

XLVIII Международная математическая олимпиада

В период с 19 по 31 июля 2007 года в Ханое (Вьетнам) прошла XLVIII Международная математическая олимпиада (ММО), собравшая рекордное количество участников: 520 школьников из 93 стран. Ребятам из разных уголков мира представилась возможность пообщаться с юными математиками других стран, познакомиться с культурными традициями Вьетнама, полюбоваться удивительной красотой «залива тысячи островов» Калонг.

В состав команды России в этом году вошли одиннадцатиклассники *Сергей Дроздов* (Санкт-Петербург, лицей «ФТШ» при ФТИ им. А.Ф.Иоффе), *Алексей Есин* (Краснодарский край, станица Старонижестеблиевская, школа 55), *Мария Илюхина* (Москва, лицей «Вторая школа»), *Константин Матвеев* (Омск, лицей 66), *Иван Митрофанов* (Коломна, гимназия 2), а также десятиклассник *Владислав Волков* (Санкт-Петербург, ФМЛ 239).

Команда России блестяще выступила на ММО-2007, завоевав 5 золотых и 1 серебряную медаль и став лучшей в неофициальном командном зачете. Золотыми медалями награждены С.Дроздов, А.Есин, М.Илюхина, К.Матвеев, И.Митрофанов, серебряной – В.Волков. Вот результаты выступления нашей команды:

	Баллы за задачи						Сумма баллов
	1	2	3	4	5	6	
К.Матвеев	7	7	2	7	7	7	37
М.Илюхина	7	7	5	7	7	1	34
А.Есин	7	7	2	7	7	1	31
С.Дроздов	7	7	1	7	7	0	29
И.Митрофанов	7	7	1	7	7	0	29
В.Волков	7	7	1	7	2	0	24

По традиции, олимпиада прошла в два тура, в каждом из которых участникам предлагалось по 3 задачи. Заключительные задания каждого дня олимпиады оказались как никогда сложными: задачу 6 смогли полностью решить лишь пять участников олимпиады, а задачу 3 – всего два. В результате лучший результат на олимпиаде составил 37 баллов из 42 возможных, и его добился член нашей команды – Константин Матвеев, ставший абсолютным победителем олимпиады. (Удивительно, что ровно 15 лет назад в составе команды СНГ на Международной олимпиаде также выступил участник Константин Матвеев, набравший точно такие же баллы по каждой задаче!) Шестое место среди всех участников ММО-2007 заняла Мария Илюхина, двенадцатое – Алексей Есин. Всем троим золотые медали лично вручил президент Вьетнама, награждавший самых лучших участников олимпиады.

Команда России впервые стала единоличным победителем Международной математической олимпиады в неофициальном командном зачете, обойдя на 3 балла традиционную лучшую на ММО команду Китая. Вот результаты первых двадцати команд:

№ Страна	Общее число баллов	Количество медалей		
		золото	серебро	бронза
1. Россия	184	5	1	0
2. Китай	181	4	2	0

3. Вьетнам	168	3	3	0
4. Ю.Корея	168	2	4	0
5. США	155	2	3	1
6. Украина	154	3	1	2
7. Япония	154	2	4	0
8. КНДР	151	1	4	0
9. Болгария	149	2	3	1
10. Тайвань	149	2	3	1
11. Румыния	146	1	4	1
12. Иран	143	1	3	2
13. Гонконг	143	0	5	1
14. Таиланд	133	1	3	2
15. Германия	132	1	3	1
16. Венгрия	129	0	5	0
17. Турция	124	1	2	2
18. Польша	122	1	2	2
19. Белоруссия	119	1	1	4
20. Молдова	118	0	3	2

Руководство команды выражает благодарность всем педагогам-наставникам, воспитавшим ребят, а также тренерскому совету национальной сборной 2007 года, прекрасно подготовившему команду к олимпиаде. На сборах, проходивших в период с 26 июня по 16 июля в пансионате «Лисицкий бор» Тверской области, с командой работали: профессор Ярославского государственного университета В.Л.Дольников, педагог ФМЛ 239 (Санкт-Петербург) М.Я.Пратусевич, программист Г.Р.Челноков (Москва), а также победители и призеры Международных математических олимпиад прошлых лет: В.В.Астахов – студент мехмата МГУ, А.И.Бадзян – студент МФТИ, С.Л.Берлов – педагог ФМЛ 239 (Санкт-Петербург), А.А.Глазырин – аспирант мехмата МГУ, М.И.Исаев – студент МФТИ, Д.В.Карпов – научный сотрудник Петербургского отделения Математического института РАН и преподаватель СПбГУ, П.А.Кожевников – старший преподаватель МФТИ, Д.Г.Фон-Дер-Флаасс – научный сотрудник Сибирского отделения Математического института РАН.

Руководителями команды России в 2007 году были Н.Х.Агаханов – доцент МФТИ и А.И.Гарбер – аспирант Математического института РАН.

Руководство команды выражает огромную благодарность Дмитрию Юрьевичу Дойхену за постоянную поддержку подготовки национальной команды России по математике и ее участия в международных математических соревнованиях.

ЗАДАЧИ ОЛИМПИАДЫ

1. Даны действительные числа a_1, a_2, \dots, a_n . Для каждого i ($1 \leq i \leq n$) положим

$$d_i = \max \{a_j : 1 \leq j \leq i\} - \min \{a_j : i \leq j \leq n\}.$$

Пусть

$$d = \max \{d_i : 1 \leq i \leq n\}.$$

а) Докажите, что для любых действительных чисел $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ справедливо неравенство

$$\max \{|x_i - a_i| : 1 \leq i \leq n\} \geq \frac{d}{2}. \quad (*)$$

б) Покажите, что существуют такие действительные числа $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$, что неравенство (*) обращается в равенство.

