

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 сентября 2008 года по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №3–2008» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М2086» или «Ф2093». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений). Решения задач по математике и физике можно присылать также по электронным адресам math@kvant.info и phys@kvant.info соответственно.

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М2093 – М2095 предлагались на XXIX Турнире городов.

Задачи Ф2093–Ф2095 и Ф2098 предлагались на Московской физической олимпиаде этого года, а задачи Ф2096, Ф2097 и Ф2099–Ф2101 – на XLII Всероссийской олимпиаде школьников по физике.

Победителями конкурса «Задачник «Кванта» 2007 года стали
по математике

Нижибицкий Евгений – г. Краснодар, школа 73;

по физике

Абдрахманов Владимир – г. Волгоград, лицей 3.

Они награждаются комплектами журнала «Квант» за второе полугодие 2008 года.

Задачи М2086–М2095, Ф2093–Ф2102

М2086. Даны две арифметические прогрессии $a_1, a_2, \dots$ и $b_1, b_2, \dots$, состоящие из натуральных чисел. Известно, что $a_1 = b_1$ и для каждого номера n числа a_n и b_n имеют равные остатки при делении на n . Докажите, что прогрессии совпадают.

Н.Калинин

М2087. Шахматная фигура «прожектор» бьет один из углов, на которые делят доску проходящие через нее горизонталь и вертикаль, включая примыкающие к углу клетки горизонтали и вертикали. (Например, прожектор в левом нижнем углу может бить либо одну клетку, либо нижнюю горизонталь, либо левую вертикаль, либо всю доску). Какое наибольшее число прожекторов можно расставить на шахматной доске так, чтобы они не били друг друга?

А.Шаповалов

М2088. Докажите, что для положительных чисел x, y, z , сумма которых равна 1, выполнено неравенство

$$\frac{x^2 + 3xy}{x + y} + \frac{y^2 + 3yz}{y + z} + \frac{z^2 + 3zx}{z + x} \leq 2.$$

Р.Пиркулиев

М2089. Пусть B_0 – середина стороны AC треугольника ABC . Обозначим через A_1 и A_2 центры вписанной и касающейся AB внеписанной окружности треугольника ABB_0 . Аналогично для треугольника $CB B_0$ определим точки C_1 и C_2 . Докажите, что четырехугольник $A_1 A_2 C_2 C_1$ – вписанный.

Л.Емельянов

М2090. Пусть $c_1, c_2, \dots, c_n$ – действительные числа; $S_1 = c_1$, $S_2 = c_1 + c_2$, $S_3 = c_1 + c_2 + c_3, \dots$, $S_n = c_1 + c_2 + \dots + c_n$; M и m – соответственно максимальное и минимальное среди чисел $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$. Докажите неравенства:

а) $m \leq c_1 + \frac{1}{2}c_2 + \dots + \frac{1}{n}c_n \leq M$;

б) $nm \leq nc_1 + (n-1)c_2 + \dots + c_n \leq nM$;

в) если $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n > 0$, то $\alpha_1 m \leq \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + \dots + \alpha_n c_n \leq \alpha_1 M$.

А.Егоров

М2091. Докажите, что для любых натуральных $n > 2$ и m существуют n попарно взаимно простых натуральных чисел, больших 10^{10} и таких, что сумма их m -х степеней делится на их сумму.

В.Сендеров

M2092. На ребрах AB, BC, CD, DA тетраэдра $ABCD$ взяты точки K, L, M, N соответственно. Точки K', L', M', N' симметричны точкам K, L, M, N относительно середин ребер AB, BC, CD, DA соответственно. Докажите, что объемы тетраэдров $KLMN$ и $K'L'M'N'$ равны.

П. Кожевников

M2093. Фокуснику завязывают глаза, а зритель выкладывает в ряд N одинаковых монет, сам выбирая, какие орлом вверх, а какие решкой. Ассистент фокусника просит зрителя написать на бумаге любое натуральное число от 1 до N и показать его всем присутствующим. Увидев число, ассистент указывает на одну из монет ряда и просит перевернуть ее. Затем фокуснику развязывают глаза, он смотрит на ряд монет и безошибочно определяет написанное зрителем число. Найдите все N , для которых у фокусника с ассистентом есть способ гарантированно отгадывать число.

С. Грибок

M2094. На плоскости нарисованы два многоугольника P и Q . Для любой стороны многоугольника P многоугольник Q можно зажать между двумя прямыми, параллельными этой стороне. Обозначим через h расстояние между этими прямыми, а через l — длину стороны. Просуммировав все произведения lh по всем сторонам P , получим число, которое обозначим (P, Q) . Докажите, что $(P, Q) = (Q, P)$.

Д. Звонкин

M2095. Перед Алешей 100 закрытых коробочек, в каждой — либо красный, либо синий кубик. У Алеши на счету есть рубль. Он подходит к любой закрытой коробочке, объявляет цвет и ставит любую сумму (можно нецелое число копеек, но не больше, чем у него на счету на данный момент). Коробочка открывается, и Алешин счет увеличивается или уменьшается на поставленную сумму в зависимости от того, угадан или не угадан цвет кубика. Игра продолжается, пока не будут открыты все коробочки. Какую наибольшую сумму на счету может гарантировать себе Алеша, если ему известно, что синих кубиков ровно n ?

А. Буфетов

Ф2093. Школьник бежит по окружности радиусом $R = 30$ м с постоянной по величине скоростью $u = 3,14$ м/с. Второй школьник гонится за ним, стартовав из центра окружности. В процессе погони он все время находится на радиусе, соединяющем центр окружности и первого школьника, а величина его скорости неизменна и равна $v = 2u$. Сколько времени займет погоня?

К. Парфенов

Ф2094. Небольшой груз массой m , привязанный нитью длиной l к платформе (рис.1), движется по гладкой поверхности стола со скоростью v , описывая окружность. Нить невесома и нерастяжима и образует угол α с вертикалью. Платформа начинает двигаться вверх с ускорением a ; при этом вначале груз не

отрывается от стола. Найдите величины действующих на груз сил натяжения нити T и реакции стола N сразу после начала движения платформы.

М. Ромашка

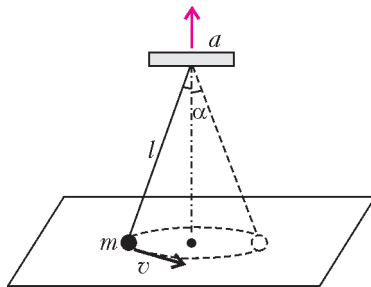


Рис. 1

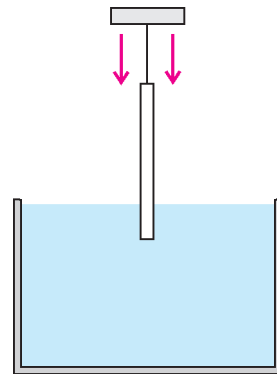


Рис. 2

Ф2095. Тонкий карандаш, подвешенный на нитке за один из концов, начинают погружать в воду, медленно опуская точку подвеса (рис.2). Определите максимальную глубину погружения нижнего конца карандаша, если длина карандаша $l = 18$ см, а его средняя плотность в $n = 2$ раза меньше плотности воды.

И. Горбатый

Ф2096. На гладком горизонтальном столе лежит груз массой m , к которому прикреплены две одинаковые пружины жесткостью k каждая (рис.3). Левый конец пружины 1 прикреплен к стенке, в момент времени $t = 0$ правый конец пружины 2 начинают медленно перемещать с постоянной скоростью u .

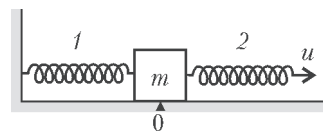


Рис. 3

1) Через какое время груз впервые приобретет скорость u ? 2) На каком расстоянии от первоначального положения будет находиться он в этот момент?

А. Гуденко

Ф2097. Через короткую трубку выдувают мыльный пузырь с массой $m = 0,01$ г и коэффициентом поверхностного натяжения $\sigma = 0,01$ Н/м (рис.4). Пузырь заряжают зарядом $Q = 5,4 \cdot 10^{-8}$ Кл. Трубка остается открытой. 1) Определите равновесный радиус пузыря R_0 . 2) Определите период малых колебаний пузыря, если при колебаниях он сохраняет сферическую форму. 3) Оцените, с какой скоростью разлетятся брызги, если пузырь внезапно зарядить зарядом $Q_1 = 10Q$. Электрическая постоянная $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Кл²/(Н·м²).

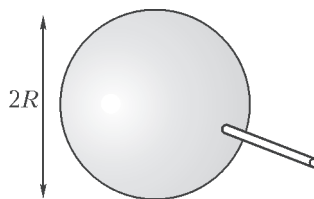


Рис. 4

Оцените, с какой скоростью разлетятся брызги, если пузырь внезапно зарядить зарядом $Q_1 = 10Q$. Электрическая постоянная $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Кл²/(Н·м²).

