

журнал© Квант июль 2008 №4 АВГУСТ 2008

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:



Учредители — Российская академия наук, Фонд поддержки фундаментальной науки и образования (Фонд Осипьяна), ИФТТ РАН

ПРЕДСЕДАТЕЛЬ
РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ

Ю.А.Осипьян

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

С.С.Кротов

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

А.Я.Белов, Ю.М.Брук, А.А.Варламов,
А.Н.Виленин, В.И.Голубев, С.А.Гордюнин,
Н.П.Долбиллин (заместитель главного редактора), В.Н.Дубровский,
А.А.Егоров, А.В.Жуков,
А.Р.Зильберман, В.В.Кведер (заместитель председателя редколлегии), П.А.Кожевников,
В.В.Козлов (заместитель председателя редколлегии), С.П.Коновалов, А.А.Леонович,
Ю.П.Лысов, В.В.Произволов, Н.Х.Розов,
А.Б.Сосинский, А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин,
В.М.Тихомиров, В.А.Тихомирова, В.М.Уроев,
А.И.Черноуцан (заместитель главного редактора)

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

А.В.Анджанс, В.И.Арнольд, М.И.Башмаков,
В.И.Берник, В.Г.Болтянский, А.А.Боровой,
Н.Н.Константинов, Г.Л.Коткин, С.П.Новиков,
Л.Д.Фаддеев

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
1970 ГОДА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

И.К.Кикоин

ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

А.Н.Колмогоров

Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков,
В.Г.Болтянский, И.Н.Бронштейн,
Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург, В.Г.Зубов,
П.Л.Капица, В.А.Кириллин, Г.И.Косоуров,
В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский,
А.И. Маркушевич, М.Д.Миллиончиков,
Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов,
А.П.Савин, И.Ш.Слободецкий,
М.Л.Смолянский, Я.А.Смородинский,
В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер

Бюро  Квантум

© 2008, РАН,
Фонд Осипьяна, «Квант»

- 2 К 100-летию И.К.Кикоина
2 Проблема обнаружения ядерных взрывов. *Е.Лобиков*
5 Полет и падение спутника Земли. *С.Варламов*
10 Касающиеся окружности: от Тебо до Фейербаха. *В.Протасов*

НОВОСТИ НАУКИ

- 4 Триумф фундаментальной науки

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 16 Задачи M2096–M2100, Ф2103–Ф2107
17 Решения задач M2071–M2080, Ф2088–Ф2092
23 Вокруг шестиугольника

К М Ш

- 26 Задачи
27 Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»
27 Победители конкурса имени А.П.Савина «Математика 6–8»
2007/08 учебного года
28 Проблемы дележки. *В.Уфнаровский*

НАМ ПИШУТ

- 31 Физика в «Рассказах о животных»

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

- 32 Пифагоровы треугольники

ШКОЛА В «КВАНТЕ»

- 34 О двух параллелограммах в треугольнике. *Г.Филипповский*

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

- 36 Квантовая телепортация. *А.Арутюнов*

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

- 39 О разрезании треугольника на подобные ему. *Б.Френкин*

ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»

- 42 Устоит ли наш кораблик? *С.Богданов, О.Попов, Д.Тарасов*

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

- 45 Задачи на смешение идеальных газов. *А.Черноуцан*

ОЛИМПИАДЫ

- 48 Задачи LXXI Московской математической олимпиады
50 Избранные задачи Московской физической олимпиады
54 Международный турнир «Компьютерная физика»
55 Ответы, указания, решения

НА ОБЛОЖКЕ

- I *Иллюстрация к статье С.Варламова*
II *«Невозможные» объекты*
III *Шахматная страничка*
IV *Коллекция головоломок*



В праздновании 100-летнего юбилея академика
И.К.Кикоина финансовое участие принимает
ОАО «ТЕХНАБЭКСПОРТ»



К 100-ЛЕТИЮ И.К.КИКОИНА

Проблема обнаружения ядерных взрывов

Е.ЛОБИКОВ

НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЕ РАБОТЫ ПО созданию средств дистанционного контроля за испытаниями ядерного оружия на иностранных полигонах начались в Институте атомной энергии по инициативе И.В.Курчатова в конце 1953 года. Эти исследования возглавили И.К.Кикоин, отвечающий за разработку радиационного (определение дат взрывов), акустического и электромагнитного методов регистрации, и Б.В.Курчатов, под руководством которого производился радиохимический анализ продуктов взрывов с целью определения особенностей конструкций атомных и водородных бомб.

Работа по обнаружению иностранных ядерных взрывов в атмосфере, о которых не всегда сообщалось в печати, проводилась одновременно с работами по созданию газовой центрифуги для разделения изотопов урана и потребовала привлечения значительного числа научных сотрудников¹ и инженеров Института.

Научный руководитель проблемы И.К.Кикоин рассмотрел все возможные вторичные эффекты ядерного взрыва и отобрал из них наиболее пригодные для использования при разработке средств дальнего обнаружения ядерных взрывов. Расскажем о них вкратце.

1) К началу работ было известно, что атомы радиоактивных осколков деления ядер урана-235 и плутония-239, попадающие после взрыва в атмосферный воздух, оседают на мельчайших частицах-аэрозолях, всегда присутствующих в воздухе, и могут находиться там в течение многих дней до выпадения на поверхность земли. Недостаточная чувствительность существовавшей в то время аппаратуры не позволяла непосредственно наблюдать радиоактивность осколков деления по повышению радиоактивного фона атмосферного воздуха. И.К.Кикоин предложил собирать радиоактивные аэрозоли с помощью фильтров Петрянова, замененных позже на хлопчатобумажную ткань (бязь), в специальных устройствах – гондолах ЦАГИ (Центральный аэрогидродинамический институт им. Н.Е.Жуковского), установленных на самолетах. Сжигание фильтров после окончания полета самолета приводит к увеличению на несколько порядков удельной активности в золе, в результате чего

она становится больше фона и по характеру ее β -распада можно определить дату взрыва.

Вопрос о возможности определения мощности ядерного взрыва по радиоактивности продуктов взрыва, акустическим или сейсмическим методом в 1954 году не возникал. Работы по обнаружению иностранных ядерных взрывов были ограничены установлением самого факта взрыва и определением его даты. В некоторых случаях по радиохимическому анализу собранной активности можно было установить характер взрыва – атомный или термоядерный.

По договоренности И.В.Курчатова и И.К.Кикоина с Министерством обороны СССР для сбора аэрозолей были выделены транспортные самолеты. Аэрозоли собирались во время полетов самолетов в апреле-мае 1954 года вдоль западной границы СССР (трасса Ленинград – Одесса). Общая протяженность полета с одними и теми же фильтрами составляла 30–50 тысяч километров (в течение 10 дней без смены фильтра).

Первым был зарегистрирован радиационным методом термоядерный взрыв 28 февраля 1954 года (по местному времени – 1 марта) на атолле Бикини (Маршалловы острова, Тихий океан). Дата этого взрыва была хорошо известна, поскольку от него пострадали японские рыбаки, находившиеся на корабле «Фукурю-Мару» в 165 километрах от эпицентра взрыва, и об этом было много публикаций.

Поскольку самолетный сбор радиоактивных аэрозолей был случайным процессом, И.К.Кикоин поручил своему сотруднику Ю.И.Щербине разработку прибора для детектирования радиоактивного облака непосредственно с борта летящего самолета. Такой прибор был создан и проверен в работе во время испытаний ядерного оружия США в 1956 году.

2) В условиях ядерного взрыва, когда имеет место выделение огромной энергии в ограниченном объеме окружающей среды, теоретически предсказано и экспериментально установлено образование сильной ударной волны, за фронтом которой в начальный период времени возникают высокие давления и температуры. С удалением от эпицентра ударная волна превращается в акустическую, ее распространение в атмосфере сопровождается диссипацией переносимой энергии – переходом ее в энергию теплового движения молекул газов, входящих в состав воздуха. При этом короткие

¹ Среди них был и автор статьи Евгений Александрович Лобиков. (Прим. ред.)

волны затухают быстрее, чем длинные. На больших расстояниях от эпицентра взрыва сохраняются лишь длинноволновые составляющие колебаний, а именно инфразвуки с периодом от 5 секунд до нескольких минут – в зависимости от тротилового эквивалента взрыва и условий распространения волн.

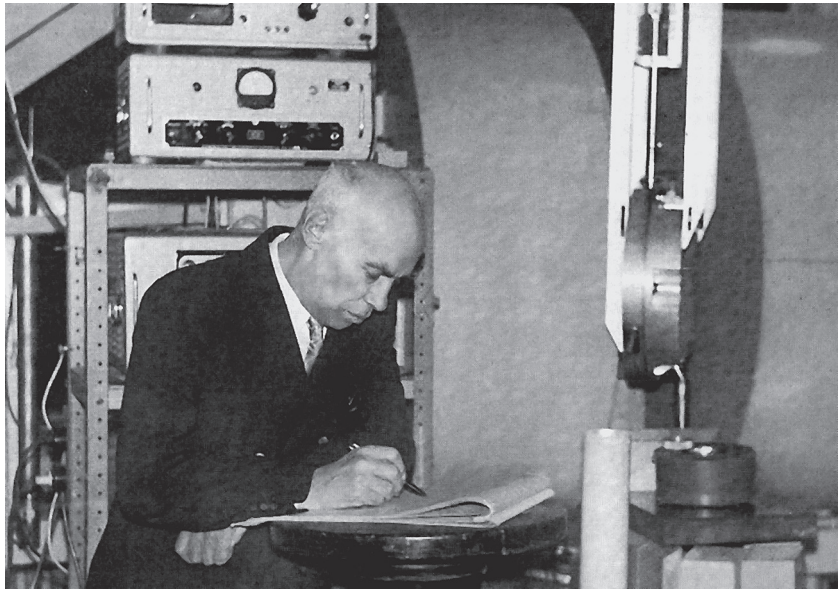
Регистрация инфразвуковых волн была предложена И.К.Кикоиным в качестве еще одного метода обнаружения ядерных взрывов. Было известно, например, что при взрыве Тунгусского метеорита инфракрасная волна, созданная взрывом, обошла несколько раз земную поверхность. Кикоин поручил своим сотрудникам разработать аппаратуру для записи инфразвуковой волны, сопровождающей ядерный взрыв.