(Новая Зеландия)

2. Даны пять точек A, B, C, D, E такие, что $ABCD$ – параллелограмм, а около четырехугольника $BCED$ можно описать окружность. Прямая l проходит через точку A , пересекает отрезок DC в его внутренней точке F , а прямую BC – в точке G . Предположим, что $EF = EG = EC$. Докажите, что прямая l является биссектрисой угла DAB .

(Люксембург)

3. См. задачу M2085 «Задачника «Кванта».

(Россия)

4. Биссектриса угла BCA треугольника ABC пересекает его описанную окружность вторично в точке R и пересекает серединные перпендикуляры к сторонам AC и BC в точках P и Q соответственно. Точки K и L – середины отрезков AC и BC соответственно. Докажите, что площади треугольников RPK и RQL равны.

(Чехия)

5. Положительные целые числа a и b таковы, что число $(4a^2 - 1)^2$ делится на $4ab - 1$. Докажите, что $a = b$.

(Великобритания)

6. Пусть n – целое положительное число. Рассмотрим множество

$$S = \{(x; y; z) : x, y, z \in \{0, 1, \dots, n\}, x + y + z > 0\},$$

состоящее из $(n + 1)^3 - 1$ точек трехмерного пространства. Найдите наименьшее возможное количество плоскостей, объединение которых содержит все точки из S , но не содержат точку $(0; 0; 0)$.

(Голландия)

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1 (А.Есин). а) Пусть d совпадает с числом d_l ($1 \leq l \leq n$). Найдем такие $k \in \{1, \dots, l\}$, $m \in \{l + 1, \dots, n\}$, что $a_k = \max\{a_1, \dots, a_l\}$, $a_m = \min\{a_l, \dots, a_n\}$; тогда $d = a_k - a_m$. Предположим, что $|x_k - a_k| < \frac{d}{2}$ и $|x_m - a_m| < \frac{d}{2}$; тогда $(x_m - a_m) - (x_k - a_k) < d$. Но, с другой стороны, $(x_m - a_m) - (x_k - a_k) = (a_k - a_m) + (x_m - x_k) = d + (x_m - x_k)$, что не меньше d , так как $m \geq k$. Полученное противоречие показывает, что $\max\{|x_k - a_k|, |x_m - a_m|\} \geq \frac{d}{2}$.

б) Положим $x_i = \max\{a_1, \dots, a_i\} - \frac{d}{2}$; легко видеть, что $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$. Докажем, что $|x_i - a_i| \leq \frac{d}{2}$ для любого $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Из пункта а) тогда будет следовать, что $\max\{|x_i - a_i| : 1 \leq i \leq n\} = \frac{d}{2}$. Предположим противное: пусть для какого-то l выполнено $|x_l - a_l| > \frac{d}{2}$.

Случай 1: пусть $x_l - a_l > \frac{d}{2}$. Тогда

$$\begin{aligned} \max\{a_1, \dots, a_l\} - \frac{d}{2} - a_l > \frac{d}{2} &\Rightarrow d < \max\{a_1, \dots, a_l\} - a_l \leq \\ &\leq \max\{a_1, \dots, a_l\} - \min\{a_1, \dots, a_n\} = d_l. \end{aligned}$$

Противоречие.

Случай 2: пусть $x_l - a_l < -\frac{d}{2}$. Тогда

$$\max\{a_1, \dots, a_l\} - \frac{d}{2} - a_l < -\frac{d}{2} \Rightarrow \max\{a_1, \dots, a_l\} < a_l.$$

Противоречие.

2 (В. Волков). Введем обозначения: $\angle CDE = \angle CBE = \varphi$ (четыреугольник $BCED$ – вписанный), $EG = EC = EF = x$ (радиусы окружности с центром E), $\angle CGE = \angle GCE = \alpha$, $\angle FCE = \angle CFE = \beta$ (рис.1). Заметим, что $\triangle AFD \sim \triangle GFC$,

так как $AD \parallel GC$, поэтому $\frac{AD}{GC} = \frac{FD}{FC} \Rightarrow \frac{BC}{GC} = \frac{FD}{FC}$.

Далее, $\angle CEB = \alpha - \varphi > 0$ ($\angle GCE$ – внешний для треугольника CEB), поэтому по теореме синусов для треугольника CEB : $BC =$

$$= \frac{x}{\sin \varphi} \sin(\alpha - \varphi).$$

А из равнобедренного треугольника CEG : $CG = 2x \cos \alpha$. Аналогично, из треугольника DEF :

$$FD = \frac{x}{\sin \varphi} \sin(\beta - \varphi),$$

а из треугольника CEF : $CF = 2x \cos \beta$. Значит,

$$\frac{BC}{GC} = \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{2 \cos \alpha \sin \varphi}, \quad \frac{FD}{FC} = \frac{\sin(\beta - \varphi)}{2 \cos \beta \sin \varphi},$$

откуда

$$\frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos \alpha} = \frac{\sin(\beta - \varphi)}{\cos \beta}.$$

Но $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$, поэтому $0 < \alpha - \varphi, \beta - \varphi < \frac{\pi}{2}$. Если предположить, что $\alpha > \beta$, то $\cos \alpha < \cos \beta$ и $\sin(\alpha - \varphi) > \sin(\beta - \varphi)$, откуда $\frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos \alpha} > \frac{\sin(\beta - \varphi)}{\cos \beta}$. Аналогично, предположение о том, что $\alpha < \beta$, сводится к противоречию. Значит, $\alpha = \beta$. Тогда треугольники CEG и CEF равны $\Rightarrow CF = CG \Rightarrow \triangle CFG$ – равнобедренный. Отсюда $\angle BAG = \angle CFG = \angle CGF = \angle DAG$, т.е. AG – биссектриса угла BAD .

