены тонкой трубкой с краном. Вначале кран закрыт, в первом сосуде объемом 10 л давление 180 кПа и температура 300 К, во втором сосуде объемом 20 л давление 150 кПа и температура 200 К. Каким станет давление, если открыть кран и установить в сосудах температуру 400 К?

Решение. Эту задачу можно решить любым из двух способов, описанных в предыдущей задаче. В первом способе, через закон Дальтона, надо для каждого газа записать не уравнение изотермического процесса, а объединенный газовый закон. Во втором способе надо в трех уравнениях состояний системы (2) поставить различные температуры. В любом из способов мы вместо уравнения (1) получим уравнение

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} + \frac{p_2 V_2}{T_2} = \frac{p'(V_1 + V_2)}{T'}. \quad (3)$$

Подставив численные данные, найдем установившееся давление смеси газов:

$$p' = 280 \text{ кПа.}$$

В некоторых случаях условие задачи сформулировано так, что без записи уравнения состояния решить ее не получится.

Задача 3. Два баллона соединены между собой тонкой трубкой с краном. В одном баллоне находится газ массой 2 г под давлением 400 кПа, в другом – такой же газ массой 4 г под давлением 200 кПа. Какое давление установится в баллонах, если открыть кран? Температуры газа в баллонах одинаковы.

Решение. В этой задаче заданы не объемы, а массы газов. Чтобы воспользоваться уравнением (1), надо с помощью уравнений Менделеева–Клапейрона найти отношение объемов V_1/V_2 . Однако более естественно переписать уравнения системы (2) в виде

$$\begin{aligned} p_1 V_1 &= \frac{m_1}{M} RT, \\ p_2 V_2 &= \frac{m_2}{M} RT, \\ p'(V_1 + V_2) &= \frac{m_1 + m_2}{M} RT, \end{aligned}$$

выразить V_1 и V_2 из первых двух уравнений и подставить в третье. Получим

$$p' \left(\frac{m_1}{p_1} + \frac{m_2}{p_2} \right) = m_1 + m_2,$$

откуда найдем $p' = 240$ кПа.

В некоторых задачах использование уравнений Менделеева–Клапейрона на первый взгляд не является обязательным (в условии не упоминаются ни массы газов, ни их молярные массы). Однако после внимательного анализа оказывается, что без них решить задачу не удастся.

Задача 4. Два одинаковых сосуда соединены тонкой трубкой. Система наполнена газом и находится при температуре 27 °С. Температуру одного из сосудов увеличили

на 33 °С. На сколько градусов надо уменьшить температуру другого сосуда, чтобы давление в системе не изменилось?

Решение. При изменении температуры сосудов между газами в них поддерживается механическое равновесие, т.е. давления в этих сосудах все время выравниваются. Для выравнивания давлений газ из нагреваемого сосуда переходит в охлаждаемый, а попав туда, принимает температуру холодного сосуда. Именно поэтому не удастся проследить за изменением состояния каждого газа в отдельности. Подход же, основанный на сохранении общего количества вещества, прекрасно срабатывает.

Запишем уравнения Менделеева–Клапейрона для первоначального состояния и для двух конечных состояний:

$$\begin{aligned} p \cdot 2V &= \nu RT, \\ p'V &= \nu'_1 RT'_1, \\ p'V &= \nu'_2 RT'_2, \end{aligned}$$

выразим из них количества вещества и подставим в уравнение

$$\nu = \nu'_1 + \nu'_2.$$

Получим

$$\frac{2p}{T} = \frac{p'}{T'_1} + \frac{p'}{T'_2}.$$

Поскольку по условию $p' = p$, то

$$T'_2 = \frac{TT'_1}{2T'_1 - T} = 273 \text{ К,}$$

т.е. второй сосуд надо охладить на 27 К (на 27 °С).

К задачам на смешение газов можно также отнести задачи, где при определенных условиях происходит частичная диссоциация газов.