А. Ольховец

Ф2098. Найдите сопротивление электрической цепи между точками A и B (рис.5). Сопротивление стороны большого шестиугольника равно R , сопротивление стороны малого шестиугольника равно $R/2$, сопротивление каждого внутреннего проводника, заключенного

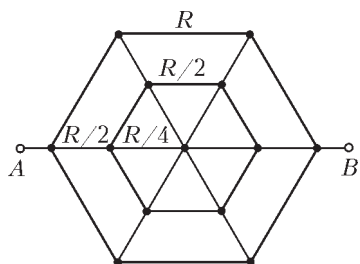


Рис. 5

между шестиугольниками, равно $R/2$, а сопротивление каждого проводника, находящегося внутри малого шестиугольника, равно $R/4$.

Е.Простомолотова

Ф2099. В цилиндре под поршнем находится смесь воздуха и паров некоторой жидкости. Смесь изотермически сжимают. На рисунке 6 представлена экспериментальная зависимость давления в сосуде от



Рис. 6

объема в этом процессе. Чему равно давление насыщенных паров жидкости при данной температуре и внутренняя энергия смеси при объеме цилиндра более 5 л?

Примечание. Считать воздух идеальным двухатомным газом, а пары жидкости – идеальным трехатомным газом.

С.Кармазин

Ф2100. На длинном тонкостенном диэлектрическом цилиндре радиусом R , длиной $L \gg R$ и массой M размещен электрический заряд с одинаковой поверхностной плотностью σ . Цилиндр может свободно (без

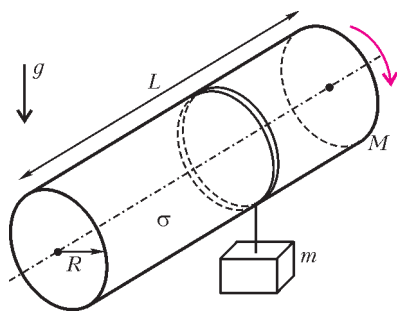


Рис. 7

трения) вращаться вокруг своей оси под действием груза массой m , подвешенного на невесомой нити, намотанной на цилиндр (рис.7). Определите ускорение груза. Магнитную постоянную μ_0 считать заданной.

М.Осин

Ф2101. Говорят, что в архиве Снеллиуса нашли чертеж оптической схемы. От времени чернила выцвели, и на чертеже остались видны только параллельные друг другу собирающая линза, объект и его действительное изображение (рис.8). Из пояснений к чертежу было ясно, что за линзой находилось плоское зеркало.

Восстановите построением по имеющимся данным положение зеркала и найдите положение фокусов линзы.

Г.Тарнопольский

Ф2102. Генератор незатухающих колебаний собран по обычной «ламповой» схеме – потери в колебательном LC -контуре компенсируются подкачкой энергии через дополнительную катушку, включенную в анодную цепь лампы-триода. Частота колебаний перестраивается за счет изменения емкости конденсатора, включенного в контур (настройка при помощи конденсатора переменной емкости).

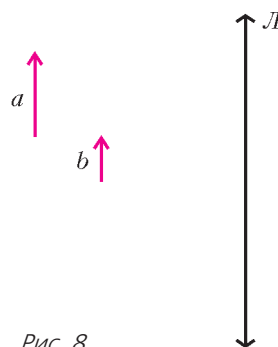


Рис. 8

Генератор работает на заданной частоте, но его настроили неправильно – если мы хотя бы немного уменьшим подкачку энергии (например, уменьшим число витков вспомогательной катушки на один виток), колебания просто не возникнут. Перестроим частоту колебаний на 5%, уменьшив емкость конденсатора. Как нужно изменить число витков вспомогательной катушки, чтобы генератор мог работать на этой частоте? Считайте, что потери энергии в колебательном контуре связаны главным образом с сопротивлением провода, которым намотана катушка индуктивности. Упрощенная схема генератора приведена на рисунке 9.

Рис. 9

А.Контуров

Решения задач М2066–М2069, Ф2078–Ф2087

М2066. Квадрат со стороной 1 разрезан на 100 прямоугольников одинакового периметра p . Найдите наибольшее значение p .

Ответ: 2,02.

Значение $p = 2,02$ достигается, если разрезать квадрат на 100 равных прямоугольников $0,01 \times 1$.

Выберем среди 100 прямоугольников прямоугольник $a \times b$ ($a \leq b$) минимальной площади; тогда $ab \leq 0,01$. Предположим, что $p = 2(a + b) > 2,02$. Ясно, что стороны прямоугольников параллельны сторонам квадрата, поэтому $b \leq 1$, откуда $a > 0,01$ и $0 \leq b - a < 0,99$. Имеем

$$ab = \frac{1}{4}((a+b)^2 - (b-a)^2) > \frac{1}{4}(1,01^2 - 0,99^2) = 0,01.$$

Противоречие.

П.Кожевников

М2067. Докажите, что если число $\underbrace{111\dots 11}_{n \text{ единиц}}$ делится на n , то n делится на 3.

Предположим, что $\frac{111...11}{n \text{ единиц}} = \frac{10^n - 1}{9}$ делится на n , но

n не делится на 3. Очевидно, n не делится на 2 и на 5. Пусть p – наименьший простой делитель числа n , $p > 5$. Тогда $10^n - 1$ делится на p . Согласно малой теореме Ферма, $10^{p-1} - 1$ делится на p . Таким образом, $10^n \equiv 1 \pmod{p}$ и $10^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. Пусть k – наименьшее натуральное число, для которого $10^k \equiv 1 \pmod{p}$. Заметим, что $k > 1$ (так как $10^1 - 1 = 9$ не делится на p) и $k \leq p - 1$. Разделим n на k с остатком: $n = kq + r$, $0 \leq r < k$. Имеем $1 \equiv 10^n \equiv (10^k)^q \cdot 10^r \equiv 10^r \pmod{p}$. Из определения k следует, что $r = 0$, т.е. n делится на k , $1 < k < p$. У числа k , а значит и у n , есть простой делитель, который меньше p , – противоречие.

Р.Ковалев

M2068. В футбольном турнире участвуют mn команд ($m, n \geq 2$). Командам присвоены номера $1, 2, \dots, mn$ в соответствии с местом, занятым на предварительном этапе. Организаторы турнира собираются разбить команды на m групп по n команд так, чтобы для любых двух команд A и B выполнялось условие: если номер A меньше номера B , то сумма номеров соперников по группе для команды A больше, чем для команды B . При каких m и n желание организаторов можно осуществить?

Ответ: при таких m и $n \geq 2$, что $(m+1)n$ делится на 2. Заметим, что если команды распределены по m группам с равными суммами номеров команд, то условие задачи выполняется.

Пусть команды разбиты на m групп по n команд так, что суммы номеров не во всех группах равны. Скажем, в группах $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_k$ суммы номеров равны S , а в группах $\Gamma_{k+1}, \Gamma_{k+2}, \dots, \Gamma_m$ суммы номеров не больше $S - 1$. Очевидно, в группе Γ_1 найдется команда, номер x которой больше номера y некоторой команды группы Γ_{k+1} . Среди команд с номерами $x, x - 1, \dots, y$ найдем команду с наименьшим номером z , принадлежащую одной из групп $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_k$. Тогда команда z принадлежит группе $\Gamma_i, i \in \{1, 2, \dots, k\}$, а команда $z - 1$ принадлежит группе $\Gamma_j, j \in \{k + 1, \dots, m\}$. Для команд z и $z - 1$ условие не выполнено: сумма номеров соперников по группе команды z равна $S - z$, а сумма номеров соперников по группе команды $z - 1$ не больше $(S - 1) - (z - 1) = S - z$.

Из сказанного следует, что задача равносильна следующей: при каких $m, n \geq 2$ числа $1, 2, \dots, mn$ можно разбить на m групп по n чисел так, чтобы суммы чисел во всех группах были равны?

Рассмотрим 3 случая.

1) Пусть n четно ($n = 2q$). Из данных чисел образуем mq пар с равной суммой: 1 и $2mq$, 2 и $2mq - 1$, ..., mq и $mq + 1$. Теперь в каждую из m групп включим по q пар.

2) Пусть n нечетно, m четно. Если нужное разбиение возможно, то сумма номеров команд в каждой группе

должна быть равна

$$\frac{1 + 2 + \dots + mn}{m} = \frac{mn(mn + 1)}{2m} = \frac{n(mn + 1)}{2}$$

– нецелое число. Противоречие.

