

Материалы вступительных экзаменов 2007 года

Институт криптографии, связи и информатики Академии ФСБ РФ

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(факультеты прикладной математики и информационной безопасности)

1. Трактор выехал со станции к деревне на 30 минут раньше грузовика. Когда грузовик, обогнав трактор, приехал в деревню, трактору осталось ехать до деревни 3 км. Найдите скорости трактора и грузовика, если известно, что скорость грузовика на 20 км/ч больше скорости трактора, а расстояние от станции до деревни равно 12 км.

2. Решите неравенство

$$2 \log_{\sqrt{19}-2} \left(\frac{1}{3x-2} \right) + \log_{\frac{\sqrt{19}-2}{2}} (5-2x) \geq 0.$$

3. Решите уравнение

$$\sqrt{\frac{1 - \sin x \sin 3x}{2}} = \sin \frac{\pi - 4x}{2}.$$

4. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{-x^2 + 7x - 6}}{|x^2 - 6x + 5| - |x^2 - 2x - 3|} \leq 0.$$

5. В трапеции $ABCD$ боковая сторона AD перпендикулярна основаниям и равна 9, $CD = 12$, а отрезок AO , где O – точка пересечения диагоналей трапеции, равен 6. Найдите угол AOB .

6. Считая x, y целыми числами, решите систему уравнений

$$\begin{cases} \log_4 (\sqrt{y} + 1) \cdot \log_{(y-2)^2} (x+1) + \log_{\frac{1}{(y-2)^2}} 3 = 0, \\ 4^{x+y} - 256 \cdot 2^{x+y} + 16384 = 0. \end{cases}$$

Вариант 2

(факультеты специальной техники и информационной безопасности)

1. Вычислите $\sin(\arctg(-3))$.

2. Решите неравенство

$$\log_x 3 \cdot \log_9 \left(\frac{5-12x}{12x-8} \right) \leq \frac{1}{2}.$$

3. Решите уравнение

$$3 \cos^4 x + 6 \sin^4 x - 5 \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

4. Имеются три бутылки раствора спирта различной концентрации. При смешивании 3 литров из первой бутылки, 5 литров из второй и 7 литров из третьей бутылки получается 6%-й раствор. При смешивании 1 литра из первой бутылки, 3 литров из второй и 4 литров из третьей получается 5%-й раствор спирта. Какова концентрация раствора, полученного при смешивании 3 литров из первой бутылки, 1 литра из второй и 2 литров из третьей бутылки?

5. На катете AC прямоугольного треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая гипотенузу AB в точке K . Найдите площадь треугольника CKB , если радиус окружности, описанной около треугольника ABC , равен R и угол ABC равен β .

6. При каких значениях параметра a уравнение

$$(a-1)x^2 - (a+1)x + a = 0$$

имеет единственное решение x_0 , которое удовлетворяет условиям $0 < x_0 < 3$?

Вариант 3

(олимпиада-2007, все факультеты)

1. Упростите выражение

$$\sqrt{14 + 6\sqrt{5}} + \sqrt[3]{38 - 17\sqrt{5}}.$$

(2 балла)

2. В судне возникла течь, и один из отсеков судна был затоплен. Команда из 10 матросов откачивает воду из отсека за 6 часов, команда из 14 матросов – за 4 часа. За сколько часов откачают воду 18 матросов? (3 балла)

3. Докажите, что при пересечении выпуклого четырехугольника и выпуклого пятиугольника не может получиться десятиугольник. (3 балла)

4. Найдите все корни уравнения $|\sin(2x-1)| = \cos x$, удовлетворяющие условию $-\pi \leq x \leq \pi$. (4 балла)

5. Хорда DB длины a окружности радиуса R продолжена за точку B до точки E так, что $BE = 2a$. Диаметр AB продолжен за точку B до точки C так, что $BC = R$. Найдите периметр четырехугольника $ADCE$. (4 балла)

6. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 4^{x+y-1} + 3 \cdot 4^{2y-1} \leq 2, \\ x + 3y \geq 2 - \log_4 3. \end{cases}$$

(5 баллов)

7. Докажите, что для любого натурального числа n число $n^2 + 5n + 53$ не может делиться на 121. (5 баллов)

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(факультеты специальной техники и информационной безопасности)

1. Какую скорость v должен иметь вагон поезда, равномерно движущегося по закруглению горизонтальной дороги, чтобы шар, подвешенный на нити к потолку вагона, отклонился от вертикали на угол $\alpha = 45^\circ$ (рис. 1)? Шар вместе с вагоном движется по дуге окружности радиусом $R = 100$ м. При расчетах принять ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

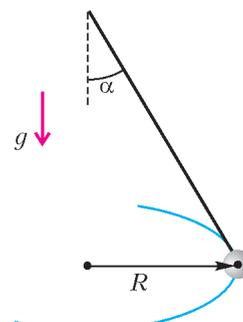


Рис. 1

2. Вагон массой $m_1 = 30$ т движется по гладким рельсам со скоростью $v_1 = 0,8$ м/с и сталкивается с вагоном массой $m_2 = 10$ т, движущимся ему навстречу с такой же скоростью. В результате столкновения произошла сцепка, и вагоны стали двигаться как единое целое. Найдите величину скорости вагонов v после столкновения.

3. Плоский воздушный конденсатор зарядили от источника тока и отключили от него. Как и во сколько раз изменится разность потенциалов на обкладках конденсатора, если увеличить расстояние между обкладками вдвое и заполнить конденсатор диэлектриком с диэлектрической проницаемостью $\epsilon = 3$?

4. Одноатомный идеальный газ, изобарически расширяясь, совершил работу $A = 4620$ Дж. Найдите приращение его внутренней энергии ΔU .

5. В однородном магнитном поле находится плоская рамка площадью $S = 0,001$ м², состоящая из $N = 5$ витков тонкой проволоки общим сопротивлением $R = 10$ Ом, концы которой замкнуты накоротко. Плоскость рамки перпендикулярна линиям поля. Магнитная индукция убывает с постоянной скоростью $\Delta B/\Delta t = 0,01$ Тл/с. Найдите силу тока I в рамке.

Вариант 2

(факультеты прикладной математики и информационной безопасности)

1. Два спутника движутся вокруг Земли по круговым орбитам, лежащим в одной плоскости, со скоростями $v_1 = 7,8$ км/с и $v_2 = 7,6$ км/с. Пользуясь только данными, приведенными в условии задачи, определите минимальное возможное расстояние l между спутниками во время их движения. Радиус Земли принять равным $R_3 = 6400$ км. Ускорение свободного падения на поверхности Земли $g = 9,8$ м/с².

2. При выстреле из пушки, находящейся на гладкой горизонтальной поверхности, вылетает снаряд под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту. За счет отдачи пушка откатывается назад со скоростью $v = 2$ м/с. Масса пушки без снаряда $M = 500$ кг. Найдите величину импульса p системы, состоящей из пушки и снаряда, сразу после выстрела.

3. Электрон через отверстие в обкладке влетает внутрь плоского конденсатора и, двигаясь вдоль линии напряженности электрического поля, полностью теряет свою скорость, пройдя путь $l = 0,016$ м. На каком расстоянии x от обкладки электрон потеряет скорость, если его начальную скорость уменьшить в $n = 2$ раза, а разность потенциалов обкладок конденсатора увеличить в такое же число раз? Действием силы тяжести пренебречь.

4. В калориметре смешивают жидкость при температуре $t_1 = 20$ °С с жидкостью при температуре $t_2 = 80$ °С с вдвое большей массой. Удельные теплоемкости жидкостей одинаковы. Найдите температуру смеси t .

