

Урок близился к завершению...

М. БОНДАРОВ

ДА, УРОК ПО ТЕМЕ «РАВНОУСКОРЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ» действительно близился к завершению, но до звонка оставалось еще несколько минут. Анатолий Иванович с загадочным видом посмотрел на девятиклассников, и все поняли, что сейчас что-то произойдет. И не ошиблись...

«Готовясь к сегодняшнему уроку, — начал учитель, — я вспомнил случай из биографии Ричарда Фейнмана. Когда он учился в школе, то нередко участвовал в соревнованиях по алгебре. Ученикам давались задачи, для решения которых требовалось то, что сегодня назвали бы нестандартным мышлением, и выделялось строго ограниченное время на их решение — обычно 45 секунд. На листе бумаги можно было писать что угодно, но в конце концов каждый участник должен был обвести в кружок одно число на своем листе, которое и было ответом на задачу. Задачи намеренно выбирались так, что решить их «по правилам» за отведенное время было практически невозможно, но они легко решались, если вы видели короткий путь (или изобретали свой собственный). Фейнман всегда побеждал в таких состязаниях, записывая число и нарочито обводя его в кружочек, хотя зачастую на его листе больше ничего и не было».

Анатолий Иванович остановился и обвел глазами притихших учеников. «Сегодня я подобрал для вас интересную задачу и хочу, чтобы вы оказались в положении юного Фейнмана. Правда, на размышление в первый раз дам вам три минуты. Итак, вот условие задачи:

Автомобиль, двигаясь равнозамедленно, за последовательные промежутки времени в 3 с и 2 с прошел отрезки АВ и ВС в 51 м и 24 м соответственно. Какой путь пройдет автомобиль от точки С до остановки?

Время пошло!»

После команды «стоп» на стол учителя легли три листочка — и все с правильным ответом. «Что ж, давайте заслушаем авторов: пусть поделятся своими секретами».

Знаменитый алгебраист Андрей скромно пояснил: «Я записал систему уравнений и, к счастью, успел ее решить».

Геометр Гена сказал, что применил рассмотренный на одном из предыдущих уроков графический способ решения кинематических задач.

А на листочке любителя арифметики и журнала «Квант» Филиппа красовалось только обведенное в кружок число 25. «Юный Ричард второй!» — крикнул кто-то с последней парты, и все засмеялись.

Анатолий Иванович тоже улыбнулся и сказал: «Ну, вот вы и узнали верный ответ к задаче, а это дорогого стоит. Попробуйте дома поразмыслить над задачей и, возможно, придумаете свой способ решения».

И в это время прозвенел звонок. Однако народ требовал объяснений: «Пусть расскажут подробнее, как за три минуты можно успеть!»

Объяснения, действительно, последовали, но мы, как и Анатолий Иванович, советуем вам сначала решить эту задачу самостоятельно.

Рассказ Андрея. Я дважды применил формулу зависимости перемещения от времени при равнозамедленном движении $s = v_0 t - \frac{at^2}{2}$ для первых трех и пяти секунд движения:

$$51 = v_0 \cdot 3 - \frac{9a}{2}, \quad 75 = v_0 \cdot 5 - \frac{25a}{2},$$

откуда легко нашел:

$$v_0 = 20 \text{ м/с и } a = 2 \text{ м/с}^2.$$

Затем определил весь путь до остановки:

$$s_0 = \frac{v_0^2}{2a} = 100 \text{ м},$$

после чего вычислил искомый путь:

$$s = 100 \text{ м} - 51 \text{ м} - 24 \text{ м} = 25 \text{ м}.$$

Рассказ Гены. Я начертил примерный график зависимости скорости от времени ($v = v_0 - at$). Определив среднюю скорость за первые три секунды: $v_{ср1} = 51 \text{ м} / 3 \text{ с} = 17 \text{ м/с}$ и за следующие две секунды: $v_{ср2} = 24 \text{ м} / 2 \text{ с} = 12 \text{ м/с}$, построил на графике средние линии трапеций, соответствующие этим скоростям. Легко видеть, что за 2,5 с скорость уменьшилась на 5 м/с, значит, ускорение равно по модулю 2 м/с². Зная, что через 4 с после начала движения скорость автомобиля была 12 м/с, находим его скорость в точке С — это 10 м/с. Ясно, что после этого автомобиль тормозил до остановки 5 с. Из графика находим площадь треугольника, численно равную искомому пути:

$$s = \frac{10 \text{ м/с} \cdot 5 \text{ с}}{2} = 25 \text{ м}.$$

Рассказ Филиппа. Я сразу понял, что смогу обогнать Андрея и Гену лишь в том случае, если не буду пытаться решать задачу алгебраическими и геометрическими способами, которыми они владеют лучше, а попробую придумать что-нибудь похитрее. Поэтому я решил применить метод угадывания ответа (о котором читал в одном из номеров «Кванта»). Вспомнилось мне также, что еще в 7 классе Анатолий Иванович рассказывал о методе обратимости времени.

Итак, мысленно пустим время вспять, и будем рассматривать автомобиль, который в этом случае разгоняется, трогаясь с места. Тогда пройденный от начала движения путь определяется по формуле $s = at^2/2$. Мы не знаем, чему равно ускорение автомобиля, но предположим, что оно составляет 2 м/с² (ведь, как правило, в обычных задачах оно не превышает 5 м/с²). К тому же, сокращается «двойка» в формуле для пути, и пройденный путь оказывается не просто пропорционален квадрату времени движения, а численно равен ему. Если теперь предположить, что на искомом пути автомобиль двигался целое число секунд, то этот путь тоже равен не просто целому числу метров, а квадрату некоторого целого числа. Причем квадратами будут и все другие пути, пройденные автомобилем от начала движения за целое число секунд. Придется заняться перебором.

Пусть искомый путь равен 1 метру. Тогда $1 + 24 = 25$ — квадрат, но $1 + 24 + 51 = 76$ — уже не квадрат, значит, ответ «1 метр» — не подходит. Дальше я попробовал следующий квадрат — 4 метра. Но $4 + 24 = 28$ — не квадрат, значит, снова не угадал. Не подходят и 9, и 16 метров. Пробую 25, и тут, наконец, победа — вокруг одни квадраты: $25 + 24 = 49$, $25 + 24 + 51 = 100$. Ответ найден!

А какой из способов решения пришелся по душе вам?

Ракета на водяном паре, или Как Студент с Луны улетал

А. СТАСЕНКО

КАК-ТО РАЗ, ПИЯ КОФЕ И НАБЛЮДАЯ ЗА СТРУЙКОЙ ПАРА из чайника, Студент вдруг подумал: что если бы пришлось срочно взлетать с поверхности Луны, а топлива для ракеты уже нет, но остались еще тонна воды и некоторый запас энергии в аккумуляторах? Конечно, согласно закону сохранения импульса, разумно нагреть и испарить воду и ускорить полученный водяной пар до максимально возможной скорости. Но до какой?

И тут начались физические оценки.

Пусть пар воды нагрет до температуры T_0 . Молекула воды – трехмерный объект; следовательно, она обладает шестью степенями свободы. Это означает, что положение в пространстве ее центра масс можно описать тремя числами, например значениями декартовых координат x, y, z , а ее ориентацию – тремя углами относительно этих осей. Но, как известно, в условиях термодинамического равновесия на каждую степень свободы любого тела (и молекулы, и паровоза) приходится энергия $kT_0/2$, где $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана. Это утверждение называется в молекулярной физике и термодинамике теоремой о равнораспределении энергии по степеням свободы. Итак, на одну молекулу воды будет приходиться энергия $6 \cdot (kT_0/2) = 3kT_0$, а на целый моль, в котором содержится N_A молекул, – энергия $U = N_A \cdot 3kT_0 = 3RT_0$, где $N_A = 6 \cdot 10^{23}$ моль⁻¹ – число Авогадро, а $R = N_A k = 8,31$ Дж/(моль · К) – универсальная газовая постоянная.

Предположим далее, что этот моль водяного пара можно как-то – конечно, через сопло ракеты – расширить так, что он охладится почти до абсолютного нуля. Ведь для того и нужно сопло, чтобы тепловую хаотическую энергию молекул превратить в направленное движение молекул, т.е. в кинетическую энергию. Более того, надо учесть еще и работу, которую может совершить расширяющийся газ. Если начальный объем моля равен V_0 , то этот «запас работы» равен $p_0 V_0 = RT_0$, где p_0 – давление газа.

Термодинамика доказывает, что в процессе ускорения газа в сопле все время будет сохраняться сумма

$$H_0 = U_0 + p_0 V_0 = 3RT_0 + RT_0 = 4RT_0.$$

Она даже имеет специальное название – энтальпия, или теплосодержание. Но по мере ускорения эта начальная энтальпия будет распределяться между растущей кинетической энергией и убывающим теплосодержанием:

$$H_0 = H + M \frac{v^2}{2} = 4RT + M \frac{v^2}{2}, \quad (*)$$

где M – молярная масса (в случае воды $M = 0,018$ кг/моль). Таким образом, можно было бы ожидать, что при стремлении температуры газа к нулю его скорость должна стремиться к максимальному значению

$$v_{\max}^{(1)} = \sqrt{\frac{2H_0}{M}} = \sqrt{\frac{8RT_0}{M}}.$$

Если конструктивные ограничения позволяют нагреть пар, например, до температуры $T_0 = 1000$ К, то значение этой скорости составило бы

$$v_{\max}^{(1)} = \sqrt{\frac{8 \cdot 8,31 \cdot 10^3}{0,018}} \text{ м/с} \approx 2000 \text{ м/с}.$$

Это неплохо. Но почему же «бы»? А потому, что по мере расширения и охлаждения пар может оказаться пересыщенным и начнется его конденсация. Значит, нужно учесть и этот процесс.

Однако прежде всего посмотрим, как изменяется давление пара с температурой до точки насыщения (росы). Если тепло ниоткуда не подводится к расширяющемуся пару и никуда не отводится (т.е. стенки сопла теплоизолированы), то работа газа по его ускорению может производиться только за счет убыли его внутренней энергии. (Рассмотренный процесс называется адиабатическим.) Так и запишем:

$$p \Delta V = -\Delta U.$$

Подставим сюда зависимость внутренней энергии от температуры $U = 3RT$ и учтем уравнение состояния $p = \frac{RT}{V}$. Получим

$$\frac{\Delta V}{V} = -3 \frac{\Delta T}{T}.$$

Но это значит, что относительное приращение объема в три раза больше относительной убыли температуры. Следовательно, полученное равенство есть дифференциальный аналог соотношения

$$V \sim T^{-3},$$

или (если опять учесть уравнение состояния)

$$p \sim T^4.$$

В координатах p, T – это парабола четвертой степени (адиабата на рисунке 1). А вот температурная зависимость давления насыщенного пара (кривая насыщения на рисунке 1) – гораздо более резкая. В этом можно убедиться, скажем,

при помощи таблиц или построив кривую $p_n(T) \sim e^{-\frac{r}{RT/M}}$,

приблизительно описывающую эту зависимость, где r – удельная теплота испарения (для воды $r = 2,3 \cdot 10^6$ Дж/кг). А это означает, что кривая $p_a \sim T^4$ с уменьшением температуры, начиная с $T = T_0$, может пересечь кривую насыщения $p_n(T)$ при некоторой температуре T_p , называемой точкой росы.

Дальше возможны два сценария. Согласно первому из них (1), пар проскочит далее по адиабате

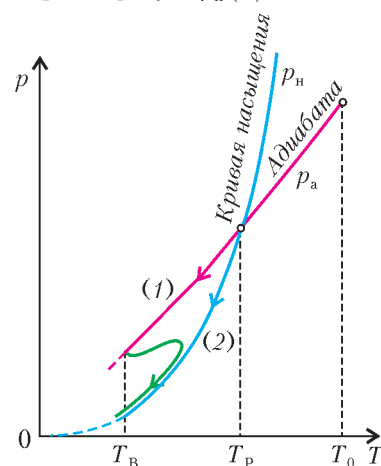


Рис. 1

те, так что его давление будет все больше и больше отличаться от давления насыщения. Но при каком-то значении пересыщения $p_B/p_n > 1$ и температуре T_B ситуация станет невыносимой: произойдет бурная спонтанная (самопроизвольная) конденсация, т.е. образуется множество капель (туман), будет выброшена в несущий газ теплота конденсации, поток подогреется и вернется к кривой $p_n(T)$. Эта температура T_B называется точкой Вильсона (вспомним о его «туманной камере», сыгравшей важную роль в исследовании ядерных процессов).

