4. Черная дыра и космическое фоновое излучение

Пусть черная дыра поглощает космическое фоновое излучение. Такое излучение, соответствующее излучению черного тела с температурой $\theta_ф$, заполняет всю вселенную. Объект, площадь поверхности которого A, в единицу времени поглощает энергию, равную $\sigma\theta_ф^4 A$. Поэтому черная дыра теряет энергию в виде излучения Хокинга и получает энергию в виде космического фонового излучения.

4.1. Выразите скорость изменения массы черной дыры через массу черной дыры, температуру космического фонового излучения и фундаментальные постоянные. (0,8 б.)

4.2. При достижении черной дырой определенной массы m^* скорость изменения ее массы окажется равной нулю. Найдите m^* и выразите ее через $\theta_ф$ и фундаментальные постоянные. (0,4 б.)

4.3. Используйте предыдущий ответ, для того чтобы заменить $\theta_ф$ в вашем ответе в части 4.1, и выразите скорость изменения массы черной дыры через m, m^* и фундаментальные постоянные. (0,2 б.)

4.4. Найдите температуру Хокинга черной дыры, находящейся в состоянии термодинамического равновесия с космическим фоновым излучениям. (0,4 б.)

4.5. Является ли данное равновесие устойчивым или нет? Почему? (Обоснуйте свой ответ математически.) (0,2 б.)

Публикацию подготовили С.Козел, В.Слободянин

КОЛЛЕКЦИЯ ГОЛОВОЛОМОК

Браслет–головоломка

(Начало см. на 4-й с. обложки)

Известно, что женщины разгадывают некоторые типы головоломок, например техно-психологические, лучше, чем мужчины. Это правило распространяется и на изобретение головоломок, отличающихся практичностью. Так, американка Марти Райс придумала браслет, который одновременно служит украшением и содержит в себе задачу-головоломку.

Этот браслоет нетрудно изготовить своими руками. Он состоит из замкнутой в кольцо шляпной резинки и нанизанных на нее шести одинаковых элементов в форме октаэдров (восьмигранников). Головоломка заключается в том, чтобы превратить браслет в выпуклый многогранник так, чтобы резинка прочно удерживала многогранник в собранном состоянии.

Скажем сразу, что единственный выпуклый многогранник, в который удается сложить детали головоломки, называется «ромбододекаэдр». Его грани – ромбы, а граней – 12. В классификации многогранников он относится к так называемым каталановым телам.

Разобравшись с формой собранной головоломки, перейдем к ее деталям. Они представляют собой октаэдры. Каждый из них состоит из двух одинаковых пирамидок, склеенных основаниями. Пирамидки специфические – их высота равна половине стороны квадратного основания. На соотношении размеров пирамидок (и соответственно, октаэдров) «держится» не только вся конструкция необычного женского украшения, но и способ его изготовления в домашних условиях. Это станет понятно, когда вы начнете делать ее своими руками.

Детали головоломки можно вырезать из деревянного бруска квадратного сечения. В этом случае вам придется рассчитать и точно соблюсти углы и размеры граней. Есть другой способ – «математический». Он основан на том, что из шести равных пирамидок с квадратными основаниями можно сложить куб, если высота пирамидок равна половине стороны основания. Следовательно, взяв деревянный кубик и распилив его по диагоналям сторон, вы получите шесть пирамидок, из которых можно склеить три октаэдра, – половина головоломки готова.

Теоретически для одного браслета достаточно двух кубиков, но в процессе изготовления некоторые пирамидки окажутся распиленными на четыре части и их придется склеивать. Поэтому проще взять три кубика, разрезать каждый на четыре трехгранные призмы и уже из них выпилить пирамидки.

Головоломка достаточно трудна в решении, но вам помогут рисунки, представленные на четвертой странице обложки.

А.Калинин

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

КМШ

ЗАДАЧИ

(см. «Квант» №1)

1. Вначале разложим монеты на две кучки: 8 монет и 4 монеты. За первое взвешивание узнаем, сколько тяжелых монет в большей кучке. Второе взвешивание будет зависеть от ответа на этот вопрос. Рассмотрим возможные варианты.

1) В большей кучке 6 тяжелых монет (значит, в меньшей кучке все монеты легкие). Вторым взвешиванием определим, сколько тяжелых монет среди произвольных двух монет большей кучки. Если 0, то одна из этих двух монет и любая одна монета из оставшихся шести монет большей кучки – искомые, если 1, то эти две монеты – искомые, а если 2, то искомыми являются любая из этих двух монет и любая монета из меньшей кучки.

2) В большей кучке 5, 4 или 3 тяжелые монеты, соответственно, в меньшей кучке 1, 2 или 3 тяжелые монеты. Для второго взвешивания возьмем любые две монеты из меньшей кучки. Несложно определить, как по результатам второго взвешивания найти нужные две монеты из меньшей кучки.

3) В большей кучке 2 тяжелые монеты (соответственно, в меньшей кучке 4 тяжелые монеты). Для второго взвешивания возьмем 6 монет из большей кучки. Если среди них 0 тяжелых монет, то годится любая из них вместе с любой монетой из меньшей кучки, если 1, то подойдут оставшиеся две монеты из большей кучки, а если 2, то искомыми монетами являются любая монета из оставшихся двух монет большей кучки и любая монета из меньшей кучки.

2. Знак третьей разности отрицателен.

Пусть три числа x, y, z таковы, что $xy - (x + y) < 0$, $yz - (y + z) > 0$. Запишем исходные условия так:

$(x-1)(y-1)-1<0$, $(y-1)(z-1)-1>0$.
Поскольку числа x, y натуральные, то из первого условия следует, что либо $x=1$, либо $y=1$. Из второго же следует, что $y>1$. Значит, $x=1$. Поэтому $(x-1)(z-1)-1<0$, т.е. $xz-(x+z)<0$.

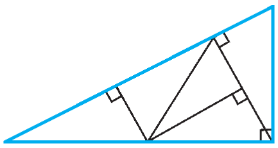

Рис. 1

3. См. рис.1, на котором указано разбиение исходного треугольника на 5 равных прямоугольных треугольников.

4. *Ответ*: $x=1$, $y=1$. Так как левая часть делится на 3, то в ней четное число слагаемых, т.е. $x=2n-1$, где n – некоторое натуральное число. Перепишем исходное равенство так:

$$(1+2)\left(1+2^2+2^4+\ldots+2^{2n-2}\right)=3^y,$$

откуда $1+2^2+\ldots+2^{2n-2}=3^{y-1}$. Если $y-1>0$, то левая часть нового равенства делится на 3, значит, и число слагаемых слева делится на 3. В таком случае левая часть раскладывается на два множителя, один из которых равен $1+2^2+2^4$. Это число должно быть натуральной степенью тройки – противоречие. Следовательно, $y=1$, но тогда и $x=1$.

5. *Ответ*: 7 человек.
Из первых заявлений следует, что никакие два рыцаря и никакие три лжеца не могли сидеть подряд. Значит, рыцари составляли не более половины и не менее одной трети от общего числа участников застолья. Таким образом, рыцарей было 7, 8 или 9 человек.
Заявления оставшихся за столом после ухода отщепенцев возможны в двух случаях:
1) все они рыцари (тогда рыцарем был и последний из ушедших);
2) все они лжецы (тогда последний из ушедших был лжецом).
Заявления отщепенцев также возможны в двух ситуациях:
1) все они лжецы;
2) лжецы сидели по одному, а рыцари по двое (т.е. рыцарей среди отщепенцев было в два раза больше, чем лжецов).
Допустим, на своих местах остались сидеть только рыцари. Тогда последний из ушедших тоже был рыцарем. Значит, среди ушедших должно было быть две трети рыцарей. Но это противоречит тому, что их изначально было менее половины. Следовательно, на своих местах остались сидеть только лжецы, а среди ушедших было ровно вдвое больше рыцарей, чем лжецов. А это возможно лишь в том случае, когда изначально рыцарей было 8. Таким образом, ушли все 8 рыцарей и 4 лжеца, а на своих местах остались сидеть 7 лжецов.