5. Тонкий стержень длиной $L = 70$ см согнули под прямым углом и положили на горизонтальную поверхность. Длина одной из частей стержня, образующих прямой угол, $L_1 = 30$ см. В пространстве имеется однородное вертикальное магнитное поле с индукцией $B = 4$ мТл. Найдите величину результирующей силы Ампера F , которая действует на стержень, если по нему пропустить ток $I = 10$ А.

Вариант 3

(олимпиада-2007, все факультеты)

1. По направлению к бегущей прямолинейно с постоянной скоростью $v_{л} = 45$ км/ч лисе бежит собака. Скорость собаки все время направлена на лису и равна $v_{с} = 55$ км/ч. В некоторый момент времени оказалось, что вектор скорости

собаки образует угол $\alpha = 45^\circ$ с прямой, вдоль которой движется лиса, а расстояние между собакой и лисой равно $L = 150$ м. Найдите ускорение собаки в этот момент времени. (5 баллов)

2. Через невесомый блок с неподвижной горизонтальной осью перекинута легкая нерастяжимая нить, к концам которой прикреплены грузы массами $m_1 = 300$ г и $m_2 = 200$ г. С каким ускорением движутся грузы? Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с². Трением в оси блока пренебречь. (3 балла)

3. В цилиндрическом сосуде с водой, стенки которого вертикальны, плавает деревянная дощечка. Если на нее сверху положить стеклянную пластинку, то дощечка с пластинкой останутся на плаву, но уровень воды в сосуде поднимется на $\Delta h = 20$ мм. На какую величину Δh_1 изменится уровень воды в сосуде с плавающей дощечкой, если ту же стеклянную пластинку не класть на дощечку, а бросить на дно сосуда? Плотность стекла $\rho_{с} = 2$ г/см³, плотность воды $\rho_{в} = 1$ г/см³. (4 балла)

4. Массивное тело, двигаясь со скоростью $3v$ по горизонтальной поверхности, абсолютно упруго сталкивается с шаром, движущимся со скоростью v в ту же сторону (рис.2). Масса шара m много меньше массы тела. На какую величину ΔE изменится кинетическая энергия шара в результате удара? Трением пренебречь. (3 балла)

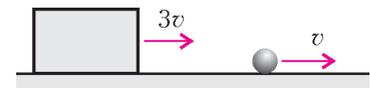


Рис. 2

5. Небольшой сосуд, стенки которого не проводят тепло, откачан до глубокого вакуума и находится в атмосфере идеального одноатомного газа, имеющего температуру T_0 . В некоторый момент времени в сосуде открывают кран и происходит заполнение сосуда газом. Какую температуру T будет иметь газ в сосуде сразу после его заполнения? (4 балла)

6. На рисунке 3 изображена электрическая цепь, состоящая из шести одинаковых звеньев. Все сопротивления одинаковые.

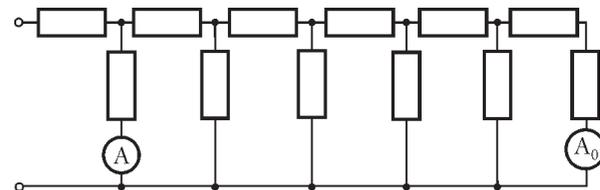


Рис. 3

наковые. На входные клеммы подано постоянное напряжение. В первое и последнее звенья цепи включены идеальные амперметры A и A_0 , при этом амперметр A показывает ток $I = 8,9$ А. Какой ток I_0 показывает амперметр A_0 ? (5 баллов)

7. Горизонтальные рельсы находятся на расстоянии $l = 0,3$ м друг от друга. На них лежит стержень, перпендикулярный рельсам. Какой должна быть индукция B однородного вертикального магнитного поля, чтобы стержень начал двигаться при пропускании по нему тока силой $I = 50$ А? Коэффициент трения стержня о рельсы $\mu = 0,2$. Масса стержня $m = 0,5$ кг. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с². (3 балла)

8. В отверстие радиусом $R = 1,5$ см в тонкой непрозрачной перегородке вставлена тонкая собирающая линза. Точечный источник света расположен на главной оптической оси линзы по одну сторону перегородки. По другую сторону перегородки находится экран. Экран, вначале соприкасающийся с линзой, отодвигают от линзы. При этом радиус

светлого пятна на экране плавно (монотонно) увеличивается и на расстоянии $L = 18$ см от перегородки достигает значения $r_1 = 3$ см. Если линзу убрать, оставив экран на месте, то радиус пятна на экране станет $r_2 = 4,5$ см. Определите фокусное расстояние F линзы. (4 балла)

Публикацию подготовили А.Леднев, А.Пичкур

Московский государственный институт
электронной техники
(технический университет)

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Тело, двигаясь прямолинейно и равнозамедленно, прошло за два одинаковых последовательных промежутка времени $\tau = 2$ с пути $s_1 = 26$ м и $s_2 = 10$ м. Определите величину a ускорения тела.

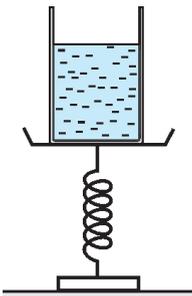


Рис. 1

2. На столе стоят пружинные весы, на весах – цилиндрический сосуд с водой (рис.1). Когда в сосуд долили некоторое количество воды, свободная поверхность воды в сосуде осталась относительно стола на прежнем уровне. Определите жесткость k пружинных весов. Внутренний радиус сосуда $r = 8$ см.

3. Вокруг горизонтальной оси O может вращаться легкий жесткий стержень, на котором на одинаковых расстояниях $l = 40$ см от оси закреплены небольшие грузы с массами m и M (рис.2; ось O перпендикулярна плоскости рисунка). Первоначально стержень удерживали в горизонтальном положении, а затем без толчка отпустили. Найдите максимальную скорость v грузов, если отношение их масс $M/m = 3$. Трением и сопротивлением воздуха пренебречь.

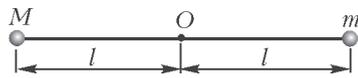


Рис. 2

4. Во сколько раз отличаются средние квадратичные скорости молекул водорода и кислорода в воздухе нашей аудитории?

5. Какое количество теплоты Q нужно сообщить в изобарном процессе одноатомному идеальному газу, чтобы увеличить его объем в $n = 2$ раза? В исходном состоянии объем и давление газа равны $V = 0,1$ м³ и $p = 100$ кПа.

6. Конденсатор, заряд которого $q = 50$ нКл, подключили к источнику напряжением $U = 100$ В. В результате энергия конденсатора увеличилась в $n = 4$ раза. Определите емкость C конденсатора.

7. При работе утюга вилка электрического шнура из-за плохого контакта с розеткой немного нагревается. Определите сопротивление r контакта «вилка-розетка», считая, что мощность выделения тепла в контакте $P_k = 2$ Вт, напряжение на спирали утюга $U = 220$ В, мощность спирали $P = 660$ Вт.

8. Тонкий металлический стержень подвешен в однородном магнитном поле на двух гибких проводниках, подключенных к источнику постоянного напряжения. Сначала стержень удерживали так, что вектор индукции магнитного поля составлял угол $\alpha = 60^\circ$ со стержнем, а затем стержень установили перпендикулярно вектору индукции. Во сколько раз изменилась при этом сила Ампера, действующая на стержень со стороны магнитного поля?

9. Наблюдатель ростом $h = 170$ см, находясь на рассто-

янии $L = 20$ м от дерева, видит его верхушку в маленьком зеркале, расположенном горизонтально на земле на расстоянии $l = 2$ м от его ног. Определите высоту H дерева.

