XVI Международная олимпиада «Интеллектуальный марафон»

Международный интеллект-клуб (МИК) «Глюон» в рамках международной программы «Дети. Интеллект. Творчество» при участии Университета города Ретимно (Греция), МГУ им.М.В.Ломоносова, Фонда некоммерческих программ «Династия» и при поддержке компаний «Кирилл и Мефодий», «Физикон», «1С», издательского Дома «Первое сентября» и журнала «Квант» провел очередную тест-рейтинговую олимпиаду «Интеллектуальный марафон».

Олимпиада проходила с 7 по 14 октября 2007 года на острове Крит (Греция). На олимпиаду приехали участники из разных регионов России и из Норвегии. Одаренные школьники, проявившие интерес к фундаментальным наукам, соревновались в командных и индивидуальных турах по математике, физике, истории научных идей и открытий. В олимпиаде также участвовали школьники, интересующиеся экологией и биологией.

Абсолютным победителем олимпиады «Интеллектуальный марафон-2007» по фундаментальным наукам в командном зачете стала сборная команда города Бугульма (Татарстан). Ей был вручен главный приз соревнований – Суперкубок. Команда была также лучшей в турах по физике и истории научных идей и открытий. Второе место в общем зачете заняла команда Классического лицея 1 при РГУ (Ростов-на-Дону). Она также заняла второе место по физике и истории научных идей и открытий. На третье место вышла сборная команда города Альметьевска, которая также стала второй по математике и третьей по истории научных идей и открытий.

В индивидуальных соревнованиях абсолютным победителем олимпиады стала Дарья Пусева, ученица 11 класса Классического лицея 1 при РГУ. Ей были вручены большая золотая медаль и малые золотые медали за первые места по математике и физике. Вторым призером в общем зачете стал Игорь Маско, ученик 11 класса ФТЛ 1 города Саратова, ему была вручена большая серебряная медаль и малая серебряная медаль за второе место по физике. Большую бронзовую медаль в общем зачете и малую бронзовую медаль за третье место по математике завоевал Михаил Михайлов, представляющий город Альметьевск. Диля Зайнуллина (Бугульма) получила малую бронзовую медаль за третье место по физике, а Дарья Коровина (гимназия 1567, Москва) была награждена за второе место по математике малой серебряной медалью.

Все победители получили различные подарки и призы от организаторов и спонсоров олимпиады.

Международный интеллект-клуб «Глюон» приглашает региональные центры, школы, лицеи и гимназии, работающие с одаренными детьми, принять участие в XVII Международной олимпиаде «Интеллектуальный марафон», которая пройдет в октябре 2008 года в Греции.

Заявки на участие присылайте по адресу: 115522 Москва, Пролетарский проспект, д.15/6, корп.2, МИК «Глюон»

Телефон: (495)517-8014, факс: (495)396-8227

E-mail:gluon@yandex.ru

(см.также сайт: http:\\www.gluon.ru)

ЗАДАЧИ ОЛИМПИАДЫ

Письменный индивидуальный тур

Математика

1. Может ли при каком-нибудь натуральном n число $n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 1$ быть полным квадратом?

2. Найдите $x + y$, если

$$\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)\left(y + \sqrt{1 + y^2}\right) = 1 .$$

3. На стороне AB ромба $ABCD$ во внешнюю сторону построили правильный треугольник AMB. Найдите угол CMD.

4. Числа x, y и z попарно различны и отличны от нуля. Какие различные комбинации знаков могут быть у чисел

$$X = \frac{(y - x)(x - z)}{yz},\quad Y = \frac{(z - y)(y - x)}{xz},$$

$$Z = \frac{(x - z)(z - y)}{xy}\ ?$$

5. Подряд выписаны цифры десятичных записей натуральных чисел N и $3N$. Обязательно ли среди выписанных цифр найдется хотя бы одна из цифр 1, 2, 9?

6. Дан треугольник ABC. На продолжениях стороны BA за точку A, стороны AC за точку C и стороны CB за точку B отложены отрезки $AA_1 = BC$, $CC_1 = AB$ и $BB_1 = AC$. Найдите углы треугольника $A_1B_1C_1$, если углы A, B и C исходного треугольника ABC равны α, β и γ соответственно.

7. На конгрессе собрались ученые, среди которых есть друзья. Оказалось, что никакие двое ученых, имеющие на конгрессе равное число друзей, не имеют общих друзей. Найдется ли среди них ученый, у которого ровно один друг?

Физика

1. Искусственный спутник Земли находится на круговой орбите высотой $h = 200$ км. Включается двигатель, и скорость спутника возрастает на $\Delta v = 5$ км/с. В результате он улетает в межпланетное пространство. Найдите скорость спутника вдали от Земли. Радиус Земли 6370 км, ускорение свободного падения $9{,}8\ \text{м/с}^2$.

2. Известно, что компрессор домашнего холодильника периодически включается и выключается. Оцените соотношение времен работы и паузы компрессора, если известно, что его мощность порядка $P = 100$ Вт, через стенки холодильника за час проходит количество теплоты $Q = 1$ МДж, температура в помещении, где стоит холодильник, $t_1 = +20\ ^\circ\text{C}$, температура внутри холодильника $t_2 = +3\ ^\circ\text{C}$.

