или

$$x^2+y^2+z^2+(x+y+z)^2=a^2+b^2+c^2+(a+b+c)^2,$$

$$x^2+y^2+z^2=a^2+b^2+c^2, \qquad (*)$$

так как $x+y+z=a+b+c$. Подставив в $(*)$ выражения $x=\frac{a+c}{2}$, $y=\frac{a+b}{2}$, $z=\frac{b+c}{2}$, получаем $2ab+2ac+2bc=2a^2+2b^2+2c^2$, или $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$, откуда $a=b=c$, и, следовательно, $x=y=z=a=b=c$.

12. Запишем эти уравнения (в том порядке, как они представлены в условии) по кругу (тогда первое и последнее уравнения станут «соседями»). Если теперь как-то отметить (например, подчеркнуть) три уравнения, имеющие общий корень, то какие-то два из них непременно окажутся соседями (что легко доказывается «от противного»). Так как любые два соседних уравнения отличаются только циклическим сдвигом коэффициентов при одинаковых степенях x (причем сдвигом на один коэффициент), то без ограничения общности можно считать, что общий корень имеют первое и второе из записанных в условии уравнений (т.е. для любых двух других соседних уравнений рассуждения будут аналогичны).
Пусть x_0 – общий корень этих двух уравнений. Тогда справедливы равенства

$$a_0+a_1x_0+a_2x_0^2+a_3x_0^3+a_4x_0^4=0,$$

$$a_1+a_2x_0+a_3x_0^2+a_4x_0^3+a_0x_0^4=0.$$

Умножим второе равенство на x_0 и вычтем из него первое равенство. Получим

$$x_0\left(a_1+a_2x_0+a_3x_0^2+a_4x_0^3+a_0x_0^4\right)-\left(a_0+a_1x_0+a_2x_0^2+a_3x_0^3+a_4x_0^4\right)=0,$$

или, после раскрытия скобок и упрощений,

$$a_0\left(x_0^5-1\right)=0.$$

Так как по условию $a_0\neq 0$, то

$$x_0^5-1=0,\ x_0^5=1,\ x_0=1.$$

Итак, если два соседних уравнения имеют общий корень, то он равен 1. Подставив это значение в любое из двух приведенных выше равенств, получаем

$$a_0+a_1+a_2+a_3+a_4=0.$$

Подставив значение $x=1$ во все пять исходных уравнений, получим точное такое же равенство. Стало быть, все уравнения имеют общий корень $x=1$.

13. Пусть AC – диагональ, M и N – середины сторон AB и CD, K – точка пересечения AC и MN (рис.2). Достаточно показать, что площадь треугольника ABC равна площади треугольника ACD. Площадь треугольника ACM равна площади треугольника ACN, ибо диагональ MN четырехугольника $AMCN$ делится другой его диагональю пополам. Но CM и AN – медианы в треугольниках ABC и ACD. Значит, площади треугольников ABC и ACD тоже равны.

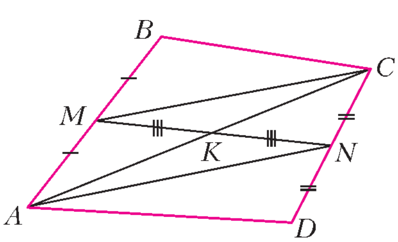

Рис. 2

14. Решение этой задачи изложено в статье И. Акулича «Нет предела совершенству!»