10. Работа выхода электронов из алюминия равна $A_1 = 3,74$ эВ, а из цезия – $A_2 = 1,89$ эВ. Во сколько раз отличаются длины волн, соответствующие красным границам фотоэффекта для этих металлов?

Физические постоянные

Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с²

Плотность воды $\rho = 1000$ кг/м³

Молярная масса водорода $M_v = 2$ г/моль

Молярная масса кислорода $M_k = 32$ г/моль

Вариант 2

(олимпиада-2007)

1. С какой горизонтальной скоростью v_0 нужно бросить камень с вершины горы, склон которой образует угол α с горизонтом, чтобы он упал на склон горы на расстоянии L от вершины? Ускорение свободного падения g . Сопротивлением воздуха пренебречь.

2. На гладкой горизонтальной поверхности лежит доска (рис.3). На доску опирается свободный конец тонкой однородной балки, шарнирно закрепленной под углом α к вертикали. Какую горизонтальную силу F нужно приложить к доске, чтобы медленно затягивать ее под балку с постоянной скоростью? Масса балки m , коэффициент трения между балкой и доской μ , ускорение свободного падения g .

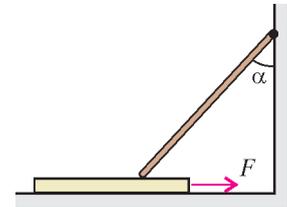


Рис. 3

3. Тело массой $m = 1$ кг бросили под углом к горизонту. На высоте $h = 10$ м его кинетическая энергия оказалась равной $E_k = 100$ Дж. Какой была величина v_0 начальной скорости тела? Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с². Сопротивлением воздуха пренебречь.

4. Найдите плотность ρ водорода в сосуде объемом $V = 40$ л, если число его молекул в сосуде вдвое больше числа Авогадро N_A . Молярная масса водорода $M = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

5. Идеальный газ переводят из состояния 1 в состояние 2 в процессе, график которого изображен на рисунке 4. Считая известными давление p_1 и объемы V_1, V_2, V_3 , определите давление p_2 , при котором работа, совершенная газом в данном процессе, равна нулю.

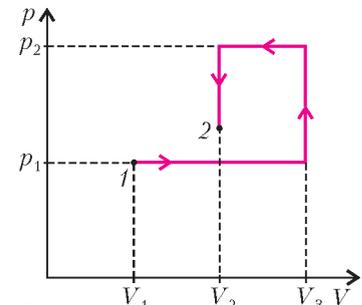


Рис. 4

6. Три одинаковых незаряженных металлических шарика 1, 2 и 3 расположены вдоль одной прямой и связаны двумя одинаковыми длинными изолирующими нитями (рис.5). Четвертый такой же шарик зарядили и по очереди прикоснулись им к первым трем в порядке возрастания их номеров. Во сколько раз после этого отличаются силы натяжения нитей?

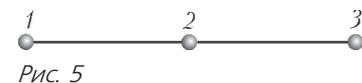


Рис. 5

7. Резистор сопротивлением $R = 18$ кОм и вольтметр соединены последовательно и подключены к источнику постоянного напряжения $U = 24$ В. Вольтметр при этом показывает напряжение $U_1 = 20$ В. Определите сопротивление r вольтметра.

8. Катушка индуктивностью L присоединена к плоскому конденсатору с площадью обкладок S и расстоянием между ними d . Чему равна диэлектрическая проницаемость ϵ среды, заполняющей пространство между обкладками, если амплитуда силы тока в контуре I_m , а амплитуда напряжения на конденсаторе U_m ? Электрическая постоянная ϵ_0 . Активным сопротивлением контура пренебречь.

9. Предмет находится на расстоянии $d = 20$ см от тонкой линзы, при этом размер действительного изображения в $\Gamma = 3$ раза превосходит размер предмета. Постройте ход лучей, формирующих изображение, и определите фокусное расстояние F линзы.

Публикацию подготовили А.Берестов, И.Горбатый, В.Гундырев, С.Куклин, И.Федоренко

Московский государственный технический университет им. Н.Э.Баумана

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Первый автомобиль проходит в минуту на 300 м больше, чем второй, поэтому время прохождения одного километра у него на 10 секунд меньше. На сколько метров увеличивается отставание второго автомобиля от первого за время, пока первый проходит 1 км?

2. Решите уравнение $\cos 2x = 3 + 5 \sin x$. Укажите его корни, лежащие в промежутке $[-3\pi/2; \pi/2]$.

3. Решите уравнение

$$\left(2 + \log_2 \left(\frac{5}{4} - x\right)\right) \log_x \frac{1}{2} = 1.$$

4. Решите неравенство $\frac{x\sqrt{x}-1}{x-1} > \sqrt{x} + \frac{3}{8}$.

5. Какую наибольшую площадь может иметь треугольник, ограниченный осью Ox , прямой $x = 3/2$ и касательной к графику функции $y = 2x^2$ в точке с абсциссой x_0 , если $0 < x_0 < 3$?

6. Укажите все значения a , при которых уравнение

$$\sqrt{8(|x| - x)} = 4 + a(x - 8)$$

имеет единственный корень. Найдите этот корень при каждом a .

7. Основанием пирамиды $TABC$ служит треугольник ABC , все стороны которого равны 4, а высота пирамиды совпадает с боковым ребром TA . Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через середины стороны основания AC и бокового ребра TB и параллельной медиане BD боковой грани BTC , если расстояние от вершины пирамиды T до секущей плоскости равно $1/2$.

Вариант 2

1. Один рабочий взялся выполнить заказ за 15 дней при условии, что в течение 4 дней ему будет помогать второй рабочий. Если бы этот заказ был поручен каждому рабочему отдельно, то для его выполнения первому потребовалось бы на 6 дней меньше, чем второму. За сколько дней каждый из них может выполнить заказ?

2. Найдите все корни уравнения

$$\cos 3x + \cos 5x + \sqrt{2} \cos 4x = 0,$$

принадлежащие промежутку $[\pi/2; \pi]$.

3. Решите уравнение $2^{1+\sqrt{x}} + 2^{2-\sqrt{x}} = 9$.

4. Решите неравенство $\log_2 \frac{x^2 - 2x}{x - 3} < 3$.

5. Какая наибольшая площадь может быть у равнобедренного треугольника, основание которого параллельно оси x , а координаты вершин удовлетворяют уравнению $|y| = 9 - (x - 2)^2$?

6. Определите все значения a , при которых уравнение $4x^2 - 8|x| + (2a + |x| + x)^2 = 4$ имеет ровно два различных корня. Укажите эти корни при каждом из найденных значений a .

7. Основанием пирамиды $TABC$ служит треугольник ABC , все стороны которого равны 4, а высота пирамиды, равная 3, совпадает с боковым ребром TA . Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через середину стороны основания AB и центр сферы, описанной около пирамиды, и параллельной медиане AD боковой грани TAB .

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Напишите формулировку закона Ома для замкнутой электрической цепи. Напишите формулу закона Ома для электрической цепи, изображенной на рисунке 1. Укажите единицы измерения входящих в нее физических величин.

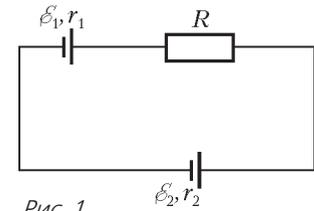


Рис. 1

2. Какую работу A нужно совершить над одним моле идеального газа для его изобарного сжатия, при котором концентрация молекул в конечном состоянии в $\alpha = 3$ раз больше, чем в начальном? Первоначальная температура газа $T_1 = 400$ К.