3. Оцените, какую мощность имеет стоваттная электрическая лампа накаливания в начальный момент включения ее в осветительную сеть напряжением 220 В, если рабочая температура нити накаливания 2700 °С, а температурный коэффициент сопротивления вольфрама, из которого сделана нить накала, $0{,}004\ 1/^\circ\text{C}$.

4. В камере кольцевого ускорителя по окружности радиусом R движется тонкий пучок электронов. В начальный момент времени значение силы тока I_0, число частиц в камере N. Магнитный поток через неизменную орбиту пучка уменьшается со скоростью v_Φ. Каким станет значение силы тока после того, как частицы сделают один оборот? Рассмотрите нерелятивистский случай.

5. В чайнике «Тефаль» мощностью $P = 1$ кВт кипит вода. С какой скоростью из его носика вырывается струя пара, если площадь отверстия носика $S = 5$ см^2, удельная теплота испарения воды $r = 2{,}26 \cdot 10^6$ Дж/кг, нормальное атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па, универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль · К)?

6. При какой минимальной начальной скорости можно перебросить камень с уровня земли через полуцилиндрический ангар высотой (радиусом) R?

7. Металлический шар радиусом R, полный заряд которого равен Q, разрезан на две части. Плоскость разреза проходит на расстоянии L от центра шара ($L < R$). С какой силой отталкиваются эти части шара?

Устный командный тур

Математика

1. В последовательности 1∗∗∗∗∗∗∗7 (звездочками обозначены числа) сумма любых трех соседних чисел равна 15. Найдите второй член этой последовательности (т.е. число, обозначенное первой звездочкой).

2. На плоскости нарисовали 4 равных треугольника так, что любые два из них имеют общую вершину. Верно ли, что все треугольники имеют общую вершину?

3. Действительные числа x, y и z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} x + y + z = 2, \\ xy + xz + yz = 1. \end{cases}$$

Найдите наибольшее и наименьшее возможные значения x.

4. Конференция началась между 10 и 11 часами, когда часовая и минутная стрелки были направлены в противоположные стороны, а закончилась между 16 и 17 часами, когда стрелки совпали. Сколько времени продолжалась конференция?

5. Прямоугольную стальную пластинку размером 19×73 положили на лист бумаги и обвели карандашом. Пользуясь только самой пластинкой и карандашом, найдите (постройте) центр полученного прямоугольника.

6. Какое наименьшее количество ладей можно поставить на шахматную доску (размером 8×8 клеток) так, чтобы все белые поля оказались под боем?

7. Имеются два треугольника. Известно, что сумма двух сторон каждого из них равна сумме двух каких-то сторон второго. Равны ли эти треугольники?

8. В компании из n человек каждый имеет ровно трех знакомых.

а) Докажите, что n четно.

б) Всегда ли можно эту компанию разбить на пары знакомых между собой людей?

9. Можно ли разрезать клетчатый квадрат размером 14×14 на прямоугольники 2×5 и 3×9?

10. Найдите вид треугольника (т.е. остроугольный он, прямоугольный или тупоугольный), если про его стороны a, b и c известно, что $a^3 + b^3 = c^3$.

Физика

1. Бочка объемом $V = 50$ л доверху заполняется засаливаемыми на зиму огурцами. Плотность вещества огурцов $\rho_1 = 1100$ кг/м^3. Средняя плотность огурцов в куче $\rho_2 = 660$ кг/м^3. Сколько литров рассола надо приготовить для заливки?

2. Оцените, какой глубины «яма» образуется при зависании вертолета на небольшой высоте над водной поверхностью.

3. Как изменится сила взаимодействия двух маленьких диэлектрических шариков, один из которых заряжен, а другой нет, если расстояние между ними возрастет в n раз?

4. Известно, что в тропиках на больших высотах (более 10–15 км) дуют постоянные ветры от экватора по направлению к полюсам. Почему?

5. Найдите угол отскока шарика при угле падения 45° на идеально гладкую поверхность, если при ударе шарик теряет третью часть своей кинетической энергии.

6. К нижнему концу легкой пружины, верхний конец которой закреплен, подвешены связанные невесомой нитью грузы: верхний массой $m_1 = 0{,}4$ кг и нижний массой $m_2 = 0{,}6$ кг. Нить, соединяющую грузы, пережигают. С каким ускорением начнет двигаться верхний груз?

7. Два моля идеального одноатомного газа сначала изохорно охладили, а затем изобарно нагрели до первоначальной температуры 400 К, увеличив объем газа в три раза. Какое количество теплоты отдал газ на первом участке?

8. В сосуде на поверхности прозрачной жидкости плавает легкая тонкая плосковыпуклая линза, обращенная выпуклой стороной вверх. Фокусное расстояние линзы в воздухе F. Показатель преломления жидкости n. Высота уровня жидкости в сосуде h. На каком расстоянии L над линзой на ее главной оптической оси нужно расположить точечный источник света, чтобы его изображение находилось на дне сосуда?

9. Через два неподвижных блока, находящихся на одной высоте, перекинута длинная легкая нить, к концам которой прикреплены два груза одной и той же массы (рис.1). Нить начинают медленно оттягивать вниз за точку, находящуюся посередине между блоками. График зависимости силы F, прикладываемой к нити, от смещения x этой точки приведен на рисунке 2. Найдите приблизительно массу m каждого из грузов и расстояние l между блоками.