Колебания атмосферного давления могут быть отмечены любым достаточно чувствительным манометром. Для их регистрации в Институте были сконструированы и изготовлены специальные приборы – микробарографы, имеющие высокую чувствительность и обладающие частотной избирательностью. Они позволяют регистрировать изменения атмосферного давления от десятых долей паскаля до тысяч паскалей (10^{-3} – 10 мм рт.ст.).

Акустическим методом в 1958 году, например, были зарегистрированы 23 атомных и термоядерных взрыва США с энергиями от 5,9 до 2000 килотонн тротила.

3) В 1954 году И.К.Кикоин предложил изучить возможности использования обнаруженного при взрыве излучения электромагнитного импульса в области сверхдлинных радиоволн (с длиной волны порядка 17 км) – как средства дальней регистрации ядерного взрыва. Экспериментальные исследования электромагнитного импульса были начаты на Семипалатинском полигоне в 1955 году. Максимальное расстояние, на котором регистрировался электромагнитный импульс, составляло 2700 км (наблюдательная станция находилась в Подмосковье). Была определена характерная форма сигнала, т.е. зависимость его величины от времени. Предполагая, что форма сигнала на расстояниях от эпицентра, превышающих 2700 км, существенно не меняется, были идентифицированы сигналы электромагнитного импульса американских ядерных взрывов 1958 года на Тихоокеанском полигоне, полученные на расстоянии 5000 км (наблюдательная станция располагалась на Камчатке).

Для определения направления на точку взрыва был разработан широкополосный импульсный пеленгатор. Сигналы от двух взаимно перпендикулярных рамок поступали на усилители. По отношению амплитуд записей вычислялся угол прихода сигнала. Юстировка пеленгатора производилась по работе широкоэмиттерных станций. Так, отбор сигналов, пришедших с Маршалловых островов, при использовании пеленгатора позволил существенно уменьшить число грозовых помех, которые по форме сигнала напоминали электромагнитные импульсы ядерных взрывов.



И.К. Кикоин в лаборатории Института атомной энергии

Регистрация электромагнитных импульсов ядерных взрывов позволяла определять времена взрывов с точностью порядка 1 с и большей (теоретически до 0,001 с). Предварительно время взрыва оценивалось с помощью акустического или сейсмического методов с точностью 1 мин при известном месте проведения испытаний.

В 1958 году сотрудниками Института была выполнена большая работа по обнаружению взрывов атомных и водородных бомб во время их испытаний на Тихоокеанском полигоне США. Были надежно зарегистрированы 12 ядерных взрывов по пеленгу и с подтверждением акустическим методом.

Из всех рассмотренных способов дальней регистрации ядерных взрывов наиболее надежным является радиационный, основанный на сборе радиоактивных продуктов взрыва с помощью фильтров, установленных на самолетах. Нахождение в воздухе «свежего» радиоактивного облака от конкретного ядерного взрыва при полете самолета со специальной аппаратурой, предназначенной для этой цели, позволяет собирать достаточно чистый продукт при малой примеси фоновой активности. Определение даты взрыва по скорости распада радиоактивного продукта возможно с точностью \pm одни сутки.

Любопытен такой факт. Из шести термоядерных взрывов, произведенных США в 1954 году, один был неудачным, когда взорвавшийся запал не поджег основной термоядерный заряд и выделившаяся мощность оказалась существенно меньше ожидаемой. Этот взрыв не был зарегистрирован акустическим и сейсмическим методами, но был обнаружен по выброшенной им радиоактивности и была установлена его точная дата.

В июле 1958 года в Женеве на Международной конференции экспертов по обнаружению ядерных взрывов специалистами разных стран были представлены работы по их регистрации. Эти работы послужили основой для создания эффективных национальных

средств контроля за проведением испытаний атомного оружия иностранными государствами. В итоге Женевская конференция показала, что если будет достигнуто соглашение о прекращении ядерных взрывов, то его нарушение будет обязательно обнаружено техническими средствами. Это способствовало заключению Московского договора о запрещении ядерных испытаний в трех средах: в атмосфере, под водой и в космосе. Договор подписали в 1963 году СССР, США и Великобритания.

НОВОСТИ НАУКИ

Триумф фундаментальной науки

То открытие, которое было удостоено Нобелевской премии по физике за 2007 год, в рубрике «Новости науки», строго говоря, могло появиться уже двадцать лет назад. В 1988 году французский физик Альбер Фер и немецкий физик Петер Грюнберг независимо друг от друга открыли эффект, названный гигантским магнетосопротивлением (на международном научном языке – Giant Magnetoresistance, GMR).

Работы этих ученых были по своей сути экспериментальными и проводились группами исследователей. Но будущие Нобелевские лауреаты не только руководили этими группами, но и дали теоретическое обоснование явлению.

В физике магнитных явлений есть несколько эффектов, которые имеют большое значение для практики. Это – вращение плоскости поляризации света при взаимодействии с магнитным веществом, гигантская магнитострикция (существенное изменение объема тела при его намагничивании), магнитокалорический эффект (изменение температуры при адиабатическом намагничивании или размагничивании материала во внешнем магнитном поле) и, наконец, явление гигантского магнетосопротивления.

Слово «гигантское» не должно вводить в заблуждение. В данном случае оно означает существенное – до 20 раз – увеличение или уменьшение электрического сопротивления вещества при изменении в нем направления магнитного поля. Эффект проявляется в тонких (порядка нанометров) слоях вещества, граничащих со слоями из ферромагнетика, создающими магнитное поле.

Суть явления оказалась связанной с наличием у электронов спина, т.е. собственного вращения, характеризуемого механическим и магнитным моментами. Если выбрать какое-то направление, то у спина электрона имеется две возможности ориентации – по этому направлению и против него. Спин элементарной частицы – явление квантовое. Это означает, что представить какую-нибудь геометрическую наглядную модель вращающегося электрона нельзя в принципе. И лишь очень грубая аналогия может быть проведена между спином и, например, витком с током. Общее у спина с витком только то, что оба они стремятся ориентироваться в магнитном поле так, чтобы энергия магнитного взаимодействия стала минимальной. Такие «ориентированные» электроны легче проходят через вещество под действием электрического поля – электрическое сопротивление вещества невелико. Но если направление магнитного поля внезапно изменится на противоположное, то спины электронов окажутся по отношению к нему антиориентированными и будут иметь тенденцию к переориентировке. Согласно классической теории электропроводности, при этом будет возрастать скорость хаотического (теплого) движения электронов, что и увеличит электрическое сопротивление вещества. Но в «правильной», квантовой теории следует говорить об изменении средней длины рассеяния электронных волн или об изменении вероятности

По завершении научно-исследовательских работ, проводимых в Институте атомной энергии по обнаружению ядерных взрывов, все методики, разработанная аппаратура, научная и техническая документация были переданы Службе специального контроля Министерства обороны СССР. Сама же работа «Разработка системы обнаружения ядерных взрывов на больших расстояниях» была удостоена в 1959 году Ленинской премии.



Альбер Фер



Петер Грюнберг

взаимодействия электронов с атомами вещества, что и приводит к изменению сопротивления.

Исследования Фера и Грюнберга стали пионерскими в вопросе влияния спина электрона на электропроводность вещества. Необходимо отметить, что эти исследования стали возможными только после разработки технологии изготовления тончайших слоев металла – того, что сегодня называется нанотехнологиями.

Почему же открытие GMR-эффекта, относящееся к фундаментальной науке, получило столь большое значение и известность, что было признано Нобелевским комитетом достойным этой высокой награды?

Дело в том, что на его основе родилось новое нанотехническое направление, использующее в электронике спиновые эффекты, – спинтроника. Разработанные за истекшие годы спинтронные устройства позволили, например, в сотни и даже тысячи раз увеличить эффективную плотность записи информации на магнитных носителях, в частности на жестких дисках. Просто увеличение плотности записи информации было достигнуто и без спинтроники – на основе миниатюрных катушек индуктивности. Но эффективная плотность записи, т.е. возможность считывания информации, с помощью явления электромагнитной индукции принципиально не допускала дальнейшей миниатюризации. А на основе GMR-эффекта и современных нанотехнологий были сконструированы столь миниатюрные считывающие устройства, что емкость жестких дисков выросла до терабайтных величин (тысяч гигабайт). Без этих устройств были бы невозможными как современные суперкомпьютеры, так и ноутбуки и карманные компьютеры.

Открытие эффекта гигантского магнетосопротивления стало символом главной особенности современной науки – ее неразрывной и быстрой связи с техническими воплощениями. И мы присоединяемся к словам наших коллег из журнала «Наука и жизнь»: Нобелевская премия по физике за 2007 год – это прежде всего триумф фундаментальной науки!

Л. Белопухов

Полет и падение спутника Земли

С.ВАРЛАМОВ

НАД НАШИМИ ГОЛОВАМИ ВСЕ ВРЕМЯ ЛЕТАЮТ многочисленные искусственные космические тела – спутники связи, спутники-«шпионы», метеорологические спутники, спутники с космическими туристами ... Полеты этих аппаратов проходят на таких высотах, где из-за разреженности атмосферы силы трения мало влияют на их движение, и они успевают совершить огромное число оборотов вокруг Земли, прежде чем упадут.

Спутники Земли обычно относят к трем разным группам, отличающимся высотой полета. Высоко летающие спутники (первая группа) – это аппараты, среднее расстояние от которых до поверхности Земли превышает 3–5 радиусов Земли R_3 . К этой группе, в частности, относятся так называемые геостационарные спутники. Спутники, летающие на средних высотах (вторая группа), находятся на расстояниях от Земли от 1000 км до 3–5 радиусов Земли. Самая многочисленная группа спутников (третья) – это низко летающие спутники со средней высотой полета меньше 1000 км над поверхностью Земли. Эти спутники, если их периодически не «приподнимать», со временем сходят на все более близкие к Земле орбиты и, испытывая на последнем этапе своего движения действие больших сил торможения атмосферой, падают.