3. Протон и электрон, двигаясь с одинаковыми скоростями, попадают в однородное магнитное поле. Во сколько раз радиус кривизны траектории протона R_1 больше радиуса кривизны траектории электрона R_2 ?

4. Найдите наибольший порядок спектра для желтой линии натрия с длиной волны 589 нм, если период дифракционной решетки 2 мкм.

5. Однородный стержень опирается о вертикальную плоскость, образуя с горизонтальной плоскостью угол $\alpha = 60^\circ$ (рис. 2). Коэффициент трения между стержнем и горизонтальной плоскостью $\mu_1 = 0,25$. Чему равна минимальная величина коэффициента трения μ_2 между стержнем и вертикальной плоскостью, при которой стержень будет находиться в равновесии?

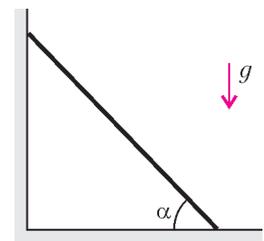


Рис. 2

6. Две бусинки, имеющие заряды $+q$ и $+3q$, удерживаются на длинном горизонтальном изолирующем стержне на расстоянии L_0 друг от друга (рис. 3). Бусинку, имеющую заряд $+3q$ и массу m , отпускают, и она начинает скользить по стержню. Коэффициент трения скольжения равен μ . Найдите максимальное расстояние L между бусинками.

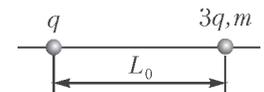


Рис. 3

7. К оси колеса, масса m которого равномерно распределена по ободу, присоединена пружина жесткостью k (рис. 4). Второй конец пружины

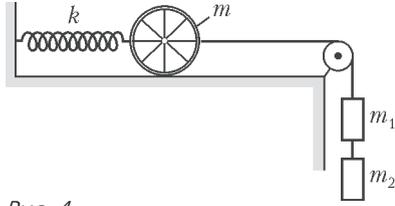


Рис. 4

прикреплен к стене. С помощью нити, перекинутой через блок, к оси колеса подвешены два груза с массами $m_1 = m$ и $m_2 = 3m$. Система пришла в движение с нулевой начальной скоростью при недеформированной пружине. Считая, что колесо катится по горизонтальной поверхности без проскальзывания, определите максимальную силу натяжения нити, соединяющей грузы, при их дальнейшем движении. Массами пружины, нити и блока пренебречь.

Вариант 2

1. Напишите формулировку закона Ома для однородного участка электрической цепи. Напишите формулу закона Ома для участка цепи, изображенного на рисунке 5. Укажите единицы измерения входящих в нее физических величин.

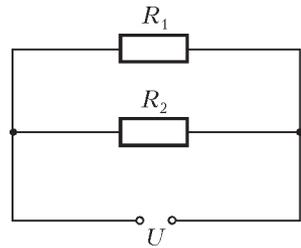


Рис. 5

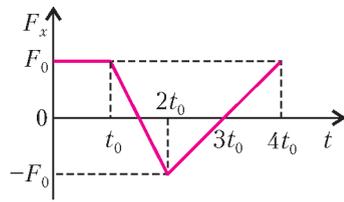


Рис. 6

2. На неподвижное тело массой m , находящееся на горизонтальной абсолютно гладкой плоскости, в момент времени $t = 0$ начинает действовать сила, направленная вдоль горизонтальной оси X . На рисунке 6 представлен график зависимости проекции F_x этой силы от времени t . Определите модуль импульса тела в момент времени $t = 4t_0$.

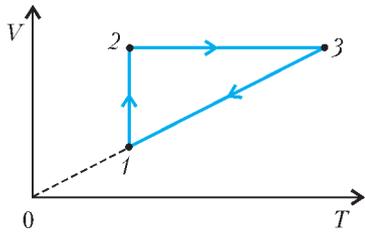


Рис. 7

3. Изменения состояния идеального газа при некотором круговом процессе $1-2-3-1$ показаны на графике зависимости объема газа от абсолютной температуры (рис.7). Изобразите этот цикл на графике зависимости давления газа от объема. Укажите, на каких участках графика газ получает тепло извне.

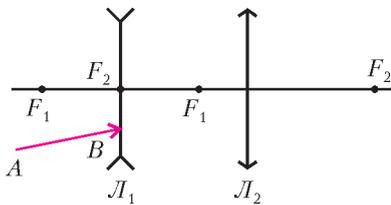


Рис. 8

4. Оптическая система состоит из рассеивающей линзы L_1 и собирающей линзы L_2 с общей главной оптической осью (рис.8). Главные фокусы рассеивающей линзы обозначены F_1 , а собирающей – F_2 . Постройте дальнейший ход луча AB через оптическую систему.

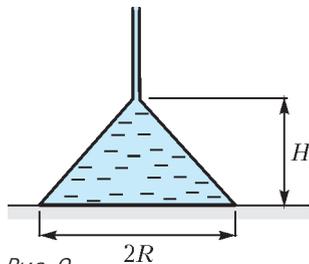


Рис. 9

5. Тонкостенная коническая воронка плотно стоит на горизонтальном столе (рис.9). Через отверстие в тонкой трубке в воронку наливают

жидкость плотностью ρ . Когда жидкость заполняет всю коническую полость воронки, она приподнимает воронку и начинает вытекать из-под нее. Определите массу воронки, если радиус ее основания R , а высота конической части H .

6. Определите максимальную амплитуду гармонических колебаний системы, состоящей из двух брусков и двух невесомых пружин (рис.10), при которой бруски будут совершать колебания по горизонтальной плоскости без проскальзывания относительно друг друга. Жесткости пружин k и $2k$, масса нижнего бруска m , верхнего $2m$, коэффициент трения между брусками μ . В положении равновесия пружины не деформированы. Трение между нижним бруском и плоскостью отсутствует.

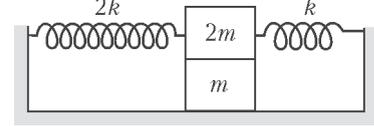


Рис. 10

7. По металлической ленте, толщина которой h , течет ток I (рис.11). Лента помещена в однородное магнитное поле, индукция которого равна B и направлена перпендикулярно поверхности ленты. Определите разность потенциалов между точками A и C ленты, если концентрация свободных электронов в металле равна n .

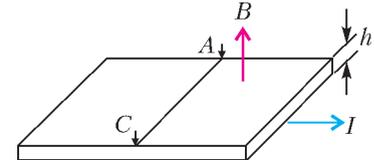


Рис. 11

Публикацию подготовили Л.Паршев, Ю.Струков

Московский инженерно-физический институт

(олимпиада Федерального агентства по атомной энергии РФ)

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

- 1. Постройте график функции $y = \frac{3x - 2}{2x + 1}$.
- 2. Найдите производную функции

$$f(x) = 3x^3 - 6x^4 - \lg(2x) + \sqrt{9 - x^2}.$$

- 3. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y = \cos^2 x + \sin x$ на отрезке $[-\pi; \frac{2\pi}{3}]$.

4. При всех значениях параметра $a < 0$ вычислите площадь фигуры, ограниченной кривыми, задаваемыми уравнениями: снизу $y = a\sqrt{x}$, справа $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ и сверху $y = 0$.

5. Напишите уравнение касательной, проведенной из точки $B(3; 1)$, к графику функции $y = -2/x$.

6. Окружность с центром в точке O , вписанная в треугольник ABC , касается сторон AB , BC и CA в точках K , L и M соответственно; $\angle KOL = 5\pi/6$, $\sin \angle MOL = 3/5$. Радиус окружности, описанной около треугольника ABC , равен 6. Найдите стороны и углы треугольника ABC .