15. Предположим, что профессор Мумбум-Плюмбум не ошибается. Тогда, набрав число 0,8 и дважды нажав «Ввод», мы получим число $3|0{,}8|-4=-1{,}6$. Затем, еще раз дважды нажав «Ввод», получим число $3|-1{,}6|-4=0{,}8$. Это наблюдение позволяет установить соотношение, которому должно удовлетворять число $mumb(0{,}8)=z$, *если оно существует*. А именно: пятикратное нажатие клавиши «Ввод» должно привести к тому же результату, что и однократное нажатие, если первоначально на экране набрали число 0,8. Отсюда $3|3|z|-4|-4=z$. Это уравнение, являющееся *следствием* утверждения профессора Мумбум-Плюмбума, имеет корни: $-1{,}6$; -1; 0,8; 2.
Убедимся, что ни один из этих корней не подходит.
Если $mumb(0{,}8)=0{,}8$, то многократное нажатие клавиши «Ввод» будет порождать цепочку значений $0{,}8\to 0{,}8\to 0{,}8\to 0{,}8\to\ldots$ и число $-1{,}6$ никогда не получится.
Вариант $mumb(0{,}8)=-1{,}6$ порождает цепочку $0{,}8\to -1{,}6\to u\to 0{,}8\to -1{,}6\to\ldots$ (здесь u – некоторое число). Таким образом, при четырехкратном нажатии клавиши «Ввод» число 0,8 преобразуется в $-1{,}6$, чего не может быть.
Случаи $mumb(0{,}8)=-1$ и $mumb(0{,}8)=2$ порождают, соответственно, цепочки

$$0{,}8\to -1\to v\to -1\to v\to -1\to\ldots$$

и

$$0{,}8\to 2\to w\to 2\to w\to 2\to\ldots$$

В этих случаях каждая из величин v и w должна одновременно равняться $-1{,}6$ (при двукратном нажатии «Ввод») и 0,8 (при четырехкратном нажатии), что невозможно.
Так что профессор Мумбум-Плюмбум, увы, ошибается.
Корректно работающий калькулятор при вводе аргумента 0,8 и однократном нажатии клавиши «Ввод» должен выдать сообщение о том, что функция $mumb(x)$ в точке $x=0{,}8$ не определена. Реакция же программы, написанной Мумбум-Плюмбумом, непредсказуема.

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

Вопросы и задачи

1. Чем больше угол падения звуковых волн, тем меньшая их часть проникает сквозь стекло.
2. Дерево проводит звук быстрее, чем воздух, поэтому существует предельный угол падения звуковых лучей, при превышении которого звук вообще не проникает в дерево.
3. При одной и той же силе удара дверь деформируется сильнее, чем стена, поэтому амплитуда ее колебаний больше, а звук громче.
4. Энергия звуковых колебаний переходит в энергию теплового движения молекул воздуха и окружающих предметов.
5. Войлок, хорошо поглощающий звук, препятствует его распространению в зрительный зал.
6. Одежда и человеческое тело поглощают звуковые волны в большей степени, чем свободные кресла и пол. Кроме того, публика в зале создает как бы «неровную» поверхность, рассеивающую звук по всем направлениям. Все это вместе влияет на восприятие музыки в заполненной и в пустой аудитории.
7. Ответ связан не с тем, что звук в земле распространяется быстрее, а с тем, что в земле он рассеивается и поглощается в меньшей степени, чем в воздухе.
8. В туманную погоду воздух более однороден – не происходит рассеяния звука на так называемых акустических облаках, создаваемых конвекционными потоками.
9. Ножка камертона возбуждает в крышке стола вынужденные колебания, излучение звуковых волн происходит с большей площади, что приводит к увеличению громкости.
10. Нет. Поскольку возрастает мощность излучаемого камертоном звука, он быстрее израсходует свою энергию и затихнет.
11. Разборчивость речи связана с наличием в звуке высоких

частот. Однако коэффициенты поглощения звука в воздухе для этих частот больше, чем для низких, поэтому колебания высоких частот ослабляются в большей мере, чем колебания низких.

12. Рыхлый снег, изобилующий воздушными полостями, – прекрасный звукопоглощающий материал. По мере уплотнения снега поглощение звука в нем ослабевает, а отражение – усиливается.

13. Чтобы эхо было отчетливым, отраженный звук должен приходить с определенной временно́й задержкой, чего трудно достичь в небольших помещениях.

14. Высокочастотные звуки лучше отражаются от препятствий и при возвращений имеют бо́льшую интенсивность.

15. Волосы поглощают излучаемый летучей мышью ультразвук, и она, не воспринимая отраженных волн, не чувствует преграды и натыкается на голову человека.

16. Непрерывно отражаясь от стены, звуковые волны распространяются вдоль нее в узком поясе, как в волноводе. Интенсивность звука при этом, как оказалось, убывает с расстоянием значительно медленнее, чем в открытом пространстве.