КОНКУРС «МАТЕМАТИКА 6–8»

(см. «Квант» № 5 за 2007 г.)

6. Можно. Вот требуемое распределение (буквой М обозначен мальчик, буквой Д – девочка, каждый ряд следует замкнуть в круг):

М М М М М М М М Д Д Д Д Д Д Д Д
М М М М Д Д Д Д М М М М Д Д Д Д
М М Д Д М М Д Д М М Д Д М М Д Д
М Д М Д М Д М Д М Д М Д М Д М Д

7. Нет. Предположим, что существуют такие целые числа x и y, что $(x-1)^2+x^2+(x+1)^2=y^3$, или $3x^2+2=y^3$. Поскольку квадрат любого целого числа можно представить в виде $3k$ или $3k+1$, где k – целое, то имеет место равенство $9l+2=y^3$ или $9l+5=y^3$, где l – целое. Значит, y^3 при делении на 9 должно давать остаток 2 или 5, но это невозможно.

8. При пересечении двух полос одинаковой ширины образуется параллелограмм, причем обе его высоты одинаковы. А так как площадь параллелограмма есть произведение стороны на высоту, то отсюда следует, что и все стороны параллелограмма одинаковы. Следовательно, этот четырехугольник – ромб (рис.2). Доказательства всех утверждений построены на том, что диагонали ромба являются биссектрисами его углов.

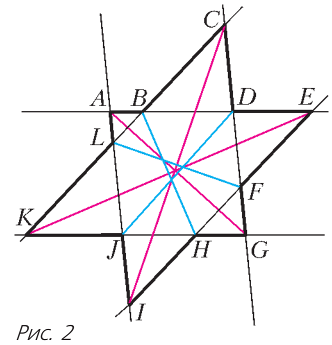

Рис. 2

а) Здесь надо доказать, что три красных отрезка пересекаются в одной точке. В ромбе $ADGJ$ AG – биссектриса $\angle IAE$. Аналогично, EK – биссектриса $\angle AEI$ и IC – биссектриса $\angle EIA$. Таким образом, отрезки AG, EK и IC – биссектрисы внутренних углов треугольника AEI, поэтому они пересекаются в одной точке.
б, в, г) Здесь надо доказать, что каждый красный отрезок пересекается в одной точке с двумя синими отрезками. Доказательство совершенно аналогично для каждого случая, поэтому выполним доказательство на примере пункта б).
Опять же, рассматривая получившиеся ромбы, мы получаем, что AG – биссектриса $\angle IAE$, а также LF – биссектриса $\angle BLI$ и BH – биссектриса $\angle LBE$. Таким образом, отрезки AG, LF и BH – биссектрисы одного внутреннего и двух внешних углов треугольника ALB, поэтому они пересекаются в одной точке.

9. Пусть $a_1<a_2<\ldots<a_{50}$ – красные числа, $b_1<b_2<\ldots<b_{50}$ – синие числа. Тогда $b_1=101-a_{50}$, $b_2=101-a_{49}, \ldots$ $\ldots$, $b_{50}=101-a_1$. Последовательно используя эти равенства, проверяем верность двух утверждений:

$$a_1^2+a_2^2+\ldots+a_{50}^2=b_1^2+b_2^2+\cdots+b_{50}^2,$$
$$a_1+2a_2+\ldots+50a_{50}=b_1+2b_2+\ldots 50b_{50},$$

после чего легко проверяется верность требуемого равенства:

$$(a_1-1)^2+(a_2-2)^2+\ldots+(a_{50}-50)^2=$$
$$=(b_1-1)^2+(b_2-2)^2+\ldots+(b_{50}-50)^2,$$

ибо a_i-i – это вес a_i, b_i-i – это вес b_i.

10. а) Да. Например, в таблице на рисунке 3 сумма чисел в любом квадрате 3×3 равна −2,5, а в любом квадрате 5×5 она равна 1.

−1	−1	−1	−1	−1	−1
−1	5,5	−1	−1	5,5	−1
−1	−1	−1	−1	−1	−1
−1	−1	−1	−1	−1	−1
−1	5,5	−1	−1	5,5	−1
−1	−1	−1	−1	−1	−1

Рис. 3

1	2	3	3	3	2	1
2	4	6	6	6	4	2
3	6	9	9	9	6	3
3	6	9	9	9	6	3
3	6	9	9	9	6	3
2	4	6	6	6	4	2
1	2	3	3	3	2	1

Рис. 4

б) Нет. В квадрате 7×7 рассмотрим всевозможные суммы чисел, принадлежащие квадратам 3×3. Поскольку сумма чисел в каждом квадрате 3×3 отрицательная, то и сумма S_1 всех таких сумм является отрицательным числом. Обратим внимание, что некоторые числа квадрата 7×7 являются общими для разных квадратов. А значит, повторяются в разных рассматриваемых суммах чисел квадратов 3×3. Напишем в каждой клетке квадрата 7×7 число, равное количеству таких повторений – получим таблицу изображенную на рисунке 4.
Аналогично, в квадрате 7×7 рассмотрим всевозможные суммы чисел, принадлежащие квадратам 5×5. Поскольку сумма чисел в каждом квадрате 5×5 положительная, то и сумма S_2

всех таких сумм является положительным числом. Некоторые числа квадрата 7×7 являются общими для разных квадратов, а значит, повторяются в разных рассматриваемых суммах чисел квадратов 5×5. Напишем в каждой клетке квадрата 7×7 число, равное количеству таких повторений – получим таблицу, полностью совпадающую с предыдущей таблицей.

Это приводит к противоречию, так как из совпадения таблиц следует равенство сумм S_2 и S_1, чего не может быть, поскольку эти суммы имеют разные знаки.

ДВЕ ЗНАМЕНИТЫЕ ФОРМУЛЫ

1. Допустим, точки $A(-n;0)$, $n\in \boldsymbol{N}$, $B(0;1)$, $C(1;1)$ – вершины примитивного треугольника ABC. Пусть B' – точка, симметричная точке B относительно точки A. Треугольник $AB'C$ примитивен, а длины всех его сторон больше n.

2. Пусть наибольший угол многоугольника находится при вершине A. Если этот угол не превосходит 180°, то многоугольник выпуклый и любая его диагональ будет внутренней. Если он больше 180°, то лампочка, помещенная в вершину A, освещает не менее двух отрезков на сторонах многоугольника. Поворачивая луч вокруг точки A от одного освещенного отрезка к другому, мы неизбежно натолкнемся на одну из вершин многоугольника.

3. *Указание.* Если все вершины многоугольника имеют рациональные координаты, то можно найти его гомотетичную копию, вершины которой имеют целые координаты.

4. *Указание.* Проверьте сначала равенства $F = N$, $V = N_i + N_e$, $2E = 3N + N_e$.

5. Проводя внутренние диагонали в каждом из многоугольников, мы получим новую карту, состоящую только из треугольников. Для новой карты величина $V - E + F$ (эйлерова характеристика) равна аналогичной величине для исходной карты (при проведении одной диагонали число ребер и число многоугольников увеличивается на единицу). Для доказательства формулы Эйлера теперь остается заметить, что, «отрезая» один треугольник за другим, мы будем получать карты с той же характеристикой. При этом каждый раз следует выбирать треугольник, который граничит с внешностью карты и удаление которого не приводит к распаду карты на части (докажите, что такой треугольник всегда существует). При «отрезании» треугольника удаляется одна, две или три стороны треугольника. В каждом из трех случаев эйлерова характеристика сохраняется. Для одного треугольника формула Эйлера, очевидно, справедлива, и, тем самым, она справедлива и для произвольной карты.