Вариант 2

- 1. Постройте график функции $y = \log_3(6 + 3x)$.
- 2. Найдите производную функции

$$f(x) = -3x^3 - 6x^5 - 4d + \log_3(dx)$$

при всех значениях параметра d .

- Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y = 3x \cos 3x - \sin 3x$ на отрезке $[-\frac{\pi}{4}; \pi]$.
- Вычислите площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = -\sqrt{4x}$ и $y = -\frac{x^2}{4}$.
- Из точки $B(2; 0)$ проведена касательная к окружности $(x + 3)^2 + (y + 3)^2 = 4$. Найдите абсциссу точки касания.
- Стороны треугольника ABC находятся в отношении $AB : BC : CA = 5 : 7 : 6$. На сторонах треугольника AB, BC и CA взяты точки K, L, M соответственно так, что $AK : KB = 2 : 3, BL : LC = 3 : 4, CM : MA = 2 : 4$. Найдите площадь треугольника AKM и длину отрезка KM , если площадь треугольника ABC равна 60.

ФИЗИКА

Вариант 1

- Тело массой m , движущееся со скоростью v по горизонтальной поверхности, налетает на пружину жесткостью k , второй конец которой закреплен (рис.1). На какую величину сожмется пружина к тому моменту времени, когда скорость тела станет равна $v/3$? Трение отсутствует.

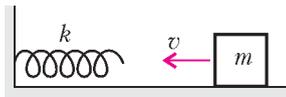


Рис. 1

- Плавающая в жидкости, тело кубической формы погружается на глубину h_1 , а в другой жидкости – на глубину h_2 . Какова будет глубина погружения тела в жидкости, плотность которой равна среднему арифметическому плотностей первых двух жидкостей? Считать, что во всех случаях тело расположено в жидкости так, что две его грани параллельны поверхности.

- Два маленьких шарика связаны непроводящей пружиной. Если шарики зарядить одинаковыми зарядами q , то длина пружины будет равна l_1 , а если зарядить одинаковыми зарядами $2q$, то длина пружины будет равна l_2 . Найдите жесткость пружины.

- В горизонтальном цилиндрическом сосуде длиной l находятся n подвижных теплопроницаемых поршней, делящих сосуд на $n + 1$ отсеков (рис.2). Первоначально температура газа во всех отсеках равна T_0 , а их объемы одинаковы. Затем газ в самом левом отсеке нагревают до температуры T_1 , а температуру газа в других отсеках поддерживают равной T_0 . На сколько сместится при этом самый правый поршень?

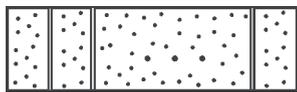


Рис. 2

- На поверхности стола находится вертикальный цилиндр радиусом R , на который намотана длинная невесомая нерастяжимая нить. К концу свободного куска нити, длина которого l_0 , привязано тело. Телу сообщают скорость v , направленную перпендикулярно нити так, что нить начинает сматываться с цилиндра (рис.3, вид сверху). Найдите время, за которое длина свободного куска нити увеличится вдвое. Трение отсутствует.



Рис. 3

Вариант 2

- Груз массой $m = 1$ кг лежит на полу кабины лифта. При этом груз действует на пол лифта с силой $F = 5$ Н. Найдите величину и направление ускорения лифта. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

- Точечный источник света расположен на главной оптической оси тонкой собирающей линзы на расстоянии $d = 30$ см от линзы (рис.4). Фокусное расстояние линзы $F = 10$ см. Линзу сместили на расстояние $a = 2$ см в направлении, перпендикулярном главной оптической оси. На какое расстояние переместилось при этом изображение источника?

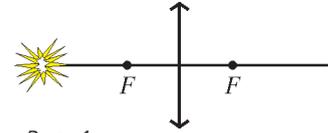


Рис. 4

- В баллоне содержится ν молей одноатомного идеального газа при температуре T . При изохорическом нагревании газа средняя скорость молекул газа увеличилась в n раз. Найдите количество теплоты, подведенное к газу.

- Корабль движется на север со скоростью v . Ветер дует с северо-запада под углом α к параллели. Скорость ветра, измеренная на корабле, равна u . Найдите скорость ветра относительно земли.

- Индуктивность кольца известна и равна L (рис.5). Индуктивность контура, представляющего собой сектор кольца того же радиуса, опирающийся на угол $\pi/2$, также известна и равна L_1 . Найдите индуктивность контура, представляющего сектор кольца того же радиуса, опирающийся на угол $3\pi/2$.

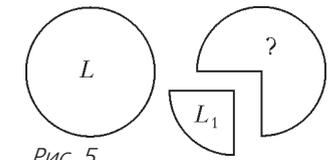


Рис. 5

Публикацию подготовили С.Муравьев, О.Нагорнов

Новосибирский государственный университет

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Физический факультет

Каждый вариант состоял из задач трех типов. Первые три задачи – расчетные, различной степени трудности: от почти стандартных до сравнительно сложных, требующих смекалки, глубоких знаний, умения ориентироваться в непривычной или усложненной ситуации.

Четвертая задача – задача-оценка. Для ее решения необходимо разобраться в рассматриваемом физическом явлении, сформулировать простую (так как нужна только оценка) модель этого явления, выбрать разумные числовые значения величин и, наконец, получить численный результат, более или менее соответствующий реальности. В тексте задачи подчеркивается, что абитуриент может сам выбрать необходимые для решения задачи величины и их числовые значения.

Пятая задача – задача-демонстрация, при решении которой необходимо объяснить физическое явление, демонстрируемое в аудитории. Среди различных факторов, влияющих на процесс, необходимо выделить главный.

Вариант 1

- Амперметры A_1 и A_2 имеют одинаковые сопротивления r и показывают токи I_1 и I_2 при включении в схему, приведенную на рисунке 1. Найдите сопротивление резистора R .

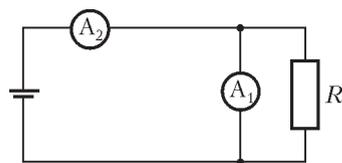


Рис. 1

- Частицы с зарядом q и массой m движутся в магнитном поле с индукцией B по круговой орбите радиусом R и попадают в зазор

между электродами (рис.2). Чтобы вывести пучок с круговой орбиты, на электроды подают напряжение, создающее однородное электрическое поле между ними. Какова напряженность этого поля, если частицы в зазоре между электродами летят с неизменной по величине и направлению скоростью?

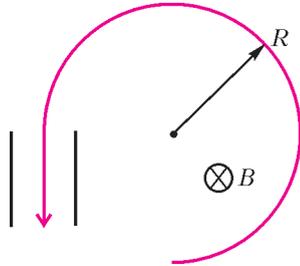


Рис. 2

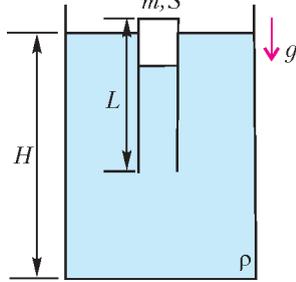


Рис. 3

3. В сосуде с водой глубиной H плавает перевернутая тонкостенная цилиндрическая пробирка длиной L , массой m и сечением S , содержащая некоторое количество воздуха (рис.3). Температуру системы медленно понижают. При температуре T_1 пробирка начинает тонуть и опускается до дна. Определите, до какой температуры T_2 теперь надо нагреть систему, чтобы пробирка всплыла? Считать, что плотность воды ρ не зависит от температуры, а воздух – идеальный газ. Ускорение свободного падения g , атмосферное давление p_0 .