17. Звуковая волна отклоняется вниз из-за понижения с глубиной температуры воды, с чем связано уменьшение скорости звука и, соответственно, увеличение коэффициента его преломления.

Микроопыт

Звук, идущий к вам от грызущего соседа по воздуху, рассеивается значительно сильнее, чем звук, распространяющийся к вашему уху непосредственно по черепным костям.

ГИДРОСТАТИКА В СТАКАНЕ

Вопрос. Не изменится.

Упражнения

1. $\Delta h_2 = \left(1 - \dfrac{\rho_в}{\rho_ц}\right)\Delta h_1 = 12$ мм.

2. $\Delta h = \dfrac{T}{\rho_в g S}$.

3. $A = \dfrac{(\rho_в - \rho)^2 H^2 (S - S_ц) S_ц g}{2\rho_в S} = 540$ мДж.

4. $F_д = mg\dfrac{R}{H}\left(1 - \dfrac{\rho_ж}{\rho}\left(\dfrac{h}{H}\right)^2\right) = 400$ мН (здесь $H = \sqrt{l^2 - (2R)^2}$).

ОБЪЕМ ТЕТРАЭДРА И ЕГО ЧАСТЕЙ

1. $\frac{1}{4}ab$. **2.** 8 : 37. **3.** 11 : 54. **4.** 13 : 99.

5. $\frac{1}{4}a\sqrt{h^2 + \frac{1}{4}a^2}$.

XYI МЕЖДУНАРОДНАЯ ОЛИМПИАДА «ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЙ МАРАФОН»

Письменный индивидуальный тур

Математика

1. Поскольку

$$\left(n^2 + n\right)^2 = n^4 + 2n^3 + n^2 < n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 1 < $$
$$< n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 2n + 1 = \left(n^2 + n + 1\right)^2,$$

данное число при любом натуральном значении n лежит между квадратами двух последовательных целых чисел, поэтому ответ на вопрос отрицательный.

2. Умножим данное соотношение

$$\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)\left(y + \sqrt{1 + y^2}\right) = 1$$

почленно на выражения, сопряженные множителям левой части:

$$\left(\sqrt{1 + x^2} - x\right)\left(\sqrt{1 + y^2} - y\right) = 1.$$

Из полученных равенств видно, что переменные x и y должны иметь разные знаки: в противном случае, если эти знаки «+», то в первом равенстве оба множителя левой части больше 1, и оно не имеет места, а если оба знака «–», то же самое произойдет во втором равенстве. В силу симметрии условия (и вопроса задачи) относительно переменных неважно, какое из них положительно, какое – отрицательно. Пусть, например, $x > 0$, $y < 0$. Приравняв левые части обоих равенств, после элементарных преобразований получаем

$$x\sqrt{1 + y^2} = -y\sqrt{1 + x^2} \Rightarrow x^2\left(1 + y^2\right) = y^2\left(1 + x^2\right) \Leftrightarrow x^2 = y^2.$$

Отсюда, с учетом знаков, следует, что $x = -y$, и $x + y = 0$.

3. Пусть A – вершина острого угла ромба, равного α (рис.3,*а*). Из равнобедренного треугольника MBC получим, что $\angle BMC = \dfrac{180° - \angle CBM}{2}$. В свою очередь,

$$\angle CBM = 360° - (\angle CBA + \angle ABM) =$$
$$= 360° - ((180° - \alpha) + 60°) = 120° + \alpha.$$

Поэтому $\angle BMC = 30° - \dfrac{\alpha}{2}$.

Аналогично, из равнобедренного треугольника AMD находим, что

$$\angle AMD = \frac{180° - (\angle BAD + \angle BAM)}{2} = \frac{180° - (\alpha + 60°)}{2} = 60° - \frac{\alpha}{2}.$$

Окончательно,

$$\angle CMD = \angle AMB + \angle BMC - \angle AMD =$$
$$= 60° + \left(30° - \frac{\alpha}{2}\right) - \left(60° - \frac{\alpha}{2}\right) = 30°.$$

Как это часто бывает в геометрии, можно предложить и более изящный, более геометричный способ решения.