Связь сил трения и скорости снижения спутника

Решим задачу о нахождении скорости снижения спутника массой M , на который в течении времени Δt действует постоянная сила трения $F \ll Mg$, направленная против скорости его движения v . Высота полета над поверхностью Земли $H \ll R_3$. Предполагается, что уменьшение высоты Δh значительно меньше самой высоты полета H .

Скорость полета спутника находится из уравнения движения (второго закона Ньютона):

$$\frac{Mv^2}{R_3 + H} = \frac{GMM_3}{(R_3 + H)^2}, \text{ и } v = \sqrt{\frac{GM_3}{R_3 + H}}.$$

При условии $H \ll R_3$ эта скорость – первая космическая – составляет приблизительно 8 км/с. Суммарная энергия спутника, движущегося по почти круговой орбите радиусом $R_3 + H$, складываются из потенциальной и кинетической энергий и составляет

$$U + E = -\frac{GMM_3}{R_3 + H} + \frac{Mv^2}{2} = -\frac{GMM_3}{2(R_3 + H)}.$$

Сила трения уменьшает эту энергию, при этом высота полета уменьшается:

$$-\frac{GMM_3}{2(R_3 + H + \Delta h)} - \left(-\frac{GMM_3}{2(R_3 + H)} \right) = -Fv\Delta t,$$

откуда

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} \approx -\frac{2Fv(R_3 + H)^2}{MGM_3} = -\frac{2F\sqrt{\frac{GM_3}{R_3 + H}}(R_3 + H)^2}{MGM_3}.$$

Как видно, скорость снижения зависит и от силы трения, и от высоты полета спутника, и от массы спутника. Сама же сила трения, в свою очередь, зависит от высоты полета, от размеров спутника и от состава космической среды на высоте полета спутника. Обсудим этот вопрос подробнее на примере Международной космической станции – МКС.

Международная космическая станция и ее параметры

Известно, что МКС, летающая ныне на высотах 300–400 км, каждые сутки опускается примерно на 150–200 м, а во время магнитных бурь ежесуточная скорость спуска достигает 300 м. Поэтому станцию периодически «подталкивают» транспортными кораблями, пристыковывающимися к ней. Если при этом ей сообщается дополнительная скорость порядка 2,5 м/с, то ее орбита приподнимается в среднем на 4 км, а среднее значение модуля скорости движения станции относительно Земли уменьшается. Чтобы удерживать станцию примерно на одной высоте, такие «толчки» нужно проводить даже чаще, чем раз в месяц.

В настоящее время масса МКС достигла значения $M = 208$ т. Станция имеет солнечные батареи, которые обеспечивают ее электрической энергией. Мощность энергообеспечения станции составляет 120 кВт. Каждый квадратный метр солнечных батарей дает электрическую мощность порядка 100 Вт. (Это справедливо только в том случае, когда панели солнечных батарей ориентированы перпендикулярно солнечным лучам.) Следовательно, площадь всех батарей МКС, составляющих большую часть площади всего поперечного сечения станции S , может быть оценена как $S_{\text{бат}} \approx 1200 \text{ м}^2$. На снимке МКС (рис.1) видно, что размеры панелей батарей и других частей

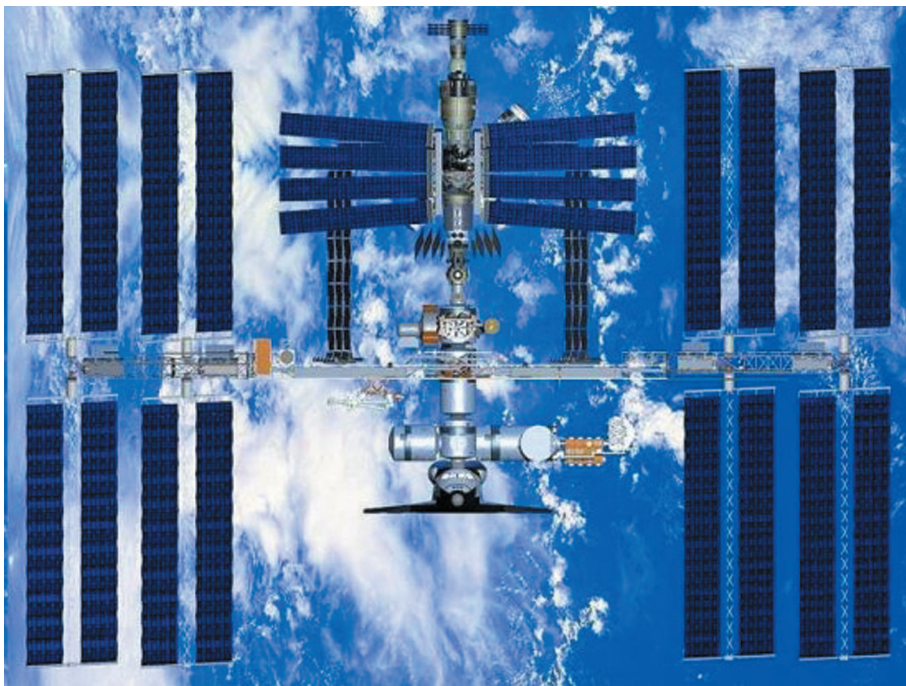


Рис. 1. Международная космическая станция и ее солнечные батареи

станции сравнимы по величине, а также можно отметить, что не все панели батарей ориентированы одинаково. Если считать, что поперечное сечение станции составлено приблизительно на 66% из площади батарей и на 33% из площади сечения других блоков станции, то получим, что $S \approx 2000 \text{ м}^2$.

Почему возникает сила трения?

Торможение спутников, из-за которого происходит уменьшение высот их орбит, может быть обусловлено несколькими факторами. Во-первых, это влияние на космический аппарат остатков атмосферы, которые состоят из тех же газов, что и воздух вблизи поверхности Земли; во-вторых, это взаимодействие с ионами кислорода; в-третьих, это действие на спутник силы Ампера, возникающей при движении проводящего аппарата в магнитном поле Земли.

Торможение атмосферными газами

Рассмотрим движение искусственного спутника Земли (ИСЗ) перед последним этапом его полета, когда основную роль играет сопротивление земной атмосферы. Траектория движения спутника напоминает спираль с очень медленно меняющимся расстоянием от спутника до поверхности Земли (в течение одного оборота это расстояние изменяется совсем мало). Учтем известный факт: с подъемом на каждые $h_0 = 15 \text{ км}$ над поверхностью Земли плотность и давление атмосферы убывают примерно в 10 раз. Тогда на высотах H , значительно меньших земного радиуса, плотность ρ_H атмосферного воздуха (составленного из незаряженных молекул азота и кислорода) можно находить с помощью простого соотношения, в котором $\rho_0 = 1,2 \text{ кг/м}^3$ – плотность воздуха на поверхности

Земли (на уровне океана):

$$\rho_H = \rho_0 \cdot 10^{-\frac{H}{h_0}}.$$

Скорость движения спутника во много раз больше средних скоростей теплового движения молекул атмосферы, поэтому можно считать, что молекулы до столкновения со спутником покоились. Чтобы грубо оценить силу сопротивления, предположим, что после столкновения молекулы приобретают такую же скорость, что и спутник. В этом случае сила сопротивления может быть оценена так:

$$F_H \approx \rho_H S v^2 = \rho_0 S v^2 \cdot 10^{-\frac{H}{h_0}},$$

где S – площадь поперечного сечения космического аппарата. Если подставить это выражение в формулу для скорости спуска спутника, то получится

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} \approx - \frac{2\rho_0 S \sqrt{GM_3(R_3 + H)}}{M} \cdot 10^{-\frac{H}{h_0}}. (*)$$

Приняв, например, отношение $S/M = 0,01 \text{ м}^2/\text{кг}$, т.е. таким, как у МКС, найдем, что на высоте $H = 150 \text{ км}$ скорость уменьшения высоты орбиты равна $13,4 \text{ см/с}$. За один оборот, т.е. примерно за 92 мин, спутник с такими параметрами опустится на расстояние примерно $740 \text{ м} \ll 150 \text{ км}$. На последнем этапе его полета, когда движение определяется в основном степенным множителем и можно пренебречь изменением величины, стоящей под знаком корня, уравнение (*) примет вид

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} \cdot 10^{\frac{H}{h_0}} \approx -2\Delta t \frac{\rho_0 S \sqrt{GM_3 R_3}}{M}.$$

Получившееся дифференциальное уравнение легко интегрируется. Из него следует, что время t , оставшееся до падения спутника, находится из соотношения

$$\frac{H}{\ln 10} \cdot 10^{\frac{H}{h_0}} \approx 2t \frac{\rho_0 S \sqrt{GM_3 R_3}}{M}.$$

Подставив в это соотношение $S/M = 0,01 \text{ м}^2/\text{кг}$ и выбрав высоту $H = 150 \text{ км}$, мы получим время полета: $t \approx 0,5 \cdot 10^5 \text{ с} \approx 14 \text{ ч}$, т.е. менее суток.

Конечно, если спутник имеет автономное электропитание, например ядерный источник энергии, то ему не нужны солнечные батареи. Для такого спутника отношение площади поперечного сечения к его массе может быть значительно меньше величины $0,01 \text{ м}^2/\text{кг}$. В этом случае время существования спутника с начальной высотой полета 150 км может быть в несколько раз больше.