Задача 5. При повышении температуры азота, заключенного в закрытый сосуд, от 7 °С до 1407 °С третья часть молекул азота распалась на атомы. Во сколько раз при этом возросло давление газа?

Решение. При диссоциации третья часть массы азота превратилась в одноатомный газ, т.е. в газ с молярной массой вдвое меньшей, чем у двухатомного. Запишем уравнения состояния для изначального газа и для каждого из компонентов образовавшейся смеси:

$$\begin{aligned} pV &= \frac{m}{M} RT, \\ p'_1 V &= \frac{2m/3}{M} RT', \\ p'_2 V &= \frac{m/3}{M/2} RT'. \end{aligned}$$

Складывая последние два уравнения и учитывая, что по закону Дальтона

$$p'_1 + p'_2 = p',$$

получаем

$$p'V = \frac{4}{3} \frac{m}{M} RT',$$

или

$$\frac{p'}{p} = \frac{4}{3} \frac{T'}{T} = 8.$$

Впрочем, если использовать запись уравнения состояния $pV = \nu RT$ и понимать, что ν соответствует общему количеству идеального газа, независимо от состава и типа молекул, то нетрудно сообразить, что общее число молекул увеличилось на одну треть, т.е. $\nu' = \frac{4}{3}\nu$, и сразу получить ответ.

К этим задачам естественно присоединить задачи на изменение состояния влажного воздуха. Правда, задачи на влажность традиционно относятся к термодинамике, но решаются они исключительно с помощью газовых законов с учетом того факта, что давление водяного пара не может превышать давление насыщенного пара при данной температуре.

Задача 6. В закрытом сосуде при температуре 100 °С находится влажный воздух под давлением 1,5 атм. После того как объем сосуда изотермически уменьшили в 3 раза, давление возросло до 4,3 атм. Чему была вначале равна относительная влажность? Объемом сконденсировавшейся воды пренебречь.

Решение. Анализируя изменение состояния влажного воздуха, необходимо мысленно разделять его на два компонента – водяной пар, т.е. газ молекул воды, и сухой воздух, т.е. газ всех остальных молекул. Сухой воздух подчиняется обычным газовым законам, а давление водяного пара не может стать больше давления насыщенного пара p_n при данной температуре. Если давление пара получится больше, то надо положить конечное давление пара равным p_n (при достижении этого давления началась конденсация, и давление перестало возрастать).

В данном случае рассуждением от противного можно сразу установить, что в процессе сжатия вода конденсировалась, т.е. в конечном состоянии сосуд содержит насыщенный пар в равновесии с некоторым количеством сконденсировавшейся воды. Иначе давление всего газа в изотермическом процессе увеличилось бы в 3 раза и было бы равно 4,5 атм.

Поскольку установившееся давление в сосуде складывается из давления воздуха и давления пара:

$$p_2 = p_{в2} + p_{п2} = p_{в2} + p_n$$

и при 100 °С давление пара $p_n = 1$ атм, конечное давление сухого воздуха $p_{в2} = 3,3$ атм. Применяя к сухому воздуху уравнение изотермического процесса $p_{в1}V_1 = p_{в2}V_2$, находим, что начальное давление воздуха $p_{в1} = 1,1$ атм, а начальное давление пара $p_{п1} = p_1 - p_{в1} = 0,4$ атм.

Следовательно, относительная влажность в начальном состоянии составляла

$$\varphi = \frac{p_{п1}}{p_n} \cdot 100\% = 40\% .$$

В термодинамических задачах в условии обычно приводятся сведения, необходимые для записи закона сохранения энергии. Чаще всего указывается, что система теплоизолирована, т.е. не обменивается теплом с окружающей средой. В некоторых задачах, наоборот, задается точное количество теплоты, переданное системе (или отобранное у системы). Напомним, что внутренняя энергия одноатомного идеального газа (гелий, аргон) равна

$$U = \frac{3}{2} \nu RT = \frac{3}{2} pV . \quad (4)$$

Задача 7. В двух теплоизолированных сосудах, соединенных тонкой трубкой с краном, находится гелий в количествах 2 моль и 3 моль при температурах 300 К и 400 К соответственно. Какой станет температура после открывания крана и установления теплового равновесия?