Сделаем параллельный перенос треугольника AMB на вектор $\overline{AD}$. При этом точка A перейдет в точку D, точка B – в точку C, а точка M – в некоторую точку M_1 такую, что BMM_1C – ромб (рис.3,*б*).

Точки C, M и D лежат на окружности с центром в точке M_1, ее радиус равен стороне исходного ромба. Угол M_1 правильного треугольника DM_1C – центральный угол в этой окружности, он равен $60°$, поэтому искомый угол CMD – вписанный в нее и опирающийся на ту же дугу – равен $30°$.

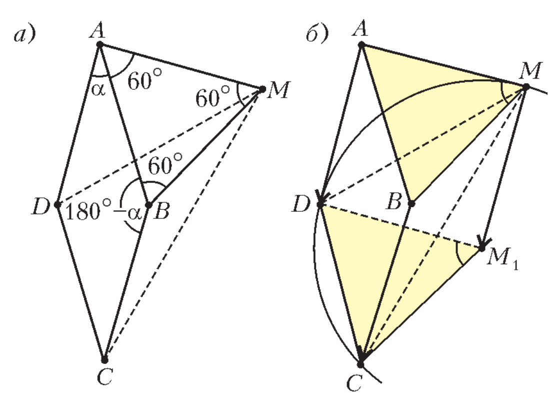

Рис. 3

Замечание. Ответ не зависит от того, острый или тупой угол A ромба. Задачу можно также решать с помощью параллельного переноса и поворота.

4. Среди чисел X, Y и Z одно положительное и два отрицательных, причем положительным может быть любое из них. Например, $X > 0$, если $x < y < 0 < z$; $Y > 0$, если $0 < x < < y < z$; $Z > 0$, если $x < 0 < y < z$. Поскольку в числителях чисел X, Y и Z стоят разности исходных чисел x, y и z, знаки числителей зависят лишь от взаимного расположения исходных чисел (т.е. от того, в каком порядке они расположены на числовой оси, а не от их знаков). Знаменатели же, наоборот, зависят от знаков исходных чисел.

Пусть сначала $x < y < z$. Рассмотрим 4 случая расположения нуля относительно этих чисел.

Если $0 < x < y < z$, комбинация знаков чисел X, Y и Z такова: «– + –».

Если $x < 0 < y < z$, комбинация знаков чисел X, Y и Z «– – +».

В случае $x < y < 0 < z$ искомая комбинация « + – – ».

Наконец, если $x < y < z < 0$, имеем, как и в первом случае, «– + –».

Аналогично рассматриваются и другие случаи взаимного расположения исходных чисел.

5. Предположим, что в десятичной записи числа N нет цифр 1, 2, 9. Это значит, что его первая цифра может быть любой между 2 и 9, т.е. имеет место двойное неравенство $3\cdot 10^n \le N < 9\cdot 10^n$, где n – число десятичных знаков числа N. Умножив почленно это неравенство на 3, получим $9\cdot 10^n \le 3N < 27\cdot 10^n$, откуда вытекает, что число $3N$ начинается как раз с одной из «запрещенных» цифр.

6. Пусть O – центр окружности, вписанной в данный треугольник ABC; OM, OP и OK – радиусы этой окружности, проведенные в точки ее касания со сторонами AB, AC и BC соответственно (рис.4). Заметим, что углы между этими радиусами легко выражаются через углы исходного треугольника: поскольку радиусы, проведенные в точки касания, перпендикулярны касательным, а сумма внутренних углов четырехугольника равна $360°$, то $\angle MOP = 180° - \angle BAC = 180° - \alpha$; аналогично, $\angle MOK = 180° - \beta$, $\angle KOP = 180° - \gamma$. Как известно, отрезок стороны треугольника от вершины до точки касания со вписанной окружностью равен разности между его полупериметром p и стороной, противолежащей этому углу. Поэтому $AM = p - a$ (где $a = BC$), тогда $A_1M = A_1A + AM = a + p - a = p$. Аналогично получается, что расстояния от вершин B_1 и C_1 до точек K и P равны p. Отсюда следует, что $A_1O = B_1O = C_1O$, т.е. O – центр окружности, описанной около треугольника $A_1B_1C_1$, а ее радиус – гипотенуза прямоугольного треугольника с катетами p и r (r – радиус окружности, вписанной в треугольник ABC).