Вернемся к формуле (*). В соответствии с ней, подъем на каждые 15 км уменьшает скорость спуска в 10 раз. Таким образом, на высоте порядка 300 км эта

формула предсказывает скорость спуска спутника с отношением S/M таким же, как у МКС, равной всего 74 нм/оборот, или около 1,2 мкм за сутки. Эта величина абсолютно не согласуется с наблюдающимся на практике темпом снижения МКС. Следовательно, на тех высотах $H > 300$ км, где летает МКС, столкновения спутника с нейтральными молекулами сильно разреженных атмосферных газов N_2 и O_2 не могут обеспечить наблюдающееся на практике уменьшение высоты орбиты космического аппарата. На высоте 300 км над поверхностью Земли концентрация нейтральных атомов азота должна составить величину, примерно равную

$$n = N_A \frac{\rho_0}{M} \cdot 10^{-\frac{H}{h_0}} = 6 \cdot 10^{23} \cdot \frac{1,2}{0,028} \cdot 10^{-\frac{300}{15}} \text{ м}^{-3} = 2,6 \cdot 10^5 \text{ м}^{-3}.$$

Из полученного несоответствия можно сделать вывод, что спутник на высотах порядка 300 км и более «цепляется» не за молекулы, а за что-то другое.

Атомарный кислород

По данным справочника «Физические величины», на высотах 300–400 км температура достигает величины 700 К ночью и 900 К днем (а на высоте около 200 км это 400 К ночью и 600 К днем). При этом концентрация электронов в дневное время на высоте 300 км составляет в максимуме $n = 10^{12} \text{ м}^{-3}$. Это на много порядков больше концентрации нейтральных молекул на этих же высотах. Значит, не они являются «поставщиками» электронов. Измерения показывают, что на высотах большие 200 км основным компонентом атмосферы является атомарный кислород. Возникает этот атомарный кислород из молекулярного кислорода под воздействием ультрафиолетового излучения Солнца.

Почему же именно кислород, а не атомарный азот – ведь азота в атмосфере у поверхности Земли больше? Это связано с несколькими факторами. В первую очередь, с тем, что энергия диссоциации молекул кислорода, равная 500 кДж/моль (≈ 5 эВ), значительно меньше энергии диссоциации молекул азота, равной 946 кДж/моль ($\approx 9,5$ эВ). Эти энергии соответствуют длинам волн солнечного света 240 нм и 125 нм соответственно. В спектре излучения Солнца плотность потока энергии вблизи 240 нм действительно в несколько раз больше плотности потока энергии вблизи 120 нм, но не это обстоятельство является решающим. Главное, по-видимому, то, что вероятность рекомбинации встретившихся атомов азота значительно больше вероятности рекомбинации атомов кислорода, т.е. время жизни атомарного кислорода значительно больше времени жизни атомарного азота.

Образовавшийся на верхней границе молекулярной атмосферы атомарный кислород «подбрасывается» вверх тепловым движением. Для атомарного кислорода масса каждой частицы примерно вдвое меньше масс молекул азота и кислорода, поэтому скорости теплового движения этих атомов больше скоростей теплового движения молекул. Заметим, что в распределении

атомов по энергиям (и по скоростям тоже) всегда есть частицы, имеющие энергии в несколько раз большие, чем средняя энергия теплового движения. Если, к примеру, энергия атома кислорода будет всего в три раза больше средней энергии теплового движения (более 3% атомов имеют такую энергию), то высота «подброса» может составить

$$\Delta H = \frac{9kT}{2mg} = \frac{9RT}{2Mg} \approx \frac{9 \cdot 8,31 \cdot 600}{2 \cdot 0,016 \cdot 10} \text{ м} \approx 1,4 \cdot 10^5 \text{ м} = 140 \text{ км}.$$

Кстати, при концентрации молекул $n = 10^{13} \text{ м}^{-3}$, что соответствует высоте примерно 185 км, длина свободного пробега атомов составляет около 300 км, следовательно, можно считать, что с высот больше 185 км атомы с указанной энергией летят в направлении «вверх» почти свободно и взлетают до высоты 325 км. И если их там ничто не задерживает, то они падают обратно «вниз». Время полета «вверх» и «вниз» составляет для таких «энергичных» атомов кислорода около 5 мин, что гораздо меньше длительности дня или ночи. Из всего указанного времени полета на высотах больше 300 км атом в рассматриваемом случае проводит более 1 мин, т.е. весьма значительную часть времени – около 20%. Если в течение этого времени атом будет ионизирован солнечным излучением, то возврат его на высоты порядка 200 км будет задержан.

Аналогичным образом ведут себя и молекулы азота и кислорода, только взлетают они на вдвое меньшую высоту, так как их масса вдвое больше массы атома кислорода.

Ионизация молекул и атомов и движение ионов в магнитном поле

По данным справочника «Физические величины», на высотах более 160 км на дневной стороне атмосферы значительная часть молекул азота и кислорода, а также атомов кислорода ионизирована. Образовавшиеся на некоторой высоте ионы и электроны не могут «упасть» обратно, так как их «не пускает» магнитное поле Земли B . На движущийся с тепловой скоростью ион со стороны магнитного поля Земли действует сила, направленная перпендикулярно скорости иона и направлению магнитного поля. Если пренебречь гравитационным полем Земли и считать, что магнитное поле в небольшой окрестности от выбранного для наблюдений места является однородным, то траектории ионов будут представлять собой спирали, как бы навивающиеся на линии магнитного поля.

Оценим характерные размеры спиралей, в частности радиус цилиндра, на который она навита, для ионов кислорода:

$$r = \frac{\sqrt{3MRT}}{eN_A B} = \frac{\sqrt{3 \cdot 0,016 \cdot 8,31 \cdot 800}}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 6 \cdot 10^{23} \cdot 5 \cdot 10^{-5}} \text{ м} \approx 3,6 \text{ м}.$$

При таком радиусе навивки можно считать, что ион кислорода просто «привязан» к линии магнитного поля Земли, и гравитацией действительно можно пренебречь. Если у иона имеется составляющая скорости вдоль магнитного поля, то он движется вдоль магнитного поля. Ионы, можно сказать, бегают вдоль ли-

ний магнитного поля от одного магнитного полюса Земли к другому. Таким характер движения остается вплоть до момента, когда положительно заряженный ион встречается с электроном и в результате рекомбинации вновь образуется нейтральный атом кислорода. Встречи ионов и электронов весьма редки, поэтому время пребывания иона на высоте значительно возрастает по сравнению со временем пребывания на такой же высоте нейтральной частицы (атома или молекулы).

В результате этого эффекта на высотах 160–250 км и 250–400 км в дневное время возникают слои, содержащие электроны и ионы молекул в первом случае и электроны и ионы атомов кислорода во втором. Днем концентрация ионов и электронов в этих слоях растет, а ночью убывает, но не до нуля. Обнаружены были эти слои, заполненные плазмой, в экспериментах по распространению радиоволн. Коротковолновое излучение в диапазоне длин волн 10–70 м отражается этими слоями плазмы, причем главными «виновниками» отражения радиоволн являются электроны. Они тоже движутся по спиральям с характерным радиусом навивки около 0,1 м и характерными скоростями 10^6 м/с вдоль магнитного поля. Таким образом, в отличие от медленно движущихся ионов, электроны движутся в 100 раз быстрее спутника.

Торможение спутника ионами атомарного кислорода

В течение светлого времени суток на высоте концентрация ионов и электронов увеличивается, а в течение ночи уменьшается, так как рекомбинация ионов и электронов делает их вновь нейтральными атомами, на движение которых магнитное поле Земли не оказывает влияния. При максимальной концентрации ионов атомарного кислорода $n = 10^{12}$ м⁻³ сила сопротивления, связанная с механическими ударами этих частиц о спутник, может быть рассчитана с помощью формулы $F_H = \rho_H S v^2$. В этой формуле «заложено» предположение, что площадь, с которой спутник «собирает» ионы, равна геометрической площади его поперечного сечения. Для спутника с параметрами МКС ($S/M = 0,01$ м²/кг) оценка скорости снижения может быть получена с помощью уже знакомой нам формулы:

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} \approx - \frac{2\rho_H S \sqrt{GM_3 R_3}}{M} = - \frac{2\rho_H S R_3 \sqrt{g R_3}}{M} \approx 2,6 \text{ мм/с}.$$

Если бы такая сила постоянно действовала на спутник в течение суток, то он опустился бы на 220 метров. Однако спутник пролетает то над освещенной частью поверхности Земли, то над той частью поверхности, где во время его пролета ночь. Поэтому на него, в соответствии со сделанным предположением о площади «сбора», должна действовать в среднем меньшая сила и спутник должен снижаться с меньшей скоростью. Пусть среднее значение концентрации ионов вдвое меньше максимального значе-

ния, тогда скорость снижения МКС составит около 110 м/сутки. Эта величина меньше наблюдаемой на практике скорости снижения спутника с параметрами МКС порядка 150–200 м/сутки.

Сила Ампера

Рассмотрим теперь возможное влияние на движение спутника магнитного поля Земли, величина которого вблизи поверхности Земли равна $B = 5 \cdot 10^{-5}$ Тл. В конструкциях спутника, движущегося с большой скоростью в магнитном поле, возникает ЭДС электромагнитной индукции. При внешних размерах спутника $l \sim \sqrt{S}$ возникает ЭДС порядка $vBl = vB\sqrt{S}$. Для МКС, например, величина ЭДС может достигать 15 В. Эта электродвижущая сила вызывает перераспределение электрических зарядов в проводящих токах элементах конструкции спутника. Вокруг спутника появляется электрическое поле, которое влияет на движение электрически заряженных частиц в окружающем пространстве. К тем частям спутника, которые имеют положительный потенциал (по отношению к средней части спутника), притягиваются электроны, а к тем частям спутника, которые имеют отрицательный потенциал, притягиваются положительно заряженные ионы. Электроны и ионы, попавшие на поверхность конструкций спутника, объединяются в нейтральные атомы кислорода, при этом электроны «путешествуют» в проводящих конструкциях спутника, создавая электрический ток.

Спутник, перемещаясь в пространстве, «собирает» из окружающего пространства электроны и ионы. Для грубой оценки величины тока, который может течь по проводящим конструкциям спутника, будем считать, что сбор происходит только с площади, равной площади поперечного сечения спутника, и все ионы и электроны участвуют в создании этого тока. За каждую секунду о поверхность спутника (примерно равную S) ударяются около $N = Sv n$ ионов. Следовательно, величина тока имеет порядок $I = S v n e$. Для спутника с размерами МКС эта величина составляет 2,5 А.