6. Так можно получить любой примитивный треугольник (с точностью до параллельного переноса). Для доказательства достаточно проверить, что любой примитивный треугольник можно после нескольких прыжков перевести в треугольник, образованный какими-то тремя вершинами единичного квадрата. Действительно, отразив одну вершину относительно вершины тупого угла (а примитивный треугольник не может быть остроугольным), мы сможем получить треугольник, в котором максимальная сторона имеет меньшую длину.

7. Пусть M – узел решетки, лежащий внутри данного треугольника ABC. Отрезки MA, MB, MC разбивают данный треугольник на три примитивных и, тем самым, равновеликих. Отсюда легко заключить, что M – точка пересечения медиан треугольника ABC.

8. Пусть A, B, C, D, E – пять последовательных вершин выпуклого многоугольника. По условию треугольники ABE, ABD и ABC – примитивные. Поэтому точки E, D и C одинаково удалены от прямой AB и, следовательно, лежат на одной прямой, параллельной AB. Противоречие.

9. *Указание.* В качестве точки C можно взять любую из точек решетки, находящихся на наименьшем расстоянии от прямой AB. Это расстояние будет равно $1/d$, так как площадь любого примитивного треугольника равна $1/2$.

10. *Указание*. При перепрыгивании кузнечик из упражнения 6 остается в пределах одной и той же подрешетки.

11. $n = 8$, и условию задачи удовлетворяют, например, целочисленные точки $(0;0)$, $(0;3)$, $(3;1)$, $(3;4)$, $(1;0)$, $(4;3)$, $(1;1)$, $(7;4)$. *Указание.* Заметим, что если $(x_1;y_1)$, $(x_2;y_2)$, $(x_3;y_3)$ – какие-то три точки на плоскости, то центр тяжести треугольника с вершинами в этих точках имеет координаты $\left((x_1+x_2+x_3)/3;(y_1+y_2+y_3)/3\right)$.

Предположим, что существует 9 точек, удовлетворяющих условию задачи. Разобьем множество всех целочисленных точек на непересекающиеся классы, к каждому из которых отнесем точки вида $(3k+r_1;3m+r_2)$, где k, m, r_1, r_2 – целые числа и $0\le r_1$, $r_2\le 2$. По предположению, ни в одном из классов не содержится трех точек из 9 указанных. Поэтому среди этих 9 точек имеется не менее 5 точек из разных классов. Среди этих пяти точек, в свою очередь, нет трех с одним и тем же значением r_1. Поэтому в двух из этих групп содержится по две точки, а в третьей – одна.

Для получения противоречия можно выбрать точку из третьей группы и рассмотреть возможности выбора пары точек из двух других групп.

12. Ломанная проходит через 64 узла решетки и не содержит узлов внутри. Поэтому, по формуле Пика, она ограничивает многоугольник площади 31.

13. Пусть квадрат $n\times n$ накрыл m точек целочисленной решетки. Рассмотрим многоугольник M, который является выпуклой оболочкой точек, накрытых квадратом. Для него $N_i + N_e = m$. По построению, площадь многоугольника M не превосходит n^2, а его периметр не превосходит $4n$; значит, и $N_e\le 4n$. Пользуясь этими оценками и формулой Пика, находим $m = N_i + N_e = [M] + N_e/2 + 1 \le n^2 + 2n + 1 \le (n+1)^2$.

14. *Указание.* По формуле Пика площадь искомого параллелограмма равна $1/(mn+1)$ в первом случае, и $1/(mn-1)$ во втором.

15. *Указание.* По формуле Пика площадь заштрихованного треугольника в 7 раз меньше площади исходного треугольника (изобразите соответствующую решетку).

16. *Указание.* Нарисуйте данный квадрат на целочисленной решетке так, чтобы его вершины имели координаты (0;0), (0;12), (12;0), (12;12), и примените формулу Пика.

17. Предположим, что ломаная внутри многоугольника проходит через k узлов решетки. Тогда $N_i = N_{i,1} + N_{i,2} + k$, $N_e = N_{e,1} + N_{e,2} - 2k - 2$. Подставляя эти равенства в формулу $f(P) = f(P_1) + f(P_2)$, получаем $c = ak - 2b(k+1)$. Так как k может быть любым (хотя достаточно предъявить примеры, когда $k = 0$ и $k = 1$), то $a = 2b$ и $c = -2b$.

18. *Указание.* С помощью формулы Пика утверждение задачи сводится к проверке равенства $N_e(2P) = 2N_e(P)$.

19. *Указание.* Рассмотрите точки вида $(n;n^2)$.

ИНСТИТУТ КРИПТОГРАФИИ, СВЯЗИ И ИНФОРМАТИКИ АКАДЕМИИ ФСБ РФ

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. 10 км/ч, 30 км/ч. **2.** $\left(\frac{2}{3};\frac{5+\sqrt{34}}{9}\right]$. **3.** $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$; $n\in \boldsymbol{Z}$.

4. $[1;2)\cup\left(2+\sqrt{3};6\right]$. **5.** $\pi - \arccos\frac{1}{\sqrt{145}}$. **6.** $(3;4)$.

Вариант 2

1. $-\frac{3}{\sqrt{10}}$. **2.** $\frac{1}{2} \le x < \frac{2}{3}$. **3.** $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ \ \pm\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}+\pi n,\ \ n \in \mathbf{Z}$.

4. 10%. **5.** $R^2 \sin 2\beta \cos^2\beta$. **6.** $1+\frac{2}{\sqrt{3}}$, 1.

Вариант 3

1. 5. **2.** 3 часа.

3. Пересечение четырехугольника и пятиугольника будет выпуклым многоугольником, каждая сторона которого лежит на одной из сторон исходных многоугольников. При этом на каждой из сторон исходных многоугольников может лежать не более одной стороны многоугольника-пересечения. Значит, пересечение четырехугольника и пятиугольника может иметь не более девяти сторон.

4. $\frac{1}{3}+\frac{\pi}{6}-\frac{2\pi}{3}$; $\frac{1}{3}+\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}$; $\frac{1}{3}+\frac{\pi}{6}$; $1-\frac{\pi}{2}$.

5. $\sqrt{4R^2-a^2}+4\sqrt{R^2+2a^2}$. **6.** $\left(\frac{1+\log_4 3}{2}; \frac{1-\log_4 3}{2}\right)$.

7. *Указание.* Если число делится на 121, то оно делится и на 11. Из равенства

$$A_n = n^2+5n+53 = (n+8)(n-3)+77$$

следует, что если A_n делится на 11, то либо $n + 8 = 11k$, либо $n - 3 = 11l$, где k и l – некоторые целые числа. Подставляя $n = -8 + 11k$ в выражение для A_n, получим

$$A_n = 121k(k-1)+77.$$

Осталось заметить, что 77 не делится на 121. Аналогично рассматривается второй случай.

ФИЗИКА

Вариант 1

1. $v = \sqrt{gR\operatorname{tg}\alpha} \approx 31{,}6$ м/с. **2.** $v = \frac{(m_1-m_2)v_1}{m_1+m_2} = 0{,}4$ м/с.

3. Уменьшится в $\frac{\varepsilon}{2} = 1{,}5$ раза. **4.** $\Delta U = \frac{3}{2}A = 6930$ Дж.

5. $I = \frac{NS}{R}\frac{\Delta B}{\Delta t} = 5$ мкА.

Вариант 2

1. $l = gR_3^2\left(\frac{1}{v_2^2}-\frac{1}{v_1^2}\right) \approx 360$ км.

2. $p = Mv\operatorname{tg}\alpha \approx 578$ кг·м/с. **3.** $x = \frac{l}{n^3} = 0{,}002$ м.

4. $t = \frac{t_1+2t_2}{3} = 60$ °С. **5.** $F = IB\sqrt{L_1^2+(L-L_1)^2} = 2\cdot 10^{-2}$ Н.

Вариант 3

1. $a_с = \frac{v_с v_л \sin\alpha}{L} \approx 0{,}90$ м/с^2. **2.** $a = \frac{g(m_1-m_2)}{m_1+m_2} = 2$ м/с^2.