Итак, часть пара превратится в жидкие капельки, которые уже не будут участвовать в создании давления на стенки сопла; более того, расширяющемуся пару придется ускорять эту пассивную массу. Явные потери тяги двигателя!

Но возможен и другой сценарий (2). Если как-то заставить пар идти вдоль термодинамически равновесной кривой $p_n(T)$, то «лишняя» теплота конденсации будет выделяться непрерывно, способствуя дальнейшему ускорению, так что в конце концов, при $T \rightarrow 0$, в кинетическую энергию перейдет и энергия фазового превращения. Поэтому, добавив в правую часть уравнения (*) молярную теплоту конденсации Mr , получим следующую оценку для максимальной скорости:

$$v_{\max}^{(2)} = \sqrt{\frac{8RT_0}{M} + 2r} \approx 2900 \text{ м/с}.$$

Выходит, равновесная конденсация могла бы помочь получить дополнительный импульс тяги!

На рисунке 2 качественно изображено изменение темпера-

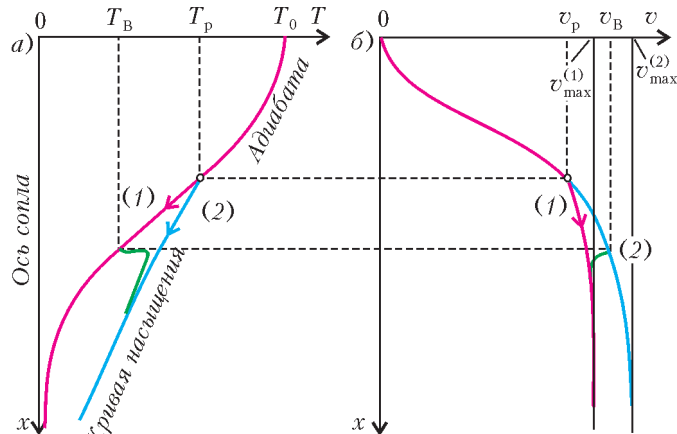


Рис. 2

туры и скорости вдоль оси сопла x , которая для наглядности направлена вниз (ведь ракета стоит вертикально).

Но как заставить пар идти по второму сценарию? Для этого можно бы «подсыпать» дополнительные (гетерогенные) ядра конденсации — например, микропылинки или ионы (всего этого и так много в реальной воде), на которых пар мог бы «оседать», не дожидаясь большого пересыщения. А еще можно учесть...

Однако, — заметил Студент, — кофе-то остыл. Придется снова повышать его энтальпию!

Можно ли в микроскоп молекулу разглядеть?

А. СТАСЕНКО

А ПОЧЕМУ ВООБЩЕ ЧТО-ТО МОЖНО РАЗГЛЯДЫВАТЬ В микроскоп? Вспомним, прежде всего, как строится изображение рассматриваемого предмета в рамках геометрической оптики. Простейшая схема микроскопа имеет две собирающие линзы. Та, что повернута к объекту, называется объективом. Пусть этот объект расположен вблизи фокуса объектива $F_{об}$ на расстоянии, чуть большем фокусного расстояния (рис. 1, а). По правилам построения изображения в линзе проведем из точки A объекта два луча — один через фокус, другой — через центр объектива. Первый луч, согласно определению фокуса, после преломления в линзе должен пойти параллельно оптической оси, а второй вообще не изменит направления. С другой стороны объектива они пересекутся в точке A' , которая и является действительным изображением точки A . Точно так же построим изображение точки B и вообще всех точек объекта, лежащего на предметном столике. И чем ближе предмет будет расположен к

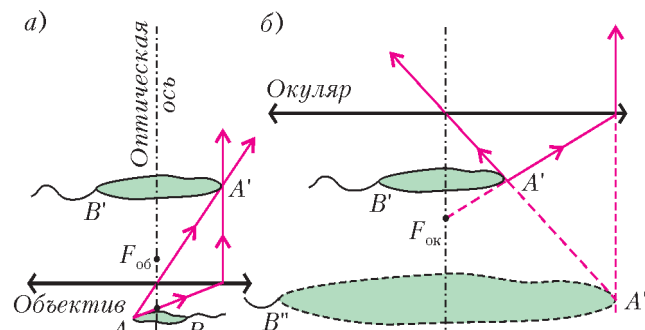


Рис. 1

фокусу объектива, тем больше получится его действительное перевернутое изображение $A'B'$.

Теперь используем вторую линзу — окуляр, расположив его так, чтобы его фокус $F_{ок}$ был вблизи первого изображения $A'B'$, но со стороны объектива (рис. 1, б). Изображение A'' точки A' тоже построим при помощи двух лучей. Однако теперь это будет мнимое изображение, находящееся на пересечении продолжений этих лучей с той же стороны окуляра, что и $A'B'$.

Итак, мы получили окончательное увеличенное мнимое перевернутое (обратное) изображение $A''B''$ рассматриваемого объекта AB . Уменьшая расстояние между AB и точкой $F_{об}$ (фокусом объектива) и между $A'B'$ и $F_{ок}$ (фокусом окуляра), можно убедиться в возможности неограниченного увеличения микроскопа. Но это только в рамках геометрической оптики!

Микроскописты XIX века ужасно обиделись, когда им объяснили, что существует предел разрешающей способности их приборов (т.е. возможности различить две точки A и B как отдельные) и что этот предел связан с длиной волны света. Соответствующие оценки сделал в 1872 году немецкий

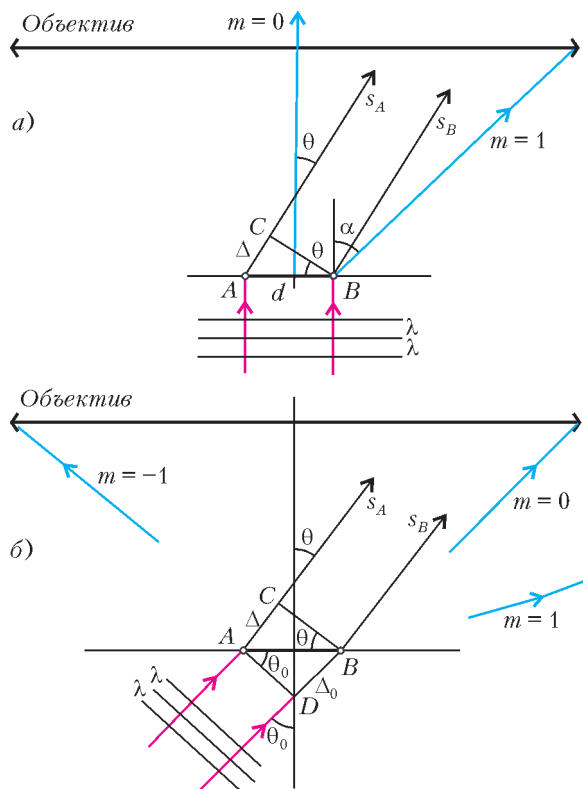


Рис. 2

физик-оптик Аббе, который сам изготовлял эти приборы и довел их до совершенства. Проследим ход его мыслей.

Пусть на «предмет» AB снизу падает плоская волна, одновременно достигающая точек A и B (рис.2,а). Согласно принципу Гюйгенса, они обе становятся источниками вторичных сферических волн. Посмотрим, как эти волны распространяются вдоль некоторого направления, образующего угол θ с оптической осью. Построим отрезок BC , перпендикулярный этому направлению и касательный к сферическим поверхностям волн, выходящих из A и B . Но вышли-то они не одновременно: чтобы достичь точки C , волна из точки A должна выйти раньше. Соответствующий отрезок времени равен $t' = AC/c$, где c – скорость волны. Следовательно, если возмущение, идущее из точки B , записать в виде

$$s_B = \sin \omega t,$$

то возмущение от точки A запишется в виде

$$s_A = \sin \omega(t + t') = \sin \omega\left(t + \frac{\Delta}{c}\right) = \sin \left(\omega t + \frac{2\pi\Delta}{\lambda}\right).$$

Здесь $AC = \Delta$ – разность хода волн, $\lambda = cT$ – длина волны, или расстояние, проходимое волной за период $T = 2\pi/\omega$. Из треугольника ABC легко найти эту разность хода:

$$\Delta = AB \cdot \sin \theta = d \sin \theta.$$

Понятно, что эта разность хода будет сохраняться и при дальнейшем распространении волн s_A и s_B . И где-то далеко-далеко фронты эти волн станут плоскими, а суммарное возмущение станет равным

$$s_{\Sigma} = \sin \omega t + \sin \left(\omega t + \frac{2\pi\Delta}{\lambda}\right).$$

А что значит далеко? Ведь если мы собираемся рассмотреть отрезок $AB = d$ как отрезок (т.е. различить точки A и B) порядка микрометра и меньше, то даже один миллиметр (порядок фокусного расстояния объектива) – это уже очень далеко ($F_{об}/d \gg 1$).

Итак, найдем сумму двух волн:

$$s_{\Sigma} = \sin \omega t + \sin \left(\omega t + \frac{2\pi\Delta}{\lambda}\right) = 2 \cos \left(\frac{\pi\Delta}{\lambda}\right) \sin \left(\omega t + \frac{\pi\Delta}{\lambda}\right).$$

Множитель перед синусом определяет амплитуду суммарного колебания – результат интерференции двух волн на бесконечности (или в параллельных лучах). Видно, что квадрат амплитуды, т.е. интенсивность, максимален при условии

$$\frac{\pi\Delta}{\lambda} = m\pi, \text{ где } m - \text{целое число,}$$

или при условии

$$\Delta = m\lambda = d \sin \theta_{\max}^{(m)}.$$

Таким образом, определены направления, в которых две волны усиливают друг друга, или имеет место положительная интерференция. И вот тут можно пояснить гениально простую мысль Аббе: для того чтобы информация о расстоянии d между точками A и B была воспринята наблюдателем, нужно, чтобы, по крайней мере, первый максимум ($m = 1$) интерференционной картины попал в объектив микроскопа. Вот это условие:

$$\theta_{\max}^{(1)} \leq \alpha,$$

где α – угол, под которым виден радиус объектива микроскопа из центральной точки предметного столика (см. рис. 2,а). Положив в предыдущем выражении порядок интерференции $m = 1$, получим искомое наименьшее расстояние между двумя точками, различимыми как отдельные точки:

$$d_{\min} = \frac{\lambda}{\sin \alpha}.$$

Отсюда видно, что желательно уменьшать λ и увеличивать α . Но наименьшая длина волны видимого (фиолетового) света $\lambda \sim 0,4$ мкм, а синус нельзя сделать больше единицы – вот почему объект располагают как можно ближе к объективу, а фокусное расстояние последнего берут как можно меньшим.

Но, пойдем дальше. Почему непременно нужно освещать наши «точки» вдоль оптической оси? Попробуем направить свет под углом θ_0 к ней (рис.2,б). Тогда разность хода волн s_A и s_B составит

$$\Delta - \Delta_0 = AC - DB = d(\sin \theta - \sin \theta_0) = m\lambda.$$

Видно, что максимум нулевого порядка ($m = 0$) пойдет в направлении θ_0 . Потребуем теперь, чтобы он попал на правый край объектива ($\theta_0 = \alpha$), а максимум минус первого порядка ($m = -1$) – на левый край ($\theta_{-1} = -\alpha$). В результате получим

$$d(\sin(-\alpha) - \sin \alpha) = -1 \cdot \lambda,$$

откуда

$$d_{\min} = \frac{\lambda}{2 \sin \alpha}.$$

Видно, что удалось вдвое уменьшить предельно разрешимое расстояние между двумя точками.

И это ее не все. Поместим между объективом и предметным столиком жидкость с коэффициентом преломления n . Скорость света в ней в n раз меньше, чем в вакууме (или, что почти одно и то же, в воздухе); значит, длина волны тоже уменьшится в n раз. В таком случае

$$d_{\min} = \frac{\lambda}{2n \sin \alpha},$$

где λ – длина волны в воздухе. Это – так называемая

иммерсионная техника (от латинского *immersio* – погружение).

Но коэффициенты преломления жидкостей не намного превышают единицу: например, для бензола $n \approx 1,5$, для бромоформа $n \approx 1,6$. Так что правы те, кто говорят, что микроскоп не может разрешить расстояния, существенно меньшие половины длины волны.