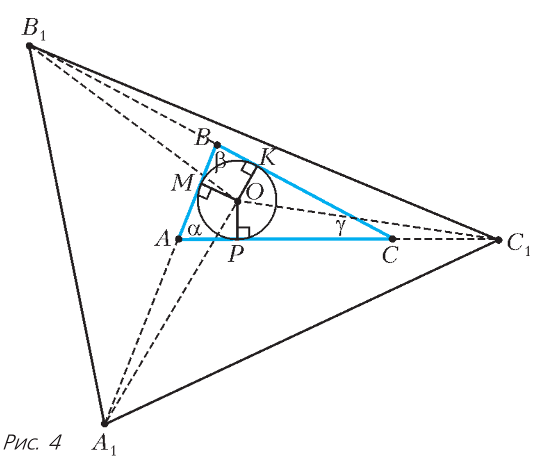

Рис. 4

Заметим, что углы B_1OC_1 и KOP имеют общую часть – угол KOC_1 – и дополняющие ее равные углы B_1OK и C_1OP (это равные углы равных треугольников B_1OK и C_1OP), поэтому эти углы равны, т.е. $180° - \gamma = \angle KOP = \angle B_1OC_1$. Теперь из равнобедренного треугольника B_1OC_1 находим

$$\angle OB_1C_1 = \angle OC_1B_1 = \frac{180° - \angle B_1OC_1}{2} = \frac{180° - (180° - \gamma)}{2} = \frac{\gamma}{2}.$$

Аналогично, из равнобедренного треугольника A_1OC_1 находим

$$\angle OA_1C_1 = \angle OC_1A_1 = \frac{\alpha}{2},$$

а из треугольника A_1OB_1 –

$$\angle OA_1B_1 = \angle OB_1A_1 = \frac{\beta}{2}.$$

Окончательно: $\angle A_1 = \frac{\alpha + \beta}{2}$; $\angle B_1 = \frac{\beta + \gamma}{2}$; $\angle C_1 = \frac{\alpha + \gamma}{2}$.

7. Да, найдется. Предположим, что ученого, у которого ровно один друг, на конгрессе нет. Пусть некий ученый A имеет самое большое на конгрессе количество друзей n (если таких несколько – рассмотрим любого из них). Тогда число друзей каждого из его друзей должно колебаться от 2 до $n - 1$ (число n, по условию, встретиться там не может, а число 1 встретиться там не должно по предположению). Но тогда какое-то число от 2 до $n - 1$ должно повториться, а это также запрещено условием. Получено противоречие.

Физика

1. $v_\infty \approx 6{,}5$ км/с.

2. Компрессор должен работать примерно 1/6 часть времени цикла «работа–пауза».

3. $P_{\text{нач}} \approx 1{,}2$ кВт.

4. $I_1 = I_0\sqrt{1 + \frac{N^2 e^3 v_\Phi}{2\pi^2 R^2 m I_0}}$ (здесь e – заряд электрона, m – его масса).

5. $v = \frac{PRT}{rp_0 \mathrm{M} S} \approx 1{,}5$ м/с (здесь М = 18 г/моль – молярная масса водяного пара).

6. $v_0 = 2\sqrt{2gR}$ (оптимальная траектория касается полуцилиндра в двух симметричных точках, положение которых определяется углом $45°$ с вертикалью).

7. $F = \frac{Q^2}{32\pi\varepsilon_0 R^2}\left(1 - \frac{L^2}{R^2}\right)$.

Устный командный тур

Математика

1. Всего имеется 7 звездочек, а найти надо первую. Поскольку сумма трех последних чисел равна 15, а последнее равно 7, то сумма шестой и седьмой звездочек равна 8, поэтому пятая равна 7 (ведь сумма пятой, шестой и седьмой звездочек также равна 15). Дальше аналогично: сумма третьей и четвертой звездочек равна 8, поэтому вторая равна 7. Поскольку сумма трех первых чисел 15, первое равно 1, а третье равно 7, второе число – первая звездочка – равно 7.