4. Спортсмен, разогнавшись на спортивных санках, несется, лежа на них, по горизонтальному льду. Оцените, при



Рис. 4

какой скорости он рискует перевернуться, если один полоз санок наедет на выступ длиной 20 см и высотой 3 см (рис.4).

5. На экран через непрозрачную пластину с двумя отверстиями падает свет от двух источников. При одном положении

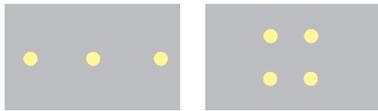


Рис. 5

пластины на экране видны три световых пятна, расположенных на прямой линии, при повороте пластины на 90° на экране видны четыре пятна в вершинах прямоугольника (рис.5). Объясните демонстрируемое явление.

Вариант 2

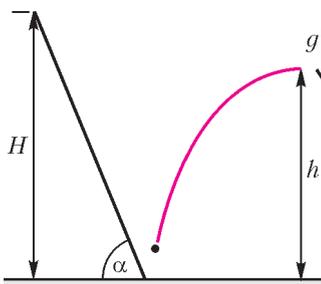


Рис. 6

1. Шарик соскальзывает с высоты H по наклонной плоскости и упруго ударяется о горизонтальный пол (рис.6). На какую наибольшую высоту он подпрыгнет? Угол между наклонной плоскостью и полом α , трения нигде нет.

2. Изображение точечного источника находится на расстоянии f от нее. Найдите фокусное

расстояние линзы F и расстояние от источника до линзы d , если при опускании линзы на h перпендикулярно оси изображение смещается на H (рис.7).

3. Четыре частицы имеют одинаковые заряды q . Вначале

их удерживают на прямой (рис.8) так, что расстояния r между соседними частицами равны ($AB = BC = CD$). Частицы отпускают. Они разлетаются, расстояния между соседними частицами увеличиваются, но остаются одинаковыми ($A'B' = B'C' = C'D'$). Известно, что масса каждой из внутренних частиц равна m . Найдите массы M крайних частиц, а также конечные скорости каждой частицы.

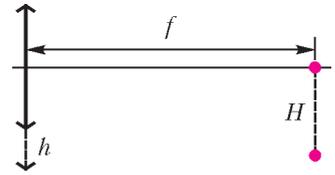


Рис. 7

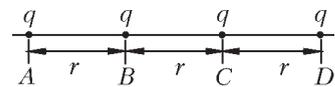


Рис. 8

4. За спутником, летящим по орбите в разреженной атмосфере, образуется область почти полного вакуума. Оцените наименьшую скорость молекул воздуха, которые могут оказаться на оси движения сзади спутника на расстоянии порядка его радиуса.

5. Две дощечки подвешены на проволочках, прикрепленных к стержню. Одна дощечка частично погружена в воду, другая лежит на подставке. При медленном подъеме стержня обе дощечки поднимаются. Когда стержень резко дергают вверх, то за ним поднимается лишь дощечка, лежащая на подставке, а проволочка, привязанная к дощечке, частично погруженной в воду, обрывается. Объясните демонстрируемое явление.

Вариант 3

1. С края горизонтального стола с начальной скоростью v слетает шарик. Через какое время величина его скорости увеличится на $1/4$ начальной скорости? Ускорение свободного падения g .

2. Цилиндр радиусом R и массой M соприкасается с дном и боковой стенкой наклонной прямоугольной коробки (рис. 9). Второй цилиндр меньшего радиуса r и массой m соприкасается с первым цилиндром и дном коробки. Найдите отношение масс M/m , если при угле наклона дна с горизонталью α первый цилиндр начинает подниматься. Трение между цилиндрами, стенкой и дном коробки отсутствует.

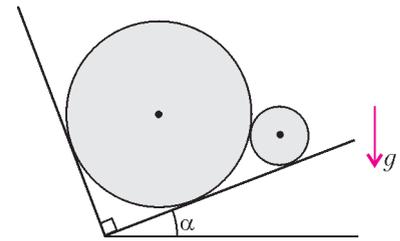


Рис. 9

3. На конце горизонтальной спицы закреплен заряд q , а на расстоянии r от него нитью удерживается насаженная на спицу бусинка массой m с таким же зарядом q (рис.10). Спица движется с горизонтальной скоростью v , направленной в сторону бусинки. Нить пережигают, а спицу, прикладывая к ней силу, продолжают двигать с прежней скоростью. Найдите работу этой силы к моменту времени, когда расстояние между зарядами увеличится до R . Трения нет.

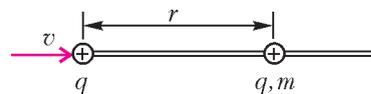


Рис. 10

4. В открытую сверху и снизу вертикальную трубу поступает углекислый газ (рис.11). Оцените, во сколько раз его температура должна превышать температуру окружаю-

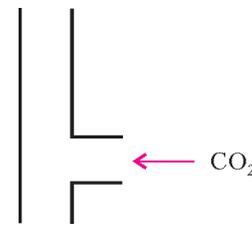


Рис. 11

щего воздуха, чтобы углекислый газ поднимался по трубе и выходил через верхнее отверстие.

5. На наклонной доске покоится тело. Оно не сползает, даже если заметно покачивать доску при неизменном ее наклоне. Однако при постукивании по доске сбоку тело сползает без сколь-нибудь заметных смещений доски. Объясните явление.

Публикацию подготовили И.Воробьев, Г.Меледин, Б.Шварц, Т.Рыбницкая

Российский государственный педагогический университет им. А.И.Герцена

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

(факультеты математики, физики, информационных технологий, технологии и предпринимательства)

Вариант 1

1. Решите неравенство $\frac{\sqrt{9-x^2}}{x+1} > 0$.

2. Найдите решения уравнения $\cos(\pi - 2x) = 1 - \sin^2 2x$.

3. Длины сторон треугольника 3, 5 и 7. Определите радиус окружности, описанной около треугольника.

4. При каких значениях x числа 32^x , 6^{x^2+1} , 3^{5x} являются последовательными членами геометрической прогрессии?

5. Найдите решения неравенства $\log_2 x - \log_x 2 \geq \frac{3}{2}$.

6. Найдите двузначное число, если произведение его цифр равно 28, а его сумма с числом, записанным этими же цифрами, но в обратном порядке, равна 121.

7. Вычислите $\operatorname{tg}^2\left(\frac{1}{2} \arcsin \frac{3}{5}\right)$.

8. Один из корней уравнения $x^3 + ax^2 - 7x + 6 = 0$ равен 1. Вычислите два других корня.

9. Полная поверхность правильной четырехугольной пирамиды равна S , плоский угол боковой грани при вершине равен α . Найдите объем пирамиды.

Вариант 2

1. Решите неравенство $\frac{1}{x+2} \leq \frac{2}{x+5}$.

2. Найдите решения уравнения $\sin 2x + 2 \cos x = 0$ из промежутка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

3. В треугольнике, площадь которого равна 8, стороны $AC = b = 5$, $AB = c = 4$. Найдите длину третьей стороны ($\angle A < 90^\circ$).

4. Решите уравнение $2\sqrt{x+1} = 3\sqrt[4]{x+1} + 77$.

5. Найдите область определения функции

$$f(x) = \sqrt[6]{2^x + 2^{|x|} - 2\sqrt{2}}.$$

6. Вычислите $\cos(2 \operatorname{arctg}(\sqrt{2} + 1))$.

7. Сколько граммов чистого спирта надо добавить к 735 г 16%-го раствора йода в спирте, чтобы получить 10%-й раствор?