3. $\Delta h_1 = \frac{\rho_в \Delta h}{\rho_с} = 10$ мм. **4.** $\Delta E = 12mv^2$.

5. $T = \frac{(C_V+R)T_0}{C_V} = \frac{5}{3}T_0$. **6.** $I_0 = \frac{I}{89} = 0{,}1$ А.

7. $B = \frac{\mu mg}{Il} \approx 0{,}067$ Тл. **8.** $F = \frac{LR}{r_2-r_1} = 18$ см.

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЭЛЕКТРОННОЙ ТЕХНИКИ

ФИЗИКА

Вариант 1

1. $a = \frac{s_1-s_2}{\tau^2} = 4$ м/с^2. **2.** $k = \pi r^2\rho g \approx 201$ Н/м.

3. $v = \sqrt{2gl\frac{(M/m)-1}{(M/m)+1}} = \sqrt{gl} = 2$ м/с. **4.** $\frac{v_в}{v_к} = \sqrt{\frac{M_в}{M_к}} = 4$.

5. $Q = \frac{5}{2}pV(n-1) = 25$ кДж.

6. $C = \frac{q\sqrt{n}}{U} = 1$ нФ. **7.** $r = P_к\left(\frac{U}{P}\right)^2 \approx 0{,}22$ Ом.

8. Увеличилась в $\frac{1}{\sin\alpha} = \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1{,}15$ раза.

9. $H = \left(\frac{L}{l}-1\right)h \approx 15$ м. **10.** $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{A_1}{A_2} \approx 2$.

Вариант 2

1. $v_0 = \sqrt{\frac{gL}{2\sin\alpha}}\cos\alpha$.

2. $F = \frac{\mu mg}{2(1-\mu\operatorname{ctg}\alpha)}$; если $\mu \ge \operatorname{tg}\alpha$, то затянуть доску под балку невозможно.

3. $v_0 = \sqrt{2\left(\frac{E_к}{m}+gh\right)} = 20$ м/с. **4.** $\rho = \frac{2M}{V} = 0{,}1$ кг/м^3.

5. $p_2 = p_1\frac{V_3-V_1}{V_3-V_2}$. **6.** $\frac{T_{12}}{T_{23}} = 3$. **7.** $r = \frac{U_1R}{U-U_1} = 90$ кОм.

8. $\varepsilon = \frac{LdI_m^2}{\varepsilon_0 SU_m^2}$. **9.** $F = \frac{\Gamma}{\Gamma+1}d = 15$ см.

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. Н.Э.БАУМАНА

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. 200 м. **2.** $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+n\pi,\ n \in \mathbf{Z}$; $-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}$.

3. $\frac{1}{4}$. **4.** $[0;1)\cup\left(1;\frac{25}{9}\right)$. **5.** 2.

6. $x = 4\frac{2a-1}{a}$ при $a \in \left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$; $x = -1$ при $a = 0$;

$x = -\left(\frac{-2+2\sqrt{1+a-2a^2}}{a}\right)^2$ при $a \in \left(0;\frac{1}{2}\right]$. **7.** $\frac{6}{\sqrt{5}}$.

Вариант 2

1. 18 дней, 24 дня. **2.** $\frac{5\pi}{8}, \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{8}$. **3.** 4.

4. $(0;2)\cup(4;6)$. **5.** $12\sqrt{6}$.

6. $x_{1,2} = \frac{1-a\pm\sqrt{3-2a-a^2}}{2}$ при $a \in (-3;-\sqrt{2})$;

$x_1 = \frac{1-a+\sqrt{3-2a-a^2}}{2}$, $x_2 = -1-\sqrt{2-a^2}$ при $a \in (-1;1]$;

$x_{1,2} = -1\pm\sqrt{2-a^2}$ при $a \in (1;\sqrt{2})$. **7.** $\sqrt{6}$.

ФИЗИКА

Вариант 1

1. $I = \frac{\mathscr{E}_1-\mathscr{E}_2}{R+r_1+r_2}$; $[I]$ = А, $[\mathscr{E}]$ = В, $[R]$ = Ом.

2. $A = \nu RT_1\frac{\alpha-1}{\alpha} = 2216$ Дж. **3.** $\frac{R_1}{R_2} = \frac{m_1}{m_2} = 1840$.

4. $k = \frac{d}{\lambda} = 3$.

5. $\mu_2 = \frac{\cos\alpha - 2\mu_1\sin\alpha}{\mu_1\cos\alpha} = 0{,}54$. *Указание*: запишите условия равновесия стержня для сил в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси и для моментов сил относительно точки опоры о горизонтальную плоскость.

6. $L = \frac{3q^2}{4\pi\varepsilon_0\mu mgL_0}$. *Указание.* Воспользуйтесь законом сохранения энергии.

7. $T = 5mg$. *Указание.* Система совершает гармонические колебания; сила натяжения нити максимальна, когда груз массой m_2 находится в крайнем нижнем положении.

Вариант 2

1. $I = U\frac{R_1 + R_2}{R_1R_2}$; $[I]$ = А, $[U]$ = В, $[R]$ = Ом. **2.** $p = F_0t_0$.

3. См. рис.5; газ получает тепло извне на участках *1–2* и *2–3*.

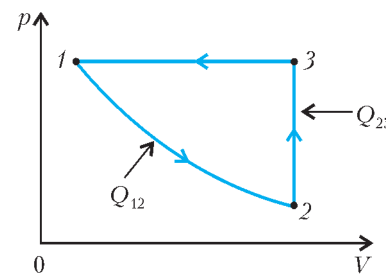

Рис. 5

4. См. рис.6. **5.** $m = \frac{2}{3}\rho\pi R^2H$. **6.** $A = \frac{2\mu mg}{k}$.

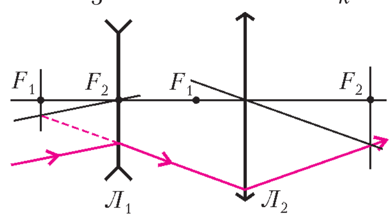

Рис. 6

7. $\varphi_A - \varphi_C = \frac{BI}{neh}$ (здесь e – заряд электрона).

МОСКОВСКИЙ ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. Две ветви гиперболы (рис.7) имеют вертикальную асимптоту $x = -1/2$ и горизонтальную $y = 3/2$. Точки пересечения с осями x и y равны $2/3$ и -2 соответственно.

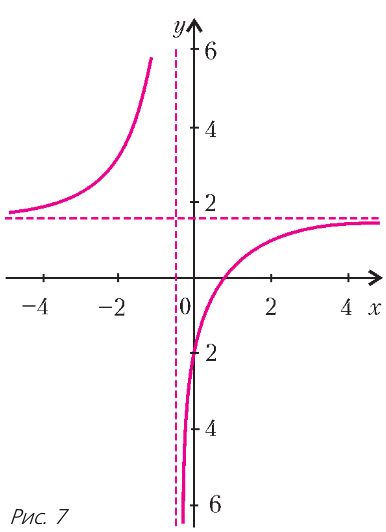

Рис. 7

2. $f'(x) = 9x^2 - 24x^3 - \frac{1}{x\ln 10} - \frac{x}{\sqrt{9 - x^2}}$,

$x \in (0;3)$.

3. $y_{\min} = -1$, $y_{\max} = \frac{5}{4}$. *Указание:* наибольшие и наименьшие значения исходной функции следует искать либо в граничных точках промежутка $x \in [-\pi; 2\pi/3]$, либо во внутренних точках этого промежутка, в которых обращается в ноль производная.