При протекании тока по проводящим деталям спутника на них действует «тормозящая» сила Ампера, направленная, как легко сообразить, в сторону, противоположную направлению скорости спутника:

$$F \sim IlB = S v n e \sqrt{S} B = S n e \sqrt{S} B \sqrt{\frac{GM_3}{R_3 + H}}.$$

Тогда для скорости снижения спутника получим

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} \approx - \frac{2S n e \sqrt{S} B}{M} (R_3 + H).$$

Заметим, что скорость снижения спутника пропорциональна примерно кубу его линейных размеров ($S^{1,5}$). Для МКС грубая оценка скорости снижения с помощью последней формулы дает величину 48 мкм/с, или 4 м/сутки. Такая оценка значительно меньше скорости спуска, наблюдающейся на практике.

Может ли площадь «сбора» ионов быть больше площади поперечного сечения спутника?

Энергия теплового движения, которую имеют ионы кислорода, равна примерно 0,1 эВ. В электрическом поле, созданном зарядами, перераспределившимися на поверхности спутника, ионы могут приобретать в несколько раз большие энергии. Например, для спутника с параметрами МКС это энергии порядка 7,5 эВ. Ионы с такими энергиями в магнитном поле Земли движутся по спиралям, максимальный радиус которых примерно равен

$$r = \frac{\sqrt{2mvBe\sqrt{S}}}{eB} = \sqrt{\frac{2mv\sqrt{S}}{Be}} \approx 49 \text{ м},$$

где e — это заряд иона кислорода, а m — его масса. Поскольку линейные размеры МКС имеют такой же порядок величины, то это означает, что площадь сбора ионов $S_{\text{эфф}}$ может быть в несколько раз больше площади поперечного сечения станции S :

$$\frac{S_{\text{эфф}}}{S} = \frac{1}{S} \frac{\pi \left(r + \sqrt{\frac{S}{\pi}} \right)^2}{2} \approx 4.$$

Для электронов же радиусы спиралей достигают всего лишь 0,2–0,3 м, что несущественно в сравнении с размерами спутника.

Увеличение скорости «притока» положительных зарядов на спутник за счет увеличения эффективной площади сбора ионов с лихвой компенсируется притоком электронов, которые движутся со скоростями, примерно в 100 раз большими скорости спутника. Таким образом, спутник не приобретает некомпенсированный положительный заряд.

Корректировка расчетов

Если учесть это увеличение эффективной площади сбора положительных ионов, то понятно, что столкновения с ионами кислорода могут обеспечить наблюдаемую скорость снижения МКС порядка 150–200 м/сутки ($110 \text{ м/сутки} \cdot 4 = 440 \text{ м/сутки}$) даже с учетом того, что среднесуточная концентрация ионов меньше ее максимального значения. Сила Ампера тоже в принципе может вырасти, но ее вклад ($4 \text{ м/сутки} \cdot 4 = 16 \text{ м/сутки}$) все равно составляет только около 10% от наблюдаемой на практике скорости снижения МКС. Таким образом, для МКС, по видимому, самым существенным фактором, обеспечивающим уменьшение высоты полета, является действие на станцию силы, возникающей при столкновениях станции с ионами кислорода.

Во время магнитных бурь концентрация заряженных частиц в пространстве, окружающем Землю, может во много раз увеличиваться вследствие того, что в спектре излучения Солнца увеличивается доля ультрафиолета.



Рис. 2. Движущаяся МКС на фоне Луны

В результате более интенсивно идет процесс образования в верхних слоях атмосферы атомарного кислорода и вырастает скорость его поступления на те высоты, где летают спутники.

Полученные формулы для оценки вкладов различных факторов в общую скорость снижения спутника на высотах 300–400 км позволяют оценить скорость снижения спутника с любыми размерами и массой. Кстати, увидеть МКС можно в каждую безоблачную ночь. Примером служит фотография МКС на фоне Луны (рис.2). Аппарат двигался справа налево и находился от наблюдателя на расстоянии примерно в 100 раз меньше расстояния от Земли до Луны.

А теперь, в качестве упражнения, читателям предлагается проанализировать два варианта усовершенствования конструкции МКС.

1. Представьте, что на МКС установили такой источник ЭДС (около 30 В), который изменил знак тока, текущего по проводящим конструкциям станции. Тогда при той же величине тока сила Ампера не помогает спутнику снижаться, а, наоборот, уменьшает суммарную силу сопротивления на 20%. Это же здорово: потребуется реже подталкивать станцию, чтобы «поднимать» ее орбиту.

2. На станции установили электронную пушку, которая в непрерывном режиме «выбрасывает» в пространство электроны с током больше 250 А. При этом ток электронов из окружающего пространства не успевает компенсировать возникший на станции положительный заряд. В результате отталкивания положительно заряженной станции и положительно заряженных ионов перестают происходить столкновения ионов со станцией. Это эквивалентно тому, что вязкость среды уменьшилась во много раз. Таким образом, сила сопротивления уменьшится во много раз, что тоже позволит подталкивать станцию значительно реже, чем это делается сейчас.

Успехов вам!

Касающиеся окружности: от Тебо до Фейербаха

В. ПРОТАСОВ

Две замечательные теоремы

В чем состоит красота математики? Даже ставить подобный вопрос наивно, особенно в небольшой статье. Тем не менее, иногда на конкретных примерах удается разглядеть те кирпичики, из которых эта красота складывается. Одним из таких кирпичиков несомненно является взаимосвязь различных объектов. Это часто воспринимается как чудо, когда два известных математических результата, взятые из разных областей и, казалось бы, не имеющие ничего общего, оказываются тесно связанными друг с другом. Словно два человека, знакомые много лет, вдруг обнаруживают, что они на самом деле – близкие родственники.

В этой статье мы рассмотрим две известнейшие теоремы о касании окружностей – теорему Фейербаха и теорему Тебо. Открыты они были разными людьми в разное время (первая теорема старше второй на 116 лет). Для каждой из них найдено множество доказательств, основанных на различных идеях. Тем не менее, мы увидим, что теоремы эти – родные сестры. У них общие родители: обе теоремы следуют из двух разных случаев одного и того же факта. Но – все по порядку.

Начнем с формулировок. В любом треугольнике 9 точек – середины сторон, основания высот и середины трех отрезков, соединяющих вершины с точкой пересечения высот, – лежат на одной окружности. Она называется *окружностью девяти точек* треугольника. Этот красивый факт был частично установлен в 1765 году Леонардом Эйлером (1707–1783), поэтому окружность девяти точек называют также *окружностью Эйлера*. В 1822 году К.Фейербах доказал теорему об одном свойстве окружности девяти точек. Свойство это столь замечательно, что побудило некоторых математиков называть эту окружность *окружностью Фейербаха*.

Теорема Фейербаха. *Окружность девяти точек касается вписанной и всех внеписанных окружностей треугольника.*

Напомним, что *внеписанной* называется окружность, касающаяся одной стороны треугольника и продолжений двух других сторон. Так, *внеписанная* окружность треугольника ABC , соответствующая вершине A , касается стороны BC и продолжений сторон AB (за точку B) и AC (за точку C). У каждого треугольника, таким образом, три *внеписанных* окружности. Автор теоремы – Карл Вильгельм Фейербах

(1800–1834), немецкий математик, старший брат знаменитого философа Людвиг Фейербаха. Он был преподавателем гимназии в небольшом университетском городе Эрланген на юге Германии. Этот город будет прославлен лишь через 50 лет после открытия Фейербаха: в 1872 году Ф.Клейн сформулирует свою знаменитую *эрлангенскую программу* о систематизации геометрии. А о самом авторе замечательной теоремы в нынешнем Эрлангене, увы, ничто не напоминает. Нет даже мемориальной доски Фейербаху.

К настоящему времени найдено множество доказательств теоремы Фейербаха. Большинство из них используют достаточно сильные средства, такие как инверсия или обобщенная теорема Птолемея. Есть и элементарные доказательства. Одно из них было получено автором этих строк («Квант» № 9 за 1992 г.), оно выводит теорему Фейербаха как частный случай теоремы о сегменте.

В отличие от Карла Фейербаха, автора одной великой теоремы, французский математик Виктор Тебо (1882–1960) за свою научную карьеру создал более 1000 теорем и задач (один только журнал «American mathematical monthly» опубликовал 582 из них!). По этому показателю Тебо является признанным лидером. Это тем более удивительно, что он не был профессионалом. Тогда (как, впрочем, и теперь) занятия геометрией не приносили достойного дохода, поэтому Тебо в течение многих лет работал в страховой компании.

Из обширного наследия Тебо самой известной является теорема о трех коллинеарных окружностях. Чтобы ее сформулировать, поясним сначала некоторые термины. *Линией центров* двух окружностей мы будем называть прямую, содержащую их центры. *Криволинейным треугольником* будем называть фигуру, ограниченную двумя отрезками и дугой окружности. Так, на рисунке 1 криволинейный треугольник AMB ограничен отрезками AM , MB и дугой BA описанной окружности треугольника ABC ; криволинейный тре-

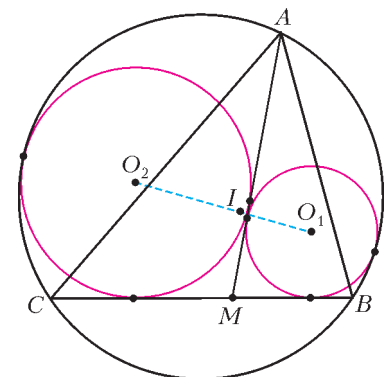


Рис. 1

угольник AMB ограничен отрезками AM , MB и дугой BA описанной окружности треугольника ABC ; криволинейный тре-

угольник AMC ограничен отрезками CM , MA и дугой AC описанной окружности.

Теорема Тебо. На стороне BC треугольника ABC взята произвольная точка M . В криволинейные треугольники AMB и AMC вписано по окружности. Тогда линия центров этих окружностей содержит центр вписанной окружности треугольника ABC .