Решение. Запишем для системы двух газов закон сохранения энергии, выражая внутреннюю энергию через температуру (см. равенство (4)):

$$\frac{3}{2} \nu_1 RT_1 + \frac{3}{2} \nu_2 RT_2 = \frac{3}{2} \nu' RT' .$$

Используя закон сохранения количества вещества

$$\nu_1 + \nu_2 = \nu' ,$$

найдем установившуюся температуру:

$$T' = \frac{\nu_1 T_1 + \nu_2 T_2}{\nu_1 + \nu_2} = 360 \text{ К} .$$

Отметим, что конечная температура не зависит от того, какими были начальные давления газов.

Задача 8. В двух теплоизолированных сосудах объемами 2 л и 5 л, соединенных тонкой трубкой с краном, находится гелий под давлениями 30 кПа и 16 кПа соответственно, но при разных температурах. Каким будет давление после открывания крана и установления теплового равновесия?

Решение. В этом случае используем в законе сохранения энергии ту из формул (4), где внутренняя энергия выражена через объем и давление:

$$\frac{3}{2} p_1 V_1 + \frac{3}{2} p_2 V_2 = \frac{3}{2} p' (V_1 + V_2) .$$

Отсюда находим

$$p' = \frac{p_1 V_1 + p_2 V_2}{V_1 + V_2} = 20 \text{ кПа} .$$

Заметим, что конечное давление не зависит, при заданных начальных давлениях, от температур смешиваемых газов. Интересно, что закон сохранения энергии для смешивания газов в теплоизолированных сосудах приводит, независимо от начальных температур газов, к такому же ответу, как при изотермическом смешивании (см. формулу (1)).

Задача 9. В двух теплоизолированных сосудах объемами 10 л и 20 л, соединенных тонкой трубкой с краном, находится гелий под давлениями 180 кПа и 150 кПа при температурах 100 К и 500 К соответственно. Какой будет температура после открывания крана и установления теплового равновесия?

Решение. Как мы видели в задаче 8, конечное давление можно найти из закона сохранения энергии

$$\frac{3}{2} p_1 V_1 + \frac{3}{2} p_2 V_2 = \frac{3}{2} p' (V_1 + V_2) ,$$

причем начальные температуры в ответ не входят. Для нахождения конечной температуры запишем закон сохранения количества вещества в виде (см. формулу (3))

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} + \frac{p_2 V_2}{T_2} = \frac{p' (V_1 + V_2)}{T'}$$

Окончательно, для установившейся температуры получаем

$$T' = \frac{p_1 V_1 + p_2 V_2}{\frac{p_1 V_1}{T_1} + \frac{p_2 V_2}{T_2}} = 200 \text{ К} .$$

Упражнения

1. Три одинаковых сосуда, соединенных тонкими трубками, заполнены газообразным гелием при температуре 40 К. Затем один из сосудов нагрели до 100 К, другой – до 400 К, а температура третьего сосуда осталась неизменной. Во сколько раз увеличилось давление в системе?

2. В сосуде при температуре 100 °С находится влажный воздух с относительной влажностью 90% под давлением 1 атм. Объем сосуда изотермически уменьшили в 2 раза. На сколько процентов надо вместо этого увеличить абсолютную температуру воздуха, чтобы получить такое же конечное давление? Объемом сконденсировавшейся воды пренебречь.

3. Два теплоизолированных сосуда одного и того же объема соединены тонкой трубкой с краном. В одном сосуде находится гелий при температуре 200 К, а в другом – гелий при температуре 400 К и при давлении в 3 раза большем, чем в первом сосуде. Какой станет температура (в кельвинах) газа после открывания крана и установления теплового равновесия?