4. В случае если $a \le -2$, пересечение пусто (рис.8,*а*). Поэтому решение существует лишь при $a(-2;0)$ (рис.8,*б*),

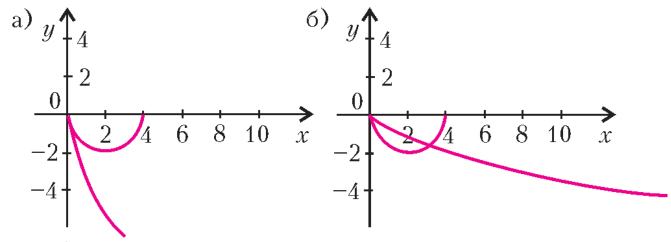

Рис. 8

это область между прямой $y = 0$ (сверху), частью параболы (снизу – слева) и дугой окружности (снизу – справа). Площадь этой фигуры считаем как сумму половины площади кругового сегмента (ограничена прямой $y = 0$, перпендикуляром на ось абсцисс, проведенным из точки пересечения полуокружности и параболы, и дугой окружности) и площади фигуры, заключенной между тем же перпендикуляром, прямой $y = 0$ и параболой:

$$S = 2\left(\arccos\frac{2-a^2}{2} - \frac{2-a^2}{2}\sqrt{1-\left(\frac{2-a^2}{2}\right)^2}\right) - \frac{2a\left(4-a^2\right)^{3/2}}{3}.$$

5. $y = \frac{2}{x_0^2}x - \frac{4}{x_0}$, где $x_0 = -2 \pm \sqrt{10}$.

6. Стороны: $\frac{36}{5}$, 6, $6\frac{3\sqrt{3}-4}{5}$; углы: $\frac{\pi}{6}$, $\pi - \arcsin\frac{3}{5}$, $\arcsin\frac{3}{5} - \frac{\pi}{6}$.

Вариант 2

1. См. рис.9 (вертикальная асимптота $x = -2$); точки пересечения с осями x и y: $-\frac{5}{3}$ и $\log_3 6$.

2. $f'(x) = -9x^2 - 30x^4 + \frac{1}{x\ln 3}$ при $dx > 0$.

3. $y_{\min} = -3\pi$, $y_{\max} = 2\pi$.

4. $\frac{16}{3}$. **5.** $\frac{-41 \pm 3\sqrt{30}}{17}$.

6. 16; $2\sqrt{\frac{21}{5}}$.

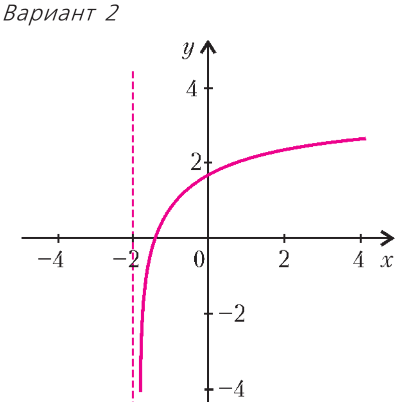

Рис. 9

ФИЗИКА

Вариант 1

1. $\Delta l = \frac{2v}{3}\sqrt{\frac{2m}{k}}$. **2.** $h = \frac{2h_1h_2}{h_1 + h_2}$.

3. $k = \frac{q^2\left(4l_1^2 - l_2^2\right)}{4\pi\varepsilon_0 l_1^2 l_2^2\left(l_2 - l_1\right)}$. **4.** $x = \frac{l\left(T_0 - T_1\right)}{(n+1)\left(T_1 + nT_0\right)}$.

5. $t = \frac{3l_0^2}{2vR}$.

Вариант 2

1. Ускорение направлено вертикально вниз и равно $a = g - \frac{F}{m} = 5$ м/с^2.

2. $\Delta x = \dfrac{ad}{d-F} = 3$ см. **3.** $Q = \dfrac{3}{2}\nu RT\left(n^2-1\right)$.

4. $v_1 = \sqrt{u^2 - v^2\cos^2\alpha} - v\sin\alpha$. **5.** $L_2 = \dfrac{L}{2} + L_1$.

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ФИЗИКА

Вариант 1

1. $R = \dfrac{I_1 r}{I_2 - I_1}$. **2.** $qE = qvB,\ \dfrac{mv^2}{R} = qvB,\ E = \dfrac{qB^2R}{m}$.

3. Пробирка начнет тонуть, когда ее верхний край сравняется с уровнем жидкости, при этом объем вытесненной жидкости будет равен объему воздуха в пробирке. В этот момент пробирка находится в равновесии, и сила Архимеда равна силе тяжести пробирки: $\rho gSx = mg$, где x – высота столбика жидкости. Когда пробирка начнет всплывать со дна, также имеет место равновесие сил: сила Архимеда снова равна силе тяжести пробирки. Следовательно, объемы воздуха в эти два момента равны. Из уравнения состояния $pV = \nu RT$ следует, что отношение температур равно отношению давлений. Но $p_1 = p_0 + \rho gx$, а $p_2 = p_0 + \rho g(H - L + x)$. Тогда

$$T_2 = T_1\frac{\left(p_0 + \rho g(H-L)\right)S + mg}{p_0S + mg}.$$

4. Когда один полоз наедет на выступ, сани станут поворачиваться вокруг другого полоза. Незначительная высота выступа сама по себе не приведет к перевороту, но при наезде на выступ появится вертикальная скорость «вращения» $u = vh/L$, где v – искомая скорость саней. Кинетическую энергию вращения можно оценить как $mu^2/8$ (замена массы саней точечной массой, находящейся посередине между полозьями). Если H – максимальная высота подъема центра масс при повороте, то условие переворота можно записать в виде $mu^2/8 = mgH$. Высота H в нашей модели – это половина расстояния между полозьями, таким образом,

$$v = \frac{L}{h}\sqrt{8gH}.$$

При $H = 0{,}3$ м $v \approx 13$ м/с ≈ 37 км/ч.

5. Свет от источника, проходя через два отверстия пластины, образует на экране два светлых пятна. От второго источника также образуется два пятна. Если центры отверстий и источники находятся в одной плоскости, то центры четырех пятен лежат на прямой – на пересечении этой плоскости и экрана. При определенном положении экрана центры ближайших пятен совпадут. Тогда мы видим три пятна, центральное пятно – двойной яркости. При повороте пластины на $90°$ центры пятен от одного источника лежат на отрезке, параллельном оси, проходящей через центры отверстий. Центры пятен от одного отверстия и двух источников образуют отрезок, параллельный отрезку, соединяющему источники. Таким образом, в промежуточном случае конфигурация пятен образует параллелограмм.

Вариант 2

1. $h = H\sin^2\alpha$.

2. Луч, проходящий через центр линзы, не меняет направления. Поэтому получаем

$$d = \frac{fh}{H-h},\ \frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F},\ F = \frac{fh}{H}.$$

Если взять луч, идущий параллельно оси, то он пройдет через фокус и изображение. Пересечение этого луча с главной оптической осью дает положение фокуса. Тогда из подобия треугольников сразу получаем ответ.

3. Чтобы расстояния между частицами были одинаковы, перемещения частиц должны соотноситься как 1 : 3. Так же тогда относятся скорости: $V = 3v$ и ускорения: $A = 3a$. Из второго закона Ньютона и выражения для кулоновских сил имеем

$$MA = \frac{kq^2}{r^2}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}\right),\ ma = \frac{kq^2}{4r^2},\ \text{откуда}\ M = \frac{49}{27}m.$$

Из закона сохранения энергии (для конечных скоростей)

$$mv^2 + MV^2 = \frac{kq^2}{r}\left(3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)$$

находим

$$v = \frac{q}{2}\sqrt{\frac{k}{rm}},\ V = \frac{3q}{2}\sqrt{\frac{k}{rm}}.$$

4. В системе отсчета спутника направления относительных скоростей молекул лежат в конусе, для угла α между образующей и осью которого $\sin\alpha = u/v$, где u – величина скорости молекул относительно Земли, а v – скорость спутника. Для спутника в форме шара $u/v = 1/2$, для околоземной орбиты $v \approx 8$ км/с, поэтому $u \approx 4$ км/с. (Или, грубее, молекулы залетают сбоку: $t = R/u,\ L \approx 2R = vt = vR/u$.) Тот же порядок скорости получается для диска или цилиндра.