А вот тут начинается то, чего не знал сам Аббе. В 1924 году французский физик Луи де Бройль развил идею о том, что материальной частице с импульсом mv можно сопоставить волну с длиной

$$\lambda = \frac{h}{mv},$$

где $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$ Дж·с – постоянная Планка. Например, если ускорить электрон в электрическом поле с разностью потенциалов U , то он приобретет скорость

$$v = \sqrt{\frac{2Ue}{m_e}},$$

где $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл – заряд электрона, $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг – его масса. Значит, длина волны электрона, согласно де Бройлю, будет равна

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_e U e}}.$$

Так, при разности потенциалов $U = 1$ В (характерной для обычной батарейки) получим

$$\lambda = \frac{6,6 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 1 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}} \text{ м} \approx 10^{-9} \text{ м} = 1 \text{ нм}.$$

При этом, согласно теории Аббе, становится возможным рассматривать объекты молекулярных размеров! Это уже не микроскоп, а, можно сказать, наноскоп. Правда, он называется по-прежнему микроскопом, только *электронным*.

Обратим еще внимание на то, что в знаменателе выражения для длины волны де Бройля стоит масса частицы. А что если взять не электроны, а ионы каких-то элементов или даже молекулярные ионы? Поскольку они на много порядков массивнее электрона, их дебройлевская длина волны может быть значительно уменьшена. Вместе с нею уменьшится и различимое расстояние между двумя точками A и B . Так получился *ионный* микроскоп.

Завершим наш рассказ словами из книги английского физика Г.Липсона «Великие эксперименты в физике» (М.: Мир, 1972): «Можно сказать, что оптическая промышленность обязана теории больше, чем любая другая отрасль. Здесь теория выступала не только как обобщение практики, но и как путеводная нить».

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

О двух велосипедистах и вишневой косточке

В.ПРОТАСОВ

Год спустя я снова охотился в том же лесу. Конечно, к тому времени я совсем позабыл об истории с вишневой косточкой. Каково же было мое изумление, когда из чащи леса прямо на меня выпрыгнул великолепный олень, у которого между рогами росло высокое, развесистое вишневое дерево!

Э.Распэ. Приключения барона Мюнхгаузена

И все это выросло из задачи 1, совсем простенькой и неинтересной, которую мы вначале и решать-то не хотели.

Последняя фраза этой статьи

МЫ НЕ СЛУЧАЙНО ВЫНЕСЛИ В ЭПИГРАФ ФРАЗУ ИЗ ИСТОРИИ «Необыкновенный олень» о приключениях барона Мюнхгаузена. Как известно, однажды на охоте барон выстрелил в оленя вишневой косточкой, и через некоторое время на голове оленя выросло роскошное вишневое дерево.

Мы попробуем проследить, каким образом из косточки вырастает дерево. А именно, как из простой одноходовой задачки получается целая серия красивых геометрических теорем. В качестве вишневой косточки возьмем такую задачу:

Задача 1. В трапеции $ABCD$ боковая сторона BC перпендикулярна основаниям. Тогда середина стороны AD равноудалена от вершин B и C .¹

«Ну и что же тут решать?» – спросите вы. И будете правы. Задача – совершенно элементарная. Может, следует заняться более интересными вещами? Обязательно, но сначала все-таки приведем решение.

Решение. Обозначим середины сторон AD и BC через K и L соответственно (рис.1). Поскольку KL – средняя линия трапеции, она параллельна основаниям, следовательно она перпендикулярна BC .

Таким образом, KL – серединный перпендикуляр к стороне BC , поэтому $KB = KC$.

Удивительно, что эта «косточка», которая является даже не задачей, а скорее школьным упражнением, дает нача-

ло множеству замечательных геометрических фактов. Среди них есть и сложные задачи, опубликованные в различных сборниках, и одна из «теорем о бабочке», и две задачи, предлагавшиеся в разные годы на Международной математической олимпиаде. В качестве первого шага мы докажем следующее утверждение, уже более интересное и трудное:

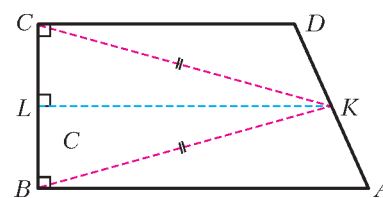


Рис. 1

¹ Задачи и упражнения мы будем формулировать в виде утверждений, слова «Докажите, что ...», как правило, будем опускать.

Задача 2. Даны две окружности, пересекающиеся в точках A и B . Тогда на плоскости найдется точка K с таким свойством: если провести через точку A произвольную прямую, пересекающую окружности вторично в точках P_1 и P_2 , то K будет равноудалена от середин хорд AP_1 и AP_2 .

Решение. Центры данных окружностей (обозначим их через O_1 и O_2) вместе с серединами отрезков AP_1 и AP_2 являются вершинами прямоугольной трапеции. Применив к ней результат задачи 1, получим, что середина отрезка O_1O_2 и есть искомая точка K .

Простота решения во многом, конечно, кажущаяся. Задача из серии «решается легко, если знать как». Все-таки нужно сначала установить положение точки K , затем увидеть на чертеже прямоугольную трапецию... Для нас же важно то обстоятельство, что в решении не использовано ничего, кроме результата задачи 1. Математики в таких случаях говорят, что задача 2 есть прямое следствие задачи 1. Сделаем второй шаг и перейдем к еще одному прямому следствию:

Задача 3. Даны две окружности, пересекающиеся в точках A и B . Тогда на плоскости найдется точка с таким свойством: если провести через точку A произвольную

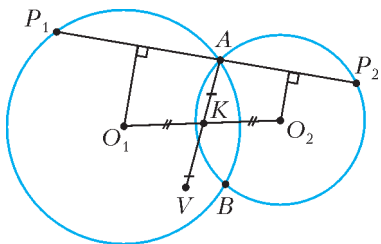


Рис. 2

прямую, пересекающую окружности вторично в точках P_1 и P_2 , то эта точка будет равноудалена от P_1 и P_2 .

Решение. Из задачи 2 мы знаем, что точка K , середина отрезка O_1O_2 , равноудалена от середин хорд AP_1 и AP_2 . Растянем плоскость в два раза относительно точки A

(т.е. проведем гомотегию с коэффициентом 2 с центром A). При этом середины данных хорд перейдут в точки P_1 и P_2 , а точка K — в точку V такую, что отрезок AV будет иметь середину в точке K (рис.2). Получаем, что V равноудалена от точек P_1 и P_2 .

Здесь пора сделать остановку и задуматься. Несмотря на короткое решение, задача 3 справедливо считается трудной. В разных видах она появлялась и в известных сборниках, и на олимпиадах высокого уровня. А ведь по сути в ней нет ничего, кроме элементарного свойства прямоугольной трапеции, установленного в задаче 1. Как же так получилось, что одно простое действие (гомотетия относительно точки A) превращает сложную и красивую теорему в тривиальную задачку про трапецию? Обратимся еще раз к решению. Мы провели произвольную прямую P_1P_2 и выделили прямоугольную трапецию с вершинами в центрах окружностей O_1 , O_2 и серединах отрезков AP_1 , AP_2 . Осталось воспользоваться задачей 1, а потом сделать гомотегию с коэффициентом 2. Для каждой прямой P_1P_2 возникает, таким образом, своя трапеция. И к каждой из них применимо одно и то же рассуждение, т.е. мы одним шагом применили результат задачи 1 сразу к бесконечному множеству прямоугольных трапеций. Можно сказать, что задача 3 — это та же задача 1, только повторенная бесконечно много раз.

Такое «тиражирование» математического рассуждения встречается постоянно, причем мы сами, решая задачи, этого не замечаем. Великий французский ученый Анри Пуанкаре (1854–1912) писал об этом феномене как об основной движущей силе математики на ее пути от простого к сложному, спасающей математику от бесконечных тавтологий. Эта сила

состоит в «охвате бесконечности одной формулой», как говорил Пуанкаре в своей книге «О науке»: «Здесь сказывается только утверждение могущества разума, который способен постигнуть бесконечное повторение одного и того же акта, раз этот акт оказался возможным однажды».

Небольшая вариация задачи 3 приводит нас к еще одной сложной задаче, предлагавшейся в 1979 году на XXI Международной математической олимпиаде в Лондоне:

Задача 4 (о двух велосипедистах).² Даны две окружности, пересекающиеся в точках A и B . Два велосипедиста едут по этим окружностям (каждый — по своей) с постоянными скоростями и в одном направлении (либо оба по часовой стрелке, либо оба — против). Они одновременно выезжают из точки B , делают один оборот и одновременно возвращаются в B . Тогда найдется неподвижная точка, которая все время равноудалена от велосипедистов.

Решение. Уверен, что вы уже все поняли. Эта точка и есть та самая точка V из задачи 3. В самом деле, если обозначить этих велосипедистов через P_1 и P_2 , то в любой момент времени прямая P_1P_2 проходит через точку A (рис.3). Почему? Велосипедисты едут с одинаковыми угловыми скоростями, поэтому дуги BP_1 и BP_2 имеют одинаковую угловую меру. Значит, углы $\angle BAP_1$ и $\angle BAP_2$ равны, поскольку они опираются на эти дуги. А это значит, что точки P_1 , P_2 и A лежат на одной прямой. Следовательно, $VP_1 = VP_2$ (задача 3).

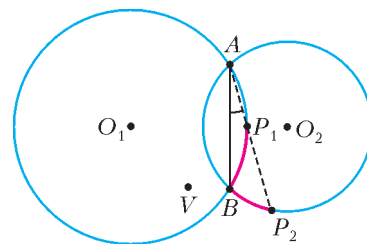


Рис. 3

Итак, в задачах 3 и 4 фигурирует одна и та же точка V . В ней сходятся все серединные перпендикуляры к отрезкам P_1P_2 , соединяющим точки пересечения данных окружностей с прямыми, проходящими через A (задача 3). Она же всегда равноудалена от двух велосипедистов, одновременно выезжающих из точки B и двигающихся с одинаковыми угловыми скоростями. Уже этих двух свойств достаточно для того, чтобы точка имела свое название. Будем называть V *точкой двух велосипедистов*, соответствующей точке B . У любой пары пересекающихся окружностей таких замечательных точек две: одна соответствует точке A , другая — B . Эти точки симметричны относительно линии центров окружностей, а расстояние между ними равно длине общей хорды AB . Из решения задачи 3 легко установить их местоположение. Так, точка двух велосипедистов V , соответствующая точке B , является четвертой вершиной параллелограмма O_1AO_2V . Она же — четвертая вершина равнобедренной трапеции O_1O_2BV с основаниями O_1O_2 и BV .

У точек двух велосипедистов множество интересных свойств. Часть из них упомянута в упражнениях ниже. Решать их (равно как и остальные упражнения в этой статье) необязательно, в наших дальнейших исследованиях они не используются. Мы, однако, рекомендуем решить упражнения 1 и 2, поскольку они нам понадобятся.

Упражнения

1. Через точку пересечения двух окружностей проводятся две прямые, которые вторично пересекают окружности, первая — в точках P_1 , P_2 , вторая — в точках Q_1 , Q_2 . Тогда точка пересечения серединных перпендикуляров к отрезкам P_1P_2 и

² Для удобства мы немного изменяем формулировку олимпиадных задач, полностью сохраняя при этом их смысл.

O_1O_2 является точкой двух велосипедистов для данных окружностей.

2. Если окружности пересекаются в точках A и B , V – их точка двух велосипедистов, соответствующая B , то угол ABV – прямой.

3. В условиях задачи 4 обозначим через O_1 и O_2 центры окружностей. Докажите равенство треугольников VO_1P_1 и P_2O_2V по двум сторонам и углу между ними. Пользуясь этим, получите другое решение задачи 4.

4 (Н.Б.Васильев).³ Докажите утверждение задачи 4 для двух велосипедистов, двигающихся по окружностям в разных направлениях.

5. Две окружности пересекаются в точках A и B , V – точка двух велосипедистов, соответствующая B . Если через точки B и V провести произвольную окружность, то точки ее повторного

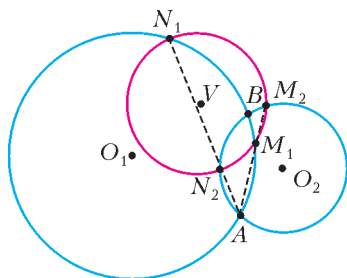


Рис. 4

пересечения с данными окружностями будут равноудалены от V .