2. Не обязательно. Контрпример: треугольники ABC, BCD, ACD и ABD в прямоугольнике $ABCD$.

3. Из данной системы получаем:

$$\begin{cases} y + z = 2 - x, \\ yz = 1 - x(2 - x). \end{cases}$$

Поэтому y и z – корни квадратного уравнения $t^2 - (2 - x)t +$

$+1-x(2-x)=0$. Ограничения на x получим из условия, что дискриминант этого уравнения неотрицателен:

$$(2-x)^2-4\left(1-x(2-x)\right)\ge 0 \Leftrightarrow 0\le x\le \frac{4}{3}.$$

Если $x=0$, из системы находим, что $y=z=1$; при $x=\frac{4}{3}$ из системы получаем, что $y=z=\frac{1}{3}$.

Отсюда наименьшее значение x равно 0, наибольшее равно $4/3$.

4. Для минутной стрелки ситуация полностью симметрична: промежуток 10 – 11 ч диаметрально противоположен промежутку 16–17 ч, а в силу постоянства угловых скоростей обеих стрелок они будут под углом $180°$ в первом случае и под углом $0°$ во втором через одно и то же количество минут после наступления очередного часа. Поэтому конференция длилась ровно 6 часов.

5. С помощью меньшей стороны пластинки «отрежем» с двух концов от большей стороны прямоугольника квадраты размером 19×19. Останется прямоугольник размером 35×19, диагональ которого $\sqrt{35^2+19^2}<73$, поэтому длинной стороны пластины хватит, чтобы найти центр полученного прямоугольника, а он совпадает с центром исходного.

6. Заметим, что нам выгодно «убивать» ладьей наибольшее возможное количество белых клеток. Если ставить ладью на белое поле, она убивает 7 белых клеток (4 по горизонтали и 3 по вертикали), а если на черное – то 8 белых клеток (по 4 клетки на горизонтали и вертикали). Поэтому выгодно ставить ладьи на черные клетки. Трех ладей недостаточно – они прикроют только 24 белые клетки, а их всего 32. Если поставить 4 ладьи на поля по черной диагонали через одну клетку, все белые клетки будут перекрыты.

7. Не обязательно. Контрпример: треугольники со сторонами 2, 4, 4 и 3, 3, 5.

8. *а*) Если бы n было нечетным, то, поскольку из каждой вершины графа, описывающего компанию, выходит нечетное количество ребер, общее количество знакомств, с одной стороны, должно быть целым числом, с другой стороны, оно равно половине произведения двух нечетных чисел – противоречие.

б) Нет. Контрпример – на рисунке 5.

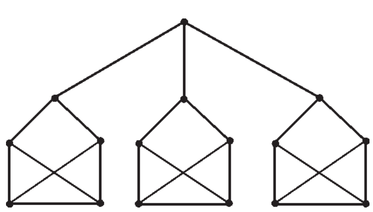

Рис. 5

9. Нельзя. Если бы разрезание было возможно, то из того что площадь исходного квадрата должна быть равна сумме площадей всех прямоугольников получилось бы уравнение в целых числах $10k+27n=196$, где k – количество прямоугольников размером 2×5, а n – число прямоугольников 3×9. Наименьшее значение n, при котором левая часть уравнения – число, заканчивающееся на 6, равно 8, но тогда эта левая часть больше чем $27\cdot8=216$ – больше правой.

10. Очевидно, что c – наибольшая сторона треугольника. Данное соотношение можно переписать в виде

$$\left(\frac{a}{c}\right)^3+\left(\frac{b}{c}\right)^3=1.$$

Поскольку дроби, стоящие в левой части этого равенства, меньше 1, имеют место неравенства

$$\left(\frac{a}{c}\right)^3<\left(\frac{a}{c}\right)^2,\quad \left(\frac{b}{c}\right)^3<\left(\frac{b}{c}\right)^2.$$

Поэтому

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2>1 \Leftrightarrow a^2+b^2>c^2.$$

Но это соотношение справедливо лишь для остроугольного треугольника (из теоремы косинусов для наибольшей стороны c это означает, что косинус противолежащего ей угла положителен – этот угол, наибольший в треугольнике, острый).

Физика

1. $V_р=V\left(1-\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)=20$ л.