4. Если $P = Q$, то P – точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам AC и BC , поэтому биссектриса CR является серединным перпендикуляром к AB . Тогда равенство $S_{PRK} = S_{QRL}$ следует из симметрии относительно CR .

Пусть $P \neq Q$. Прямые PK и LQ пересекаются в центре O описанной окружности треугольника ABC (рис.2). Из подобных прямоугольных треугольников CLQ и CKP :

$$\begin{aligned} PK \cdot CQ &= QL \cdot CP, \\ \angle CQL &= \angle CPK. \end{aligned}$$

Далее, треугольник OPQ равнобедренный, поэтому P и Q симметричны относительно точ-

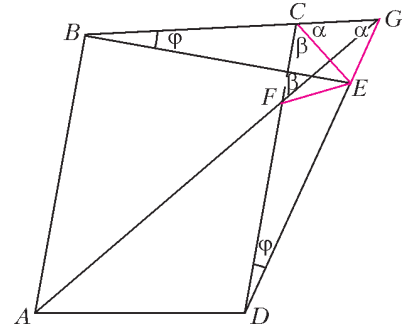


Рис. 1

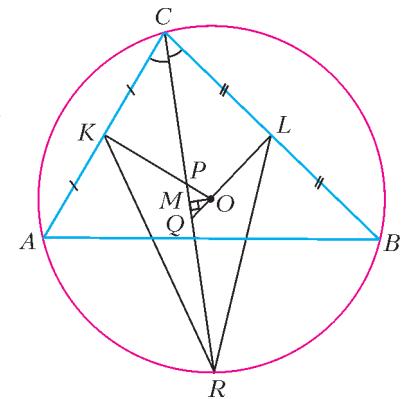


Рис. 2

ки M , являющейся основанием перпендикуляра, опущенного из O на CR . Точка M – середина CR , поэтому $CP = QR$, $CQ = PR$.

Отношение искомых площадей равно

$$\frac{S_{PRK}}{S_{ORL}} = \frac{PK \cdot PR \cdot \sin \angle RPK}{QL \cdot QR \cdot \sin \angle RQL} = \frac{PK \cdot CQ \cdot \sin \angle CPK}{QL \cdot CP \cdot \sin \angle CQL} = 1.$$

5 (И. Митрофанов). Если $(4a^2 - 1)^2$ делится на $4ab - 1$, то $(4a^2 - 1)^2 - 2(4a^2 - 1)(4ab - 1) + (4ab - 1)^2 =$
 $= ((4a^2 - 1) - (4ab - 1))^2 = (4a)^2 (a - b)^2$

делится на $4ab - 1$. Поскольку $4ab - 1$ и $4a$ взаимно просты, получаем, что $(a - b)^2$ делится на $4ab - 1$, т.е.

$$(a - b)^2 = k(4ab - 1) \quad (1)$$

для некоторого целого k . При $k = 0$ получаем $a = b$. Докажем, что при фиксированном $k > 0$ условие (1) неразрешимо в натуральных a, b . Пусть это не так. Тогда рассмотрим все пары натуральных чисел (a, b) , для которых выполнено (1) (очевидно, для таких пар $a \neq b$), и выберем из них пару (a_0, b_0) с наименьшим $b = b_0$; в силу симметрии равенства (1), для пары (b_0, a_0) оно также выполнено, поэтому $b_0 < a_0 = tb_0$ для некоторого действительного $t > 1$. Перепишем (1) для $a = a_0, b = b_0$ в виде

$$a_0^2 - (2 + 4k)a_0b_0 + (b_0^2 + k) = 0. \quad (2)$$

Мы видим, что квадратное уравнение $x^2 - (2 + 4k)b_0x + (b_0^2 + k) = 0$ имеет целый корень $x_1 = a_0$, значит, оно имеет и второй целый корень, который в силу теоремы Виета равен $x_2 = \frac{b_0^2 + k}{a_0} > 0$. Пара (b_0, x_2) удовлетворяет равенству (1), поэтому $x_2 > b_0$ в силу выбора b_0 . Получаем $\frac{b_0^2 + k}{a_0} > b_0$, откуда $k > b_0(a_0 - b_0) = b_0^2(t - 1)$.

Подставляя $a = tb_0, b = b_0$ в равенство (1), имеем

$$b_0^2(t - 1)^2 = k(4tb_0^2 - 1) > b_0^2(t - 1)(4tb_0^2 - 1) \Rightarrow \\ \Rightarrow t - 1 > 4tb_0^2 - 1 \Rightarrow 1 > 4b_0^2.$$

Противоречие.

6 (К. Матвеев). *Ответ: $3n$.*

Примером $3n$ соответствующих плоскостей, объединение которых содержит данное множество S , могут служить плоскости, задаваемые уравнениями вида $x = 1, x = 2, \dots, x = n, y = 1, y = 2, \dots, y = n, z = 1, z = 2, \dots, z = n$. Очевидно, что каждая точка из S попадет хотя бы в одну из этих плоскостей, ибо имеет хотя бы одну ненулевую координату.

Теперь осталось показать, что объединением плоскостей, количество которых меньше $3n$, множество S покрыто быть не может.

Проведем доказательство от противного. Пусть множество S может быть покрыто объединением менее чем $3n$ плоскостей. Запишем уравнения этих плоскостей:

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0,$$

$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0,$$

...

$$a_kx + b_ky + c_kz + d_k = 0.$$

Здесь, во-первых, $k < 3n$ и, во-вторых, ни одно из чисел d_1, d_2, \dots, d_k не равно 0, иначе соответствующая плоскость проходила бы через точку $(0; 0; 0)$.

Перемножив левые части уравнений этих плоскостей, получим многочлен $Q(x; y; z)$ от трех переменных, обращающийся в 0 при подстановке вместо $(x; y; z)$ координат любой точки множества S . Отметим, что $Q(0; 0; 0) = d_1d_2 \dots d_k \neq 0$, а степень многочлена $Q(x; y; z)$ меньше $3n$.