6. Две окружности с радиусами r_1, r_2 пересекаются в точках A и B . Пусть V – точка двух велосипедистов, соответствующая точке B . Тогда для любой окружности с центром V , пересекающей обе окружности (первую – в точках M_1, N_1 , вто-

рую – в точках M_2, N_2 , имеем (рис.4)

- прямые M_1M_2 и N_1N_2 пересекаются в точке A ;
- четырехугольники VBM_1N_2 и VN_1M_2B – вписанные;
- $\frac{M_1N_1}{M_2N_2} = \frac{AN_1}{AM_2} = \frac{AM_1}{AN_2} = \frac{BM_1}{BM_2} = \frac{BN_1}{BN_2} = \frac{r_1}{r_2}$.

Задача 4 о двух велосипедистах доставила немало удовольствия и участникам XXI Международной олимпиады, и членам жюри. Была она предложена нашей страной и дана в первый день олимпиады под номером три, что означает – самая сложная. Школьники нашли множество способов для ее решения – от чисто геометрических, до вычислительных и даже физических.

Прошло шесть лет, и на XXVI Международной олимпиаде в 1985 году от нашей страны тем же автором была представлена еще одна геометрическая задача, которая (о ужас!) оказалась на ту же самую идею. Правда, тогда даже автор задачи этого не заметил. Было опубликовано два авторских решения, основанных на разных приемах. Потом было найдено еще несколько геометрических решений. Ни одно из них и близко не упоминало точку двух велосипедистов.

Задача 5. Дан треугольник ABC и окружность с центром в точке O , проходящая через вершины B и C и повторно пересекающая прямые AC и AB в точках P и Q соответственно. Описанные окружности треугольников APQ и ACB имеют ровно две общие точки A и M . Тогда угол OMA прямой.

На первый взгляд, ничего общего с задачами 4 или 3. Никаких движущихся точек, никаких произвольных прямых. Есть только жестко фиксированная конструкция, для которой надо доказать, что один из углов прямой. И тем не менее, смотрите.

Решение. Пусть O – центр окружности $CPQB$ (рис.5). Точка O лежит на пересечении серединных перпендикуляров к отрезкам CP и BQ , поэтому она является точкой двух

велосипедистов для окружностей APQ и ACB . Следовательно, OO_2O_1M – равнобедренная трапеция (O_1, O_2 – центры окружностей APQ и ACB соответственно). В частности, прямая OM параллельна прямой O_1O_2 . Но прямая O_1O_2 перпендикулярна AM (линия центров двух окружностей перпендикулярна их общей хорде). Значит, и прямая OM перпендикулярна AM .

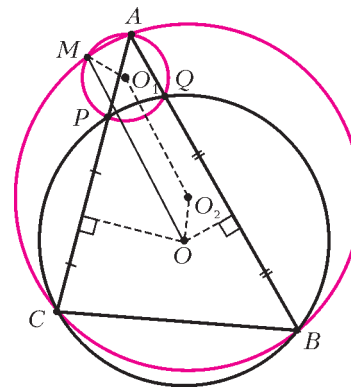


Рис. 5

Внимательный читатель наверняка заметил, что эта задача является прямым следствием упражнений 1 и 2.

Упражнение 7. Продолжения сторон AB и CD вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке K , а продолжения сторон AD и BC – в точке L . Тогда описанные окружности треугольников BKC , AKD , ALB и DLC пересекаются в одной точке, лежащей на прямой KL . Более того, перпендикуляр, восстановленный в этой точке к прямой KL , проходит через центр окружности $ABCD$.

А вот еще одна задача, в решении которой точка двух велосипедистов возникает самым неожиданным образом:

Задача 6 (о бабочке). Через точку A , не лежащую на окружности, проведены две прямые, пересекающие эту окружность, одна – в точках P_1, P_2 , другая – в точках Q_1, Q_2 . Произвольная прямая, проходящая через A , пересекает окружность в точках M_1, M_2 , а описанные окружности треугольников AP_1Q_1 и AP_2Q_2 – в точках N_1 и N_2 соответственно. Тогда $M_1N_1 = M_2N_2$.

Задача эта принадлежит к замечательному семейству «теорем о бабочке», о котором речь пойдет ниже.

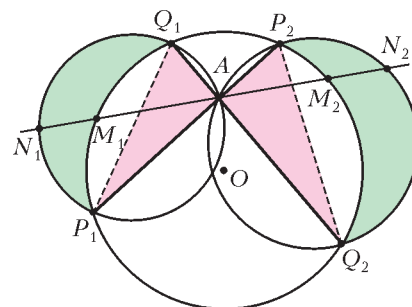


Рис. 6

На рисунке 6 показана эта «бабочка» с треугольными крыльями AP_1Q_1 и AP_2Q_2 , окаймленными закрашенными луночками. Любая прямая, проходящая через A и пересекающая эти луночки, пересекает их по равным отрезкам. Интересный факт, не правда ли? А доказывается он с помощью все той же задачи 3.

Решение. Пусть O – центр данной окружности. Он лежит на пересечении серединных перпендикуляров к отрезкам P_1P_2 и Q_1Q_2 , поэтому он является точкой двух велосипедистов для окружностей AP_1Q_1 и AP_2Q_2 . Значит, какую бы прямую ни провести через A , точка O будет лежать на серединном перпендикуляре к отрезку N_1N_2 . Но, с другой стороны, O лежит на серединном перпендикуляре к хорде M_1M_2 . Следовательно, отрезки N_1N_2 и M_1M_2 имеют общую середину, что и означает равенство $M_1N_1 = M_2N_2$.

Упражнение 8 (Г.В.Дорофеев). Получите другое решение задачи 6, основанное на следующем построении. Проведем прямую N_1Q_1 и обозначим через S точку ее повторного пересечения с исходной окружностью. Тогда: а) прямые SP_2 и M_1M_2 параллельны; б) треугольники M_1SN_1 и $M_2P_2N_2$ равны.

³ В тех случаях, когда нам известно имя автора задачи, мы будем его указывать.

Цикл задач под общим названием «теоремы о бабочке» имеет давнюю и богатую историю. И хотя это выходит за рамки нашей темы, сделаем небольшое отступление. Сначала появилась классическая теорема о бабочке. Вот она:

Теорема о бабочке. На окружности дана хорда AB . Через ее середину проведены произвольные хорды PQ и RS . Прямые QS и RP пересекают AB в точках K и L . Тогда $AK = BL$.

Упражнение 9. Докажите эту теорему.

Эта задача была опубликована в 1815 году в английском журнале «Gentleman's Diary». Ее авторство приписывают английскому математику Уильяму Джорджу Горнеру (1786–1837), чье имя ныне известно каждому старшекласснику благодаря «схеме Горнера» для деления многочленов. С тех пор теорема о бабочке стала очень известной и популярной. За прошедшие почти два века найдено множество ее доказательств, как чисто геометрических, так и вычислительных. С некоторыми из них можно ознакомиться в задачниках И.Ф.Шарыгина, задачника В.В.Прасолова, в книге Д.О.Шклярского, Н.Н.Ченцова и И.М.Яглома «Избранные задачи и теоремы элементарной математики», в знаменитой книге «Новые встречи с геометрией» Г.С.М.Кокстера и С.Л.Грейтцера. Не так давно о ней писал и «Квант» (статья «Геометрические шедевры И.Ф.Шарыгина», «Квант» № 1 за 2006 г.). Появилось много обобщений этой теоремы и много близких по духу задач, которые объединились в цикл под общим названием «теоремы о бабочке». Одно из самых интересных обобщений придумал замечательный геометр Игорь Федорович Шарыгин (1937–2004). Ему, кстати, принадлежит и задача 5, а задача 4 придумана им в соавторстве с другим замечательным математиком и многолетним автором журнала «Квант» Николаем Борисовичем Васильевым (1940–1998). Идея обобщенной теоремы о бабочке состоит в том, что середину хорды AB можно «раздвоить», при этом ничего не изменив в доказательстве. Мы даем формулировку этой теоремы в упражнении 10. А в упражнениях 11 и 12 – еще несколько теорем о бабочке, которые, как и задача 6, уже имеют мало общего с оригиналом. Кроме, разумеется, самой бабочки. Каждая из них содержит свою особую идею и требует отдельного доказательства. Попробуйте!

Упражнения

10 (И.Ф.Шарыгин). На окружности дана хорда AB , на ней – точки M и N , причем $AM = BN$. Через точки M и N проведены хорды PQ и RS соответственно. Прямые QS и RP пересекают AB в точках K и L . Тогда $AK = BL$.

11. На сторонах угла взяты точки A и B . Через середину M отрезка AB проведены две прямые, одна из которых пересекает стороны угла в точках A_1 , B_1 , а другая – в точках A_2 , B_2 . Прямые A_1B_2 и A_2B_1 пересекают AB в точках P и Q . Тогда $MP = MQ$.

12. Сформулируйте и докажите аналоги классической теоремы о бабочке для параболы, гиперболы, эллипса. Для каких из этих фигур будет верно обобщение теоремы о бабочке, как в упражнении 10?

Указание. Можно воспользоваться тем, что эллипс является проекцией окружности на плоскость. В рассуждениях с параболой и гиперболой можно применить метод координат.

13 (С.Л.Берлов). Дан остроугольный треугольник ABC , H – точка пересечения его высот, D – середина AC . Если прямая, проходящая через H и перпендикулярная отрезку HD , пересекает прямые AB и BC в точках E и F , то $HE = HF$.

Та теорема о бабочке, которую мы доказали в задаче 6, значительно моложе классической, ей всего 20 лет. С ней у

автора связаны светлые воспоминания. Я придумал ее в 15 лет и по совету учителя послал ее в журнал «Математика в школе». Там она и была напечатана в номере 3 за 1986 год, за что я вскоре получил первый в жизни гонорар – 5 рублей 88 копеек. С этими деньгами я гордо пошел в магазин и купил какие-то сувениры родителям.

Напоследок предложим еще несколько задач для самостоятельного решения. Все они так или иначе связаны с точкой двух велосипедистов.

Упражнения

14. Через точку пересечения двух окружностей проводится произвольная прямая, которая вторично пересекает окружности в точках P и Q . Найдите геометрическое место середин отрезков PQ .

15. Даны две окружности с общим центром O . Окружности α и β имеют разные радиусы и касаются данных окружностей. Тогда O является точкой двух велосипедистов для окружностей α и β .

16. В условиях предыдущей задачи прямая, соединяющая точки касания, проходит через одну из точек пересечения окружностей α и β .

17. Для данной пары окружностей постройте две concentрические окружности, каждая из которых касается двух данных. Сколько решений имеет задача в зависимости от расположения окружностей?

18. Пусть V – точка двух велосипедистов данной пары окружностей. Если провести инверсию относительно любой окружности с центром V , то V останется точкой двух велосипедистов и для образов окружностей.

19. Останется ли утверждение задачи 4 верным, если снять требование одновременного выезда велосипедистов из точки B ?

20. Два велосипедиста движутся с одинаковыми скоростями по двум пересекающимся прямым. Тогда на плоскости существует неподвижная точка, которая все время равноудалена от велосипедистов.

21 (И.Ф.Шарыгин). На одной из двух пересекающихся сфер взяты точки P_1 и Q_1 , на другой – точки P_2 и Q_2 . Отрезок P_1P_2 проходит через общую точку сфер. Отрезок Q_1Q_2 проходит через другую общую точку сфер и параллелен прямой, соединяющей центры сфер. Тогда проекции отрезков P_1Q_1 и P_2Q_2 на прямую P_1P_2 равны.

22. Сформулируйте и решите аналоги задач 2 и 3 для двух пересекающихся сфер в пространстве. При этом в качестве A и B можно взять любую пару общих точек сфер.

23. Сформулируйте и решите пространственные аналоги упражнений 5, 9, 10 и 14–18 (вместо окружностей на плоскости нужно взять сферы в пространстве).

Попробуем подвести некоторые итоги. Две задачи международных олимпиад, задача о бабочке, два десятка геометрических задач, которые мы сформулировали в виде упражнений (некоторые из них появлялись на математических олимпиадах, в «Задачнике «Кванта» и в различных сборниках задач). Список далеко не полный. И все это выросло из задачи 1, совсем простенькой и неинтересной, которую мы вначале и решать-то не хотели.

О поющих проводах, или Загадки пружины

**А. СЕРГЕЕВ, Н. ЖДАНОВА,
И. СЕРГАЧЕВ, Р. СТРЮНГИС,
А. ПЯТАКОВ**

ОКРУЖАЮЩЕЕ НАС ПРОСТРАНСТВО НАПОЛНЕНО самыми разными звуками. Некоторые из них мы слушаем с интересом и вниманием, например – голоса собеседников, сводки новостей, любимую музыку. Другие же звуки мы стараемся пропускать мимо ушей, в то время как многие из них заслуживают внимания и, более того, даже могут стать предметом научного исследования.