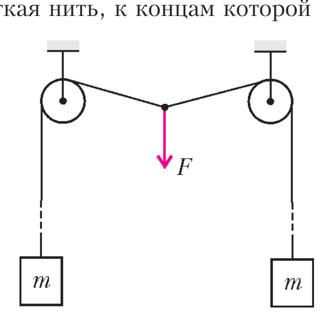

Рис. 1

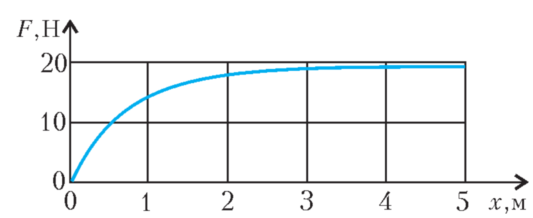

Рис. 2

10. Нижние концы лестницы-стремянки массой $m = 10$ кг соединены веревкой. Каждая сторона лестницы составляет с полом угол $\alpha = 45°$. Считая пол абсолютно гладким, найдите силу натяжения веревки.

История научных идей и открытий

Математика

1. В 2007 году исполнилось 300 лет со дня рождения великого математика Леонарда Эйлера (04.04.1707 – 07 (18). 09. 1783). Нет, пожалуй, такой области математики, где

Эйлер не достиг бы фундаментальных результатов. Имеются они и в теории чисел.

В частности, он ввел в рассмотрение функцию, названную впоследствии его именем – функцией Эйлера, $\varphi(n)$. Через $\varphi(n)$, где n – натуральное (целое положительное) число, обозначают количество натуральных чисел, взаимно простых с числом n и не превосходящих n. Например, $\varphi(5)=4$ – только числа 1, 2, 3, 4 не имеют с числом 5 общих делителей, кроме 1, и одновременно не превосходят числа 5; $\varphi(10)=4$ – только числа 1, 3, 7, 9 не имеют с числом 10 общих делителей, кроме 1, и одновременно не больше, чем число 10.

Наша первая задача посвящена этой функции.

Выпишем в строчку все n дробей:

$$\frac{1}{n};\frac{2}{n};\frac{3}{n};\ldots;\frac{n}{n}. \qquad (*)$$

*а) Сколько среди дробей строчки (*) несократимых?*

Пусть $d_1=1, d_2, \ldots, d_k=n$ – все делители числа n.

*б) Проведем все возможные сокращения в дробях строчки (*) и выпишем все сокращенные дроби (каждую один раз) и все «старые» несократимые дроби в новую строчку. Сколько в этой новой строчке дробей имеют знаменатель d_i для всех возможных значений i?*

в) Докажите тождество Эйлера

$$\varphi(d_1)+\varphi(d_2)+\ldots+\varphi(d_k)=n.$$

2. В XYII веке в математику вошли ряды – суммы бесконечного числа слагаемых, играющие в настоящее время большую роль в некоторых разделах математической науки и практики. В то время с ними обращались достаточно вольно: спокойно, как обычные конечные суммы, умножали, делили и т.д., строгая теория появилась лишь в XYIII – XIX веках.

Попробуйте, зная, что

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots$$

(конечно же, это хорошо вам знакомая сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии), вычислить сумму

$$1+2x+3x^2+4x^3+\ldots+nx^{n-1}+\ldots$$

3. Аполлоний Пергский, живший примерно в 200 – 160 г. до н.э. древнегреческий математик, оставил заметный след в геометрии (именно он ввел такие понятия и термины, как «гипербола», «парабола», «эллипс», «фокус» (кривых) и т.д.). В частности, он рассматривал задачу о построении с помощью циркуля и линейки окружности, касающейся трех произвольных данных окружностей. Мы не предлагаем вам решать эту довольно трудную задачу, а даем более простую.

Постройте с помощью циркуля и линейки окружность, касающуюся трех данных равных непересекающихся кругов:

а) внешним образом; б) внутренним образом.

4. Вы, конечно, много раз слышали имя великого ученого античности Архимеда, жившего примерно в 287 – 212 г. до н.э. Он, в частности, во многом предвосхитил некоторые идеи интегрального исчисления, вычисляя площади и объемы разных фигур. Предлагаем вам решить следующую созвучную некоторым его исследованиям задачу.

Пусть прямая, параллельная оси абсцисс, пересекает параболу $y=x^2$ в точках A и B, а точка O – начало координат. Через середину M отрезка OA проведем параллельно оси параболы (оси ординат) прямую до пересечения с параболой в точке D. Пусть площадь треугольника AOB равна S. Найдите площадь треугольника AMD.

5. В первой половине XIX века жил и работал замечательный немецкий математик П.Г.Л.Дирихле (1805 – 1859). Ему принадлежат многие красивые теоремы. В частности, он доказал знаменитую теорему о том, что всякая арифметическая прогрессия с общим членом $a+dn$, где первый член a и разность прогрессии d – взаимно простые числа, содержит бесконечное количество простых чисел. Мы не можем просить вас доказать эту теорему – ее доказательство слишком сложно. Однако мы надеемся, что вы сможете доказать следующий факт.

В арифметической прогрессии 3, 7, 11, … (с общим членом $a_n=4n+3$; причем $n=0, 1, 2, \ldots$) бесконечно много простых чисел.