5. При резком подъеме, в отличие от случая медленного подъема, вода не успевает «затекать» под дощечку, и здесь резко понижается давление. Из-за разницы между давлением под дощечкой и атмосферным давлением возникает дополнительная тормозящая сила (по сравнению с «сухой» дощечкой). Соответствующая проволочка сильнее растягивается и рвется. Можно также сказать, что резко сдвинувшаяся дощечка увлекает за собой воду (приблизительно куб, прилегающий снизу к ее поверхности), так что масса, которую надо поднимать, заметно возрастает.

Вариант 3

1. $t = \dfrac{3v}{4g}$. **2.** Сила нормального давления N одного цилиндра на другой образует угол β с дном коробки такой, что $\sin\beta = (R-r)/(R+r)$. Из равновесия правого цилиндра имеем $mg\sin\alpha = N\cos\beta$ (проекции сил вдоль дна коробки). Для левого цилиндра (проекции сил вдоль стенки) получаем $Mg\cos\alpha = N\sin\beta$. Отсюда находим

$$\frac{M}{m} = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta = \frac{(R-r)\operatorname{tg}\alpha}{2\sqrt{Rr}}.$$

3. В системе покоящейся спицы скорость бусинки можно найти из закона сохранения энергии

$$\frac{mu^2}{2} = kq^2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right).$$

В исходной системе отсчета работа равна сумме приращений кинетической и потенциальной энергии:

$$A = \left(\frac{m(v+u)^2}{2} - \frac{mv^2}{2}\right) + kq^2\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right) = mvu = vq\sqrt{2mk\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)}.$$

4. Чтобы углекислый газ стал подниматься, его плотность должна быть меньше плотности воздуха (при том же давлении):

$$\rho = \frac{\mathrm{M}p}{RT},\ \rho_0 = \frac{\mathrm{M}_0 p}{RT_0},\ \frac{T}{T_0} = \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{M}_0} \approx 1{,}5.$$

5. При медленном покачивании доски тело остается относительно нее неподвижным благодаря силе трения, если ее максимальное значение $F_{\text{тр}} = \mu mg\cos\alpha \ge m\sqrt{a^2 + (g\sin\alpha)^2}$, где a – ускорение при покачивании доски, а $mg\sin\alpha$ – «скатывающая» сила. При кратковременных ударах ускорение доски $a > F_{\text{тр}}/m = \mu g\cos\alpha$, и за счет проскальзывания тело успевает немного сползти вниз под действием «скатывающей» силы. Несмотря на большое ускорение, смещение доски вбок как в одну, так и в другую сторону мало из-за кратковременности удара. Доска практически остается на месте, малые же сползания тела по ней складываются.

РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. А.И.ГЕРЦЕНА

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. $(-1;\ 3)$. **2.** $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k$, $k\in\boldsymbol{Z}$; $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **3.** $\frac{7\sqrt{3}}{3}$. **4.** $\frac{1}{2}$; 2. **5.** $\left[\frac{\sqrt{2}}{2};1\right)\cup[4;+\infty)$. **6.** 74 или 47. **7.** $\frac{1}{9}$. **8.** $x_2=-3$, $x_3=2$, $a=0$. **9.** $\frac{S}{6}\cdot\frac{\sqrt{S\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-1\right)}}{\left(1+\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)}$.

Вариант 2

1. $(-5;-2)\cup[1;+\infty)$. **2.** $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$. **3.** $\sqrt{17}$. **4.** 2400.
5. $\left(-\infty;\log_2\left(\sqrt{2}-1\right)\right]\cup\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$. **6.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. **7.** 441 г. **8.** Нет решений при $a<0$; 2 решения при $a=0$ и $a<2$; 3 решения при $a=2$; 4 решения при $0<a<2$. **9.** $\frac{H^3}{3}\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta$.

РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. К.Э.ЦИОЛКОВСКОГО (МАТИ)

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. –8. **2.** 2. **3.** $\frac{3}{4}\pi$. **4.** 6. **5.** $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\ \ n\in\boldsymbol{Z}$. **6.** 14.
7. $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\ \ n\in\boldsymbol{Z}$. **8.** $\frac{1}{2}$. **9.** $\arccos\left(-\frac{1}{5}\right)$. **10.** $\frac{-1\pm\sqrt{65}}{2}$.

Вариант 2

1. 8. **2.** 5. **3.** $-\frac{\pi}{2}$. **4.** 8. **5.** $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n,\ \ n\in\boldsymbol{Z}$. **6.** 17.
7. $\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ \ n\in\boldsymbol{Z}$. **8.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **9.** $\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)$. **10.** $\frac{-1\pm\sqrt{73}}{4}$.

Вариант 3

1. 7. **2.** $\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$.
3. Круговое кольцо с внешним радиусом R и внутренним $\frac{R}{2}$.
4. $-\frac{1}{2}$, $-\frac{5}{2}$. **5.** 3. **6.** $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$.

ФИЗИКА

Вариант 1

1. 4). **2.** 3). **3.** 2). **4.** 2). **5.** 1). **6.** 4). **7.** 5). **8.** 5). **9.** 3). **10.** 1).

Вариант 2

1 3). **2.** 3). **3.** 1). **4.** 2). **5.** 4). **6.** 2). **7.** 4). **8.** 5). **9.** 4). **10.** 1).

Вариант 3

1. $v=\sqrt{\frac{3p}{\rho}}\approx 650$ м/с. **2.** Удержится; $F_{тр}=0{,}5$ Н.

3. $t=\frac{\lambda}{4c}=5\cdot10^{-8}$ с. **4.** $R_2=\frac{r^2}{R_1}=12{,}8$ Ом.

5. $\eta=\frac{A_{41}}{1{,}5\nu R\left(T_2-T_1\right)+2A_{41}}=0{,}24=24\%$.

6. $F_{\max}=\frac{U^2}{kZ}\approx3{,}4\cdot10^{-3}$ Н.

РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ НЕФТИ И ГАЗА ИМ. И.М.ГУБКИНА

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. 0,8. **2.** –4. **3.** –3. **4.** –3. **5.** 3. **6.** 9. **7.** 3. **8.** 30.
9. 29. *Указание.* Перепишите исходное неравенство в виде $x^6+20\sqrt{10}>ax^2$. Значение $x=0$ ему удовлетворяет при любом значении a. При $x\neq0$ разделите обе части неравенства на x^2: $\frac{x^6+20\sqrt{10}}{x^2}>a$ и рассмотрите при $x\neq0$ функцию $y=\frac{x^6+20\sqrt{10}}{x^2}$. Найдите с помощью производной ее минимум.
10. 10. **11.** 4. **12.** 16.

Вариант 2

1. 1. **2.** –2. **3.** 11. **4.** –0,4. **5.** 11. **6.** 27. **7.** 2. **8.** –5. **9.** 3. **10.** 6. **11.** 116. **12.** 3.