Рассмотрим теперь многочлены

$$g_1(x) = x(x - 1) \dots (x - n),$$

$$g_2(y) = y(y - 1) \dots (y - n),$$

$$g_3(z) = z(z - 1) \dots (z - n).$$

Каждый из них обращается в 0 во всех точках множества S (эти многочлены можно рассматривать как многочлены трех переменных, степени вхождения двух из которых только нулевые, и в этом качестве подставлять в них координаты точек множества S).

Разделим с остатком многочлен $Q(x; y; z)$, рассмотренный как многочлен от x , на $g_1(x)$. Получим равенство $Q(x; y; z) = g_1(x) \cdot A_1(x; y; z) + Q_1(x; y; z)$. При этом, во-первых, степень вхождения переменной x в многочлен $Q_1(x; y; z)$ будет на больше n , во-вторых, $Q_1(x; y; z)$ обращается в 0 во всех точках множества S (поскольку во всех точках множества S обращаются в 0 многочлены $Q(x; y; z)$ и $g_1(x)$) и, в-третьих, $Q_1(x; y; z)$ не обращается в 0 при $x = y = z = 0$ (поскольку $Q(0; 0; 0) = Q_1(0; 0; 0)$).

Аналогично получим равенство $Q_1(x; y; z) = g_2(y) \times A_2(x; y; z) + Q_2(x; y; z)$, где многочлен $Q_2(x; y; z)$ обращается в 0 во всех точках множества S , причем степень вхождения каждой из переменных x и y в $Q_2(x; y; z)$ не превосходит n и $Q_2(0; 0; 0) \neq 0$.

Наконец, получаем равенство $Q_2(x; y; z) = g_3(z) \times A_3(x; y; z) + T(x; y; z)$, где многочлен $T(x; y; z)$ обращается в 0 во всех точках множества S и степень вхождения в $T(x; y; z)$ каждой из переменных x, y и z не превосходит n , причем $T(0; 0; 0) \neq 0$. Тем самым, $T(x; y; z)$ не является тождественно нулевым многочленом.

Рассмотрим теперь одночлен $ax^s y^t z^u$ ($a \neq 0$) наибольшей степени $s + t + u$ в многочлене $T(x; y; z)$. Одно из чисел s, t, u должно быть строго меньше n , так как степень многочлена $T(x; y; z)$ не превосходит степени многочлена $Q(x; y; z)$, которая, в свою очередь, меньше $3n$. Не умаляя общности, пусть $s < n$.

Имеет место следующая теорема (см., например, книгу «Задачи Санкт-Петербургской олимпиады школьников по математике 2005 года»):

Пусть $P(x; y; z)$ – ненулевой многочлен от трех переменных с вещественными коэффициентами, одночлен наибольшей степени которого имеет вид $ax^s y^t z^u$ ($a \neq 0$). Пусть A, B, C – конечные множества вещественных чисел, причем в A содержится не менее $s + 1$ элементов, в B – не менее $t + 1$ элементов, в C – не менее $u + 1$ элементов. Тогда существуют числа $x_0 \in A, y_0 \in B, z_0 \in C$ такие, что $P(x_0; y_0; z_0) \neq 0$.

Применив эту теорему к многочлену $T(x; y; z)$ и множествам $A = \{1; 2; \dots; n\}, B = \{0; 1; \dots; n\}, C = \{0; 1; \dots; n\}$, приходим к противоречию, поскольку в силу построения многочлена $T(x; y; z)$ он обращается в 0, если одновременно $x \in A, y \in B$ и $z \in C$.

Публикацию подготовили Н. Агаханов, П. Кожевников, М. Пратусевич, Д. Фон-Дер-Флаасс

XXXVIII Международная физическая олимпиада

337 участников из 76 стран прилетели в Иран, а именно в город Исфахан, на очередную Международную физическую олимпиаду школьников. Вместе с ними прибыли сопровождающие их руководители команд и наблюдатели — всего 185 человек.

В сборную России вошли:

Андрей Котов — Москва, Московская государственная Пятьдесят седьмая школа,

Дмитрий Мыльников — Москва, школа 27 с углубленным изучением отдельных предметов,

Ксения Соловьева — Москва, школа 146 с углубленным изучением физики, математики, информатики,

Сергей Ефимов — Бийск, Бийский лицей Алтайского края, 10 класс,

Ярослав Бельтюков — Санкт-Петербург, лицей «ФТШ» при ФТИ им. А.Ф.Иоффе.

Нашу команду возглавили профессор Московского физико-технического института С.М.Козел и доцент МФТИ В.П.Слободянин. В составе российской делегации был также доцент МФТИ Д.А.Александров, принимавший активное участие в подготовке команды к олимпиаде. Он прибыл на олимпиаду за счет поддержки спонсора — Русского фонда содействия образованию и науке.

Подготовка команды к олимпиаде началась более чем за год и проводилась на базе МФТИ.

Как и в прошлые годы, участникам олимпиады были предложены три теоретические задачи и одно экспериментальное задание. Каждая теоретическая задача оценивалась из 10 баллов, а экспериментальная — из 20 баллов. Таким образом, максимальное количество баллов, которое мог набрать каждый из участников олимпиады, равнялось 50.