3) Пусть n и m оба нечетные ($n = 2q + 1$, $m = 2r + 1$). Вначале из $2(q - 1)m$ чисел $3m + 1, 3m + 2, \dots, (2q + 1)m$ образуем $(q - 1)m$ пар с равной суммой: $3m + 1$ и $(2q + 1)m$, $3m + 2$ и $(2q + 1)m - 1$... В каждую из m групп включим по $q - 1$ пар. Остается числа $1, 2, \dots, 3m$ разбить на $m = 2r + 1$ троек с равными суммами. Составим таблицу $3 \times m$ по такому правилу. В первой строке запишем числа $1, 2, \dots, 2r + 1$ в порядке возрастания. Во второй строке – вначале числа $m + r + 1, m + r + 2, \dots, m + 2r + 1$, затем $m + 1, m + 2, \dots, m + r$. В третьей строке – вначале нечетные числа $2m + 2r + 1, 2m + 2r - 1, \dots, 2m + 1$ в порядке убывания, затем четные числа $2m + 2r, 2m + 2r - 2, \dots, 2m + 2$ в порядке убывания. В каждом столбце сумма равна $3m + 3r + 3$ – это и есть нужное разбиение на тройки.

И.Акулич, П.Кожевников

M2069. Обозначим через $\|y\|$ расстояние от действительного числа y до ближайшего целого числа. Пусть для иррационального числа x бесконечная последовательность натуральных чисел $q_1, q_2, \dots, q_k, \dots$ определена следующим образом: $q_1 = 1$, q_{k+1} – наименьшее натуральное q , для которого $\|xq\| < \|xq_k\|$. Докажите, что $q_{k+2} \geq q_k + q_{k+1}$ для всех $k = 1, 2, \dots$

Из условия вытекает, что $q_1 < q_2 < \dots < q_k < \dots$. Пусть $a_1, a_2, \dots, a_i, \dots$ – такая последовательность целых чисел, что $\|xq_i\| = |a_i - xq_i|$. Положим $x_i = a_i - xq_i$.

Предположим, что x_i и x_{i+1} одного знака, тогда для $q' = q_{i+1} - q_i < q_{i+1}$ имеем

$$\begin{aligned} \|xq'\| &\leq |(a_{i+1} - a_i) - xq'| = \\ &= |(a_{i+1} - a_i) - x(q_{i+1} - q_i)| = |x_i - x_{i+1}| < |x_i| = \|xq_i\|. \end{aligned}$$

Получаем противоречие с выбором q_{i+1} .

Таким образом, $x_i x_{i+1} < 0$ для всех i . Значит, $x_i x_{i+2} > 0$ для всех i . Отсюда

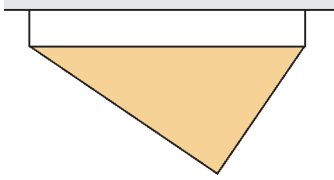
$$\begin{aligned} \|x(q_{i+2} - q_i)\| &\leq \\ &\leq |(a_{i+2} - a_i) - x(q_{i+2} - q_i)| = |x_i - x_{i+2}| < |x_i| = \|xq_i\|. \end{aligned}$$

Так как q_{i+1} – наименьшее натуральное q , удовлетворяющее неравенству $\|xq\| < \|xq_i\|$, имеем $q_{i+2} - q_i \geq q_{i+1}$, что и требовалось.

Как известно, для любого $\varepsilon > 0$ и иррационального x можно указать такое целое q , что $\|xq\| < \varepsilon$. Отсюда вытекает существование последовательности $q_1, q_2, \dots, q_k, \dots$, о которой идет речь в условии, для любого иррационального x .

В.Быковский

F2078. Из листа фанеры вырезали кусок в форме прямоугольного треугольника с катетами 60 см и 80 см, масса этого куска равна 2 кг. Кусок фанеры подвесили к потолку при помощи двух одинаковых легких нитей, расстояние между точками прикрепле-



ния нитей к потолку равно 100 см (см. рисунок). Найдите силы натяжения нитей.

Тут достаточно сообразить — где находится центр тяжести фигуры. Известно, что для такого треугольника (вырезанного из листа постоянной толщины) он оказывается в точке пересечения медиан. Медианы в точке пересечения делятся в отношении 2:1, значит, эта точка по горизонтали находится вдвое ближе к правой точке подвеса, чем к левой, тогда и сила натяжения правой нити вдвое больше, чем у левой. В сумме эти силы составляют Mg , поэтому

$$T_1 = \frac{Mg}{3} \approx \frac{2 \cdot 9,8}{3} \text{ Н} \approx 6,5 \text{ Н} \text{ и } T_2 = \frac{2Mg}{3} \approx 13 \text{ Н}.$$

А.Простов

Ф2079. Клин массой M с углом α при основании находится на гладком горизонтальном столе. На

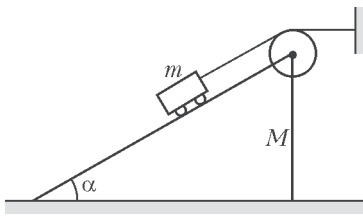


Рис. 1

наклонной грани клина стоит тележка массой m , к ней привязана легкая нить, переброшенная через блок, закрепленный осью в вершине клина (рис.1). Свободный конец нити привязан к стене. Вначале клин удерживают, затем отпускают. С каким ускорением он начнет двигаться?

Силы, действующие на тела в системе, показаны на рисунке 2. Ускорение клина обозначим буквой a , а ускорение тележки представим в виде суммы векто-

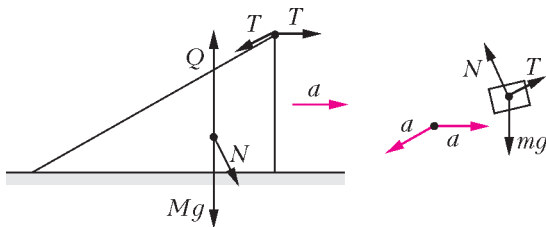


Рис. 2

ров двух ускорений — вместе с клином и относительно клина (нить нерастяжима, поэтому если клин смещается на некоторую величину по направлению к стенке, точно на такую же величину наклонный кусок нити удлиняется). Теперь можно записать уравнения динамики. Сделаем так, чтобы сила реакции N не вошла в эти уравнения, тогда достаточно будет написать всего два уравнения. Это будут уравнения второго закона Ньютона для тележки — в проекции на направление вдоль наклонной плоскости (вниз) и для клина и тележки вместе — в проекции на горизонталь:

$$mg \sin \alpha - T = ma(1 - \cos \alpha),$$

$$T = ma(1 - \cos \alpha) + Ma.$$

Отсюда находим искомое ускорение:

$$a = \frac{mg \sin \alpha}{M + 2m(1 - \cos \alpha)}.$$

Р.Клинов

Ф2080. Две большие параллельные пластины двигаются навстречу друг другу с одинаковыми скоростями v_0 . Между пластинами находится очень маленький упругий шарик. В тот момент когда одна из пластин ударяется о него, расстояние между пластинами составляет L . Считая удары абсолютно упругими, найдите скорость шарика в тот момент, когда расстояние между пластинами составит $L/5$. Действием силы тяжести пренебречь. Скорость шарика перед первым ударом равна нулю.

Это совсем простая задача. После первого удара шарик приобретет скорость $2v$ (это легко установить, «пересев» в систему отсчета, связанную с набегающей плоскостью, а после расчета удара пересев обратно), направленную в сторону второй пластины, при этом шарик и эта пластина будут сближаться со скоростью $3v$, и удар произойдет через время $L/(3v)$. К моменту соударения первая пластина сдвинется ко второй на $vL/(3v) = L/3$, и расстояние между пластинами станет равным $L - L/3 = 2L/3$. После этого удара скорость шарика станет равной $4v$, он ударится о первую пластину через время $2L/(15v)$. К этому моменту расстояние между пластинами будет равно $L/3 - 2L/15 = L/5$ — это заданная в условии величина. Уже можно записать ответ — скорость шарика будет равна $4v$. А можно найти скорость шарика после этого удара (удары кратковременны) — получится $6v$. Интересно, что последовательные расстояния между пластинами в моменты ударов записываются совсем просто...

А.Шариков

Ф2081. В комнате, заполненной воздухом, находится пустой кубический сосуд объемом 100 л. В стенке сосуда открывается маленькое отверстие площадью 1 см^2 и через $0,001 \text{ с}$ закрывается. Оцените количество молекул, попавших в сосуд за это время. Оцените также давление, которое установится в сосуде. Стенки сосуда не проводят тепло, теплоемкостью стенок можно пренебречь.