Окружности, вписанные в криволинейные треугольники AMB и AMC , мы теперь будем называть окружностями Тебо. Данную теорему В.Тебо опубликовал в виде задачи (без доказательства) в 1938 году. Первые доказательства (вычислительные) были получены уже после смерти автора теоремы, в 1970-х годах, а первое чисто геометрическое доказательство – и вовсе в 1986 году. Теорема Тебо вызывает широкий интерес многих авторов. Из публикаций на русском языке выделим недавнюю интересную статью Е.Д.Куланина («Математическое просвещение», вып. 11, 2007 г.).

Мы с вами увидим, что и теорема Фейербаха, и теорема Тебо на самом деле вытекают из разных случаев одного и того же общего факта. Конечно, увидим мы это не сразу. Потребуется предварительная работа. Вначале мы вспомним несколько элементарных геометрических фактов. Затем докажем основную теорему, из которой выведем сначала теорему Тебо, а затем и теорему Фейербаха. Поэтому и статья названа вопреки хронологии – от Тебо до Фейербаха.

Повторим геометрию

Нам понадобятся несколько несложных геометрических результатов. Напомним, что угловой мерой дуги AB окружности (обозначение $\overset{\frown}{AB}$) называется величина угла между радиусами OA и OB . При этом дугой AB считается та из двух смежных дуг, которая проходит от A к B в положительном направлении (против часовой стрелки). Таким образом, дуги AB и BA составляют полную окружность. Центр вписанной окружности треугольника мы будем обозначать буквой I (от английского inscribed – вписанный).

Центр вписанной окружности. Что мы знаем об этой точке? Она расположена внутри треугольника и равноудалена от его сторон, лежит на пересечении биссектрис треугольника. Что еще? Одно свойство точки I часто бывает полезно при решении задач. Оно говорит о том, где именно на биссектрисе лежит центр вписанной окружности.

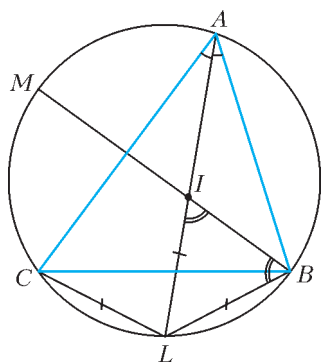


Рис. 2

Продолжим биссектрису угла A до пересечения с описанной окружностью в точке L (рис. 2). Тогда $LI = LB = LC$.

Докажем это. Так как $\angle LAB = \angle LAC$, то точка L является серединой дуги BC , значит, $LB = LC$. Далее, пусть M – точка пересечения биссектрисы угла B с описанной окружностью. Угол IBL равен по-

ловине дуги ML , т.е. полусумме дуг MC и CL . Это, в свою очередь, равно полусумме дуг AM и LB (поскольку $AM = MC$ и $LB = CL$), которая равна углу BIL . Итак, углы IBL и BIL равны, значит, треугольник IBL равнобедренный, и $IL = BL$.

Читатель без труда сформулирует и докажет аналогичные утверждения для центров внеписанных окружностей треугольника.

Касание окружности и хорды. На плоскости даны окружности α и β (рис. 3). Окружность α лежит внутри окружности β и касается ее в точке T , а также касается ее хорды BC в точке Q . Луч TQ пересекает окружность β в точке L . Тогда L – середина дуги CB , а TL – биссектриса угла BTC . Более того, $LQ \cdot LT = LB^2 = LC^2$.

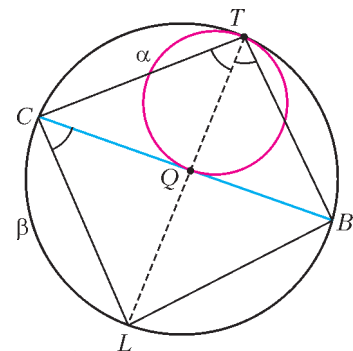


Рис. 3

Для доказательства рассмотрим гомотегию с центром в точке T , переводящую окружность α в окружность β . Она переводит точку Q в точку L , прямую BC , касающуюся окружности α в точке Q , в параллельную ей прямую, касающуюся окружности β в точке L . Так как эта касательная параллельна хорде BC , то L – середина дуги BC . Далее, вписанные углы LCB и LTC равны, поскольку опираются на равные дуги. Значит, треугольники LCQ и LTC подобны, из чего заключаем, что $LQ \cdot LT = LC^2$.

Сформулируйте и докажите самостоятельно аналогичное утверждение для окружностей, касающихся внешним образом. При этом TL будет биссектрисой угла, смежного с углом BTC .

Степень точки относительно окружности. Радиальная ось. Степенью точки относительно окружности называется величина $d^2 - R^2$, где R – радиус окружности, а d – расстояние от данной точки до центра окружности. Степень любой точки M , лежащей вне окружности, равна квадрату касательной, проведенной из точки M к окружности (т.е. квадрату отрезка от M до точки касания). Для любой прямой, проходящей через точку M и пересекающей окружность в точках A и B , произведение $MA \cdot MB$ равно степени точки M . Для доказательства достаточно вспомнить, что произведение $MA \cdot MB$ (произведение секущей на ее внешнюю часть) одинаково для всех прямых, проходящих через точку M . Для прямой, проходящей через центр окружности, это произведение равно $(d - R)(d + R) = d^2 - R^2$. Значит, и для всех прямых оно равно степени точки M . Если M лежит внутри окружности, то $d < R$, а значит, степень точки M отрицательна. В этом случае для любой хорды AB , проходящей через точку M , произведение отрезков MA и MB равно степени точки M , взятой со знаком «плюс».

Для двух окружностей геометрическим местом точек, имеющих одинаковые степени относительно

этих окружностей, является прямая, перпендикулярная их линии центров.

В самом деле, если степени точки M относительно окружностей равны, то $O_1M^2 - R_1^2 = O_2M^2 - R_2^2$ (O_1, O_2 – центры окружностей, а R_1, R_2 – их радиусы). Таким образом, $O_1M^2 - O_2M^2 = R_1^2 - R_2^2$, т.е. разность квадратов расстояний от точки M до точек O_1 и O_2 постоянна. Поэтому (докажите это!) геометрическим местом таких точек является прямая, перпендикулярная O_1O_2 . Эта прямая называется *радикальной осью* двух окружностей. Любая пара неконцентрических окружностей имеет радикальную ось. Если окружности пересекаются, то радикальной осью служит прямая, содержащая их общую хорду.

Центральная теорема

Мы начнем с основной теоремы, из которой следуют теоремы Тебо и Фейербаха.

Основная теорема. На стороне BC треугольника ABC выбирается произвольная точка M . В криволинейный треугольник AMB вписана окружность, касающаяся отрезков MA и MB в точках P и Q соответственно и окружности ABC – в точке T . Тогда прямая PQ проходит через точку I .

Доказательство. 1) Первый шаг – небольшое дополнительное построение (рис.4). Обозначим через γ окружность, вписанную в криволинейный треугольник AMB . Проведем прямую QI и обозначим через P' точку ее повторного пересечения с окружностью γ (первый раз они пересекаются в точке Q). Обозначим через L точку, в которой прямая AI повторно пересекает окружность ABC . Так как AI – биссектриса угла A , то L – середина дуги BC .

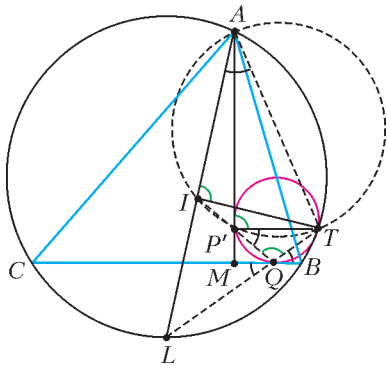


Рис. 4

2) Углы $BQT, QP'T$ и TAI равны. В самом деле, угол BQT равен полусумме дуг CL и BT , угол TAI равен половине дуги LT , т.е. полусумме дуг LB и BT . Но дуги CL и LB равны, следовательно, $\angle BQT = \angle TAI$. Наконец, угол BQT между касательной и хордой равен углу $QP'T$, который стягивает эта хорда.

3) Четырехугольник $TAIP'$ – вписанный. Это следует из доказанного равенства углов $\angle QP'T = \angle TAI$. Значит, $\angle AIT = \angle AP'T$. Далее, $LQ \cdot LT = LB^2 = LI^2$. Следовательно, треугольники LQI и LIT подобны (по общему углу ILQ и двум пропорциональным сторонам). Из этого следует, что $\angle LQI = \angle LIT$. Таким образом, $\angle TQP' = \angle AIT = \angle AP'T$.

4) Равенство углов $\angle TQP' = \angle AP'T$ означает,

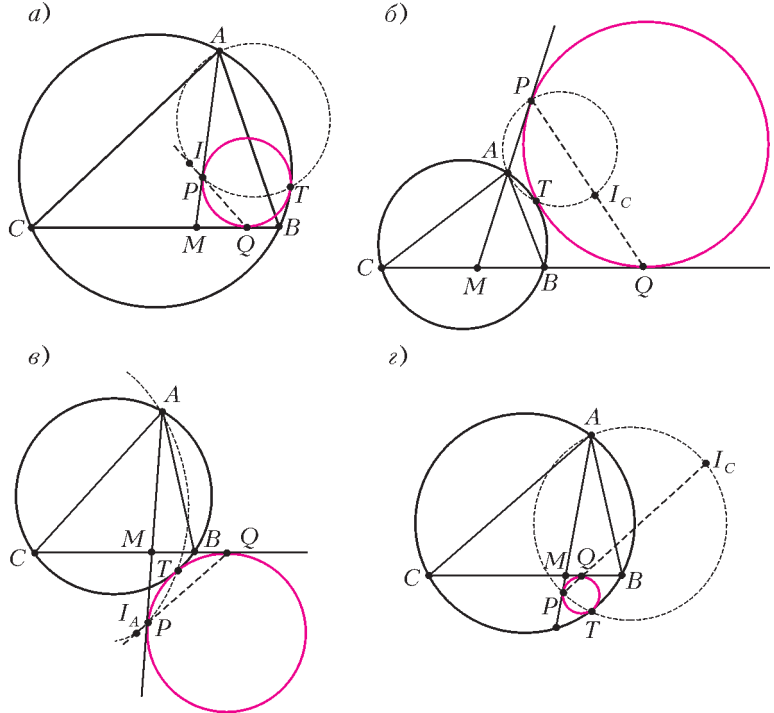


Рис. 5

что прямая AP' касается окружности γ . Следовательно, $P' = P$. □

В доказательстве теоремы мы заодно установили еще одно полезное свойство.