2. $h\approx\frac{m}{\pi R^2\rho}=\frac{10^4\ кг}{3{,}14\cdot25\ м^2\cdot10^3\ кг/м^3}\approx 13$ см, где h – высота цилиндрической ямы с радиусом R, равным радиусу вертолета, а m – масса вертолета.

3. Сила уменьшится в n^5 раз.

4. Вблизи поверхности Земли воздух прогревается сильнее всего в районе экватора. Восходящие потоки воздуха на большей высоте растекаются в меридианальном направлении, постепенно отдавая тепло (в основном за счет излучения). Охладившийся воздух опускается к поверхности Земли в районе $30°$ северной и южной широт и далее движется обратно к экватору, образуя систему постоянно дующих ветров – пассатов.

5. $60°$. **6.** $a=g\frac{m_2}{m_1}=15$ м/с^2. **7.** $Q=\nu RT=6{,}65$ кДж.

8. $L=\frac{Fh}{h-nF}$. **9.** $m\approx1$ кг; $l\approx2$ м.

10. $T=\frac{mg}{4}\operatorname{ctg}\alpha=25$ Н.

История научных идей и открытий

Математика

1. а) Очевидно, несократимых дробей ровно $\varphi(n)$.
б) Таких дробей $\varphi(d_i)$.
в) После рассмотрения пунктов а) и б) это очевидно.

2. Обозначим искомую сумму $1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}+\ldots$ через S, а данную сумму $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots$ – через a. Тогда

$$S=a+x+2x^2+3x^3+\ldots+(n-1)x^{n-1}+\ldots=$$
$$=a+x\left(1+2x+3x^2+\ldots\right)=a+Sx,$$

значит,

$$S=\frac{a}{1-x}=\frac{1}{(1-x)^2}.$$

3. Пусть O_1, O_2, O_3 – центры данных равных непересекающихся окружностей радиуса r (черные окружности на рисунке 6). Построим окружность (красную), описанную около треугольника $O_1O_2O_3$. Пусть R – ее радиус, O – центр. Тогда окружности (синие) радиусов $R-r$ и $R+r$ с центром в точке O коснутся всех данных окружностей, для первой данные окружности будут располагаться вне ее, а для второй – внутри.

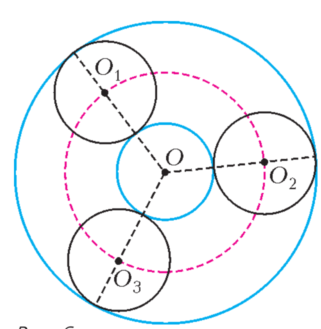

Рис. 6

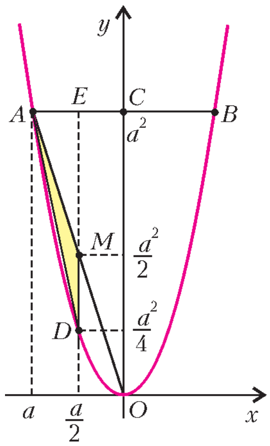

Рис. 7

4. Пусть a – абсцисса точки A (рис.7). Тогда ее координаты есть $(a;a^2)$. Координаты точки M – середины отрезка OA – равны полусуммам координат его концов, т.е. $M = \left(\frac{a}{2};\frac{a^2}{2}\right)$, а у точки D та же абсцисса и другая ордината (она лежит на параболе): $D = \left(\frac{a}{2};\frac{a^2}{4}\right)$.

Данная площадь треугольника AOB равна (с учетом отрицательного знака числа a)

$$S = \frac{1}{2}(-a)\cdot a^2 = -\frac{a^3}{2}.$$

Найдем площадь треугольника AMD (здесь AE – высота, опущенная на сторону DM:

$$S_{AMD} = \frac{1}{2}DM\cdot AE = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{2}-\frac{a^2}{4}\right)\cdot\left(-\frac{a}{2}\right) = -\frac{a^3}{16} = \frac{S}{8}.$$

5. Простое число (кроме числа 2) нечетно, поэтому его можно представить либо в виде $4n + 1$, либо в виде $4n + 3$; впрочем, нам несколько удобнее записывать такое число в виде $4n - 1$ (эта запись получается из предыдущей заменой n на $(n - 1)$, что по существу ничего не меняет. Докажем, что среди чисел вида $4n - 1$ имеется бесконечно много простых чисел (откуда и будет следовать утверждение задачи). Идея доказательства перекликается со знаменитым доказательством бесконечности множества простых чисел, дошедшим к нам еще из «Начал» Евклида.