Всем вам наверняка приходилось стоять рядом с железнодорожными путями и слышать гудение локомотива, грохот товарного состава или скрежет колес тормозящей электрички. Эти грубые громкие звуки составляют привычную какофонию железной дороги и вызывают скорее неприятные ощущения, чем любопытство исследователя. Вместе с тем, вблизи путей вы можете услышать звуки, которые трудно назвать иначе как удивительными. В напряженной тишине, предшествующей приходу очередного поезда, прислушайтесь к звукам от проводов, по которым скользят токоприемники электропоезда. Эти звуки не будут иметь ничего общего с щелчками или другими привычными звуками ударов. Вы услышите звонкое «чириканье», состоящее из многих звуков одиночных ударов, каждый из которых, если задаться целью изобразить его письменно буквами, лучше всего передается сочетанием «тиу». Важно отметить, что звуки подобного рода возникают не только при соударениях проводов. Их можно услышать, если кто-то ударит по рельсу на расстоянии нескольких сот метров от вас. Сходные звуки порождают удары легких камешков о тонкий лед осенью, когда пруды только начинают покрываться ледяной пленкой.

Попробуем разобраться со всеми этими явлениями: когда они возникают, какие общие закономерности имеют?

Во всех случаях причиной служит удар, звук которого в непосредственной близости мало напоминает мелодичный звук «тиу». Но по мере того как мы удаляемся от места удара, звук становится все более музыкально «окрашенным»: чем дальше, тем ярче и отчетливее. Специалисты-акустики скажут нам, что удар порождает волну изгиба (рис. 1) в проводе, рельсе, слое льда, а характерное звучание «тиу» объясняется волновым явлением, называемым *дисперсией*.

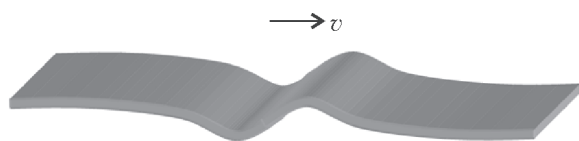


Рис. 1

Говорят, что среда распространения волн обладает дисперсией, если скорость волны в этой среде зависит от ее частоты. Широко известным примером дисперсии электромагнитных волн является разложение призмой белого света в спектр. В состав белого света входят волны различных частот, т.е. свет разных цветов. Из-за дисперсии волны, соответствующие свету разных цветов, имеют разные скорости и, следовательно, преломляются стеклом призмы по-разному. Так на экране появляется радуга – спектр белого света. С точки зрения физики, радужная полоса на экране представляет плавное изменение частоты света с изменением координаты. Если бы люди могли «видеть» звуки, наш звук «тиу» смотрелся бы точно так же: в нем тоже происходит постепенное уменьшение частоты звука с течением времени. Но возможна ли в принципе дисперсия звуковых волн?

При распространении звука в воздухе в зависимости от расстояния до источника может меняться лишь его громкость, но никак не характер звучания. Легко представить, во что превратился бы, например, фортепианный концерт, обладай воздух дисперсионными свойствами: высокие ноты имели бы большую скорость распространения, чем низкие, и уже для слушателей, сидящих в середине партера, музыка превратилась бы в неузнаваемую мешанину звуков.

Возникает противоречие: с одной стороны, звук «тиу» очень похож на проявление дисперсии, а с другой, повседневный опыт говорит нам, что дисперсии звуковых волн нет. Ключ к разгадке кроется в том, что большинство окружающих нас объектов не являются неограниченными однородными средами, как воздух, а обладают специфической формой. У всех этих объектов хотя бы один размер много больше других и хотя бы один много меньше длины изгибающей волны. Такие протяженные объекты являются *волноводами*, т.е. каналами, по которым могут распространяться волны. Акустические волноводы отличаются от неограниченных сред наличием необычных явлений и интересных закономерностей распространения упругих волн. Дисперсия – одно из таких явлений. Удар возбуждает множество колебаний разных частот, и по волноводу начинает распространяться группа волн. Дисперсия проявляется в том, что волны высоких частот перемещаются быстрее, чем волны низких. Это приводит к тому, что на большом расстоянии волны низких частот значительно отстают от волн с высокими частотами, и звук удара «растягивается», превращаясь в знакомый нам звук «тиу».

Таково качественное объяснение явления, но нам захотелось разобраться в нем более детально, получив количественные соотношения. Легко понять, что проведение натуральных экспериментов (т.е. в естественных условиях, не в лаборатории) весьма затруднительно: по рельсам постоянно следуют поезда, провода (как правило) находятся под высоким напряжением, а выбор тонкого льда означает привязку к редким погодным условиям. Хотелось бы иметь протяженное твердое тело, которое легко помещалось бы в любой комнате. Казалось бы, это – неисполнимая прихоть исследователя, но такой объект существует.

Знакомьтесь: металлическая пружина – слинки¹ (рис. 2). Недеформированная, она легко помещается в руке, а для работы можно растянуть ее метра на полтора. Но самое важное, что суммарная длина витков составляет восемнадцать метров. Таким образом, пружина обладает компактно-

¹ О некоторых опытах с этой удивительной пружиной можно прочитать в статье Д. Чокина «Слинки – шагающая пружинка» («Квант» №6 за 1991 г.). (Прим. ред.)



Рис. 2

стью и в то же время большой длиной волновода, необходимой для наблюдения дисперсии. В сечении лента, из которой скручена пружина, представляет собой прямоугольник $1,6 \times 0,5$ мм (рис.3). Его ширина и высота, а также радиус

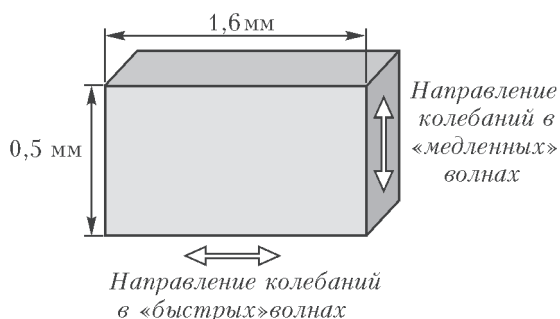


Рис. 3

витка пружины являются тремя основными геометрическими параметрами пружины. Расстояние между витками, т.е. степень растяжения пружины, не оказывает заметного влияния на ее звучание. Кстати, о звучании: наверное, вы уже догадались, что при ударе по одному концу пружины на другом ее конце слышится знакомое нам «тиу», но здесь оно принимает особый оттенок и напоминает звук, с которым стреляют из лазерного оружия герои фантастических фильмов.

Приступим теперь к исследованиям. В первую очередь, необходимо как-то усилить звук, поскольку изгибная волна, дойдя до конца пружины, плохо излучается в воздух. В музыкальных инструментах для усиления звучания струн используют резонаторы и деки (большие пластины-излучатели). Мы будем действовать по похожему принципу: попробуем жестко связать с концом пружины какое-то твердое тело с относительно большой площадью поверхности. Возможно, вы удивитесь, но лучше всего для этого подойдет обыкновенный кусок пенопласта. Достаточно воткнуть в него конец пружины, и громкость звука многократно увеличится. Нам удалось увеличить интенсивность звука настолько, что теперь его можно изучать с помощью компьютера. Для этого установим напротив пенопласта микрофон и запишем звук на компьютер. С помощью специальной программы (в нашем опыте это была Cool Edit Pro) можно отобразить звук графически в виде спектрограммы, т.е. диаграммы, по вертикальной оси которой откладывается частота, по горизонтальной – время, а цветом изображается громкость звука. Обычный вид спектрограммы звуков пружины показан на рисунке 4. Каждая кривая на этом графике отображает один звук «тиу». Форма кривой наглядно демонстрирует характерный переход от высоких частот к низким. Очень похожими кривыми изображаются звуки от проводов и тонкого льда. Многообразие же волн в пружине является кажущимся: только три из них непосредственно вызваны

ударом, а остальные представляют собой лишь многократные отражения трех основных.

Рассмотрим поведение основных кривых на спектрограмме. Две из них стремятся к нулю, а третья – к некоторой постоянной частоте. Давайте вспомним о трех геометрических размерах пружины: двух длинах сторон сечения и радиусе витков. А что если кривые на спектрограмме как-то связаны с геометрическими размерами? Смелое предположение нетрудно проверить. Возбуждая колебания в пружине, можно ударять по какой-то одной стороне прямоугольного сечения, тогда на полученных спектрограммах соответствующая кривая будет ярче, т.е. амплитуда соответствующей волны будет больше. Говорят, что эти две волны, порожденные ударами о разные стороны сечения пружины, обладают взаимно перпендикулярной поляризацией, т.е. колебания в них совершаются во взаимно перпендикулярных направлениях (см. рис.3, где направления колебаний показаны двойными стрелками).

Измерим теперь скорости этих волн. По определению дисперсии, каждой частоте соответствует своя скорость распространения, поэтому выберем для определения скорости конкретную частоту – например, 3 кГц. Зная пройденный путь и время, прошедшее от момента удара, найдем скорости обеих волн: 460 м/с для «быстрой» и 255 м/с для «медленной». Между скоростями волн и длинами сторон сечения должна существовать простая количественная связь: интуитивно понятно, что чем больше толщина пластины, тем она жестче (сильнее сопротивляется изгибу) и тем быстрее бежит вдоль нее изгибная волна. Более детальное рассмотрение, проведенное в учебниках по механике сплошных сред, показывает, что скорость изгибной волны пропорциональна корню квадратному из толщины пластины. Значит, так же должны относиться и скорости двух поляризованных перпендикулярно друг другу изгибных волн, возникающих при ударе по разным сторонам сечения. Измерив длины сторон сечения, можно убедиться, что отношение скоростей действительно равно квадратному корню из соответствующего отношения длин:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{460 \text{ м/с}}{255 \text{ м/с}} \approx 1,8 \approx \sqrt{\frac{l_1}{l_2}} = \sqrt{\frac{1,6 \text{ мм}}{0,5 \text{ мм}}}.$$

Таким образом, существование «быстрой» и «медленной»

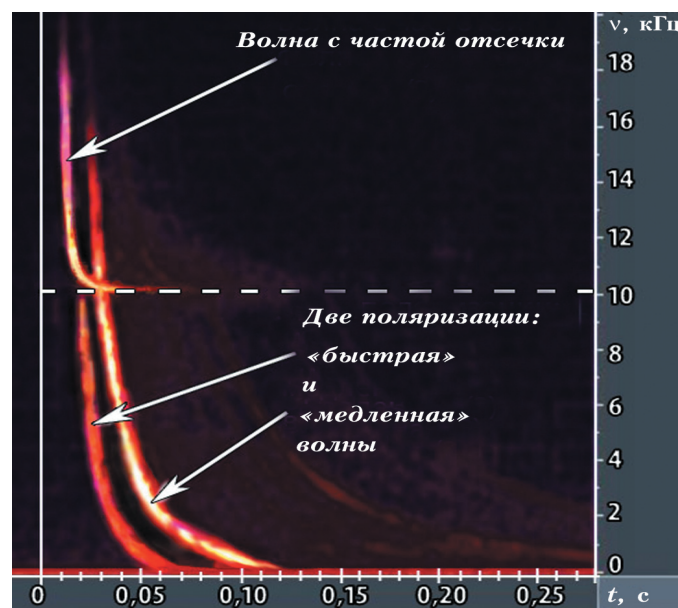


Рис. 4

волн объясняется прямоугольной формой сечения ленты, а соответствие между скоростями этих волн и размерами поперечного сечения установлено экспериментально и согласуется с теорией.

Рассмотрим теперь третью кривую на рисунке 4, которая, в отличие от первых двух, стремится не к нулю, а к некоторой константе. Это означает, что область частот, на которых могут распространяться волны такого типа, ограничена снизу некоей ненулевой частотой (в данном случае – около 9 кГц). Эта ненулевая частота показана пунктирной линией, которая как бы отсекает для волн область низких частот. Такие волны называют *волнами с частотой отсечки*.