ФИЗИКА

Вариант 1

1. $h=20$ м. **2.** 9. **3.** $h=40$ м. **4.** 2. **5.** $C=80$ пФ. **6.** $l=900$ м. **7.** $v=6$ см/с. **8.** 17. **9.** $h=40$ см.
10. Правило моментов относительно нижнего конца палочки имеет вид (рис.10)

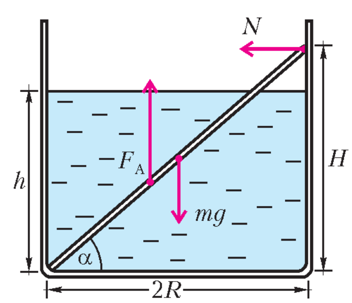

Рис. 10

$$mgR-F_A\frac{h}{2}\operatorname{ctg}\alpha-NH=0.$$

Действующая на погруженную часть палочки сила Архимеда равна

$$F_A=\rho_ж\frac{h}{H}Vg=\frac{\rho_ж}{\rho}\frac{h}{H}mg,$$

где $V=m/\rho$ – объем палочки. Получаем уравнение

$$mgR-mgR\frac{\rho_ж}{\rho}\frac{h^2}{H^2}-NH=0,$$

откуда находим искомую плотность материала палочки:

$$\rho=\frac{\rho_ж\frac{h^2}{H^2}}{1-\frac{H}{R}\frac{N}{mg}}=1200\ \text{кг/м}^3.$$

11. Чтобы пробка пришла в движение, увеличение силы давления газа на пробку должно быть равно силе F, с которой вытаскивали пробку без нагревания:

$$\left(p_2-p_1\right)S=F.$$

Конечное давление связано с начальным уравнением изохорного процесса:

$$\frac{p_2}{p_1}=\frac{T_2}{T_1}.$$

Получаем

$$T_2=T_1\left(1+\frac{F}{p_1S}\right)=490\ \text{К}=217\ ^\circ\text{C}.$$

12. Запишем второй закон Ньютона для установившегося движения перемычки (рис.11):

$$mg\sin\alpha - F_{\text{А}}\cos\alpha = 0,$$

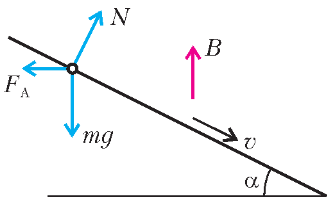

Рис. 11

где $F_{\text{А}} = IBl$ – сила Ампера. Сила тока выражается через закон Ома для полной цепи:

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R},$$

где $\mathscr{E} = Bvl\sin(90^\circ + \alpha)$ – ЭДС, возникающая в проводнике при движении в магнитном поле. Для скорости перемычки получаем

$$v = \frac{mgR\sin\alpha}{B^2l^2\cos^2\alpha} = 2\ \text{м/с}.$$

Вариант 2

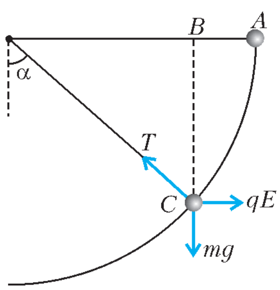

Рис. 12

1. $s = 7$ м. **2.** $a = 10\ \text{м/с}^2$. **3.** $A = 60$ Дж. **4.** $V = 500\ \text{см}^3$. **5.** 5%. **6.** $P = 92$ Вт. **7.** $W = 12$ Дж. **8.** $d = 30$ см. **9.** $F = 150$ Н.

10. Запишем второй закон Ньютона в проекции на ось, направленную вдоль нити к точке подвеса (рис.12):

$$T - mg\cos\alpha - qE\sin\alpha = m\frac{v^2}{l}.$$

Квадрат скорости можно найти из теоремы о кинетической энергии:

$$\frac{mv^2}{2} = A_{\text{эл}} + A_{\text{т}} = qE(l - l\sin\alpha) + mgl\cos\alpha.$$

При вычислении работы мы заменили реальную траекторию (дугу окружности) перемещением по линии *ABC*, опираясь на то, что работа и электростатического поля и поля тяжести не зависит от траектории. Для искомого натяжения нити получаем

$$T = 3mg\cos\alpha + qE(3\sin\alpha - 2) = 112\ \text{мН}.$$

11. $x = 80$ м.

12. В момент отрыва магнита от плиты сила реакции опоры N обращается в ноль: $F - mg - F_{\text{м}} = 0$, где $F_{\text{м}}$ – сила притяжения магнита к плите. При вертикальных колебаниях плиты уравнение движения магнита имеет вид $N - mg - F_{\text{м}} = ma_y$. Поскольку $a_y = -\omega^2A\sin\omega t$, получаем

$$N = mg + F_{\text{м}} - m\omega^2A\sin\omega t = F - m\omega^2A\sin\omega t.$$

Если $\omega < \sqrt{F/(mA)}$, то магнит все время прижат к плите ($N > 0$). Минимальная частота, при которой N обращается в ноль, равна

$$\omega = \sqrt{\frac{F}{mA}} = 40\ \text{рад/с}.$$

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. $4x - 3$. **2.** $(-1; 3)$. **3.** $\frac{11}{2}$. **4.** 20%. **5.** $[-3; 6]$. **6.** 96. **7.** 3. **8.** $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $\pi + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. **9.** –3. **10.** $b > a$. **11.** 1. **12.** 5. **13.** –7. **14.** $-\frac{1}{2}$; 1. **15.** $[2; 6]$. **16.** $\left[-\frac{1}{8}; 3\right]$. **17.** 2; **18.** 18. **19.** $\frac{16\sqrt{2}}{3}$. **20.** 1; $10 \pm 3\sqrt{11}$.

Вариант 2

1. $a - 1$. **2.** $\sqrt[3]{2} - 1$. **3.** –1. **4.** 1. **5.** $(-\infty; 1]$. **6.** 1. **7.** $y = \left(e^x + e^{-x}\right)/2$. **8.** $[0; 1]$. **9.** $\pi/18$. **10.** $(0; 2/3]$. **11.** –1; 0. **12.** $(1; 2]$. **13.** 86. **14.** –2. **15.** $(1; 1); (2; 2)$. **16.** 3. **17.** $(0; 0); (4; 2)$. **18.** $2\sqrt{13}; \sqrt{61}$. **19.** 5. **20.** $(-\infty; -1) \cup [0, +\infty)$.

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. 4 или 16. *Указание.* Вершины квадрата, лежащие на параболе, имеют одинаковые ординаты, поэтому они симметричны относительно прямой $x = -\frac{3}{2}$. Значит, их абсциссы имеют вид $-\frac{3}{2} \pm a$ $(a > 0)$.

2. –1; $\frac{3\left(1+\sqrt{5}\right)}{2}$. *Указание.* Выполните замену $y = x\sqrt{\frac{x-3}{x}}$.

3. $\left(-\infty; \log_{3/4}4\right) \cup \left(0; \log_{3/2}2\right)$. *Указание.* При $x > 0$ неравенство приводится к виду $t^2 - t - \frac{3}{4} > 0$, где $t = 2^{\frac{1}{x}}$, а при $x < 0$ – к системе $t^2 - t - \frac{3}{4} < 0$, $t^2 - \frac{3}{4} > 0$.

4. $\frac{4-\sqrt{2}}{7}$. Пусть треугольник *MNK* – сечение тетраэдра, содержащее грань призмы, *L* – середина *MN*, *h* – высота призмы, $k = \frac{MN}{CD}$ (рис.13). Тогда $MN = 2k$, $MK = KN = k\sqrt{3}$,

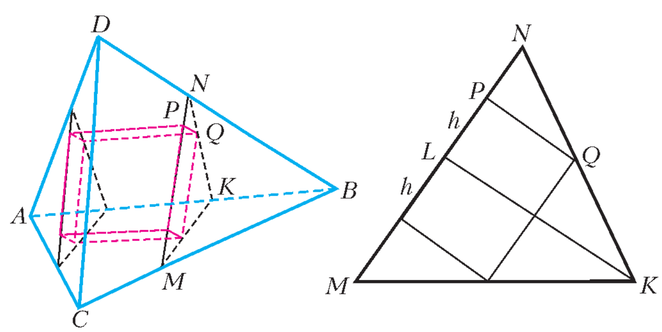

Рис. 13

откуда $LK = k\sqrt{2}$. Из подобия треугольников *NPQ* и *NLK*

$$\frac{\frac{1}{2}MN - h}{h} = \frac{\frac{1}{2}MN}{LK} \Leftrightarrow \frac{k}{h} - 1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow h = \frac{k\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} = k\left(2 - \sqrt{2}\right).$$

Кроме того,

$$k = \frac{BM}{BC} = 1 - \frac{EM}{AB} = 1 - \frac{2h}{2} = 1 - h.$$

Поэтому

$$h = (1-h)\left(2-\sqrt{2}\right) \Leftrightarrow h = \frac{2-\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}} = \frac{4-\sqrt{2}}{7}.$$