(Как видите, первый член и разность этой прогрессии – взаимно простые числа.)

Физика

1. В 1907 году Нобелевская премия по физике была вручена «за создание прецизионных оптических приборов и выполнение с их помощью спектроскопических и метрологических исследований». Ученый, получивший премию, начал свою научную деятельность с экспериментального опровержения теории мирового эфира (в соавторстве с другим известным ученым). Практически всю свою дальнейшую деятельность этот ученый посвятил одной области оптического приборостроения, непрерывно совершенствуя два типа приборов, основанных на представлениях волновой оптики. В числе его работ – исследование возможности создания эталона единицы длины, опираясь на длину волны излучения одного из химических элементов. В 1920 году с помощью разработанного им прибора впервые был измерен угловой размер звезды.

а) Кто этот ученый?

б) Какова идея эксперимента, поставленного для обнаружения наличия или отсутствия мирового эфира?

в) В разработку каких оптических приборов внес выдающийся вклад этот ученый?

г) Какой химический элемент был предложен этим ученым для создания эталона длины?

д) Для какой звезды был впервые измерен угловой размер?

2. Этот ученый стоял у истоков современного естествознания. Он дал название науке физике. Его можно считать первым физиком-теоретиком. Как и большинство ученых древности, он был ученым-энциклопедистом. Как и многие великие ученые, он был педагогом: преподавал в учебном заведении, название которого сохранилось до наших дней. Он был воспитателем выдающегося государственного деятеля. Он был велик даже в своих заблуждениях.

а) Кто этот ученый? Когда и в какой стране он родился и жил?

б) Почему он назвал физику физикой и почему его можно считать теоретиком?

в) В каких еще областях науки работал этот ученый?

г) Как называлось упомянутое учебное заведение и где оно находилось?

д) Кто из государственных деятелей древности был его воспитанником?

е) Какие взгляды этого ученого, сегодня считающиеся заблуждениями, вам известны?

3. Немецкий ученый и инженер, родился в 1907 году. Еще гимназистом он занялся совершенно новым для того времени делом – радиотехникой. Не получив официального образования, уже стал ведущим сотрудником фирмы «Телефункен». В годы, предшествующие второй мировой войне, успешно работал над проблемами электронного телевидения и растровой электронной микроскопии. Он создавал электронные устройства в рамках атомных проектов в Германии в годы войны и в СССР после войны. Вернувшись на родину в 1956 году, получил от правительства ГДР разрешение на владение недвижимым имуществом, принадлежавшим его семье. Своим правом он воспользовался в духе лучших традиций людей науки: организовал в фамильном имении в Дрездене научно-исследовательский институт. В своей исследовательской работе ученый переключил внимание на новое направление – применение электроники в медицине и биологии. Скончался в 1997 году.

Назовите имя этого ученого.

4. Вопрос о том, как устроена Вселенная, волновал людей всегда. Сегодняшние представления о ее строении основаны на том, что существует несколько фундаментальных объектов, из которых формируется все многообразие устройства и свойств Вселенной. Некоторые из этих объектов неплохо изучены, существование других пока установлено косвенно, по их действию на изученные объекты.

Назовите эти фундаментальные объекты, их свойства и роль во Вселенной. Какие современные теории строения Вселенной вам известны?

5. В XVIII веке термодинамические явления описывались на основе теории теплорода – особой жидкости, перетекающей из одного тела в другое при теплопередаче.

а) Какие опыты послужили основанием для отказа от теории теплорода?

б) Какие термодинамические понятия, введенные в рамках теории теплорода, сохранились в современной физике?

Публикацию подготовили В.Альминдеров, А.Егоров, А.Кравцов, В.Крыштоп, Ж.Раббот

Всероссийская студенческая олимпиада по физике

По результатам очередной Всероссийской олимпиады среди студентов технических вузов, которая состоялась в ноябре 2007 года, в командном зачете первое место заняла команда Московского государственного технического университета (МГТУ) им. Н.Э.Баумана (133 балла), второе место – команда Самарского государственного аэрокосмического университета им. академика С.П.Королева (95 б.), третье место – команда Уфимского государственного авиационного технического университета (85 б.).

В личном зачете первое место завоевал А.Пудовкин (МГТУ им. Н.Э.Баумана, 48 баллов), второе место завоевала Д.Ковалева (МГТУ им. Н.Э.Баумана, 46 б.), на третьем месте оказался Н.Трошкин (Самарский государственный аэрокосмический университет им. академика С.П.Королева, 44 б.).

Специальным призом жюри награжден студент Российского государственного университета нефти и газа им. И.М.Губкина К.Корнишин – за оригинальное решение двух задач этой олимпиады и за стабильно успешное участие в городских и всероссийских турах студенческих олимпиадах.

ЗАДАЧИ ОЛИМПИАДЫ

1. Велосипедист движется со скоростью v. Расстояние между осями колес равно l, центр тяжести велосипедиста с велосипедом находится посредине между колесами на высоте h от дороги. Определите минимальный тормозной путь, если торможение возможно только задним колесом.

2. Через отверстие в потолке пропущена нерастяжимая нить, к концу которой привязан груз массой m, раскрученный в горизонтальной плоскости до скорости v и имеющий радиус вращения относительно вертикальной оси R. Какую работу надо совершить, чтобы медленно подтянуть груз вдвое ближе к потолку?