Следствие. В условиях основной теоремы окружность ATP проходит через центр вписанной окружности I .

В частном случае основной теоремы, когда точка M совпадает с вершиной C (тогда окружность γ будет касаться сторон CA и CB треугольника ABC и его описанной окружности), получаем известную олимпиадную задачу. Мы приводим ее в задаче 1. Много интересных вещей, связанных с этим случаем, можно найти в статье А.Гирича («Квант» №11 за 1990 г.).

Основная теорема может быть распространена и на другие случаи расположения окружности γ по отношению к треугольнику ABC . На рисунке 6 изображены четыре возможности. В разных случаях внутреннее касание заменяется внешним, а центр вписанной окружности I – центрами вневписанных I_A и I_C . Кроме того, точка M может лежать не на стороне BC , а на ее продолжении. Два возможных случая изображены на рисунке 6. Во всех случаях основная теорема верна и

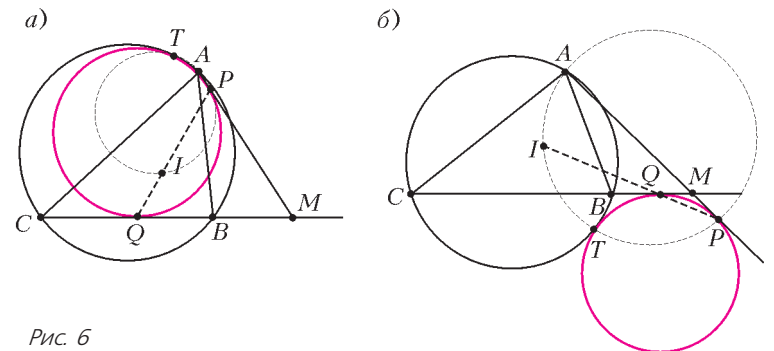


Рис. 6

доказывается так же. Изобразите остальные случаи и докажите теорему для них.

Доказательство теоремы Тебо

Установим сначала одно вспомогательное утверждение.

Лемма 1. К двум окружностям провели общую внешнюю и общую внутреннюю касательные. Тогда прямая, соединяющая две точки касания на первой окружности, и прямая, соединяющая две точки касания на второй окружности, пересекаются на линии центров.

Доказательство. Пусть O_1 – центр первой окружности, а A_1 и B_1 – точки ее касания с проведенными прямыми; аналогичные обозначения – для второй окружности (точки A_1 и A_2 лежат на одной касательной). Проведем окружности δ и β с диаметрами A_1A_2 и B_1B_2 соответственно (рис.7). Прямая O_1A_1 касается δ , а прямая O_1B_1 касается β . Значит, из точки O_1 к данным окружностям опущены равные касательные ($O_1A_1 = O_1B_1$ – радиусы первой окружности).

То же – с точкой O_2 . Таким образом, O_1O_2 – радикальная ось окружностей δ и β . Наконец, прямые A_1B_1 и A_2B_2 параллельны биссектрисам смежных углов между касательными, следовательно, они перпендикулярны между собой. Поэтому их точка пересечения лежит на обеих окружностях δ и β . Точка пересечения этих окружностей, конечно же, лежит на их радикальной оси O_1O_2 . \square

Теперь доказательство теоремы Тебо получается мгновенно. Прямая, соединяющая точки касания первой окружности Тебо со сторонами MA и MB , и прямая, соединяющая точки касания второй окружности со сторонами MA и MC , пересекаются на линии центров (лемма 1). \square

Если воспользоваться случаями основной теоремы, изображенными на рисунках 5 и 6, то получим обобщения теоремы Тебо на разные расположения точки M и окружностей Тебо (на рисунке 8 они названы γ_1, γ_2). Так, на рисунке 8,б показан случай точки M , лежащей на продолжении стороны BC за точку V . Окружность γ_1 теперь касается окружности ABC извне. А на рисунке 8,в точка M лежит на стороне BC , и обе окружности γ_1, γ_2 касаются окружности ABC извне. На этот раз вместо центра вписанной окружности I нужно взять центр внеписанной, соответствующей вершине A . Доказательства во всех случаях совершенно одинаковы. Найдите самостоятельно еще несколько случаев, сформулируйте и докажите для них аналоги теоремы Тебо.

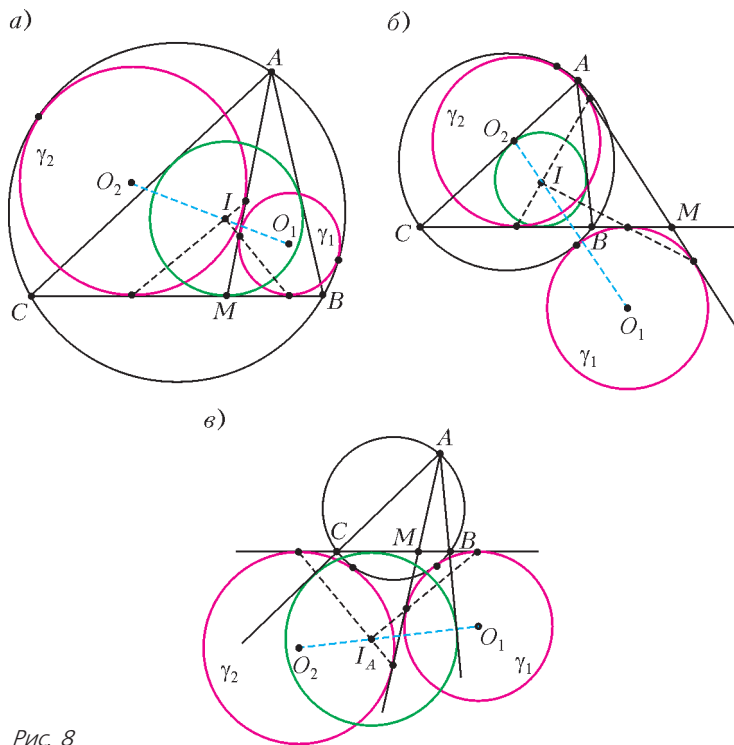


Рис. 8

Задача Аполлония

Как с помощью циркуля и линейки вписать окружность в треугольник? Странный вопрос! Нет ничего проще: проводим две биссектрисы треугольника, в точке их пересечения лежит центр вписанной окружности. А как вписать окружность в *криволинейный* треугольник, который ограничен двумя отрезками и дугой окружности? Читатель может убедиться самостоятельно, что сделать это совсем не просто. С решением данной задачи связано еще одно применение основной теоремы. На самом деле, эта задача – частный (точнее, предельный) случай задачи Аполлония о построении окружности, касающейся трех данных окружностей. Ее исследовал древнегреческий математик и астроном, ученик Евклида, лучший специалист античного мира по окружностям и коническим сечениям Аполлоний Пергский (ок. 260–170 до н.э.) в своем труде «О касании». Решение Аполлония было утрачено. Лишь 18 веков спустя, в 1600 году, знаменитый Франсуа Виет (1540–1603) сумел восстановить его. Виет справедливо гордился своим достижением и даже назвал свой труд «Apollonius Gallus» (Аполлоний галльский, т.е. французский).

Сейчас известно множество решений задачи Аполлония, большинство из них использует инверсию. Наш случай гораздо проще – две из трех окружностей вырождаются в прямые линии. И решение, которое следует из основной теоремы, на удивление простое. Пусть криволинейный треугольник AMB ограничен отрезками MA, MB и дугой VA некоторой окружности. Для простоты предположим, что эта окружность содержит точку M .

Построение. Продолжим луч BM до пересечения с окружностью в некоторой точке C . Через центр вписан-

ной окружности треугольника ABC проведем прямую, параллельную биссектрисе угла AMC . Найдем ее точки пересечения со сторонами угла AMB . Тогда окружность, касающаяся сторон угла AMB в этих точках, – искомая.

Доказательство теоремы Фейербаха

Настал ключевой момент: переход от Тебо к Фейербаху. С помощью того же приема, которым мы доказали теорему Тебо, мы докажем и теорему Фейербаха.

Пусть ABC – данный треугольник, A_1, B_1, C_1 – середины его сторон, A_2, B_2, C_2 – основания высот. Последние шесть точек, как мы знаем, лежат на одной окружности – окружности девяти точек. Нужно доказать, что она касается вписанной и всех внеписанных окружностей треугольника ABC . Идея такова: выделим пару окружностей – вписанную окружность треугольника ABC и одну из его внеписанных окружностей, скажем ту, которая касается стороны AC . Попробуем представить эту пару как пару окружностей Тебо для некоторого треугольника, вписанного в окружность девяти точек. Если это удастся сделать, то теорема Фейербаха будет установлена. В самом деле, окружности Тебо (по определению!) касаются описанной окружности треугольника, т.е. нашей окружности девяти точек. Значит, окружность девяти точек касается вписанной и одной из внеписанных окружностей. Прделав то же с другими внеписанными окружностями, получим требуемое. Главный вопрос – какой из треугольников, вписанных в окружность девяти точек, нужно взять? Ни «серединный» треугольник $A_1B_1C_1$ (с вершинами в серединах сторон), ни «ортотреугольник» $A_2B_2C_2$ (с вершинами в основаниях высот) для этой цели не подойдут. Даже если ограничиться только шестью точками $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$, то существует 20 треугольников с вершинами в этих точках (почему именно столько?). Все они будут вписаны в окружность девяти точек. А подойдет из них только один! Не будем томить читателя, скажем ответ сразу: это треугольник $B_1B_2A_2$ (рис.9). Его вершины это основания двух высот – A_2 и B_2 и середина стороны – B_1 .