По итогам выступления золотые медали получили 37 участников, серебряные — 46 и бронзовые — 51 участник олимпиады. Сравнительные результаты 20 лучших команд таковы:

№	Страна	Количество медалей			Сумма баллов
		золото	серебро	бронза	
1.	Китай	4	1		226,1
2.	Южная Корея	2	3		217,2
3.	Россия	3	1		216,1
4.	Япония	2	2	1	206,9
5.	США	2	3		204,4
6.	Индия	2	2		203,1
7–8.	Иран	2	2	1	202,4
7–8.	Франция	1	3	1	202,4
9.	Индонезия	1	3	1	200,9
10.	Венгрия	1	2	2	199,3
11.	Таиланд	1	2	2	198,5
12.	Вьетнам	2	2		197,5
13.	Германия		5		197,4
14.	Чешская Республика	2	1	2	197,1
15.	Сингапур	2	1	2	196,4
16.	Тайвань	1	2	2	194,8
17–18.	Украина	2		3	191,9

17–18.	Словакия	1	1	2	191,9
19.	Белоруссия	1	1	3	191,2
20.	Канада	2		2	190,3

Члены сборной команды России показали следующие результаты:

Участник	Теория	Эксперимент	Сумма баллов	Медаль
Мыльников Дмитрий	29,5	18,1	47,6	золото
Соловьева Ксения	29,0	17,7	46,7	золото
Котов Андрей	29,7	16,4	46,1	золото
Бельтюков Ярослав	29,3	13,7	43,0	серебро
Ефимов Сергей	26,2	6,5	32,7	грамота

Условия задач теоретического тура приведены ниже. Об экспериментальном туре скажем лишь, что целью задания было определение ширины запрещенной зоны тонкой полупроводниковой пленки, содержащей наночастицы окиси железа, и измерение толщины этой пленки. Для определения ширины запрещенной зоны нужно было исследовать оптический спектр пропускания и спектр поглощения пленки. Измерения выполнялись на гониометре — приборе, позволяющем с высокой точностью измерять углы отклонения пучков света при их прохождении сквозь дифракционную решетку.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

Задача 1

Две звезды, вращающиеся вокруг их общего центра масс, образуют бинарную (двойную) звездную систему. Почти половина звезд нашей галактики — двойные звезды. С Земли нелегко распознать двойную природу большинства этих звездных систем, так как расстояние между звездами намного меньше расстояния от них до Земли, и, следовательно, телескоп не способен разрешить отдельные компоненты двойной звезды. Поэтому приходится использовать либо фотометрию, либо спектрометрию для наблюдения изменений в интенсивности или в спектре конкретной звезды, для того чтобы определить, является ли данная звезда двойной.

1. Фотометрия двойной звезды

Если бы мы находились в плоскости движения двух звезд, тогда одна из звезд в определенные моменты времени заслоняла бы другую (проходя впереди нее) и интенсивность всей системы изменялась бы со временем при наблюдении из нашей точки. Такие звезды называются эклиптическими двойными звездами.

Допустим, что две звезды движутся по круговым орбитам вокруг их общего центра масс с постоянной угловой скоростью ω и мы находимся точно в плоскости движения звезд. Предположим также, что температуры поверхностей звезд равны T_1 и T_2 ($T_1 > T_2$), а их радиусы составляют R_1 и R_2

соответственно ($R_1 > R_2$). Зависимость от времени суммарной относительной интенсивности света, измеренной на Земле, показана на рисунке 1. Тщательные измерения свидетельствуют о том, что минимальные интенсивности падающего от звезд света соответствуют 90% и 63% суммарной

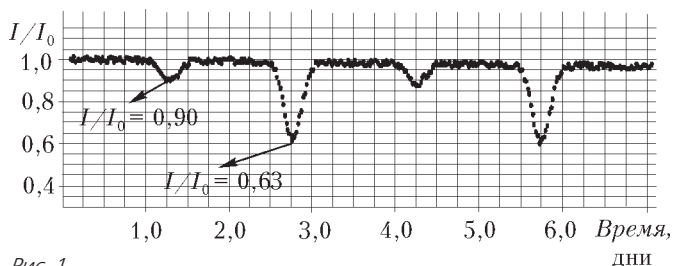


Рис. 1

интенсивности I_0 , полученной от обеих звезд ($I_0 = 4,8 \cdot 10^{-9}$ Вт/м²).

1.1. Найдите период орбитального движения звезд. Ответ выразите в секундах и округлите до двух значащих цифр. Найдите также угловую скорость вращения системы в рад/с. (0,8 балла)

Достаточно хорошим приближением для излучения, принимаемого от звезды, может служить излучение абсолютно черного тела в виде диска, радиус которого равен радиусу звезды. Поэтому мощность, принятая от звезды, пропорциональна AT^4 , где A – площадь диска, T – поверхностная температура звезды.

1.2. С помощью графика, приведенного на рисунке 1, найдите отношения T_1/T_2 и R_1/R_2 . (1,6 б.)

2. Спектрометрия двойной системы

В этой части вам предлагается вычислить астрономические свойства двойной звезды, используя ее экспериментальные спектрометрические данные.

Атомы поглощают и излучают свет определенных длин волн, характерных для данного атома. Поэтому наблюдаемый спектр звезды содержит линии поглощения, возникающие благодаря атомам, содержащимся в атмосфере звезды.

В спектре натрия имеется характерная желтая линия (D_1) с длиной волны 5895,9 Å (10 Å = 1 нм). Рассмотрим спектр поглощения атомарного натрия на этой длине волны для двойной звезды, о которой шла речь в предыдущей части. Из-за движения обеих звезд данной бинарной системы относительно наблюдателя частота (или длина волны) принимаемого нами излучения приобретает доплеровский сдвиг. Каждая из этих звезд имеет свою скорость и, соответственно, свой доплеровский сдвиг.

Требуются высоко точные измерения длины волны для наблюдения доплеровского сдвига, поскольку скорости звезд гораздо меньше, чем скорость света. Скорость центра масс бинарной системы, рассматриваемой в данном вопросе, гораздо меньше орбитальных скоростей звезд, поэтому все доплеровские сдвиги относятся к орбитальным скоростям звезд.