3. К планете радиусом R и ускорением на поверхности g подлетает с большого удаления космический аппарат массой M с двигателем малой тяги $F_т \ll mg$, имеющий скорость v. Определите минимальную характеристическую скорость, необходимую для перехода аппарата на низкую орбиту вокруг планеты. Характеристическая скорость – это скорость, которую получит космический аппарат в свободном пространстве при тех же затратах топлива.

4. Цепочка массой m и длиной l подвешена за верхнее звено, а нижним касается горизонтальной платформы массой M, удерживаемой снизу в равновесии системой пружин общей жесткостью k. Цепочку отпустили, и в момент соприкосновения верхнего звена с платформой платформа опустилась от точки равновесия на величину b и достигла скорости v. Определите импульс, переданный цепочкой платформе в процессе падения, и выделившееся при этом количество теплоты.

5. Шар радиусом R массой M, стоящий на горизонтальной плоскости, раскрутили относительно вертикальной оси до угловой скорости ω. Затем по шару нанесли удар, передавший ему импульс $p \ll MR\omega$ вдоль горизонтальной линии, проходящей через центр шара. Определите скорость, с которой покатится шар, если проскальзывание между шаром и плоскостью отсутствует.

6. Циклический процесс, проводимый с газом, состоит из изохоры, изобары и изотермы. Определите максимальный КПД цикла, если давление может меняться от p_1 до p_2.

7. Два точечных заряда Q и $-Q$ находятся на расстоянии $3l$ друг от друга. Посредине между ними помещают тело, состоящее из двух металлических шариков радиусом $r \ll l$, соединенных очень тонким металлическим стержнем, совпадающим с линией, соединяющей заряды. Определите, на сколько изменится сила взаимодействия между зарядами, если длина стержня равна l.

8. Перемычка массой m и сопротивлением R лежит на двух горизонтальных параллельных рельсах, расстояние между которыми равно a. К рельсам на время t подключили источник с ЭДС $\mathcal{E}$. Какое вертикально направленное магнитное поле B необходимо создать, чтобы скорость перемычки после отключения источника достигла максимального значения? Считать, что exp(1,26) = 3,52.

9. На пути плоской световой волны находится круглое отверстие, в котором помещается лишь небольшая часть первой зоны Френеля для точки наблюдения P, интенсивность света в которой равна I_0. В отверстие поместили специальную линзу, при прохождении света через которую волновой фронт становится коническим. Определите интенсивность света в точке наблюдения P, если в присутствии линзы в отверстии помещается 5 зон Френеля.

Публикацию подготовили М.Яковлев, В.Голубев

Заочная школа СУНЦ НГУ

Заочная школа (ЗШ) Специализированного учебно-научного центра (СУНЦ) Новосибирского государственного университета (НГУ) приглашает школьников 7–11 классов и абитуриентов расширить и углубить свои знания по школьным предметам и подготовиться к вступительным экзаменам в высшие учебные заведения.

Кроме отдельных учащихся, в ЗШ принимаются факультативные группы, организованные в общеобразовательных школах. Лучшие учащиеся ЗШ ежегодно приглашаются в Летнюю школу для участия в конкурсе СУНЦ НГУ. Учащиеся, успешно выполнившие все задания, по окончании одиннадцатого класса получают удостоверение ЗШ.

Зачисление в Заочную школу СУНЦ НГУ производится круглогодично. Чтобы туда поступить, необходимо прислать в адрес ЗШ выполненное первое задание и заявление о приеме. Работа должна быть выполнена в ученической тетради в клетку. Обязательно запишите краткое условие каждой задачи. Номера задач должны совпадать с теми, которые указаны в задании. Пишите четко, разборчиво, оставляя поля для замечаний преподавателя.

На обложке тетради нужно указать:

1) Отделение (математическое или физическое)

2) Номер задания

3) Фамилию, имя, отчество

4) Класс, в котором Вы учитесь в своей школе

5) Ваш подробный домашний адрес, с указанием индекса почтового отделения, телефона (с кодом города), e-mail

6) Адрес Вашей школы и телефон/факс, (с кодом города), e-mail

7) Фамилию, имя, отчество преподавателей в Вашей школе по математике и по физике

Работу отсылайте только простой бандеролью. В тетрадь вложите листок бумаги размером 6×10 см с написанным на нем Вашим адресом.

Выполненное задание и заявление о приеме высылайте по почтовому адресу: 630090 Новосибирск-90, ул. Ляпунова, 3, Заочная школа СУНЦ НГУ или по электронной почте: distant@sesc.nsu.ru

Телефон: (383) 363-4066

Адрес в интернете: http://zfmsh.nsu.ru

Первое задание

Математическое отделение

7 класс

1. За 5 ч всадник проехал на 8 км меньше половины всего расстояния, а за 7 ч он проехал на 16 км больше половины этого расстояния. Определите скорость всадника, если он ехал с одной и той же скоростью.

2. Гусь, 3 утки и 2 курицы имеют общую массу 24 кг, а 2 гуся, 5 уток и 4 курицы имеют массу 44 кг. Какова общая масса 1 гуся, 4 уток и 2 куриц?