8. Сколько решений в зависимости от параметра a имеет уравнение

$$a - ||x - 2| - 2| = 0 ?$$

9. Основанием пирамиды служит прямоугольник. Из боковых граней две перпендикулярны к плоскости основания, а две другие образуют с ней углы α и β . Высота пирамиды равна H . Определите объем пирамиды.

Публикацию подготовили Г.Хамов, Т.Свенцицкая, О.Корсакова

Российский государственный технологический университет им. К.Э.Циолковского (МАТИ)

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Найдите наименьший корень уравнения

$$|x + 2| = \sqrt{20 - 2x}.$$

2. Решите уравнение

$$\log_5(2x - 1) \log_{x+1} 5 = 1.$$

3. Найдите сумму корней уравнения

$$\sin x = -\cos x,$$

принадлежащих промежутку $\left(\frac{\pi}{4}; \pi\right)$.

4. Найдите количество целочисленных решений системы неравенств

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 1 \geq 0, \\ |x - 1| \leq 4. \end{cases}$$

5. Решите уравнение

$$5^{1+\sin x + \sin^2 x + \dots} = 25.$$

6. Для решения (x, y, z) системы уравнений

$$\begin{cases} xy = 2, \\ xz = -3, \\ yz = -6 \end{cases}$$

найдите значение $x^2 + y^2 + z^2$.

7. Решите уравнение

$$\log_4 \sin^2 x - \log_{\sin x} 64 = \log_{\sqrt{2}} 4 + 1.$$

8. Вычислите

$$\frac{\sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha}{2 \cos \alpha + 1}$$

при $\alpha = \frac{\pi}{12}$.

9. На стороне AC треугольника ABC выбрана точка D так, что $AD : DC = 1 : 2$. Найдите $\angle BDC$, если $AB = 5$, $BC = 7$ и $AC = 6$.

10. При каких значениях параметра k уравнение

$$(x + 1)(x + 3)(x + 5)(x + 7) = -k^2 - k$$

имеет 2 решения?

Вариант 2

1. Найдите наибольший корень уравнения

$$|x - 2| = \sqrt{5x - 4}.$$

2. Решите уравнение

$$\log_2(3x - 2) \log_{2x+3} 2 = 1.$$

3. Найдите сумму корней уравнения

$$\cos^2 x - \sin x = 1,$$

принадлежащих промежутку $\left[-\frac{3\pi}{4}; 0\right]$.

4. Найдите количество целочисленных решений системы неравенств

$$\begin{cases} 16 + 6x - x^2 \geq 0, \\ |x - 2| \geq 2. \end{cases}$$

5. Решите уравнение

$$2^{\frac{5}{2} + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^4 x + \dots} = 8.$$

6. Для решения (x, y, z) системы уравнений

$$\begin{cases} xy^2z^3 = 108, \\ x^2y^3z = 24, \\ x^3yz^2 = 18 \end{cases}$$

найдите значение $x^2 + y^2 + z^2 + 3$.

7. Решите уравнение

$$\log_3(4 \cos^2 x) + 2 \log_{2 \cos x} 3 = \log_{\sqrt{3}} 9 + 1.$$

8. Вычислите

$$\frac{\sin 3\alpha + \cos 2\alpha - \sin \alpha}{2 \sin \alpha + 1}$$

при $\alpha = \frac{\pi}{8}$.

9. В треугольнике ABC , где $AB = 6$, $BC = 8$ и $AC = 7$, проведена биссектриса BD . Найдите $\angle BDC$.

10. При каких значениях параметра k уравнение

$$(x - 2)(x - 4)(x - 6)(x - 8) = 2k^2 + k$$

имеет 3 решения?

Вариант 3

(олимпиада-2007)

1. Определите, на какую цифру оканчивается число

$$N = 3^{2007}.$$

2. Решите уравнение

$$(\sin x + \sqrt{3} \cos x) \sin 3x = 2.$$

3. В заданную окружность вписаны одинаковые треугольники, один из углов которых равен 120° . Найдите геометрическое место точек всех сторон всех таких треугольников.

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y^2 - 5xy + 2x + 1 = 0, \\ 5x^2 - xy + 2y + 5 = 0. \end{cases}$$

5. В поликлинике работают 2 хирурга, 4 стоматолога и 6 терапевтов. Трое из этих врачей – мужчины. Определите, на сколько женщин-терапевтов больше, чем мужчин – стоматологов и хирургов.

6. На продолжении биссектрисы AL треугольника ABC за точку A взята такая точка D , что $AD = 2a$ и $\angle BDC = \angle BAL = 60^\circ$. Установите, какова минимальная возможная площадь треугольника BDC .

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

Выберите правильный ответ

1. Автомобиль, двигавшийся со скоростью 20 м/с, начинает тормозить и останавливается, проехав расстояние 40 м. Сколько времени автомобиль тормозил, если его ускорение было постоянным?

1) 8 с; 2) 2 с; 3) 3 с; 4) 4 с; 5) 5 с.

2. Небольшой шарик подвешен на невесомой нерастяжимой нити в ракете, которая находится на стартовой площадке. Во сколько раз возрастает сила натяжения нити, когда ракета стартует с ускорением 20 м/с², направленным вертикально вверх?

1) Не изменяется; 2) в 2 раза; 3) в 3 раза; 4) в 4 раза; 5) ответ зависит от массы шарика.

3. Тело массой m_1 движется по гладкому столу, его кинетическая энергия равна 3 Дж. Движущееся тело сталкивается с покоившимся телом массой m_2 . После неупругого удара тела движутся вместе, их кинетическая энергия равна 1 Дж. Найдите отношение масс m_2/m_1 .

1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4; 5) 1/3.

4. На графике (рис. 1) изображена изохора идеального газа, соответствующая объему 22,4 литра. Какое количество молей газа участвовало в этом процессе?

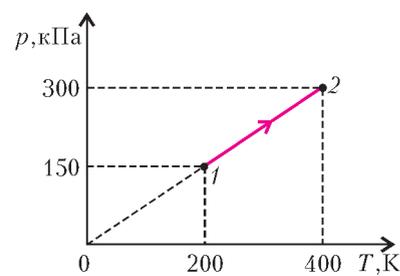


Рис. 1

1) 1 моль; 2) 2 моль; 3) 0,5 моль; 4) 2,5 моль; 5) моль.

5. С постоянной массой идеального газа проводят следующий цикл. Сначала газ нагревают при постоянном объеме, сообщив ему 15 кДж тепла. Затем газ адиабатически расширяется, после чего его возвращают в начальное состояние изобарным сжатием. При сжатии от газа отводят 12,5 кДж тепла. Найдите работу газа за весь цикл.

1) 2,5 кДж; 2) 5 кДж; 3) 11 кДж; 4) 12,5 кДж; 5) 27,5 кДж.

6. Найдите общее сопротивление схемы, изображенной на рисунке 2. Сопротивления резисторов в омах указаны на схеме.

1) 5,5 Ом; 2) 11 Ом; 3) 15 Ом; 4) 22 Ом; 5) 60 Ом.

7. В какую точку на прямой (рис. 3) нужно поместить произ-

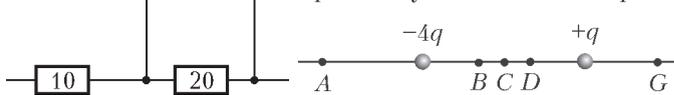


Рис. 2

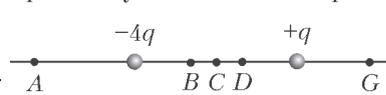


Рис. 3

вольный заряд Q , чтобы силы, действующие на него, были уравновешены?