Мы предположили, что существование волн с частотой отсечки как-то связано с третьим геометрическим параметром – радиусом пружины. Для того чтобы подтвердить догадку, мы раздобыли несколько пружин из одной и той же ленты, но разных радиусов. Вот результаты измерений частот отсечки для пружин трех различных радиусов:

Радиус пружины R , мм	Частота отсечки ν , кГц
37	7
30	8,7
28	9,3

Можно заметить, что произведение частоты отсечки и радиуса примерно одинаково для всех пружин:

$$\nu_1 R_1 = \nu_2 R_2 = \nu_3 R_3.$$

Если вспомнить известную формулу для связи частоты колебаний в волне со скоростью и длиной волны: $v = \lambda \nu$, то полученное из эксперимента условие постоянства произведения частоты на радиус окружности можно переписать в виде

$$\frac{\lambda_1}{R_1} = \frac{\lambda_2}{R_2} = \frac{\lambda_3}{R_3} = \text{const},$$

т.е. длина волны, на которой происходит отсечка, связана прямо пропорционально с радиусом окружности.

В специальной литературе по акустике, рассматривающей распространение изгибных волн в стержнях, можно найти, что константа, стоящая в вышеприведенном равенстве, есть не что иное как 2π , а само равенство имеет наглядную геометрическую интерпретацию – длина волны, на которой происходит отсечка, равна длине витка пружины:

$$\lambda = 2\pi R.$$

Итак, нам удалось понять, какие физические явления кроются за необычными звуками, которые издают провода и тонкий лед, и разгадать некоторые из загадок, поставленных пружинкой: существование «быстрых» и «медленных» волн, а также волн с частотой отсечки. Однако представляется вполне вероятным, что пружина таит в себе еще немало сюрпризов.

Эта работа была выполнена группой школьников и студентов на физическом отделении Летней школы «Исследователь» (адрес школы в Интернете: <http://physres.web.ru>).

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

Гидростатика в стакане

А. ЧЕРНОУЦАН

В ЭТОЙ СТАТЬЕ МЫ ПОЗНАКОМИМСЯ С ЗАДАЧАМИ, В которых рассматривается погружение тел в жидкость, налитую в цилиндрический сосуд с вертикальными стенками (стакан). Обычно речь идет о повышении или понижении уровня жидкости при различных изменениях, происходящих с погруженным телом.

Мы рассмотрим два подхода к решению таких задач. Первый опирается на закон Архимеда и вычисление вытесненного телом объема. Во втором подходе закон Архимеда в явном виде не используется, а второй закон Ньютона применяется ко всему содержимому сосуда, т.е. к жидкости вместе с погруженным телом.

Каждый из подходов имеет свои достоинства и недостатки, и выбор зависит от конкретной задачи. Но в любом случае полезно уметь применять оба метода.

Задача 1. В цилиндрический сосуд с площадью дна S налита вода. На сколько поднимется уровень воды, если в сосуд поместить деревянный брусок массой m ?

Решение 1. Изменение уровня воды связано с объемом погруженной части бруска соотношением

$$S\Delta h = V_{\text{погр}}.$$

Действительно, объем, отсекаемый новым уровнем поверхности воды, превышает объем самой воды, с одной стороны, на $V_{\text{погр}}$, а с другой, чисто геометрически, – на $S\Delta h$ (рис. 1). Погруженный объем найдем из условия плавания бруска в воде плотностью $\rho_{\text{в}}$:

$$mg = F_{\text{арх}}, \text{ где } F_{\text{арх}} = \rho_{\text{в}} g V_{\text{погр}}.$$

Окончательно получаем

$$\Delta h = \frac{m}{\rho_{\text{в}} S}.$$

Решение 2. И до, и после погружения бруска сила реакции дна сосуда, равная силе давления воды на дно $F_{\text{д}} = \rho_{\text{в}} g h S$, уравновешивает силу тяжести всего содержимого сосуда (атмосферное давление влияния не оказывает). Поэтому изменение силы давления равно изменению силы тяжести:

$$\rho_{\text{в}} g \Delta h S = mg,$$

откуда сразу получаем правильный ответ.

Задача 2. В цилиндрическом сосуде с площадью дна S плавает в воде кусок льда массой $m_{\text{л}}$. На сколько изменится уровень воды, если лед растает?

Решение 1. Удобно сравнивать уровни воды до и после таяния льда не между собой, а с тем уровнем, который был в сосуде до погружения тела (рис.2). Искомое изменение уровня Δh равно разности Δh_2 и Δh_1 :

$$\Delta h = \Delta h_2 - \Delta h_1.$$

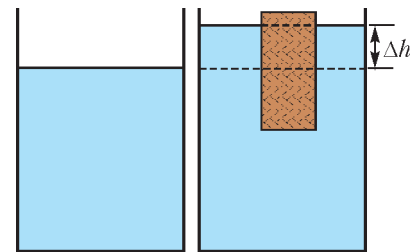


Рис. 1

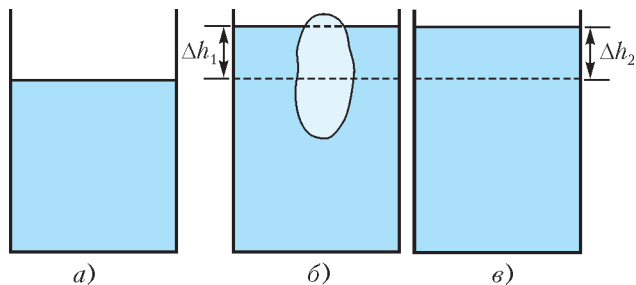


Рис. 2

Изменение уровня Δh_1 при погружении тела найдем так же, как в задаче 1:

$$S\Delta h_1 = V_{\text{погр}}, \quad \rho_{\text{в}} g V_{\text{погр}} = m_{\text{л}} g, \quad \Delta h_1 = \frac{m_{\text{л}}}{\rho_{\text{в}} S}.$$

Разность уровней Δh_2 в ситуациях, соответствующих рисункам 2,в и 2,а, образуется за счет добавочной воды, получившейся при таянии льда:

$$S\Delta h_2 = \frac{m_{\text{л}}}{\rho_{\text{в}}}, \quad \Delta h_2 = \frac{m_{\text{л}}}{\rho_{\text{в}} S}.$$

Получаем, что $\Delta h_2 = \Delta h_1$, и $\Delta h = 0$, т.е. уровень воды при таянии льда не изменился!

(Зачем в условии даны $m_{\text{л}}$ и S ? Отсутствие этих данных было бы прямой подсказкой.)

Конечно, когда ответ получен, хочется обосновать его более неформально, чтобы он выглядел естественно. Запишем условие плавания льда в виде

$$m_{\text{л}} g = m_{\text{выт}} g,$$

где $m_{\text{выт}} = \rho_{\text{в}} V_{\text{погр}}$ — масса вытесненной воды. Поскольку масса льда равна массе воды в вытесненном объеме, растаивающая вода точно заполняет тот объем, который ранее занимала подводная часть льдины. Однако такое рассуждение применимо один раз, а формальный метод можно использовать во многих задачах.

Решение 2. Второй подход, через силу давления, выдает в данной задаче ответ мгновенно, причем без всяких расчетов. Поскольку вес содержимого сосуда при таянии льда не изменился, то не изменилась и сила давления $F_{\text{д}} = \rho_{\text{в}} g h S$ воды на дно, т.е. уровень воды остался прежним.

Задача 3. В цилиндрическом сосуде площадью сечения S плавает в воде кусок льда, притянутый ко дну нитью. Когда лед растаял, уровень воды понизился на Δh . Чему была равна сила натяжения нити?

После обсуждения задачи 2 понятно, почему уровень воды должен именно понизиться и почему в условии задачи не дана масса льда. Если бы лед просто плавал, то при таянии уровень остался бы прежним. Натянув нить, мы увеличили глубину погружения льда, и уровень воды поднялся. После таяния льда уровень воды вернулся к прежнему значению, т.е. опустился.

А теперь — расчет.

Решение 1. Разность уровней Δh_1 в случаях, изображенных на рисунках 3,б и 3,а (сосуд с водой до погружения льда), определяется объемом погруженной части льда:

$$S\Delta h_1 = V_{\text{погр}}$$

(см. задачу 1), который можно найти из второго закона Ньютона:

$$T + m_{\text{л}} g - F_{\text{арх}} = 0,$$

где T — искомая сила натяжения нити, а $F_{\text{арх}} = \rho_{\text{в}} g V_{\text{погр}}$.

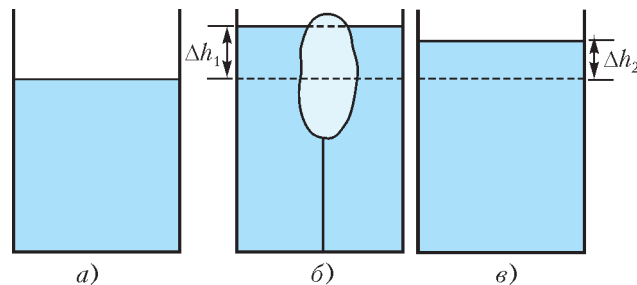


Рис. 3

Получаем

$$\Delta h_1 = \frac{T}{\rho_{\text{в}} g S} + \frac{m_{\text{л}}}{\rho_{\text{в}} S}.$$

Разность уровней Δh_2 (см. рис.3,в и 3,а) определяется объемом воды, образовавшейся при таянии льда:

$$S\Delta h_2 = \frac{m_{\text{л}}}{\rho_{\text{в}}}.$$

Получаем окончательно

$$\Delta h = \Delta h_1 - \Delta h_2 = \frac{T}{\rho_{\text{в}} g S},$$

откуда

$$T = \rho_{\text{в}} g S \Delta h.$$

Решение 2. Как видно из рисунка 3,б, со стороны дна на содержимое сосуда действует не только сила, направленная вверх и равная силе давления воды на дно $F_{\text{д}} = \rho_{\text{в}} g h_1 S$, но и сила натяжения нити T , направленная вниз:

$$T + mg - \rho_{\text{в}} g h_1 S = 0,$$

где m — масса всего содержимого (воды и льда). После того как лед растаял, сила натяжения исчезла, и второй закон Ньютона приобрел вид

$$mg - \rho_{\text{в}} g h_2 S = 0.$$

Исключая mg , получим

$$T = \rho_{\text{в}} g S \Delta h.$$

В этой задаче, как и в задаче 2, второй подход приводит к ответу гораздо быстрее, чем первый.

Задача 4. В цилиндрическом сосуде площадью сечения $S = 100 \text{ см}^2$ плавает в воде кусок льда, в который вморожен грузик из цинка массой $m_{\text{ц}} = 35 \text{ г}$. На сколько понизится уровень воды, когда лед растает? Плотность цинка $\rho_{\text{ц}} = 7000 \text{ кг/м}^3$.

Понятно, почему не дана масса льда — в отсутствие цинка уровень воды при таянии льда не меняется (задача 2). А вот почему уровень понизится, не так очевидно, как в предыдущей задаче, — ведь цинк повышает уровень и вначале, и в конце. Мы вернемся к этому вопросу после решения задачи.

Решение 1. Как и в предыдущих задачах, разность уровней Δh_1 (рис.4,б) выражается через объем погруженной

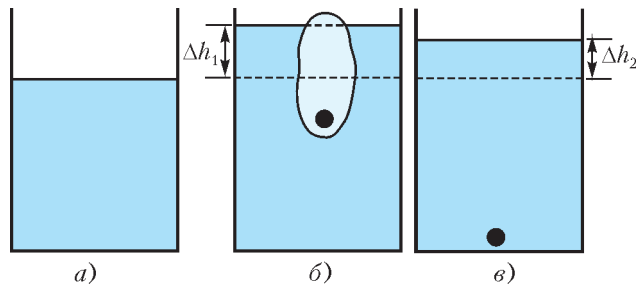


Рис. 4

части льда ($S\Delta h_1 = V_{\text{погр}}$), который можно найти из второго закона Ньютона

$$m_{\text{л}}g + m_{\text{ц}}g - \rho_{\text{в}}gV_{\text{погр}} = 0.$$

Выражая отсюда Δh_1 , получаем

$$\Delta h_1 = \frac{m_{\text{л}}}{\rho_{\text{в}}S} + \frac{m_{\text{ц}}}{\rho_{\text{в}}S}.$$

Разность уровней Δh_2 (рис.4,в) определяется объемом воды, образовавшейся при таянии льда, и объемом цинка, который теперь лежит на дне:

$$\Delta h_2 S = \frac{m_{\text{л}}}{\rho_{\text{в}}} + \frac{m_{\text{ц}}}{\rho_{\text{ц}}}.$$

В итоге получаем

$$\Delta h = \Delta h_1 - \Delta h_2 = \frac{m_{\text{ц}}}{\rho_{\text{в}}S} - \frac{m_{\text{ц}}}{\rho_{\text{ц}}S} = 3 \text{ мм}.$$

Решение 2. Запишем второй закон Ньютона для всего содержимого сосуда (вода, лед и цинк) до и после таяния льда:

$$mg - \rho_{\text{в}}gh_1S = 0,$$

$$mg - \rho_{\text{в}}gh_2S - N = 0,$$

где N – сила нормальной реакции, действующая со стороны дна на затонувший цинк. Из этих уравнений сразу видно, что добавление силы N приводит к уменьшению силы давления воды на дно, т.е. к понижению ее уровня. Исключая mg , получим

$$\Delta h = h_1 - h_2 = \frac{N}{\rho_{\text{в}}gS}.$$

Но для получения ответа надо решить еще одну небольшую задачку – найти силу N , действующую на лежащий на дне цинк. Эта задачка – стандартное упражнение:

$$N + F_{\text{арх}} - m_{\text{ц}}g = 0, \quad F_{\text{арх}} = \rho_{\text{в}}gV_{\text{ц}} = \rho_{\text{в}}g\frac{m_{\text{ц}}}{\rho_{\text{ц}}},$$

откуда

$$N = m_{\text{ц}}g\left(1 - \frac{\rho_{\text{в}}}{\rho_{\text{ц}}}\right).$$

В этой задаче второй подход связан с не меньшими расчетами, чем первый, но зато он позволяет сразу, до выполнения расчетов, увидеть, опустится уровень или поднимется. Чтобы проверить, насколько хорошо вы поняли это рассуждение, ответьте на следующий вопрос.