3. Имея одинаковое количество денег в кошельках, Крокодил Гена и Чебурашка пошли на базар. Крокодил Гена сначала истратил 20% своих денег на яблоки, а затем 10% от оставшихся у него денег истратил на конфеты. Чебурашка же истратил 30% своих денег на апельсины. У кого из друзей денег в кошельке осталось больше?

4. Найдите разность между суммой всех четных чисел и суммой всех нечетных чисел, не превосходящих 100.

5. Если от задуманного трехзначного числа отнять 11 и получившееся число разделить на 11, то в остатке получится 4. Если от того же задуманного числа отнять 8 и получившееся число разделить на 8, то остаток от деления будет 4. Если же от задуманного числа отнять 7 и получившееся число разделить на 7, то остаток опять будет 4. Найдите задуманное число.

6. Как разрезать квадрат на 5 прямоугольников так, чтобы никакие два из них не имели общей стороны?

7. Восстановите цифры в примере на умножение:

$$\begin{array}{r} \times\quad 126 \\ ** \\ \hline *** \\ +\;**** \\ \hline 1*2*6 \end{array}$$

Запишите свои рассуждения.

8 класс

1. Города A и B расположены на реке на расстоянии 10 км друг от друга. В каком случае теплоходу потребуется больше времени: проплыть от A до B и обратно или проплыть 20 км по озеру?

2. Служащие банка решили разложить поровну партию золотых слитков по сейфам. Сначала в каждый сейф положили по 12 слитков, но при этом один слиток остался. Затем из одного сейфа вынули все слитки, и тогда в оставшиеся сейфы удалось разложить все слитки поровну. Сколько слитков было в партии, если в каждый сейф помещается не более 20 слитков золота?

3. Дан правильный треугольник ABC. На продолжении стороны AC за точку C взяли точку P, а на продолжении стороны BC за точку C – точку K так, что $BP = PK$. Докажите, что $AP = CK$.

4. Чему равно значение дроби $\dfrac{\text{Д}\cdot\text{У}\cdot\text{Б}\cdot\text{О}\cdot\text{К}}{\text{Я}\cdot\text{С}\cdot\text{Е}\cdot\text{Н}\cdot\text{Ь}}$? В ребусе одинаковыми буквами обозначены одинаковые цифры, разными – разные.

5. В тяжелую для себя годину Баба Яга решила расстаться со своей ступой и с метлой, выставив их на распродажу. Ступа дороже метлы на 25%. На сколько процентов метла дешевле ступы?

6. Мальчиш Плохиш хочет купить варенье, печенье и конфеты. Если он купит только бочку варенья, то у него останется 3 доллара, если же только корзину печенья, то останется 4 доллара, а если только коробку конфет, то – 8 долларов. Хватит ли у Плохиша денег, чтобы купить бочку варенья и корзину печенья?

7. Ученику надо было найти произведение числа 136 на некоторое двузначное число, в котором цифра единиц вдвое больше цифры десятков. По рассеянности он поменял местами цифры двузначного числа, отчего и получил произведение на 1224 больше истинного. Чему равно истинное произведение?

9 класс

1. Докажите, что число $4^{2007}+2^{2009}+3$ является составным.

2. Решите уравнение $x^2+5y^2-4xy-6y+9=0$ для действительных x и y.

3. Биссектриса одного из острых углов прямоугольного треугольника делит катет в отношении 5:3. Найдите гипотенузу этого треугольника, если длина биссектрисы другого острого угла равна $\sqrt{10}$.

4. Известно, что положительное число a является одним из корней уравнения

$$x\left(x+3^{0}\right)\left(x+3^{1}\right)\ldots\left(x+3^{20}\right)=1.$$

Докажите, что $a<10^{-90}$.

5. В окружность вписаны трапеция, основанием которой служит диаметр, и равнобедренный треугольник, стороны которого параллельны сторонам трапеции. Докажите, что трапеция и треугольник имеют равные площади.

6. В новогоднем карнавале участвуют 100 человек. Каждый из них знаком не менее чем с 50 из присутствующих. Докажите, что среди участников карнавала найдутся четыре человека, которых можно поставить вокруг елки так, чтобы любые стоящие рядом участники были знакомы.

10 класс

1. Вычислите сумму

$$2^2+4^2+6^2+\ldots+2008^2-1^2-3^2-5^2-\ldots-2007^2$$

(квадраты четных чисел берутся с плюсом, квадраты нечетных – с минусом).

2. Если первый автомобиль сделает 4 рейса, а второй – 3 рейса, то 21 тонну груза они перевезти не смогут. Если же первый сделает 7 рейсов, а второй – 4 рейса, то они смогут перевезти более 33 тонн груза. Какой из автомобилей имеет бóльшую грузоподъемность?

3. Докажите, что для любых неотрицательных чисел a и b выполнено неравенство $\sqrt[3]{4(a+b)}\geq\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$.

4. Из вершин B и C произвольного треугольника ABC проведены медианы BB_1 и CC_1. Докажите, что $BB_1^2+CC_1^2>\dfrac{9}{8}BC^2$.

5. Дан острый угол и окружность внутри него. Найдите на окружности точку, сумма расстояний от которой до сторон угла была бы: а) наименьшей; б) наибольшей.