За указанное время в сосуд влетит не слишком много молекул (это мы проверим!). Пренебрегая количеством вылетевших за это время из сосуда наружу частиц, посчитаем только «влетающие» — такую задачу приближенно легко решить (мы ее наверняка уже решали), посчитав число ударов частиц газа о стенку:

$$N = 0,5v_x \tau S n.$$

Здесь v_x — скорость частиц вдоль оси X , τ — время, за которое считаем число ударов, S — площадь дырки, n — концентрация частиц воздуха. В нашем случае $v_x = \sqrt{RT/M} = \sqrt{8,3 \cdot 300/0,029} \text{ м/с} \approx 9 \cdot 10^2 \text{ м/с}$ и $n = N_A p_0 / (RT) = 6 \cdot 10^{23} \cdot 1 \cdot 10^5 / (8,3 \cdot 300) 1/\text{м}^3 \approx 2,4 \cdot 10^{25} 1/\text{м}^3$ — температуру в комнате мы приняли равной 300 К. Тогда количество влетевших частиц

равно

$$N \approx 1 \cdot 10^{21}.$$

Видно, что число частиц для такого сосуда совсем мало, так что мы действительно можем пренебречь числом вылетевших частиц.

Если бы энергии влетевших частиц были в среднем такими же, как и снаружи (т.е. температура в сосуде после хаотизации влетевших частиц оказалась такой же, как и снаружи, т.е. 300 К – а это не так!), то давление составило бы

$$p_1 = \frac{NRT}{N_A V} = \frac{1 \cdot 10^{21} \cdot 8,3 \cdot 300}{6 \cdot 10^{23} \cdot 0,1} \text{ Па} \approx 40 \text{ Па}$$

(наша модель для расчета ударов очень приблизительная, поэтому мы всюду грубо округляли результаты). Газ при атмосферном давлении довольно плотный (очень мала длина свободного пробега частиц), поэтому частицы не влетают независимо друг от друга в дырку, а «отставшие» частицы просто заталкивают обогнавших их в сосуд, совершая при этом работу и увеличивая внутреннюю энергию этих частиц. Если пренебречь теплообменом между порциями газа, то увеличение этой энергии равно совершенной работе. Работа производится при атмосферном давлении. Если объем порции газа, которая окажется к моменту закрытия дырки в сосуде, составлял снаружи V_1 (эту величину мы вычислять не будем, хотя это и не сложно), то работа внешнего газа над этой порцией составит $p_0 V_1$, и внутренняя энергия «внутреннего» газа увеличится как раз на эту величину: $U_1 = U + p_0 V_1 = 7U/5$. Таким образом, температура газа внутри сосуда после хаотизации увеличится в $7/5$ раза, и давление составит

$$p_2 = \frac{7}{5} p_1 \approx \frac{7}{5} \cdot 40 \text{ Па} \approx 56 \text{ Па}.$$

А.Повторов

Ф2082. Моль гелия в сосуде расширяется от начального объема $V_1 = 10 \text{ л}$ до конечного объема $V_2 = 50 \text{ л}$, при этом давление газа в процессе меняется так, что $pV^2 = \text{const}$. Начальная температура газа $T_1 = 300 \text{ К}$. Найдите конечную температуру. Найдите также работу газа в процессе (если не получится найти точно, посчитайте приближенно) и полученное в процессе количество теплоты.

С температурой все ясно – объем увеличился в процессе в 5 раз, давление уменьшилось в $5^2 = 25$ раз, температура упала в 5 раз и составила $T_2 = 60 \text{ К}$. Работу газа можно найти разными способами, мы посчитаем простой интеграл. Выразим давление газа как функцию его объема: $p = \alpha/V^2$. При $V = V_1$ давление составляло $p_1 = RT/V_1$, поэтому $\alpha = RT_1 V_1$. Теперь найдем работу газа:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = RT_1 V_1 \left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right) = RT_1 \left(1 - \frac{V_1}{V_2} \right) = 8,3 \cdot 300 \cdot 0,8 \text{ Дж} \approx 2 \cdot 10^3 \text{ Дж}.$$

Внутренняя энергия газа уменьшилась на величину $1,5RT_1 - 1,5RT_2 \approx 3 \cdot 10^3 \text{ Дж}$. Газ в этом процессе тепло отдавал:

$$Q = A + \Delta U \approx 2 \text{ кДж} - 3 \text{ кДж} \approx -1 \text{ кДж}.$$

Р.Газов

Ф2083. К батарейке подключают амперметр (вообще говоря, так поступать не следует!) – он показывает силу тока 1 А. Параллельно подключают еще один такой же амперметр – теперь они в сумме показывают 1,2 А. Сколько в сумме покажут 2008 таких же амперметров, если их подключить к батарейке параллельно?

Очевидно, что амперметры не идеальные – при идеальных амперметрах сопротивление внешней цепи осталось бы неизменным и сумма показаний амперметров не менялась бы. Ясно, что и батарейка не идеальна – при подключении к такой батарейке «лишних» амперметров показания предыдущих не менялись бы и сумма должна была расти пропорционально числу амперметров, т.е. для двух амперметров должно было быть 2А. Обозначим сопротивление амперметра R , а внутреннее сопротивление батарейки r . Тогда легко составить два уравнения:

$$\frac{U}{R+r} = I_1, \quad \frac{U}{R/2+r} = I_2.$$

Все три неизвестные величины отсюда найти нельзя – но нам достаточно определить отношение сопротивлений r/R . Подставив значения токов и разделив уравнения друг на друга, мы легко получим $R = 0,5r$. Ток через батарейку при 2008 амперметрах будет равен

$$I_{2008} = \frac{U}{r + R/2008} = \frac{I_1(r+r/2)}{r+r/(2 \cdot 2008)} \approx 1,5 \text{ А}.$$

Можно посчитать и точнее, но никакой амперметр разницы не почувствует...

Т.Оков

Ф2084. Одна из квадратных пластин плоского конденсатора закреплена, а вторая может свободно смещаться параллельно, оставаясь на расстоянии d от первой. Масса подвижной пластины M , площадь каждой из пластин S . Конденсатор зарядили до напряжения U_0 . Сдвинем теперь подвижную пластину относительно положения равновесия. Найдите период малых колебаний этой пластины. Зависит ли он от того, как мы сдвинули пластину? Сила тяжести отсутствует.

Для определенности сдвинем пластину на малое расстояние x параллельно одному из ребер так, чтобы пластины остались параллельными друг другу и расстояние между их плоскостями было, как и раньше, равно d (сделаем направляющие, позволяющие пластине двигаться именно так и без трения). Тогда емкость конденсатора уменьшится – она определяется только частями пластин, расположенных одна против другой:

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 S}{d} \text{ и } C_1 = \frac{\epsilon_0 S^*}{d} = \frac{\epsilon_0 (\sqrt{S} - 2x)\sqrt{S}}{d}.$$

Ясно, что если мы оставим источник подключенным к пластинам, то возвращающей силы не будет, а значит, никаких колебаний просто не возникнет.

Будем считать, что источник отключают, тогда заряд конденсатора $Q = C_0 U_0$ можно считать неизменным. Найдем изменение энергии заряженного конденсатора при сдвиге пластины на малое расстояние x в указанном направлении:

$$W_1 - W_0 = \frac{Q^2}{2C_1} - \frac{Q^2}{2C_0} = \frac{Q^2}{C_0} \frac{x}{\sqrt{S}}.$$

Считая силу, необходимую для такого смещения, неизменной на малом отрезке x , для «возвращающей» силы получим

$$F = \frac{Q^2}{C_0 \sqrt{S}} = \frac{C_0 U_0^2}{\sqrt{S}}.$$

Сила получилась постоянной – колебания не будут гармоническими. При равноускоренном движении четверть периода колебаний τ определится из уравнения $(F/M) \frac{\tau^2}{2} = x$, или $\tau = \sqrt{\frac{2xM}{F}}$. Видно, что этот период $T = 4\tau$ зависит от величины начального смещения пластины. Ясно, что если пластину смещать на ту же величину x , но в другом направлении (например, параллельно диагонали пластины), изменение емкости при том же смещении будет другим, другой будет и возвращающая сила, а значит – и период колебаний изменится.

З.Рафаилов

Ф2085. Катушка индуктивностью L и резистор сопротивлением R соединены параллельно, к выводам цепочки очень давно подключен внешний источник, ток в его цепи равен I_0 . Ток в цепи источника очень быстро увеличивают в 3 раза. Какое количество теплоты выделится в резисторе после этого? Какой полный заряд протечет через резистор?