В таблице приведена зависимость от времени длин волн линий в спектре поглощения звезд двойной системы для линии D_1 натрия:

t (день)	0,3	0,6	0,9	1,2	1,5	1,8
λ_1 (Å)	5897,5	5897,7	5897,2	5896,2	5895,1	5894,3
λ_2 (Å)	5893,1	5892,8	5893,7	5896,2	5897,3	5898,7

t (день)	2,1	2,4	2,7	3,0	3,3	3,6
λ_1 (Å)	5894,1	5894,6	5895,6	5896,7	5897,3	5897,7
λ_2 (Å)	5899,0	5898,1	5896,4	5894,5	5893,1	5892,8

t (день)	3,9	4,2	4,5	4,8
λ_1 (Å)	5897,2	5896,2	5895,0	5894,3
λ_2 (Å)	5893,7	5896,2	5897,4	5898,7

Используя таблицу, ответьте на следующие вопросы.

2.1. Найдите орбитальную скорость каждой из звезд v_1 и v_2 (скорость света $c = 3,0 \cdot 10^8$ м/с). Релятивистские эффекты не учитывайте. (1,8 б.)

2.2. Найдите отношение масс звезд m_1/m_2 . (0,7 б.)

2.3. Найдите расстояния r_1 и r_2 каждой из звезд бинарной системы от их общего центра масс. (0,8 б.)

2.4. Найдите расстояние r между звездами. (0,2 б.)

Учитывая, что гравитационная сила является единственной силой, действующей между звездами, дайте ответ на такой вопрос.

2.5. Найдите массу каждой звезды с точностью до одной значащей цифры. Гравитационная постоянная $G = 6,7 \cdot 10^{-11}$ м³ · кг⁻¹ · с⁻². (0,2 б.)

3. Общая характеристика звезд

Для большинства звезд механизм генерации излучаемой энергии одинаков. Поэтому существует эмпирическое соотношение между массой звезды M и ее светимостью L , которая равна общей мощности излучения звезды. Это соотношение можно записать в виде $L/L_C = (M/M_C)^\alpha$, где $M_C = 2,0 \cdot 10^{30}$ кг – масса Солнца, $L_C = 3,9 \cdot 10^{26}$ Вт – светимость Солнца. Эта закономерность проиллюстрирована на рисунке 2 в двойном логарифмическом масштабе (звездочкой отмечено Солнце).

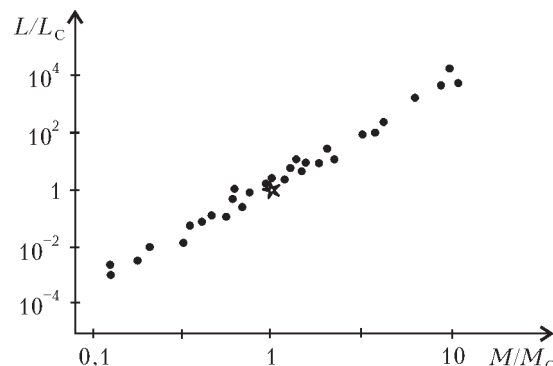


Рис. 2

3.1. Найдите показатель степени α с точностью до одной значащей цифры. (0,6 б.)

3.2. Пусть L_1 и L_2 – светимости звезд двойной системы, изучавшейся в предыдущей части. Найдите L_1 и L_2 . (0,6 б.)

3.3. Определите расстояние d от нас до звездной системы в световых годах. Для определения этого расстояния вы можете использовать диаграмму, приведенную на рисунке 1. Один световой год равен расстоянию, которое свет проходит за один год. (0,9 б.)

3.4. Каково максимальное угловое расстояние θ между звездами при наблюдении с Земли? (0,9 б.)

3.5. Каким наименьшим диаметром D должен обладать объектив оптического телескопа, для того чтобы разрешить эти две звезды? (0,9 б.)

Задача 2

В данной задаче рассматривается упрощенная модель акселерометра (измерителя ускорения), который разработан для активирования воздушных подушек безопасности автомобиля во время столкновения. Для этого предлагается электромеханическая система, которая рассчитана таким образом, что когда ускорение превышает некоторое предель-

ное значение, то один из электрических параметров системы – напряжение на одном из элементов цепи – достигает порогового значения, в результате чего надуваются (активируются) воздушные подушки. *Замечание:* действием силы тяжести в данной задаче следует пренебречь.

1. Рассмотрим конденсатор, состоящий из двух параллельных вертикальных пластин. Площадь каждой пластины A , расстояние между ними d (это расстояние значительно меньше размеров пластин). Одна из пластин прикреплена к стенке с помощью пружины жесткостью k , вторая пластина закреплена неподвижно. Считайте, что диэлектрическая проницаемость воздуха равна 1. Когда расстояние между пластинами равно d , пружина не деформирована. В этом состоянии емкость конденсатора равна $C_0 = \epsilon_0 A/d$, где ϵ_0 – электрическая постоянная. Пластинам сообщают электрические заряды $+Q$ и $-Q$, после чего система переходит в состояние механического равновесия.

1.1. Найдите электрическую силу F , действующую на каждую пластину. (0,8 б.)

1.2. Обозначим через x смещение пластины, прикрепленной к пружине. Определите x . (0,6 б.)

1.3. Чему равна разность потенциалов U между пластинами в этом состоянии? Ответ выразите через параметры Q , A , d и k . (0,4 б.)

1.4. Пусть C – емкость конденсатора, равная по определению отношению заряда пластины к разности потенциалов между пластинами. Определите величину C/C_0 как функцию Q, A, d и k . (0,3 б.)

1.5. Чему равна полная энергия W , запасенная системой? Ответ выразите через Q, A, d и k . (0,6 б.)

На рисунке 3 приведена схема акселерометра. Тело массой M , соединенное с легкой проводящей подвижной пластиной, прикреплено к двум одинаковым пружинам жесткостью k .