6. Среди 101 монеты ровно 50 фальшивых. Массы всех настоящих монет одинаковы, масса каждой фальшивой монеты отличается от массы настоящей на один грамм (в большую или меньшую сторону). Как за одно взвешивание на чашечных весах со стрелкой, которая показывает разность весов на чашках, определить, является ли данная монета фальшивой? На каждую чашку весов можно класть любое количество монет.

11 класс

1. Два велосипедиста выехали одновременно и ехали с постоянными скоростями один из A в B, другой – из B в A. Первый раз они встретились в 40 км от B, после чего каждый доехал до конечного пункта (первый до B, второй до A), развернулся и поехал обратно. Второй раз они встретились в 20 км от A через 8 часов после их первой встречи. Найдите скорости велосипедистов и расстояние от A до B.

2. Найдите все решения уравнения

$$\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}=\frac{1}{x-1}.$$

3. Решите уравнение

$$\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}2x+\operatorname{tg}x\operatorname{tg}2x\operatorname{tg}3x=\operatorname{tg}3x+\operatorname{tg}4x.$$

4. На каждой стороне выпуклого четырехугольника как на диаметре построен круг. Докажите, что четыре построенных круга полностью покрывают весь четырехугольник.

5. Найдите количество отрицательных чисел среди первых 2008 элементов последовательности

$$\cos1^\circ,\cos10^\circ,\cos100^\circ,\ldots,\cos\left(10^{2007}\right)^\circ.$$

6. В треугольной пирамиде $ABCD$ известны длины ребер: $AB=4$, $CD=6$, $AC=AD=BC=BD=7$. Медианы грани BCD пересекаются в точке M. Найти объем пирамиды $MACD$.

Физическое отделение

9 класс

1. Кольцевая автотрасса имеет форму прямоугольника со сторонами 10 км и 8 км. Из одной точки трассы, расположенной «в вершине прямоугольника», по большей стороне в одном направлении одновременно стартовали два автомобиля: один со скоростью 60 км/ч, другой со скоростью 90 км/ч. На каком расстоянии (по прямой, а не по трассе) окажутся автомобили через 14 мин?

2. Груз, наполовину погруженный в жидкость, удерживается привязанной к нему сверху нитью. Определите плотность материала ρ_x, из которого изготовлен груз, если плотность жидкости ρ, объем груза V, натяжение нити T.

3. Первоначально твердый образец, начальная температура которого $t_1=15$ °С, нагревают в специальном сосуде. Зависимость температуры t образца от времени τ представлена на рисунке 1. Система отрегулирована так, что в образец поступает в каждую единицу времени одинаковое количество теплоты. Чему равна удельная теплоемкость твердого образца? Удельная теплота плавления $L=240000$ Дж/кг, $t_2=90$ °С, $\tau_1=4$ мин, $\tau_2=8$ мин. Время отсчитывается с момента начала нагрева.

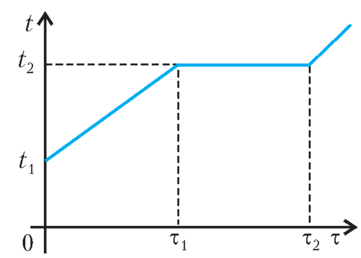

Рис. 1

4. В гирлянде состоящей из $N=25$ параллельно соединенных лампочек (рис.2), перегорела одна из них. Во сколько раз надо увеличить входное сопротивление R, чтобы при прежнем напряжении накал оставшихся лампочек не изменился?

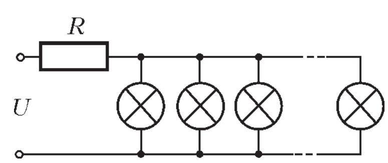

Рис. 2

10 класс

1. Решите задачу 3 для 9 класса.

2. По горизонтальной поверхности движется тело массой m. В момент, когда его скорость равнялась v_0, на него подействовали постоянной горизонтальной силой F_0, направленной навстречу. На каком расстоянии s от этого места окажется тело, когда его скорость снова будет равняться v_0? Коэффициент трения μ. Известно, что $F_0>\mu mg$.

3. В покоящейся вертикальной запаянной трубке находится массивный подвижный поршень. Трубку быстро перевернули вокруг поршня. Найдите ускорение поршня в первый момент времени после переворота. Трением поршня о стенки трубки пренебречь.

4. Ко дну сосуда сечением S привязан легкий пустой шар объемом V с центром на глубине h. Шар лопнул. Какое количество теплоты выделится к моменту, когда из-за внутреннего трения движение жидкости прекратится? Плотность жидкости ρ, ускорение свободного падения g. Массой оболочки шара пренебречь.

5. Небольшое тело запустили со скоростью v_0 по горизонтальному желобу, переходящему в полуокружность радиусом R (рис.3). Пренебрегая трением, найдите расстояние по

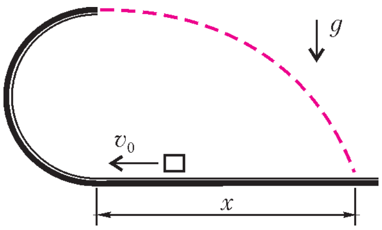

Рис. 3

горизонтали x, на котором окажется это тело после отрыва от желоба. Известно, что $v_0^2 > 4gR$.

11 класс

1. Решите задачу 4 для 10 класса.