Ток через катушку перед изменением тока внешней цепи примем равным I_0 – источник был подключен очень давно и ток через катушку уже установился. Сразу после увеличения тока в цепи источника до $3I_0$ ток через катушку остался прежним, а затем начал понемногу увеличиваться – через достаточно большое время он возрастет до $3I_0$. Напряжение на резисторе равно ЭДС индукции катушки, поэтому, обозначив J – ток катушки и I – ток через резистор в этот же момент, для малого интервала времени Δt получим

$$-L \frac{\Delta J}{\Delta t} = RI.$$

Перепишем чуть иначе:

$$-L \Delta J = RI \Delta t = R \Delta q,$$

где Δq – «порция» заряда, протекшего через резистор за указанный малый интервал времени. Суммируя за большое время, получим слева полное изменение магнитного потока через катушку, а справа – суммарный заряд, протекший через резистор:

$$q_R = 2LI_0$$

(куда течет заряд через резистор – понятно, на знак

полученного выражения можно внимания не обращать).

Ответ на первый вопрос чуть сложнее. Сумма токов через катушку и резистор остается постоянной и равной $3I_0$. Тогда запишем

$$-L \frac{\Delta J}{\Delta t} = -L \frac{\Delta(3I_0 - I)}{\Delta t} = RI,$$

или

$$-L \Delta(3I_0 - I) = RI \Delta t.$$

Домножим обе части уравнения на I , чтобы после суммирования получить справа полное количество теплоты Q , выделившееся за большое время в резисторе:

$$-LI \Delta(3I_0 - I) = RI^2 \Delta t.$$

Разобьем левую часть на два слагаемых и просуммируем за большое время:

$$Q = -\Sigma LI \Delta(3I_0) + \Sigma LI \Delta(I) =$$

$$= 0 + \Delta \left(\frac{LI^2}{2} \right) = \frac{L(3I_0)^2}{2} - \frac{LI_0^2}{2} = 4LI_0^2.$$

А.Зильберман

Ф2086. Две одинаковые катушки индуктивности соединены последовательно. Выводы получившейся цепочки подключены к звуковому генератору последовательно с низковольтной лампочкой для фонарика. Параллельно одной из катушек подключают конденсатор и начинают изменять в широких пределах частоту генератора. На частоте $f = 600$ Гц наблюдается четкий минимум свечения нити накала лампочки. На какой частоте (частотах) лампочка будет гореть ярче всего?

Будем считать, что катушки и конденсатор в цепи идеальные (во-первых, это сильно упрощает наши вычисления, а во-вторых, в условии задачи сказано «четкий минимум» – при сильно неидеальных элементах он был бы нечетким, размазанным). Тогда ясно, что минимуму соответствует частота ω_1 параллельного LC-контура:

$$\omega_1^2 = \frac{1}{LC},$$

при этом емкостное сопротивление конденсатора равно по величине индуктивному сопротивлению катушки. Максимум получится на частоте ω_2 , при которой по цепи L – LC течет ток, но напряжение на ее зажимах равно нулю. Это означает, что токи, текущие через катушки, равны по величине и противоположны по фазе (только тогда и получится нулевое напряжение). Но в этом случае ток через конденсатор должен быть вдвое больше тока одной катушки (при том же напряжении), т.е. на частоте ω_2 емкостное сопротивление конденсатора должно быть вдвое меньше индуктивного сопротивления катушки:

$$\frac{1}{\omega_2 C} = 0,5 \omega_2 L.$$

Отсюда

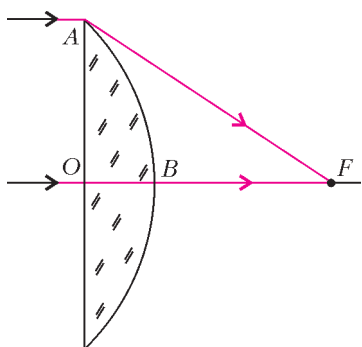
$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \sqrt{2}.$$

Частота, на которой будет максимальное свечение нити накала, в 1,41 раза больше частоты минимума и составляет примерно 850 Гц (на практике максимум не будет «выражен четко»).

Лампочка будет светиться ярко не только на этой частоте, но и на достаточно низких частотах, где индуктивное сопротивление нашей цепи будет небольшим, а ток конденсатора окажется пренебрежимо малым (впрочем, это только в теории – на практике звуковой генератор может и не отдать нужного тока в низкоомную нагрузку).

Р. Старов

Ф2087. Небольшая плосковыпуклая линза отштампована из прозрачной пластмассы. Форма выпуклой поверхности аккуратно рассчитана при помощи ЭВМ, она отличается от сферической (сферическая поверхность «собирает» лучи параллельного пучка в фокусе только приблизительно). Диаметр плоской поверхности линзы 2 см, толщина линзы 0,5 см. Найдите



фокусное расстояние линзы. Коэффициент преломления пластмассы 1,5.

Воспользуемся известным свойством собирающей линзы (и не только собирающей линзы!): если на линзу падает параллельный пучок лучей (выберем самый удобный случай – лучи падают на плоскую сторону линзы перпендикулярно этой плоскости), то пучок сходится в главном фокусе линзы (на рисунке это точка F) и время распространения любого луча до этой точки одно и то же.

Сравним времена распространения для крайнего и для центрального лучей. Центральный должен пройти меньшее расстояние, но часть пути (внутри линзы) его скорость меньше в $n = 1,5$ раза. Тогда

$$\frac{AF}{c} = \frac{OB}{c/n} + \frac{BF}{c},$$

или, если обозначить $BF = x$,

$$\frac{\sqrt{(x+d)^2 + D^2/4}}{c} = \frac{dn}{c} + \frac{x}{c}$$

(здесь толщина линзы $d = 0,5$ см, диаметр линзы $D = 2$ см, коэффициент преломления материала линзы $n = 1,5$). После возведения левой и правой частей последнего равенства в квадрат, получаем простое уравнение первой степени относительно x . Решая, получаем $x \approx 1,4$ см. Если бы обозначили за x длину отрезка OF , то уравнение получилось бы куда более громоздким. А теперь мы легко найдем искомое фокусное расстояние:

$$OF = x + d \approx 1,6 \text{ см}.$$

З. Очков

Итоги Всероссийского конкурса учителей физики и математики

Подведены итоги пятого конкурса школьных учителей Фонда Дмитрия Зимина «Династия». В этом году впервые учительский конкурс проводился в четырех номинациях. К ставшим уже традиционными номинациям «Молодой учитель», «Учитель, воспитавший Ученика» и



«Наставник будущих ученых» добавилась новая – премия «За выдающиеся заслуги в области физико-математического образования».

Лауреатами этой премии стали три учителя, чей авторитет в педагогическом сообществе общепризнан, а научные достижения учеников известны далеко за пределами нашей страны. Это

Зильберман Александр Рафаилович – Москва, Лицей «Вторая школа» (физика),

Слущкий Юрий Лазаревич – Санкт-Петербург, ФМЛ 239 (физика),

Хазанкин Роман Григорьевич – Белорецк, БКШ (математика).

Все победители конкурса получают гранты в размере 35000 рублей, а троим лауреатам премии «За выдающиеся заслуги в области физико-математического образования» будет выплачено по 150000 рублей.

Мы искренне поздравляем нашего любимого сотрудника и автора, бессменного ведущего раздел «Задачник «Кванта» (по физике) Александра Рафаиловича Зильбермана с присуждением премии «За выдающиеся успехи в области физико-математического образования».

Задачи

1. В арифметическом ребусе

$$\text{FOUR} + \text{FIVE} = \text{NINE}$$

одинаковые буквы обозначают одинаковые цифры, разные буквы — разные цифры. При этом FOUR делится на 4, а FIVE — на 5. Делится ли NINE на 9?

И.Акулич



2. Можно ли натуральные числа от 1 до 16 разбить на 8 пар так, чтобы суммы в парах оказались различными простыми числами?

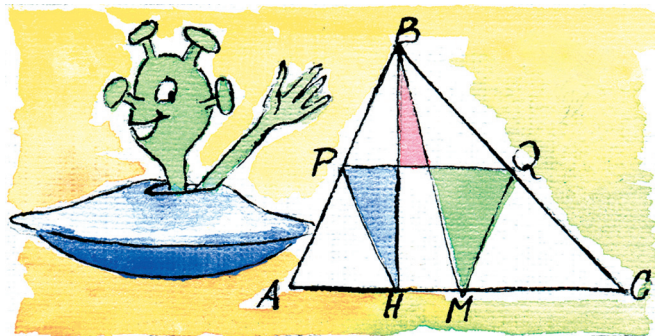
А.Грибалко



Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6 — 8 классов.

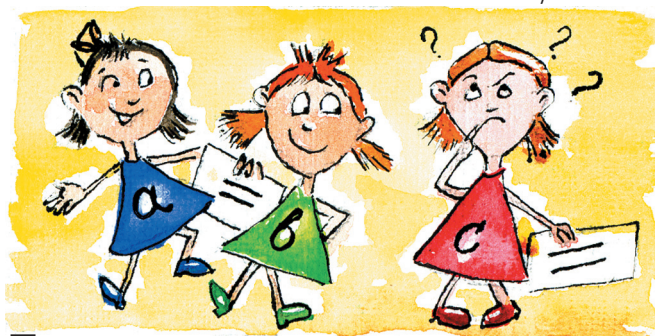
3. В треугольнике ABC проведены высота BH , медиана BM и средняя линия PQ . Докажите, что из красного и синего треугольников можно составить зеленый треугольник.