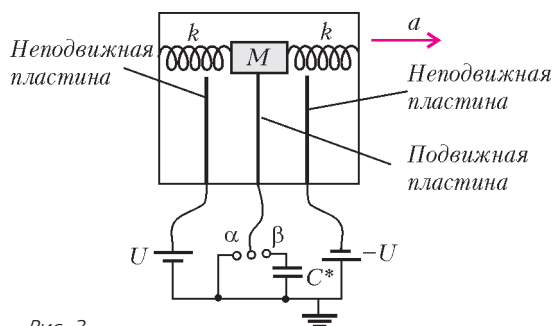


Рис. 3

Подвижная пластина может перемещаться между двумя неподвижными пластинами. Все три пластины одинаковы и их площади равны A . Таким образом, три пластины образуют два конденсатора. Как показано на рисунке, на неподвижных пластинах поддерживаются постоянные потенциалы U и $-U$ соответственно. Средняя пластина с помощью двухполюсного переключателя заземляется. Соединительные провода не препятствуют движению пластины, и в процессе движения все пластины остаются параллельными друг другу. Если система не ускоряется, то расстояния между подвижной и неподвижными пластинами равны d , причем это расстояние значительно меньше размеров пластин. Толщиной подвижной пластины можно пренебречь.

Переключатель может находиться в одном из двух положений α или β . Предположим, что рассматриваемое устройство движется вместе с автомобилем с постоянным ускорением. Будем считать, что в течение равноускоренного движения автомобиля пружины не колеблются и все компоненты системы находятся в равновесном положении, т.е. не движутся относительно друг друга и автомобиля.

Из-за наличия ускорения подвижная пластина смещается на определенное расстояние x от среднего положения между неподвижными пластинами.

2. Рассмотрите случай, когда переключатель находится в положении α , т.е. когда подвижная пластина соединена с землей проводом.

2.1. Найдите заряд каждого конденсатора как функцию величины x . (0,4 б.)

2.2. Найдите результирующую электрическую силу F , действующую на подвижную пластину, как функцию величины x . (0,4 б.)

2.3. Положим, что $d \gg x$, так что величинами порядка x^2 можно пренебречь по сравнению с d^2 . Упростите предыдущий ответ, используя это приближение. (0,2 б.)

2.4. Запишите выражение для суммарной силы F_c , действующей на подвижную пластину (сумма электрических и упругих сил), в виде $-k_{\text{эф}}x$ и приведите формулу для величины $k_{\text{эф}}$. (0,7 б.)

2.5. Выразите величину постоянного ускорения a как функцию x . (0,4 б.)

3. Теперь будем считать, что переключатель находится в положении β , т.е. подвижная пластина соединена с землей через конденсатор емкостью C^* (который также изначально не был заряжен). Пусть подвижная пластина сместилась на расстояние x от своего центрального положения.

3.1. Найдите напряжение U^* на конденсаторе C^* как функцию смещения x . (1,5 б.)

3.2. Опять будем считать, что $d \gg x$, так что можно пренебречь величинами порядка x^2 по сравнению с d^2 . Упростите ваш ответ в предыдущей части. (0,2 б.)

4. Необходимо подобрать параметры акселератора таким образом, чтобы воздушные подушки не активировались при нормальном торможении и активировались при столкновении для предотвращения удара головы водителя о лобовое стекло или руль.

Как следует из части 2, суммарная сила, действующая на подвижную пластину со стороны пружин и электрических полей, может быть представлена как сила упругости одной пружины с эффективной жесткостью $k_{\text{эф}}$. Таким образом, устройство эквивалентно пружинному маятнику с телом массой M и пружиной жесткостью $k_{\text{эф}}$, находящемуся в автомобиле, движущемся с постоянным ускорением a . Трением в системе можно пренебречь, значения параметров системы таковы: $d = 1,0$ см, $A = 2,5 \cdot 10^{-2}$ м², $k = 4,2 \cdot 10^3$ Н/м, $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Кл²/(Н · м²), $U = 12$ В, $M = 0,15$ кг.

Замечание: в данной части задачи нельзя считать, что тело и пружины находятся в состоянии равновесия.

4.1. Используя эти данные, определите отношение электрической силы, найденной в разделе 2, к силе упругости пружин и покажите, что электрическими силами можно пренебречь по сравнению с силами упругости. (0,6 б.)

Несмотря на то, что вы не вычисляли электрические силы в случае, когда переключатель находится в положении β , можно показать, что и в этом случае электрические силы также являются малыми и ими можно пренебречь.

4.2. Пусть автомобиль, движущийся с постоянной скоростью, внезапно начинает тормозить с постоянным ускорением a . Чему равно в этом случае максимальное смещение подвижной пластины? Ответ дайте в виде формулы. (0,6 б.)

Переключатель находится в положении β , и устройство сконструировано так, что воздушные подушки активируются, когда напряжение на конденсаторе емкостью C^* достигает величины U^* . Нам необходимо, чтобы подушки не активировались, когда ускорение автомобиля не превышает

ускорения свободного падения $g = 9,8 \text{ м/с}^2$, но активировались при превышении этой величины.

4.3. Какой должна быть емкость конденсатора C^* для выполнения этих условий? (0,6 б.)

Будем считать, что воздушные подушки надуваются очень быстро, чтобы предотвратить удар головы водителя о лобовое стекло или руль. Предположим, что в результате столкновения автомобиль тормозит с постоянным ускорением, равным g , а голова водителя продолжает двигаться с постоянной скоростью.

4.4. Найдите время t_1 после начала торможения, через которое голова водителя ударится о руль. Расстояние до руля оцените самостоятельно. (0,8 б.)

4.5. Найдите время t_2 после начала торможения, через которое воздушные подушки активируются. Считайте, что они надуваются мгновенно. Сравните t_2 с t_1 . Смогут ли воздушные подушки активироваться вовремя? (0,9 б.)