Предположим, что простых чисел вида $4n - 1$ лишь конечное число, и выпишем их все в порядке возрастания: $p_1; p_2; \ldots; p_k$, (то, что такие числа вообще существуют, видно на примере чисел 3, 7, 11 и т.д.).

Рассмотрим число $a = 4p_1\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_k - 1$ и докажем, что у него имеется простой делитель такого же вида, не совпадающий, естественно, ни с одним из чисел $p_1,\ldots,p_k$, – иначе число a тоже делилось бы на это простое число, чего, как видно из записи числа a, нет.

Действительно, если такого простого делителя у числа a нет, то все его нечетные простые делители имеют вид $4n + 1$, но тогда, как легко видеть, и их произведение тоже имеет вид $4n + 1$, что противоречит виду числа a.

Физика

1. а) Альберт Майкельсон. б) Измерение скорости света в различных направлениях с помощью интерференционной картины. в) Интерферометры и дифракционные решетки.
г) Кадмий. д) Бетельгейзе.

2. а) Аристотель; 384–322 до н.э.; древнегреческий ученый. б) Физика – это наука о природе. Античные ученые не доверяли эксперименту, предпочитая ему логические заключения. в) Астрономия, метеорология, биология, риторика, поэтика и т.д. г) Ликей в Афинах. д) Александр Македонский. е) Геоцентрическая Вселенная, отрицание вакуума и атомизма, зависимость скорости свободно падающего тела от массы.

3. Манфред фон Арденны.

4. Обычная материя (4–5%), темная материя (23%) и темная энергия (73%).

5. а) В процессе сверления пушечных стволов нагреваются и сверло и ствол, т.е. теплород рождается из ничего. б) Теплоемкость, поток тепла.

ВСЕРОССИЙСКАЯ СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО ФИЗИКЕ

1. $s = \frac{v^2 h}{gl}$. **2.** $A = \frac{mv^2}{2}\left(\frac{g^2R^2}{2v^4} + \sqrt{2} - 1\right)$.

3. $v_x = \left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt{gR}$.

4. $p = m\left(\sqrt{2g(l+b)} - v\right)$; $Q = \frac{mg(l+b)}{2} - \frac{kb^2}{2} - \frac{(M+m)v^2}{2}$.

5. $v = \frac{5p}{7M}$. **6.** $\eta = 1 - \frac{5}{3 + (2n\ln n)/(n-1)}$, где $n = \frac{p_1}{p_2}$.

7. $\Delta F = \frac{3Q^2 r}{32\pi\varepsilon_0 l^3}$. **8.** $B = \sqrt{1{,}26\frac{mR}{a^2 t}}$. **9.** $I = \frac{I_0}{25}$.

Информацию о журнале «Квант» и некоторые материалы из журнала можно найти в ИНТЕРНЕТЕ по адресам:

Редакция журнала «Квант»
kvant.info
Московский центр непрерывного математического образования
kvant.mccme.ru
Московский детский клуб «Компьютер»
math.child.ru
Костромской центр дополнительного образования «Эврика»
ceemat.ru

журнал Квант ©

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ
А.А.Егоров, А.В.Жуков, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ
Д.Н.Гришукова, А.Е.Пацхверия, В.М.Хлебникова

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР
Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА
Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:
119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»
Тел.: 930-56-48
E-mail: admin@kvant.info, math@kvant.info, phys@kvant.info

Отпечатано в ОАО ордена Трудового Красного Знамени «Чеховский полиграфический комбинат»
142300 г.Чехов Московской области,
Сайт: www.chpk.ru E-mail: marketing@chpk.ru
Факс: 8(49672) 6-25-36, факс: 8(499) 270-73-00
Отдел продаж услуг многоканальный: 8(499) 270-73-59