Вопрос. Как изменится ответ на задачу, если в лед будет заморожен не цинк, а кусок пробки?

Теперь разберем две задачи на вычисление работы, которую надо совершить для изменения глубины погружения тела. Такие задачи можно решать как прямым вычислением работы, так и через изменение потенциальной энергии системы.

Задача 5. На дне цилиндрического сосуда с водой площадью $S = 300 \text{ см}^2$ стоит цилиндр высотой $H = 40 \text{ см}$ и площадью основания $S_{\text{ц}} = 100 \text{ см}^2$, сделанный из материала плотностью $\rho = 3000 \text{ кг/м}^3$. Какую работу надо совершить, чтобы вытащить цилиндр из воды, если начальная толщина слоя воды $h_1 = 30 \text{ см}$? Цилиндр поднимают в вертикальном положении.

Решение 1. Уменьшение объема, заключенного между уровнем воды и дном сосуда (рис.5), равно объему погруженной части цилиндра (см. задачу 1):

$$S\Delta h = S_{\text{ц}}h_1.$$

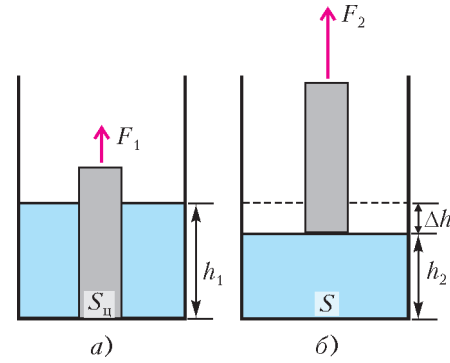


Рис. 5

Работа совершается на пути h_2 , равном конечной глубине воды:

$$h_2 = h_1 - \Delta h = h_1\left(1 - \frac{S_{\text{ц}}}{S}\right).$$

(В данном случае это соотношение получается сразу из условия сохранения объема воды: $Sh_2 = (S - S_{\text{ц}})h_1$.) При этом сила тяги линейно возрастает от минимального значения

$$F_1 = mg - F_{\text{арх}} = \rho_{\text{ц}}H g - \rho_{\text{в}}S_{\text{ц}}h_1g$$

до максимального значения

$$F_2 = mg = \rho_{\text{ц}}H g.$$

Таким образом, работа по извлечению цилиндра равна

$$A = \frac{F_1 + F_2}{2} h_2 = 21 \text{ Дж}.$$

Решение 2. Работа равна изменению потенциальной энергии системы «цилиндр-вода»:

$$A = \Delta E_{\text{ц}} + \Delta E_{\text{в}}.$$

Изменение потенциальной энергии цилиндра равно

$$\Delta E_{\text{ц}} = mgh_2 = mgh_1\left(1 - \frac{S_{\text{ц}}}{S}\right).$$

Изменение потенциальной энергии воды составляет

$$\Delta E_{\text{в}} = m_{\text{в}}g\left(\frac{h_2}{2} - \frac{h_1}{2}\right),$$

где $m_{\text{в}} = \rho_{\text{в}}(S - S_{\text{ц}})h_1$, а $h_2 = h_1\left(1 - \frac{S_{\text{ц}}}{S}\right)$ (см. решение 1).

Разумеется, ответ будет тем же.

Задача 6. В цилиндрическом сосуде с водой площадью $S = 300 \text{ см}^2$ плавает в вертикальном положении цилиндр высотой $H = 20 \text{ см}$ и площадью основания $S_{\text{ц}} = 100 \text{ см}^2$. Какую работу надо совершить, чтобы полностью извлечь цилиндр из воды, если он сделан из материала плотностью $\rho = 300 \text{ кг/м}^3$?

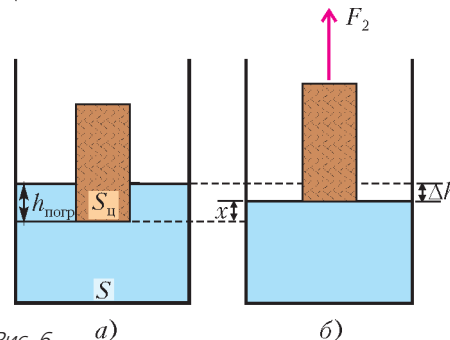


Рис. 6

Решение. При извлечении цилиндра уровень воды понижится (рис.6). Найдем понижение уровня Δh из равенства

$$S\Delta h = V_{\text{погр}},$$

где $V_{\text{погр}}$ — объем погруженной части плавающего цилиндра. Запишем условие плавания цилиндра:

$$F_{\text{арх}} = mg, \text{ или } \rho_{\text{в}} g V_{\text{погр}} = \rho V g,$$

откуда найдем

$$V_{\text{погр}} = \frac{\rho}{\rho_{\text{в}}} S_{\text{ц}} H, \quad h_{\text{погр}} = \frac{\rho}{\rho_{\text{в}}} H, \quad \Delta h = \frac{S_{\text{ц}}}{S} \frac{\rho}{\rho_{\text{в}}} H.$$

Работа совершается на пути

$$x = h_{\text{погр}} - \Delta h = H \frac{\rho}{\rho_{\text{в}}} \left(1 - \frac{S_{\text{ц}}}{S}\right),$$

причем сила тяги линейно возрастает от $F_1 = 0$ до $F_2 = mg = \rho S H$. Окончательно получаем

$$A = \frac{0 + mg}{2} x = 120 \text{ мДж}.$$

Попробуйте самостоятельно решить эту задачу через изменение потенциальной энергии системы.

Последняя задача посвящена исследованию равновесия тела, помещенного в стакан с жидкостью, с помощью уравнения моментов.

Задача 7. В гладкий стакан высотой $H = 8$ см и радиусом $R = 3$ см поставили однородную палочку длиной $L = 12$ см и массой $m = 150$ г. Стакан доверху наполнили жидкостью, плотность которой в 5 раз меньше плотности материала палочки. С какой силой давит палочка на край стакана?

Решение. Запишем правило моментов относительно нижнего конца палочки (рис.7):

$$mg \frac{L}{2} \cos \alpha - F_{\text{арх}} R - Nl = 0,$$

где N — сила реакции, равная искомой силе давления

палочки на край стакана, $l = \sqrt{H^2 + (2R)^2}$ — длина погруженной части палочки, а сила Архимеда равна

$$\begin{aligned} F_{\text{арх}} &= \rho_{\text{ж}} V \frac{l}{L} g = \\ &= \frac{1}{5} \rho V \frac{l}{L} g = \frac{l}{5L} mg. \end{aligned}$$

В итоге получаем

$$\begin{aligned} N &= mg \frac{L}{2l} \cos \alpha - mg \frac{R}{5L} = \\ &= 465 \text{ мН}. \end{aligned}$$

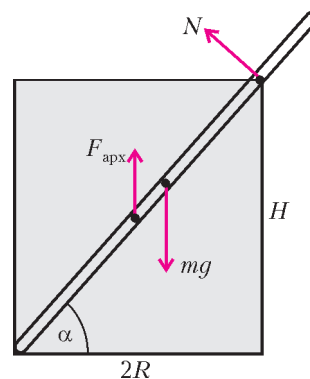


Рис. 7

Упражнения

1. В цилиндрический сосуд на поверхность воды пустили плавать коробочку из цинка, в результате чего уровень воды поднялся на $\Delta h_1 = 14$ мм. На сколько опустится уровень, если коробочка зачерпнет воды и утонет? Плотность цинка $\rho_{\text{ц}} = 7000 \text{ кг/м}^3$.

2. В цилиндрический сосуд площадью сечения S опустили и частично погрузили в воду кусок льда, притянутый к дну нитью. При этом натяжение нити оказалось равным T . На сколько поднимется уровень воды, когда лед растает?

3. В высоком цилиндрическом сосуде с водой площадью $S = 150 \text{ см}^2$ плавает в вертикальном положении цилиндр высотой $H = 30$ см и площадью основания $S_{\text{ц}} = 50 \text{ см}^2$. Какую работу надо совершить, чтобы полностью погрузить цилиндр в воду, если он сделан из материала плотностью $\rho = 400 \text{ кг/м}^3$?

4. В гладкий высокий стакан радиусом $R = 4$ см поставили палочку длиной $l = 10$ см и массой $m = 90$ г, после чего в стакан налили до высоты $h = 4$ см жидкость, плотность которой $\rho_{\text{ж}}$ составляет 0,75 плотности материала палочки ρ . Найдите силу, с которой верхний конец палочки давит на стенку стакана.

Объем тетраэдра и его частей

Л.ЕРГАНЖИЕВА, В.МИРОШИН

НА КОНКУРСНЫХ ЭКЗАМЕНАХ ДОВОЛЬНО ПОПУЛЯРНЫМИ являются задачи, в которых речь идет о нахождении объемов частей тетраэдра, отсекаемых от него некоторой плоскостью. При этом кроме общеизвестной формулы объема тетраэдра $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} H$ часто бывает полезной следующая формула, определяющая объем тетраэдра через длины его двух скрещивающихся ребер a , b , угол α и расстояние d между ними:

$$V = \frac{1}{6} abd \sin \alpha. \quad (1)$$

Выведем ее. Рассмотрим произвольный тетраэдр $ABCD$ (рис.1). Поместим тетраэдр в параллелепипед таким образом, чтобы его ребра AB и CD были диагоналями противоположных граней параллелепипеда (рис.2). Построение данного параллелепипеда очевидно: через середину ребра AB проведем прямую, параллельную CD , и отложим на ней отрезок, равный CD , так, чтобы в точке пересечения с AB он делился пополам. Аналогично поступим и с ребром CD . Объем получившегося параллелепипеда будет равен произведению площади основания, т.е. параллелограмма с диагоналями, равными AB и CD , на

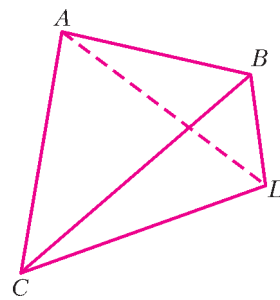


Рис. 1

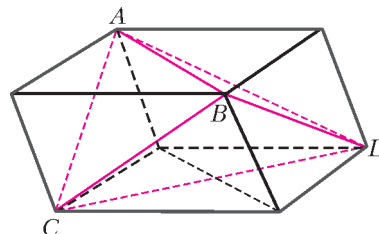


Рис. 2

высоту параллелепипеда. В качестве высоты данного параллелепипеда выступает отрезок, перпендикулярный плоскостям, содержащим AB и CD соответственно, т.е. их общий перпендикуляр. Площадь основания параллелепипеда равна половине произведения диагоналей на синус угла между ними. Таким образом, получим

$$V_{\text{пар}} = \frac{1}{2} AB \cdot CD \cdot \sin \alpha \cdot d = \frac{1}{2} abd \sin \alpha.$$

Объем V самого тетраэдра $ABCD$ составляет одну треть объема данного параллелепипеда. Это очевидно, так как достаточно заметить, что кроме исходного тетраэдра параллелепипед составляют также четыре треугольные пирамиды, основания которых – половины основания параллелепипеда, а высоты – высота параллелепипеда. Таким образом,

$$V = \frac{1}{6} abd \sin \alpha.$$

Следствие 1. Объем тетраэдра остается неизменным при перемещении противоположных ребер тетраэдра вдоль прямых, их содержащих.