А.Жуков



4. Натуральные числа a, b, c таковы, что три числа $a^2 + 2b + 1$, $b^2 + 2c + 1$, $c^2 + 2a + 1$ являются квадратами натуральных чисел. Верно ли, что $a = b = c$?

В.Произволов



5. Существует всего пять различных четырехклеточных фигурок — все они изображены на рисунке. Клетчатую таблицу 4×4 разрезали на четыре четырехклеточные фигурки. Докажите, что среди них найдутся две одинаковые.

А.Грибалко



Иллюстрации Д.Гришковой

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

Мы представляли себе атомы, частицы, колебания и волны, которых никогда не видит глаз, не слышит ухо и которые можно различить только при помощи воображения.

Джон Тиндаль

В оптике и акустике эти опыты рассматриваются как доказательства волновой природы света и звука...

Генрих Герц

Когда звук распространяется по воздуху, по воде и в твердом теле, то... он рассеивается. Но есть и другая

причина, вследствие которой он слабеет... Он теряет часть своей энергии, и мы говорим в этом случае о «поглощении (абсорбции) звука», о «поглощающих звук веществах»...

Уильям Генри Брэгг

Рассмотрим простейший пример — распространение звука в одномерном пространстве. Для вывода нам сначала необходимо понять, что же в действительности происходит.

Ричард Фейнман

А так ли хорошо знакомо вам распространение звука?

Немало физиков, занимающихся акустикой, обращали внимание на схожесть некоторых звуковых явлений с оптическими. Верно и обратное: изучение света побуждало искать аналогии с распространением звуковых колебаний. С тем же столкнулись и мы, решив посвятить новый выпуск «Калейдоскопа» волновым процессам, — обнаружили множество точек пересечения акустики и оптики. Пришлось делить тему пополам, и если мы сегодня сосредоточимся на звуке, то в следующий раз обязательно обратимся к электромагнитным волнам, прежде всего — световым.

Отметим сразу, что и тут и там во всем разнообразии волновых явлений в первую очередь нас будут интересовать ситуации, связанные с рассеянием и поглощением. Нельзя сказать, что им уделено достаточно внимания в курсе элементарной физики, в то время как в жизни мы встречаемся с ними повседневно.

Если говорить о звуковых волнах, то они — один из главных источников информации об окружающем нас мире. Разговорная речь, музыка, звуки живой природы, обмен сообщениями по телефону, аудиотехника — мы живем в акустически насыщенной атмосфере. Неизмеримо возросла и плотность вредных звуков — раздражающих, а порой и просто опасных для здоровья шумов.

Как донести одни из них до нас с возможно меньшими потерями и искажениями, а другие (если не удастся избавиться от них) хотя бы ослабить? Как поставить нам на службу неслышимые звуки? В поисках ответов последуем совету Фейнмана и начнем с относительно простых акустических примеров.

Вопросы и задачи

1. Почему закрытые окна гораздо заметнее защищают от дорожных шумов помещения на верхних этажах здания, чем на нижних?

2. Известно, что дерево проводит звук лучше, чем

воздух. Отчего же разговор, происходящий в соседней комнате, заглушается, когда деревянная дверь в эту комнату закрыта?

3. Почему звук получается более громким, если стучать не в стену, а в дверь?

4. Куда девается энергия звуковых колебаний, когда звук «замирает»?

5. Зачем суфлерскую будку обивают войлоком?

6. При выступлении оркестра в большом зале музыка звучит по-разному в зависимости от того, заполнен зал людьми или пуст. Чем это объяснить?

7. Наши предки могли расслышать далекий топот копыт, припав ухом к земле. Почему же этот звук не был слышен в воздухе?

8. Отчего в туман гудки, например электричек или теплоходов, слышны на большем расстоянии, чем в ясную погоду?

9. Колеблющийся в руке камертон звучит тихо, а если поставить его ножку на стол, громкость звучания возрастает. Почему?

10. Дольше ли будет звучать «громкий» камертон из предыдущей задачи по сравнению с «тихим»?

11. Как объяснить тот факт, что на большом расстоянии голос может быть и слышен, но слов при этом разобрать нельзя?

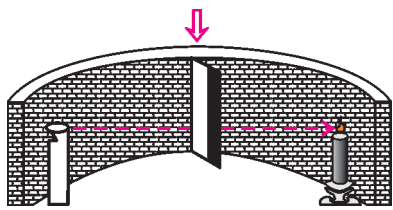
12. Участникам антарктических экспедиций, когда они прорывали туннели в снегу, приходилось кричать, чтобы быть услышанными даже на расстоянии в пять метров. Однако слышимость заметно возрастала, когда стенки туннеля утрамбовывали. С чем это связано?

13. Почему в комнате обычных размеров не бывает эха?

14. Отчего эхо от высокого звука, например крика, обычно громче и отчетливее, чем от низкого?

15. Случайно залетая в окно, летучая мышь иногда садится людям на голову. Почему?

16. В модели изображенной на рисунке «галереи шепотов» звуковые волны от свистка заставляли



мерцать пламя свечи, установленной у противоположной стены. Но мерцание прекращалось, если сбоку от пламени и свистка вблизи стены помещали узкий экран. Как же этот экран преграждал путь звуку?

17. Отчего иногда звуковой «луч» локатора, направленный на подводную лодку с небольшого расстояния, тем не менее не достигает ее?

Микроопыт

Поделитесь сухариками со своим товарищем и начните вместе с ним их грызть. Не кажется ли вам, что вы производите гораздо больше шума, чем находящийся рядом сосед? Почему?

Любопытно, что...

...давно известные в медицине способы диагностики — выстукивание и прослушивание — нашли применение в акустической дефектоскопии, позволяющей по рассеянию и поглощению посланного в исследуемую среду звукового сигнала определить наличие в ней неоднородностей.

...разгадка описанного в задаче 16 эффекта «галереи шепотов» была найдена в 1904 году знаменитым лордом Рэлеем во время его наблюдений и экспериментов в Лондонском соборе святого Павла. Почти через сто лет подобная разновидность волн стала предметом исследования и применения в оптике, например — для частотной стабилизации лазеров или преобразования частоты светового луча.

...инфразвуковые волны очень слабо затухают в атмосфере, океане и земной коре. Так, мощное низкочастотное возмущение, вызванное извержением в 1883 году индонезийского вулкана Кракатау, обошло земной шар дважды.

...с удалением от эпицентра ядерного взрыва ударная волна превращается в акустическую, причем короткие волны затухают быстрее, чем длинные, и на больших расстояниях сохраняются лишь колебания низких частот. Фиксация таких — инфразвуковых — волн была предложена в середине 50-х годов прошлого века академиком И.К.Кикоиным как метод обнаружения ядерных взрывов, который впоследствии успешно применялся для регистрации испытаний, проводимых США в Тихом океане.

...изобретению Беллом телефона предшествовало основательное изучение им акустики и многолетняя работа в бостонской школе для глухонемых, которым предназначались также сконструированные им усилители звука и приборы для обучения пониманию речи.

...особенность свежесыпавшего снега поглощать в основном высокие частоты была замечена английским

ким физиком Тиндалем, совмещавшим акустические и оптические исследования. А Рэлей, искавший общее во всех колебательных процессах, сумел объяснить повышение тона эха в сосновом лесу лучшим рассеянием и отражением тонкой хвоей коротких звуковых волн, чем длинных, — как при рассеянии света в атмосфере.

...в одном из помещений консерватории в австралийском городе Аделаиде было невозможно слушать игру на рояле — так пронзительно и резко резонировал зал. Из этого положения нашли выход, свесив с потолка несколько полуметровых в ширину полос саржи — хлопчатобумажной ткани с особой отделкой поверхности, позволяющей хорошо поглощать звук.

...звуковые колебания частотой 200—400 герц при достаточно больших уровнях их интенсивности могут очень сильно замаскировать почти все выходящие частоты. Например, мелодии органа и контрабаса отчетливо слышны в оркестре, хотя их относительная громкость не превышает такие высокочастотные инструменты, как скрипка и виолончель.

...если «озвучивать» сиренами трубопроводы для транспортировки сыпучих грузов — муки, угольной пыли, измельченной руды, то их пропускная способность возрастает. Такие устройства используются в портах для выгрузки порошкообразных материалов из трюмов грузовых судов. Единственный их недостаток — пронзительный вой.