Задача 3

В физике соотношения между физическими величинами выражаются в виде равенств, левая и правая части которых должны быть однотипными, т.е. иметь одинаковые размерности. Скажем, нельзя, чтобы правая часть соотношения имела размерность длины, а левая часть – размерность времени. Используя этот факт, иногда возможно вывести искомое физическое соотношение, не решая задачу аналитически. Например, для того чтобы найти время, в течение которого объект падает с высоты h с постоянным ускорением g , необходимо, используя параметры задачи h и g , построить величину, имеющую размерность времени. Легко убедиться, что это можно сделать единственным образом: $T = a\sqrt{h/g}$. Заметим, что в это решение входит неопределенный безразмерный коэффициент a , который рассматриваемым методом определить нельзя. Этот коэффициент может быть равным 1, $1/2$, $\sqrt{3}$, π или любому другому вещественному числу. Такой метод получения физических соотношений называется методом анализа размерностей.

В методе анализа размерностей безразмерные коэффициенты не имеют важного значения. К счастью, в большинстве физических задач эти коэффициенты порядка 1, и их исключение не меняет порядок физической величины. Таким образом, анализ размерностей при решении поставленной выше задачи дает следующий ответ: $T = \sqrt{h/g}$.

Обычно размерность физической величины выражают через размерности четырех основных физических величин – M (масса), L (длина), T (время), и K (температура). Размерность произвольной величины x записывается в виде $[x]$. Например, размерности скорости v , кинетической энергии E_k и теплоемкости C_V выражаются так:

$$[v] = LT^{-1}, [E_k] = ML^2T^{-2} \text{ и } [C_V] = ML^2T^{-2}K^{-1}.$$

1. Фундаментальные константы и анализ размерностей

1.1. Выразите размерности фундаментальных констант: постоянной Планка h , скорости света c , гравитационной постоянной G и постоянной Больцмана k_B через размерности длины, массы, времени и температуры. (0,8 б.)

Согласно закону Стефана–Больцмана, мощность излучения черного тела, которая определяется как суммарная энергия, излучаемая с единицы поверхности черного тела в единицу времени, равна $\sigma\theta^4$, где σ есть постоянная Стефана–Больцмана и θ – абсолютная температура черного тела.

1.2. Выразите размерность постоянной Стефана–Больцмана через размерности длины, массы, времени и температуры. (0,5 б.)

Постоянная Стефана–Больцмана не является фундамен-

тальной физической постоянной, но ее можно выразить через фундаментальные физические постоянные h , c , G и k_B , т.е. можно записать $\sigma = ah^\alpha c^\beta G^\gamma k_B^\delta$. В этом соотношении a – безразмерная величина порядка единицы.

1.3. Найдите α, β, γ и δ , используя метод анализа размерностей. (1,0 б.)

2. Физика черных дыр

В этой части задачи попробуйте определить некоторые свойства черных дыр, используя метод анализа размерностей. В соответствии с теоремой Хокинга, «черные дыры не имеют волос», т.е. все физические характеристики черной дыры, которые рассматриваются в этой части, определяются только ее массой. Одной из важнейших физических характеристик черной дыры является площадь поверхности ее «горизонта событий». (Горизонт событий определяет границу черной дыры. Внутри области, определяемой горизонтом событий, гравитационное поле столь велико, что даже свет не может выйти за пределы данной области.)

Вам предлагается найти соотношение между массой m черной дыры и площадью A ее горизонта событий. Эта площадь зависит от массы черной дыры, скорости света и гравитационной постоянной. Как и в пункте 1.3, эта зависимость может быть представлена в виде $A = G^\alpha c^\beta m^\gamma$.

2.1. Используйте метод анализа размерностей для определения α , β , и γ . (0,8 б.)

Из сказанного следует, что площадь горизонта событий черной дыры увеличивается с ростом ее массы. С классической точки зрения, ничто не может покинуть пределы горизонта событий черной дыры, и поэтому во всех физических процессах площадь горизонта событий черной дыры может только увеличиваться. По аналогии со вторым законом термодинамики, Бекенштейн предложил считать, что энтропия S черной дыры пропорциональна площади ее горизонта событий, т.е. $S = \eta A$. Гипотезу можно сделать более правдоподобной, используя другой подход.

2.2. Используя термодинамическое определение энтропии $dS = dQ/\theta$, определите размерность энтропии. (Здесь dQ – количество теплоты, получаемое системой в результате теплообмена, θ – абсолютная температура системы.) (0,6 б.)

2.3. Выразите размерную постоянную η как функцию фундаментальных констант h , c , G и k_B . (1,1 б.)

3. Излучение Хокинга

С помощью полуклассического приближения Хокинг показал, что, в отличие от классической точки зрения, черная дыра может излучать подобно черному телу, находящемуся при температуре, называемой температурой Хокинга.

3.1. Используя законы термодинамики и формулу $E = mc^2$, в которой энергия черной дыры выражается через ее массу, выразите температуру Хокинга θ_x черной дыры через ее массу и фундаментальные постоянные. Считайте, что черная дыра не совершает работы над окружающей средой. (0,8 б.)

3.2. Масса изолированной черной дыры изменяется вследствие излучения Хокинга. Используйте закон Стефана–Больцмана, чтобы найти зависимость скорости изменения массы от температуры Хокинга черной дыры, и выразите эту скорость через ее массу и фундаментальные постоянные. (0,7 б.)

3.3. Найдите время t^* , в течение которого изолированная черная дыра с массой m полностью испарится, т.е. потеряет всю свою массу. (1,1 б.)

С точки зрения термодинамики, черные дыры проявляют некоторые экзотические свойства. Например, теплоемкость черной дыры отрицательна.

3.4. Найдите теплоемкость черной дыры массой m . (0,6 б.)