5. $n = 5$. Заметим, что при $n = 1$ решений на $(0;1)$ нет. При $n \ge 2$ мы получим $2\sin\frac{n+1}{2}x\cos\frac{n-1}{2}x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2\pi k}{n+1}$ или $x = \frac{\pi(2k+1)}{n-1}$, $k \in \mathbf{Z}$. Первая серия не пересекается с $(0; 1)$ в случае $2\pi \ge n + 1 \Leftrightarrow n \le 5$ и пересекается с $(0; 1)$ единственный раз при условии

$$\frac{1}{2} \le \frac{2\pi}{n+1} < 1 \Leftrightarrow 2\pi - 1 < n \le 4\pi - 1 \Leftrightarrow 6 \le n \le 11 .$$

Вторая серия не пересекается с $(0;1)$ в случае $\pi \ge n-1 \Leftrightarrow \Leftrightarrow n \le 4$ и пересекается с $(0;1)$ единственный раз, если $\frac{1}{3} \le \frac{\pi}{n-1} < 1 \Leftrightarrow \pi + 1 < n \le 3\pi + 1 \Leftrightarrow 5 \le n \le 10$. В ответ входят те n, при которых одна из серий не пересекается с $(0;1)$, а другая пересекается с $(0;1)$ ровно один раз. Это происходит только при $n = 5$.

Вариант 2

1. 10. **2.** $\frac{1}{35}$; 1.

3. $2\pi k$, $\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $\frac{7\pi}{12} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

4. $\left(\frac{5}{3}; \frac{10}{3}; 5\right)$, $\left(5 \pm \sqrt{5};\ 5 \mp 5\sqrt{5};\ \pm 5\sqrt{5} - 15\right)$. **5.** $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Вариант 3

1. 12. **2.** $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

3. $\left(\frac{1-\sqrt{17}}{2}; 0\right] \cup \left[1; \frac{1+\sqrt{17}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{37}}{2}; +\infty\right)$. **4.** 42. **5.** 0; 2.

XXXVII МЕЖДУНАРОДНАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО ФИЗИКЕ

Задача 1

1.1. $T = 3$ дня $= 2{,}6 \cdot 10^5$ с, $\omega = 2{,}5 \cdot 10^{-5}$ рад/с.
1.2. $T_1/T_2 = 1{,}4$, $R_1/R_2 = 1{,}6$.
2.1. $v_1 = 9{,}2 \cdot 10^4$ м/с, $v_2 = 1{,}6 \cdot 10^5$ м/с. **2.2.** $m_1/m_2 = 1{,}7$.
2.3. $r_1 = 3{,}6 \cdot 10^9$ м, $r_2 = 6{,}4 \cdot 10^9$ м. **2.4.** $r = 1{,}0 \cdot 10^{10}$ м.
2.5. $m_1 = 6 \cdot 10^{30}$ кг, $m_2 = 3 \cdot 10^{30}$ кг.
3.1. $\alpha = 4$. **3.2.** $L_1 = 5 \cdot 10^{28}$ Вт, $L_2 = 6 \cdot 10^{27}$ Вт.
3.3. $d = 100$ световых лет. **3.4.** $\theta \approx 10^{-8}$ рад. **3.5.** $D = 50$ м.

Задача 2

1.1. $F = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A}$. **1.2.** $x = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A k}$.

1.3. $U = \frac{Qd}{\varepsilon_0 A}\left(1 - \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 Akd}\right)$. **1.4.** $\frac{C}{C_0} = \left(1 - \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 Akd}\right)^{-1}$.

1.5. $W = \frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 A}\left(1 - \frac{Q^2}{4\varepsilon_0 Akd}\right)$. **2.1.** $Q_1 = \frac{\varepsilon_0 AU}{d-x}$, $Q_2 = \frac{\varepsilon_0 AU}{d+x}$.

2.2. $F = \frac{\varepsilon_0 AU^2}{2}\left(\frac{1}{(d-x)^2} - \frac{1}{(d+x)^2}\right)$.

2.3. $F = \frac{2\varepsilon_0 AU^2}{d^3} x$. **2.4.** $F_{\text{с}} = -k_{\text{эф}} x = -2\left(k - \frac{\varepsilon_0 AU^2}{d^3}\right)x$.

2.5. $a = -\frac{2}{m}\left(k - \frac{\varepsilon_0 AU^2}{d^3}\right)x$.

3.1. $U^* = U\frac{2\varepsilon_0 Ax}{C^*\left(d^2 - x^2\right) + 2\varepsilon_0 Ad}$. **3.2.** $U^* = U\frac{2\varepsilon_0 Ax}{d^2 C^* + 2\varepsilon_0 Ad}$.

4.1. $\frac{F}{F_{\text{у}}} = \frac{\varepsilon_0 AU^2}{k_{\text{эф}} d^3} = 7{,}6 \cdot 10^{-9}$. **4.2.** $x_{\max} = \frac{Ma}{k}$.

4.3. $C^* = 8{,}0 \cdot 10^{-11}$ Ф.

4.4. $t_1 = \sqrt{\frac{2l}{g}} = (0{,}3 - 0{,}5)$ с, где $l = (0{,}4 - 1)$ м – расстояние до руля.

4.5. $t_2 = \pi\sqrt{\frac{M}{k}} = 0{,}019$ с $< t_1$.

Задача 3

1.1. $[h] = ML^2T^{-1}$, $[c] = LT^{-1}$, $[G] = M^{-1}L^3T^{-2}$, $[k_{\text{Б}}] = ML^2T^{-2}K^{-1}$.

1.2. $[\sigma] = MT^{-3}K^{-4}$. **1.3.** $\alpha = -3$, $\beta = -2$, $\gamma = 0$, $\delta = 4$.

2.1. $\alpha = 2$, $\beta = -4$, $\gamma = 2$. **2.2.** $[S] = ML^2T^{-2}K^{-1}$.

2.3. $\eta = \frac{c^3 k_{\text{Б}}}{Gh}$. **3.1.** $\theta_{\text{H}} = \frac{c^3 h}{2Gk_{\text{Б}} m}$. **3.2.** $\frac{dm}{dt} = -\frac{c^4 h}{16G^2 m^2}$.

3.3. $t^* = \frac{16G^2 m^3}{3c^4 h}$. **3.4.** $C_V = -\frac{2Gk_{\text{Б}} m^2}{ch}$.

4.1. $\frac{dm}{dt} = -\frac{hc^4}{16G^2 m^2} + \frac{G^2 k_{\text{Б}}^4 \theta_{\text{Б}}^4 m^2}{c^8 h^3}$. **4.2.** $m^* = \frac{c^3 h}{2Gk_{\text{Б}} \theta_{\text{Б}}}$.

4.3. $\frac{dm}{dt} = -\frac{hc^4}{16G^2 m^2}\left(1 - \frac{m^4}{m^{*4}}\right)$. **4.4.** $\theta^* = \frac{c^3 h}{2Gk_{\text{Б}} m^*} = \theta_{\text{Б}}$.

4.5. Равновесие неустойчивое.

Информацию о журнале «Квант» и некоторые материалы из журнала можно найти в ИНТЕРНЕТЕ по адресам:

Редакция журнала «Квант»
kvant.info
Московский центр непрерывного математического образования
kvant.mccme.ru
Московский детский клуб «Компьютер»
math.child.ru
Костромской центр дополнительного образования «Эврика»
ceemat.ru

Квант журнал ©

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

А.А.Егоров, А.В.Жуков, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

В.М.Власов, Д.Н.Гришукова, А.Е.Пацхверия, В.М.Хлебникова

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:
119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»
Тел.: 930-56-48
E-mail: admin@kvant.info, math@kvant.info, phys@kvant.info

Отпечатано в ОАО ордена Трудового Красного Знамени «Чеховский полиграфический комбинат»
142300 г.Чехов Московской области,
Сайт: www.chpk.ru E-mail: marketing@chpk.ru
Факс: 8(49672) 6-25-36, факс: 8(499) 270-73-00
Отдел продаж услуг многоканальный: 8(499) 270-73-59