...колебания звуковой частоты могут использоваться для сушки разнообразных материалов при сравнительно низких температурах, в том числе за счет местного их нагрева при поглощении акустических волн.

...ультразвук способен «смешать» ртуть или масло с водой, измельчить в порошок твердые вещества при изготовлении лекарств, продолбить квадратное отверстие в металле, резать и сверлить стекло и кварц, соединить «непаяющиеся» материалы и много чего еще удивительного, но вот создать ультразвуковое оружие, увы, нельзя. Особенности распространения и поглощения ультразвука приводят к такому сильному его затуханию, что даже на расстоянии всего в несколько десятков метров он передает энергию, достаточную для работы лишь... лампочки от карманного фонарика.

Что читать в «Кванте» о распространении звука

(публикации последних лет)

1. «Калейдоскоп «Кванта» — 2003, №1, с.32;
2. «Звук в пене» — 2004, №4, с.12;
3. «Речь с позиции физики и математики» — 2006, №6, с.2;
4. «Как океаны говорят друг с другом: подводная акустика» — 2006, Приложение №6, с.123;
5. «Логарифмические шкалы» — 2007, №2, с.6;
6. «Взрыв» — 2007, №6, с.5;
7. «Ударные волны и детонация» — 2008, №1, с.4;
8. «Физика ядерного взрыва» — 2008, №2, с.7.

Материал подготовил А.Леонович

Нет предела совершенству!

И. АКУЛИЧ

ИЗ ГЛУБИНЫ ВЕКОВ ПРИШЛИ К НАМ **СОВЕРШЕННЫЕ ЧИСЛА**. Это такие натуральные числа, у которых сумма делителей, строго меньших самого числа, равна этому числу. Вот несколько первых совершенных чисел: 6, 28, 496, 8128, 33550336, 8589869056, 137438691328... Конечно ли их множество – доселе неизвестно.

Но, оказывается, совершенными в том или ином смысле могут быть не только числа, но и фигуры. К таковым, с легкой руки древних пифагорейцев, принято относить многоугольники, обладающие следующими двумя свойствами:

- 1) все их стороны – целые числа;
- 2) их площадь численно равна периметру.

Сами пифагорейцы активно занимались поисками совершенных *прямоугольников*, и это им удалось. Поэтому для начала пройдем по их стопам и выявим все совершенные прямоугольники.

Пусть стороны прямоугольника – целые числа a и b , причем, для определенности, $a \leq b$. Тогда площадь прямоугольника равна ab , а периметр равен $2a + 2b$. Отсюда получаем

$$ab = 2a + 2b.$$

Это равенство легко преобразовывается к виду

$$(a - 2)(b - 2) = 4.$$

Так как 4 раскладывается на произведение двух целых чисел четырьмя различными способами: $4 = (-4) \cdot (-1) = (-2) \cdot (-2) = 1 \cdot 4 = 2 \cdot 2$, то с учетом неравенства $a \leq b$ получаем четыре возможные пары $(a; b)$, а именно: $(-2; 1)$, $(0; 0)$, $(3; 6)$ и $(4; 4)$. Первые две отбрасываем как бессмысленные, а остальные вполне приемлемы. Итак, существует два совершенных прямоугольника: 4×4 и 3×6 .¹ Площади найденных прямоугольников равны 16 и 18, в силу чего пифагорейцы считали эти числа «хорошими», а расположенное между ними число 17 – «плохим».²

А как обстоят дела с другими многоугольниками? Начнем, естественно, с того, что попроще: с треугольников. В одной из задач конкурса «Математика 6–8» был задан вопрос: «Существуют ли совершенные прямоугольные треугольники? А равнобедренные треугольники?» Что ж, попробуем их найти.

Займемся сначала совершенными прямоугольными

треугольниками. Не составляет труда убедиться, что таковые существуют. Для этого сначала «пощупаем» самый известный прямоугольный треугольник со сторонами 3, 4 и 5. Его площадь, как видно, равна 6, а периметр – 12, т.е. вдвое больше. Заметим, что если увеличить линейные размеры любого треугольника в k раз, то его периметр тоже увеличится в k раз, а площадь – в k^2 раз. Поэтому, увеличив наш треугольник в $k = 2$ раза, мы тем самым уравниваем площадь и периметр. Итак, треугольник со сторонами 6, 8 и 10 – совершенный.

Это неплохо – по крайней мере, есть что искать (успех гарантирован). Пусть катеты треугольника равны a и b (как и прежде, $a \leq b$). Тогда гипотенуза равна $\sqrt{a^2 + b^2}$, площадь равна $ab/2$, периметр равен $a + b + \sqrt{a^2 + b^2}$, и получаем

$$a + b + \sqrt{a^2 + b^2} = ab/2,$$

откуда

$$4(a^2 + b^2) = (ab - 2a - 2b)^2.$$

После раскрытия скобок и приведения подобных членов имеем

$$a^2b^2 - 4a^2b - 4ab^2 + 8ab = 0.$$

Поделив на ab (что допустимо, так как a и b – натуральные), получаем

$$ab - 4a - 4b + 8 = 0, \text{ или } (a - 4)(b - 4) = 8.$$

Дальнейшее очевидно. Число 8 разбивается на два натуральных сомножителя двумя разными способами: $1 \cdot 8$ и $2 \cdot 4$, и, подобно случаю с прямоугольниками, получаем два осмысленных ответа. Первый треугольник имеет катеты 5 и 12, тогда гипотенуза равна 13, а площадь и периметр равны 30. Второй треугольник с катетами 6 и 8 нам уже известен. Итак, имеется два совершенных прямоугольных треугольника со сторонами $(5, 12, 13)$ и $(6, 8, 10)$.

Перейдем к совершенным равнобедренным треугольникам. Так как равнобедренный треугольник составляется как бы из двух одинаковых прямоугольных треугольников, то, казалось бы, и здесь не должно быть проблем с поиском совершенных треугольников. Но все почему-то оказывается гораздо труднее.

Пусть основание равнобедренного треугольника равно a , а боковая сторона равна c . Тогда высота его равна

$$\sqrt{c^2 - \frac{a^2}{4}}, \text{ площадь равна } \frac{1}{2}a\sqrt{c^2 - \frac{a^2}{4}}, \text{ и получаем}$$

$$a + 2c = \frac{1}{2}a\sqrt{c^2 - \frac{a^2}{4}}.$$

¹ С некоторой натяжкой, пожалуй, можно отнести к совершенным и решение $(0; 0)$, соответствующее прямоугольнику с нулевыми сторонами и, соответственно, нулевой площадью и периметром.

² Наверное, зря. Число 17 не столь уж плохое. Во всяком случае, Карл Фридрих Гаусс прославил его на века, доказав возможность построения циркулем и линейкой правильного 17-угольника.

После очевидных преобразований имеем

$$(4a^2 - 64)c^2 - 64ac - (16a^2 + a^4) = 0.$$

Заметим, что если $4a^2 - 64 \leq 0$, т.е. $a \leq 4$, то в левой части – заведомо отрицательное число, что недопустимо. Поэтому $4a^2 - 64 > 0$, т.е. $a \geq 5$. В этом случае c выражается через a следующим образом (здесь перед радикалом оставлен только знак «плюс», так как знак «минус» ведет к заведомо отрицательному значению c):

$$c = \frac{32a + \sqrt{1024a^2 + (4a^2 - 64)(16a^2 + a^4)}}{4a^2 - 64} = \frac{16a + a^3}{2a^2 - 32}.$$

Сразу видно, что a должно быть четным (иначе дробь не будет целым числом), т.е. $a = 2m$ (m – натуральное). Подставив это значение в последнее выражение, после сокращений получаем

$$c = \frac{m^3 + 4m}{m^2 - 4} = m + \frac{8m}{m^2 - 4}.$$

Таким образом, $8m$ делится на $m^2 - 4$. Заметим, что если $m \geq 9$, то $m^2 - 4$ строго больше $8m$, и потому делимость отсутствует (доказать это можно, например, представив разность $(m^2 - 4) - 8m$ в виде $m(m - 9) + (m - 4)$, откуда сразу видно, что эта величина положительна при $m \geq 9$). Ну, а значения m , не превышающие 8, можно проверить прямым перебором (причем поскольку $a \geq 5$, то $m \geq 3$). Проведите такой перебор самостоятельно и убедитесь, что ни одно из указанных значений m не подходит. Итак, совершенных равнобедренных треугольников не существует.

Что ж, прямоугольные и равнобедренные треугольники исследованы. Переходим к произвольным треугольникам со сторонами a , b и c , причем, для определенности, положим $a < b < c$. Здесь мы смело используем строгие неравенства вместо нестрогих, так как только что убедились, что равнобедренных совершенных треугольников не бывает.