Задача 1 (заочная физико-математическая олимпиада МФТИ, 2005 г.). Прямая AB проходит на расстоянии $\sqrt{3}$ от центра сферы радиуса $R = 1$, прямая CD касается указанной сферы. Найдите наименьший объем правильного тетраэдра $ABCD$.

Решение. Параллелепипед, описанный возле правильного тетраэдра, является кубом, ребро которого равно расстоянию между скрещивающимися ребрами этого тетраэдра. Наименьшее расстояние между прямыми AB и CD равно $\sqrt{3} - 1$. Следовательно, наименьший объем правильного тетраэдра $ABCD$ равен

$$\frac{1}{3} (\sqrt{3} - 1)^3 = \frac{1}{3} (3\sqrt{3} - 9 + 3\sqrt{3} - 1) = 2\sqrt{3} - \frac{10}{3}.$$

Рассмотрим различные расположения секущей плоскости и ребер тетраэдра и возникающие в связи с этим отношения объемов частей разбиения.

Секущая плоскость параллельна грани тетраэдра

Хорошо известно, что отношение объемов двух тетраэдров с общим трехгранным углом равно отношению произведений

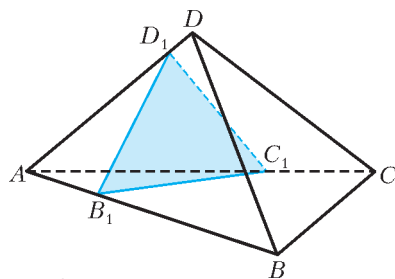


Рис. 3

соответствующих длин ребер этих трехгранных углов, т.е. (рис.3)

$$\frac{V_{ABCD}}{V_{AB_1C_1D_1}} = \frac{AB}{AB_1} \cdot \frac{AC}{AC_1} \cdot \frac{AD}{AD_1}.$$

Следствие 2. Если секущая плоскость $(B_1C_1D_1)$ параллельна грани (BCD) тетраэдра, то она отсекает пирамиду, подобную исходной. При этом $\frac{AB}{AB_1} = \frac{AC}{AC_1} = \frac{AD}{AD_1}$, и отношение объемов частей, на которые плоскость делит пирамиду, равно $\frac{k^3}{1-k^3}$, где $k = \frac{AB_1}{AB}$.

Секущая плоскость параллельна двум скрещивающимся ребрам тетраэдра

Каждую из частей, на которые секущая плоскость делит тетраэдр, принято называть клином. Объем клина можно подсчитать, разбив его на треугольную призму и тетраэдр, подобный исходному. При этом объем треугольной призмы удобно вычислять по формуле $V = \frac{1}{2} Q \rho$, где Q – площадь боковой грани, ρ – расстояние до этой грани от противоположного ребра (справедливость формулы докажете самостоятельно).

Найдем объем части тетраэдра $ABCD$ (рис.4), содержащей ребро AB , если секущая плоскость проходит параллельно AB

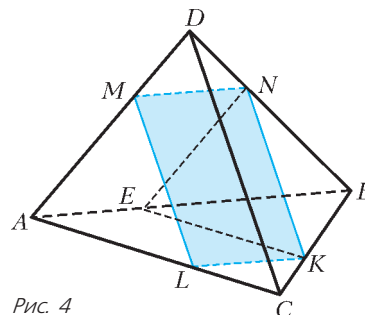


Рис. 4

и CD через точку M ребра AD такую, что $AM : MD = p : q$. Проведем $EN \parallel AD$ и $EK \parallel AC$. Тогда

$$\begin{aligned} V_{AMLBNK} &= V_{BENK} + V_{AMLENK} = \\ &= \left(\frac{p}{p+q} \right)^3 V + \frac{1}{2} \frac{2pq}{(p+q)^2} S_{ABC} \frac{p}{p+q} \rho(D, ABC) = \\ &= \left(\frac{p}{p+q} \right)^3 V + \frac{3p^2q}{(p+q)^3} V = \frac{p^2(p+3q)}{(p+q)^3} V, \quad (2) \end{aligned}$$

где V – объем данного тетраэдра, $\rho(D, ABC)$ – расстояние от точки D до грани (ABC) . Очевидно, что при этом

отношение объемов частей тетраэдра равно

$$\lambda = \frac{p^2(p+3q)}{q^2(q+3p)}. \quad (3)$$

Формулы (1) и (2) позволяют выразить в этом случае и площадь сечения. Действительно, с одной стороны,

$$\begin{aligned} V_{AMLENK} &= \frac{3p^2q}{(p+q)^3} V = \\ &= \frac{3p^2q}{(p+q)^3} \cdot \frac{1}{6} AB \cdot DC \cdot \rho(AB, DC) \sin \alpha, \end{aligned}$$

где α – угол между ребрами AB и DC . С другой стороны,

$$V_{AMLENK} = \frac{1}{2} S_{\text{сеч}} \frac{p}{p+q} \cdot \rho(AB, DC).$$

Отсюда

$$S_{\text{сеч}} = \frac{pq}{(p+q)^2} ab \sin \alpha, \quad (4)$$

где $AB = a$, $DC = b$.

Задача 2. В прямоугольнике $ABCD$ $AB = 2$, $BC = 3$. Отрезок KM параллелен AB и расположен на расстоянии 1 от плоскости $ABCD$, $KM = 5$. Найдите объем многогранника $ABCDKM$.

Решение. Разобьем клин на треугольную призму и тетраэдр, объемы которых равны $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 1 = 3$ и $\frac{1}{6} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1 = \frac{3}{2}$ соответственно. Получим $\frac{9}{2}$.

Секущая плоскость параллельна только одному ребру тетраэдра

Пусть секущая плоскость ($KLMN$) проходит параллельно ребру CD тетраэдра и пересекает ребро AD в точке M такой, что $AM : MD = p : q$, а ребро BD — в точке N так, что $BN : ND = m : n$. Так как плоскость параллельна только одному ребру тетраэдра, то она пересечет прямую AB в некоторой точке E (рис. 5). По теореме Менелая получим, что $\frac{BE}{AE} = \frac{qm}{pn}$, откуда $\frac{BE}{AB} = \frac{qm}{pn - qm}$.

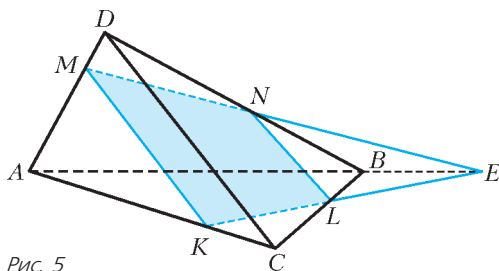


Рис. 5

При этом объем V_1 части тетраэдра, не содержащей ребро CD , будет равен

$$V_1 = V_{AMLE} - V_{BNKE} = \left(\frac{AM}{AD} \cdot \frac{AL}{AC} \cdot \frac{AE}{AB} - \frac{BN}{BD} \cdot \frac{BK}{BC} \cdot \frac{BE}{BA} \right) V,$$

где V — объем тетраэдра $ABCD$. Подставляя заданные соотношения, получим

$$V_1 = \frac{p^3 n (m+n)^2 - m^3 q (p+q)^2}{(p+q)^2 (m+n)^2 (pn - mq)} V. \quad (5)$$

Очевидно, что, зная объем одной части тетраэдра, легко можно найти объем и второй его части.

Задача 3 (МИФИ, 2000 г.). В тетраэдре $SABC$ через точку M , принадлежащую ребру AS , проведено сечение, параллельное ребру AB и пересекающее ребро AC . В каком отношении секущая плоскость делит ребро AC , если $AM : MS = 2 : 3$, а объемы получившихся частей относятся как $12 : 13$?

Решение. Как обычно присуще геометрическим задачам, предлагаемым в Московском инженерно-физическом институте, данная задача имеет не одно решение. В условии не сказано, какая из двух частей тетраэдра имеет больший объем. Мало того, возможно плоскость, делящая объем в заданном отношении, проходит параллельно не только ребру AB , но и скрещивающемуся с ним ребру SC . Поэтому надо

рассмотреть возможные варианты.

1) Если секущая плоскость параллельна двум скрещивающимся ребрам, то получим, что отношение объемов частей должно быть равно

$$\frac{2^2(2+9)}{3^2(3+6)} = \frac{44}{81} \text{ (см. (3))},$$

что противоречит условию задачи.

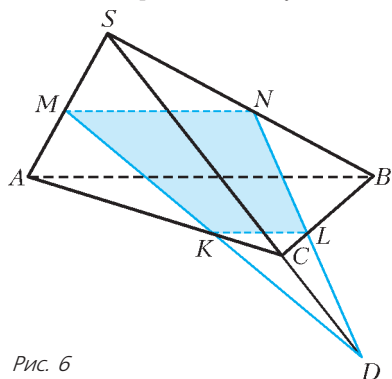


Рис. 6

2) Так как $\frac{44}{81} < \frac{12}{13}$, то секущая плоскость пересекает луч SC (рис. 6). Если бы плоскость пересекала луч CS , то отношение было бы меньше. Таким образом, получим, что искомое отношение $\frac{AK}{KC} = \frac{n}{m} > \frac{2}{3}$, а также, что объем части тетраэдра, содержащей ребро SC , составляет $\frac{13}{25}$ объема исходной пирамиды. По формуле (5) имеем

$$\frac{13}{25} = \frac{27n(n+m)^2 - 50m^3}{25(m+n)^2(3n-2m)} = \frac{27 \frac{n}{m} \left(\frac{n}{m} + 1 \right)^2 - 50}{25 \left(\frac{n}{m} + 1 \right)^2 \left(3 \frac{n}{m} - 2 \right)}.$$

Обозначив $\frac{n}{m} = t$, получим, что искомое значение удовлетворяет уравнению

$$27t(t+1)^2 - 50 = 13(t+1)^2(3t-2) \Leftrightarrow 6t^3 - t^2 - 20t + 12 = 0,$$

которое имеет три корня $t = -2$, $t = \frac{2}{3}$, $t = \frac{3}{2}$.

Отбирая значение, удовлетворяющее всем условиям задачи, получим, что $n : m = 3 : 2$.

Задача 4. Основание пирамиды $PABCD$ — параллелограмм $ABCD$. Точка M расположена на ребре PC , причем $PM : MC = 1 : 2$. Плоскость сечения проходит через точку M параллельно прямым AP и BD . В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды?

Решение. Разделив пирамиду на два равновеликих тетраэдра плоскостью PAC , применим формулу (5) и найдем, что искомое отношение равно $4 : 5$.

Упражнения

1. Скрещивающиеся ребра тетраэдра равны a и b . Найдите площадь сечения тетраэдра плоскостью, параллельной им, если известно, что эта площадь принимает максимально возможное значение.

2. Плоскость пересекает боковые ребра SA , SB и SC треугольной пирамиды $SABC$ в точках K , L и M соответственно. В каком отношении делит эта плоскость объем пирамиды, если известно, что $SK : KA = SL : LB = 2 : 1$, а медиана SN треугольника SBC делится этой плоскостью пополам?

3. Основание пирамиды $PABCD$ — параллелограмм $ABCD$. Точка M — середина ребра CP , точка N расположена на ребре AP , причем $AN : NP = 2 : 3$. Точка K расположена на ребре BP , причем $PK = 2KB$. В каком отношении плоскость, проходящая через точки K , M , N , делит объем пирамиды?

4. Основание пирамиды $PABCD$ — параллелограмм $ABCD$. Точка M расположена на продолжении ребра BC за точку B , причем $BM = BC$. Точка N расположена на ребре PC , причем $PN : NC = 1 : 2$. Точка K расположена на ребре AP , причем $AK : KP = 1 : 3$. В каком отношении плоскость, проходящая через точки K , M , N , делит объем пирамиды?

5. Рассматривается множество треугольных пирамид, основания которых совпадают с основанием правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ — треугольником ABC , а вершины лежат на верхнем основании этой призмы. В каждой такой пирамиде проводятся всевозможные сечения плоскостями, параллельными ребру BC и противоположному ему ребру AS . Найдите наибольшее возможное значение площади сечений для всех указанных пирамид, если сторона основания призмы равна a , а ее высота равна h .