2. Из одной точки кольцевой гоночной трассы одновременно, но в противоположных направлениях стартуют два гоночных автомобиля A и B. Через 20 мин автомобили проехали мимо друг друга в некоторой точке C. На сколько раньше окажется на месте старта автомобиль A, если его средняя скорость на 25% выше скорости автомобиля B?

3. В цепи, изображенной на рисунке 4, поддерживается постоянное напряжение $U = 9$ В. Постоянное и переменное сопротивления одинаковы и равны $R = 12$ Ом. В каком отношении делит подвижный контакт K переменное сопротивление, если амперметр, сопротивлением которого можно пренебречь, показывает ток $I = 2$ А?

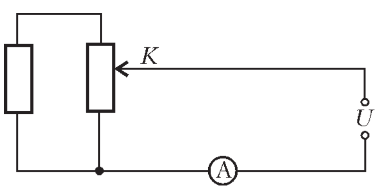

Рис. 4

4. Два конденсатора, один емкостью C, а другой емкостью $2C$, вначале были последовательно присоединены к источнику с постоянным напряжением U (рис.5). После полной зарядки их отсоединили от источника и соединили обкладки с одноименными зарядами, как показано на рисунке. На сколько уменьшится энергия конденсаторов после такого соединения?

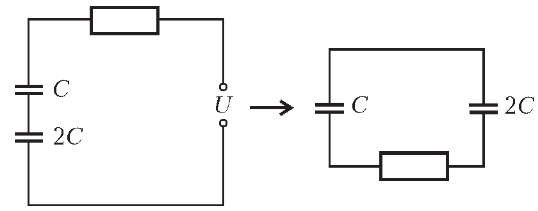

Рис. 5

5. Тело массой m и зарядом q удерживают на горизонтальной поверхности. Над поверхностью на высоте h закреплен заряд q. Расстояние по горизонтали от тела до точки, расположенной под зарядом, равно L. Какую минимальную горизонтальную скорость v_0 необходимо сообщить телу, чтобы оно проскочило точку, расположенную под закрепленным зарядом?

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

КМШ

Задачи

(см. «Квант» №2)

1. 7. Несложно заметить, что

$$135135 = 135 \cdot 1001 = (1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 9) \cdot (7 \cdot 11 \cdot 13).$$

2. Существуют. Вот пример двух подходящих чисел: 1010010007 и 3000001006 – каждое из них описывает второе. Как подобрать такие числа? Нетрудно сообразить, что в каждом таком числе сумма цифр равна 10. Возьмем любое десятизначное число с такой суммой цифр и составим второе число, у которого первая цифра равна количеству единиц исходного числа, вторая – количеству двоек и т.д. Потом таким же образом на основе второго числа составим третье, затем – четвертое, пятое… В конечном итоге с довольно большими шансами мы обнаружим указанную пару чисел. В частности, к ним приводят «самые напрашивающиеся» исходные числа 1000000009 или 1234000000. Конечно, не исключена возможность, что в построенной нами последовательности мы наткнемся на указанное в условии число 2100010006. Что ж, тогда придется заменить исходное число.
Найти другие «зацикливания» исходной последовательности не удалось, хотя вполне вероятно, что они существуют.

3. Решение обеих задач использует неравенство треугольника.
а) Верно всегда. Или к одному, или к другому концу *наибольшего* ребра пирамиды примыкают два других ребра, из которых вместе с этим наибольшим ребром можно составить треугольник.
б) Пирамиду можно составить не всегда. Например, если стороны одного треугольника выражаются числами 1000, 1002, 1004, а длины всех сторон другого равны 1, то из этих шести отрезков составить пирамиду не удастся: никакие два ребра из разных троек не могут иметь общих концов.

4. Не существуют. Очевидно, что $z > x$, $z > y$. Без ограничения общности будем полагать $x \le y < z$. Тогда

$$x \cdot 2^x + y \cdot 2^y \le y \cdot 2^{y+1} <$$
$$< (y+1) \cdot 2^{y+1} \le z \cdot 2^z.$$

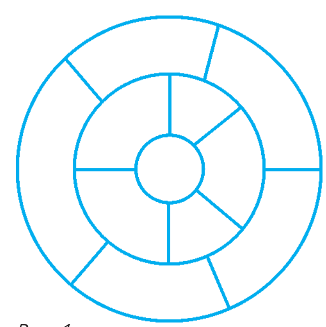
Рис. 1

5. Одна из возможных схем дорог показана на рисунке 1.
Здесь для любых трех перекрестков A, B и C (A – перекресток, в котором находится Неуловимый Джо, B и C – перекрестки, в которых находятся полицейские) существует четвертый перекресток D, соседний с A и не являющийся соседним для перекрестков B и C.

Конкурс «Математика 6–8»

(см. «Квант» № 6 за 2007 г.)

11. Несложно заметить, что числитель каждой дроби в условии задачи делится на знаменатель. Например, $(x+y+z)^5 - x^5 - y^5 - z^5$ делится на $x + y$, поскольку $(x+y+z)^5 - z^5$ делится на $(x + y + z) - z = x + y$ и $x^5 + y^5$ делится на $x + y$. Воспользовавшись тождеством

$$(x+y+z)^5 - z^5 - y^5 - z^5 =$$
$$= 5(x+y)(y+z)(z+x)\left(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx\right),$$

перепишем это условие в виде

$$x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx = a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca,$$