Первое, что приходит в голову, – формула Герона, непосредственно выражающая площадь треугольника

S через его стороны и полупериметр $p = \frac{a+b+c}{2}$:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Приравняв S к периметру $a + b + c$, раскрыв скобки и приведя подобные члены, после упрощений получаем

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 + 2abc + 16(a+b+c) = \\ = a^2(b+c) + b^2(a+c) + c^2(a+b). \end{aligned}$$

Это уравнение приятно во всех отношениях, кроме одного: непонятно, что с ним дальше делать. Неясно даже, конечно или бесконечно число его решений. (По крайней мере, два-то решения у него есть, соответствующие прямоугольным треугольникам, а еще? Трудно сказать...) Так что придется отложить произвольные

треугольники до лучших времен. Во всяком случае, обширный поиск таких решений с помощью компьютера позволил, кроме упомянутых выше двух прямоугольных треугольников, найти еще три тупоугольных: (6, 25, 29), (7, 15, 20) и (9, 10, 17). Как видим, стороны их невелики, хотя были «обсчитаны» все треугольники, у которых две стороны не превосходят 10000 (а третья принимает все возможные допустимые значения, при которых треугольник существует). Поэтому наиболее вероятным кажется предположение, что число решений все же конечно.

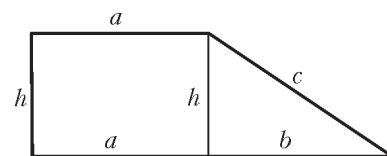
Перейдем к четырехугольникам. Самые простые из них – прямоугольники – исследовали сами пифагорейцы (см. выше). Ну, а параллелограммы? Нетрудно сообразить, что совершенных среди них бесконечно много. В самом деле, возьмем произвольный целочисленный прямоугольник, у которого площадь *строга больше* периметра. Деформируя его (т.е. меняя какой-либо угол), мы можем добиться того, чтобы площадь стала сколь угодно близка к нулю. Ясно, что в процессе непрерывной деформации площадь сравняется с периметром. А можно даже прямо указать, каков должен

быть острый угол параллелограмма: $\arcsin \frac{2(a+b)}{ab}$.

Особого интереса этот ответ, конечно, не вызывает: слишком «гибкая» фигура параллелограмм. По-видимому, для произвольного четырехугольника ситуация похожая. Поэтому имеет смысл исследовать более «жесткие» четырехугольники: например, прямоугольные и равнобедренные трапеции.

Конечно, трапеция – фигура с большим числом «степеней свободы», нежели треугольник. Оно и понятно: прямоугольный либо равнобедренный треугольник полностью определяется двумя сторонами, тогда как для прямоугольной или равнобедренной трапеции этого явно недостаточно – нужен еще один параметр (например, два основания и высота). Поэтому мы уже заранее готовы ожидать, что множество совершенных трапеций содержит намного больше элементов, чем множество совершенных треугольников. Что ж, проверим.

Начнем с прямоугольной трапеции. Надо сказать, что в данном случае такой же «лобовой» подход, как для треугольников, приводит к весьма громоздким выражениям. К счастью, есть лазейка: а почему бы не использовать выведенные задолго до нас формулы для сторон целочисленных прямоугольных треугольников? Ведь прямоугольную трапецию можно рассматривать как прямоугольник, к которому «приклеился» прямоугольный треугольник (см. рисунок). Пусть ширина прямоугольника равна a , высота h , а у «приклеенного»



прямоугольного треугольника один из катетов совпадает со стороной h прямоугольника, второй катет равен b , а гипотенуза равна c . Из «совершенства» трапеции

следует, что все перечисленные значения – целые числа. Вместе с тем, известно, что катеты и гипотенуза любого прямоугольного треугольника с целыми сторонами могут быть представлены в виде $2kmn$, $k(m^2 - n^2)$ и $k(m^2 + n^2)$ при некоторых натуральных k , m , n , причем $m > n$ (вследствие чего $m \geq 2$ – этот факт нам впоследствии пригодится). Следовательно, имеют место две возможности.

1) Пусть $h = 2kmn$, $b = k(m^2 - n^2)$, $c = k(m^2 + n^2)$. Тогда площадь трапеции составляет

$$h \cdot \frac{2a + b}{2} = 2kmn \cdot \frac{2a + k(m^2 - n^2)}{2} = \\ = 2kmna + k^2mn(m^2 - n^2),$$

периметр ее равен

$$2a + b + h + c = 2a + k(m^2 - n^2) + 2kmn + k(m^2 + n^2) = \\ = 2a + 2km(m + n).$$

И, следовательно,

$$2kmna + k^2mn(m^2 - n^2) = 2a + 2km(m + n).$$

Так как k , m , n – натуральные, причем $m \geq 2$, то первое слагаемое левой части $2kmna$ больше первого слагаемого правой части $2a$. Поэтому для соблюдения «паритета» необходимо, чтобы второе слагаемое левой части было меньше второго слагаемого правой части, т.е.

$$k^2mn(m^2 - n^2) < 2km(m + n),$$

откуда

$$kn(m - n) \leq 1.$$

Значит, $k = n = m - n = 1$, и $m = 2$. Итак, все неизвестные, кроме a , определены. Подставив их в исходное уравнение, получаем

$$2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot a + 1^2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (2^2 - 1^2) = 2a + 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot (2 + 1), \\ \text{и } a = 3, \quad h = 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 4, \quad b = 1 \cdot (2^2 - 1^2) = 3, \\ c = 1 \cdot (2^2 + 1^2) = 5.$$

Таким образом, найдена первая совершенная прямоугольная трапеция с основаниями 3 и $3 + 3 = 6$ и высотой 4. Легко проверить, что ее площадь и периметр равны 18.

2) Допустим, $h = k(m^2 - n^2)$, $b = 2kmn$, $c = k(m^2 + n^2)$. Тогда площадь трапеции составляет

$$k(m^2 - n^2) \cdot \frac{2a + 2kmn}{2} = k(m^2 - n^2)a + k^2mn(m^2 - n^2),$$

периметр ее равен

$$2a + 2kmn + k(m^2 - n^2) + k(m^2 + n^2) = 2a + 2km(m + n).$$

Имеем

$$k(m^2 - n^2)a + k^2mn(m^2 - n^2) = 2a + 2km(m + n).$$

Дальнейшие рассуждения аналогичны первому случаю. Так как k , m , n – натуральные, причем $m \geq 2$, то первое слагаемое левой части больше первого слагаемого правой части. Следовательно, второе слагаемое левой части должно быть меньше второго слагаемого правой части, т.е.

$$k^2mn(m^2 - n^2) < 2km(m + n).$$

Да ведь это точно такое же неравенство, что и выше! Поэтому вывод тот же: $k = n = 1$, и $m = 2$. Подставив эти значения в исходное уравнение, получаем

$$1 \cdot (2^2 - 1^2) \cdot a + 1^2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (2^2 - 1^2) = 2a + 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot (2 + 1),$$

$$\text{и } a = 6, \quad h = 1 \cdot (2^2 - 1^2) = 3, \quad b = 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 4,$$

$$c = 1 \cdot (2^2 + 1^2) = 5.$$

Таким образом, вторая совершенная прямоугольная трапеция имеет основания 6 и $6 + 4 = 10$ и высоту 3. Ее площадь и периметр равны 24.

Не составляет труда, используя аналогичный подход, найти и все совершенные равнобедренные трапеции. Их оказывается тоже две. У одной основания равны 2 и 8, высота 4, а площадь и периметр 20. У второй основания равны 6 и 14, высота 3, а площадь и периметр 30.

Итак, есть две совершенные прямоугольные трапеции и столько же равнобедренных. Прямо скажем, негусто – ожидалось более «богатые» результаты. Что ж, тем ценнее каждый экземпляр!

Как уже отмечалось, исследование произвольных четырехугольников вряд ли даст «симпатичные» результаты – и без того ясно, что их очень много. Поэтому имеет смысл исследовать такой частный их случай, как *вписанные* и *описанные* четырехугольники. Но как это сделать?..

Вот собственно, и все, что на данный момент удалось выяснить о совершенных многоугольниках. Остальное *покрыто неизвестным мраком*, по выражению незабвенного деда Щукаря. Поэтому, как часто бывает в подобных случаях, уповаем на читателей. Помогите! Решите задачу хотя бы для самых «заманчивых» фигур: произвольных треугольников и вписанных (а также описанных) четырехугольников. Ибо душа стремится к совершенству, коему, как известно, нет предела...

Вниманию наших читателей

В Приложении к журналу «Квант» № 2 / 2008 – в книге «Исаак Константинович Кикоин в жизни и в «Кванте» – допущена досадная опечатка. В статье В.И.Ожогина «Кикоин как множество...» в рассказе Кикоина под номером 21 (см. с. 87) вместо слов «математик Коши» должно быть «математик Кобе».