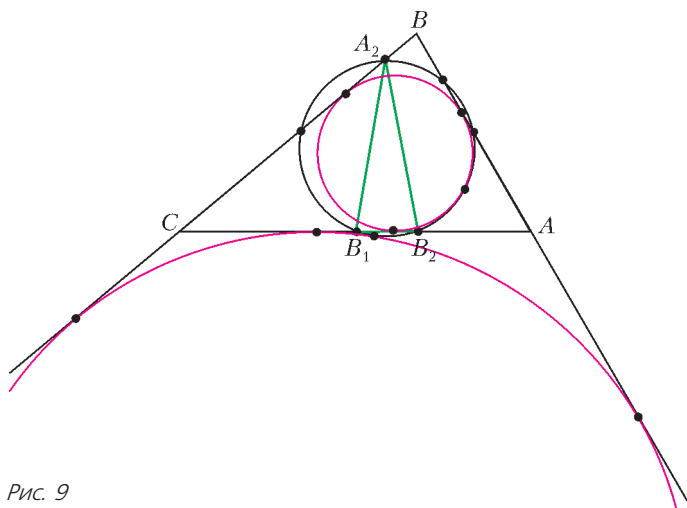


Рис. 9

В качестве точки M на стороне треугольника берется точка C . Она лежит на продолжении стороны B_2B_1 треугольника $B_1B_2A_2$.

Вписанная и внеписанная окружности треугольника ABC , касающиеся стороны AC , являются окружностями Тебо для треугольника $B_1B_2A_2$ и для точки C на продолжении его стороны B_1B_2 . При этом возникает случай теоремы Тебо, изображенный на рисунке 8,б (когда точка M берется на продолжении стороны треугольника).

Итак, если в теореме Тебо взять точку M не на стороне, а на продолжении стороны треугольника, то получим теорему Фейербаха. Таким образом, обе теоремы – две грани одного и того же утверждения. И обе доказываются с помощью основной теоремы.

Теперь нужно доказать, что это действительно так: вписанная и внеписанная окружности являются окружностями Тебо для треугольника $B_1B_2A_2$ и точки C на продолжении его стороны B_1B_2 . Для этого воспользуемся основной теоремой. Если мы покажем, что отрезок MN между точками касания вписанной окружности треугольника ABC со сторонами CA и CB соответственно содержит центр вписанной окружности I_1 треугольника $B_1B_2A_2$, то все будет сделано. В самом деле, получается, что через центр вписанной окружности I_1 провели прямую MN , образующую равные углы с прямыми CA_2 и CB_2 . Тогда из теоремы (точнее, из ее случая, представленного на рисунке 6,а) следует, что окружность, касающаяся этих прямых в точках M и N (это – вписанная окружность треугольника ABC), вписана в криволинейный треугольник A_2CB_2 , ограниченный отрезками CA_2 , CB_2 и дугой B_2A_2 окружности девяти точек. Значит, она касается окружности девяти точек. Как видим, рассуждения те же, что и при построении в задаче Аполлония. Для внеписанной окружности доказательство совершенно аналогично.

Таким образом, осталось доказать, что прямая MN содержит центр вписанной окружности I_1 треугольника $B_1B_2A_2$. Нам удобнее будет начать с одного вспомогательного утверждения, которое, впрочем, является известной олимпиадной задачей.

Лемма 2. *В произвольном треугольнике ABC точка пересечения биссектрисы угла B с прямой, содержащей среднюю линию, параллельную стороне CB , лежит на одной прямой с точками касания вписанной окружности со сторонами CA и CB .*

Доказательство. Пусть I – центр вписанной окружности, M и N – точки ее касания со сторонами CA и CB ,

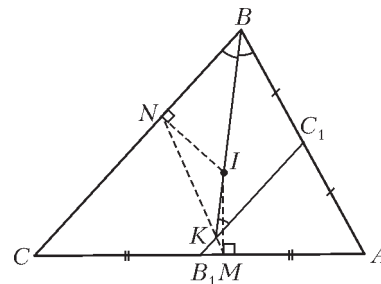


Рис. 10

K – точка пересечения средней линии B_1C_1 с биссектрисой угла B (рис.10). Из равенства накрест лежащих углов при параллельных прямых CB и C_1B_1 получаем, что $\angle BKC_1 = \angle KBC = \angle KBC_1$, а значит, $C_1B = C_1K$. Следовательно, медиана C_1K треугольника ABK равна половине его стороны AB , откуда $\angle AKB = 90^\circ$. Тогда четырехугольник $AMKI$ – вписанный, и следовательно, $\angle KMC = \angle KIA = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle C = \angle NMC$. Значит, K лежит на прямой MN . \square

Доказательство теоремы Фейербаха проведем для вписанной окружности, для внеписанной все аналогично. Так как AA_2C – прямоугольный треугольник, то $B_1A_2 = B_1C$ (рис.11). Следовательно, луч B_1C_1 , параллельный стороне BC , является биссектрисой угла

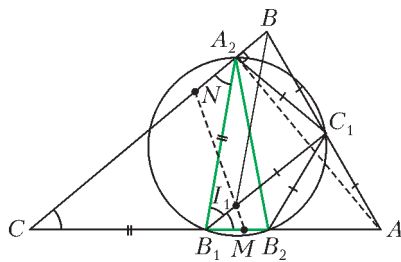


Рис. 11

A_2B_1A . Значит, он содержит точку I_1 . Далее, точка C_1 лежит на описанной окружности треугольника $B_1B_2A_2$, следовательно (свойство центра вписанной окружности!), $C_1I_1 = C_1A_2$. Но поскольку треугольник AA_2B прямоугольный, $C_1A_2 = C_1B$. Таким образом, треугольник BC_1I_1 – равнобедренный. Тогда из равенств накрест лежащих углов $\angle I_1BC = \angle BI_1C_1$ следует, что BI_1 – биссектриса угла B . Применив лемму 2, получаем, что точка I_1 лежит на прямой MN . Теперь вступает в силу основная теорема: прямая MN проходит через центр вписанной окружности треугольника $B_1B_2A_2$, поэтому окружность, касающаяся сторон угла C в точках M и N (вписанная окружность треугольника ABC) касается окружности $B_1B_2A_2$ (окружности девяти точек). \square

Задачи

В заключение предлагаем несколько задач. Решать их полезно, хотя и не обязательно (для понимания статьи это не требуется). Все задачи формулируются в виде утверждений, слова «докажите, что» для краткости будем опускать.

1. В угол с вершиной C вписана окружность. Рассмотрим всевозможные треугольники ABC с вершинами на сторонах угла, описанные около данной окружности. Тогда описанные окружности таких треугольников касаются фиксированной окружности. Что это за окружность?

2. В произвольной трапеции $ABCD$ окружность, касающаяся ее оснований AB и CD и дуги BC описанной окружности треугольника ABC , касается также и вписанной окружности этого треугольника.

3. В окружность вписан четырехугольник $ABCD$.

а) Четыре точки: центры вписанных окружностей треугольников ABD и ACD , центр внеписанной окружности треугольника ABC , соответствующей вершине C , и центр

внеписанной окружности треугольника BCD , соответствующей вершине B , лежат на одной прямой.

б) Обозначим через l прямую из пункта а). Рассмотрим три окружности: первая касается прямых AC и BD в точках их пересечения с l ; вторая касается прямых AB и CD в точках их пересечения с l ; третья касается прямых AD и BC в точках их пересечения с l . Эти три окружности касаются исходной окружности в одной точке.

В задачах 4–8 обозначения такие же, как в теореме Тебо.

4. К окружности Тебо проводится общая внешняя касательная, отличная от BC . Она пересекает отрезок AM в точке K . Тогда

а) проекция точки K на линию центров окружностей Тебо совпадает с точкой I ;

б) прямая, параллельная BC и проходящая через K , касается вписанной окружности треугольника ABC .

5. Если O_1, O_2 – центры окружностей Тебо, то $\frac{O_1I}{O_2I} = \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\angle AMB$.

6. Если Q_1 и Q_2 – точки касания окружностей Тебо со стороной BC , то в треугольнике Q_1IQ_2 угол I – прямой, а острые углы равны $\frac{1}{2}\angle AMB$ и $90^\circ - \frac{1}{2}\angle AMB$.

7. Если AM – биссектриса треугольника ABC , то окружности Тебо касаются, а точка их касания – центр вписанной окружности треугольника ABC .

8. Окружности Тебо равны тогда и только тогда, когда M – точка касания внеписанной окружности треугольника ABC со стороной BC .

9. Вписанная окружность треугольника ABC касается стороны AB в точке N . Проводятся две окружности: первая касается извне окружности ABC , продолжения стороны BC за точку B и продолжения отрезка AN за точку N ; вторая касается окружности ABC , продолжения стороны BC за точку C и продолжения отрезка AN за точку N . Каждая из них равна внеписанной окружности треугольника ABC , соответствующей точке A .

10. На плоскости даны прямые a и b , а также окружность Φ , касающаяся b . Рассмотрим семейство всевозможных треугольников ABC , описанных около окружности Φ , у которых вершина A лежит на прямой a , а вершины B и C – на b . Тогда описанные окружности этих треугольников касаются двух фиксированных окружностей.

11. На плоскости даны окружности γ_1 и γ_2 . Произвольная окружность, касающаяся a и содержащая их, пересекает их общую внешнюю касательную в точках B и C , а общую внутреннюю касательную – в точке A , которая лежит в той же полуплоскости относительно прямой BC , что и окружности γ_1, γ_2 . Тогда треугольник ABC имеет фиксированную вписанную окружность.

12. На плоскости даны точка K , окружность и точка A на этой окружности. Через K проводится произвольная прямая, пересекающая окружность в точках B и C . Тогда окружность девяти точек треугольника ABC касается двух фиксированных окружностей.