1) A; 2) B; 3) C; 4) D; 5) G.

8. Квадратный контур расположен в однородном магнитном поле, линии индукции которого перпендикулярны плоскости контура. При повороте контура на угол 30° вокруг одной из сторон через поперечное сечение контура проходит заряд 1 мКл. Какой заряд пройдет через поперечное сечение, если контур повернуть на 90° из того же начального положения? Ответ округлите!

1) 1,5 мКл; 2) 2 мКл; 3) 3 мКл; 4) 5 мКл; 5) 7,5 мКл.

9. Напряжение на конденсаторе в колебательном контуре зависит от времени по закону $u(t) = 20 \sin 10^4 t$ (В). Ем-

кость конденсатора равна 10^{-6} Ф. Найдите амплитудное значение силы тока в контуре.

- 1) $2 \cdot 10^{-6}$ А; 2) $2 \cdot 10^{-3}$ А; 3) 0,2 А; 4) 0,5 А; 5) 2 А.

10. Предельный угол полного отражения на границе раздела прозрачной пленки с воздухом равен 60° . Найдите показатель преломления пленки.

- 1) 1,155; 2) 1,25; 3) 1,67; 4) 1,732; 5) 2.

Вариант 2

Выберите правильный ответ

1. При движении тела вдоль оси X его координата зависит от времени по закону $x(t) = 60 - 15t$ (м). Найдите путь, пройденный телом за 6 с.

- 1) 30 м; 2) 60 м; 3) 90 м; 4) 150 м; 5) 360 м.

2. Телу сообщают начальную скорость 6 м/с, направленную вверх по наклонной плоскости (рис.4). Угол наклона

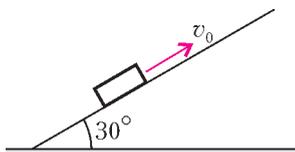


Рис. 4

плоскости составляет 30° . При движении на тело действует сила трения, равная половине силы тяжести. Найдите время движения тела до остановки.

- 1) 0,4 с; 2) 0,5 с; 3) 0,6 с; 4) 1 с; 5) 1,2 с.

3. Кинетическая энергия вагонетки, движущейся по рельсам без трения, равна 12 Дж. После загрузки масса вагонетки увеличивается в 3 раза, а ее импульс не изменяется. Найдите кинетическую энергию груженой вагонетки.

- 1) 4 Дж; 2) 8 Дж; 3) 12 Дж; 4) 24 Дж; 5) 36 Дж.

4. В одном сосуде находится азот, а в другом – гелий. Концентрация молекул гелия в 2 раза больше, чем концентрация молекул азота. Плотность какого газа больше и во сколько раз? Молярная масса гелия 4 г/моль, азота 28 г/моль.

1) Плотность гелия в 2 раза больше; 2) плотность азота в 3,5 раза больше; 3) плотность азота в 7 раз больше; 4) плотность азота в 14 раз больше; 5) необходимо знать температуры газов.

5. При сжатии некоторого количества идеального газа над ним совершают работу 300 Дж, при этом внутренняя энергия газа уменьшается на 300 Дж. Что можно сказать о переходе тепла в этом процессе?

1) Газ получает 300 Дж тепла; 2) газ получает 600 Дж тепла; 3) газ отдает 300 Дж тепла; 4) газ отдает 600 Дж тепла; 5) газ не отдает и не получает тепло.

6. К источнику ЭДС с внутренним сопротивлением 4 Ом подключен реостат. Укажите два значения сопротивления реостата, при которых на нем выделяется одна и та же мощность. Сопротивлением проводов пренебречь.

1) 1 Ом и 5 Ом; 2) 1 Ом и 16 Ом; 3) 2 Ом и 6 Ом; 4) 2 Ом и 10 Ом; 5) 2 Ом и 16 Ом.

7. Два точечных заряда $+1$ мкКл и -4 мкКл находятся в вакууме на расстоянии 0,5 м друг от друга. Какую работу нужно совершить, чтобы сделать расстояние между зарядами очень большим? Коэффициент в законе Кулона $k = 9 \cdot 10^9$ Н·м²/Кл².

- 1) 9 мДж; 2) 18 мДж; 3) 36 мДж; 4) 72 мДж; 5) 144 мДж.

8. В катушке индуктивности течет ток 2 А, магнитный поток через катушку равен 0,12 Вб. Чему равна энергия магнитного поля этой катушки?

- 1) 0,01 Дж; 2) 0,02 Дж; 3) 0,03 Дж; 4) 0,06 Дж; 5) 0,12 Дж.

9. Что нужно сделать для увеличения частоты колебаний математического маятника в 2 раза? Колебания считать малыми.

1) Увеличить длину в 2 раза; 2) увеличить длину в 4 раза; 3) уменьшить длину в 2 раза; 4) уменьшить длину в

4 раза; 5) уменьшить амплитуду колебаний в 2 раза.

10. На дифракционную решетку по нормали падает монохроматический свет. Известно, что период решетки в 10 раз больше длины волны падающего света. Под каким углом дифракции будет наблюдаться максимум 1-го порядка?

- 1) $\arcsin 0,1$; 2) $\arcsin 0,05$; 3) $\arcsin 0,01$; 4) 10° ; 5) 30° .

Вариант 3

(олимпиада-2007)

1. Атмосфера Венеры состоит в основном из углекислого газа. У поверхности этой планеты атмосферное давление равно 9 МПа, плотность атмосферы 64 кг/м³. Чему равна средняя квадратичная скорость молекул углекислого газа при этих условиях?

2. Магнит массой 50 г прикладывают к вертикальной стенке холодильника. Сила притяжения магнита к стенке равна 5 Н, коэффициент трения между магнитом и стенкой 0,2. Удержится ли магнит? Чему будет равна сила трения между магнитом и стенкой?

3. Колебательный контур радиоприемника настроен на прием электромагнитных волн длиной 60 м. В контуре происходят гармонические колебания. Найдите минимальное время, за которое заряд конденсатора этого контура убывает от амплитудного значения до нуля. Скорость света в вакууме $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

4. К источнику ЭДС с внутренним сопротивлением 8 Ом подключают нагрузку. При сопротивлении нагрузки 5 Ом на ней выделяется некоторая мощность P . При каком еще сопротивлении нагрузки на ней будет выделяться такая же мощность P ? Сопротивлением подводящих проводов пренебречь.

5. Тепловой двигатель работает по циклу, который изображен на рисунке 5. Рабочим телом является 1 моль идеального одноатомного газа. При изотермическом сжатии газа на участке 4-1 внешние силы совершают работу 1150 Дж. Найдите КПД цикла.

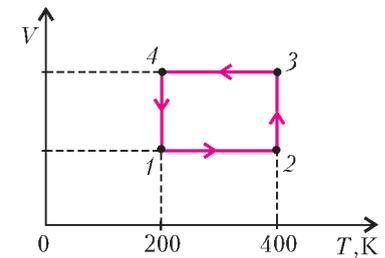


Рис. 5

6. В ускорителе пучок протонов, прошедших ускоряющее напряжение 50 кВ, направляют на неподвижную свинцовую мишень. Найдите максимальную силу взаимодействия протонов с ядрами атомов свинца. Атомный номер свинца 82. Коэффициент в законе Кулона $k = 9 \cdot 10^9$ Н·м²/Кл², элементарный электрический заряд $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

Публикацию подготовили А.Браун, Е.Введенская, Н.Выск, М.Кузьмин, А.Миронов, Л.Муравей, Г.Никулин, А.Покровский, П.Селин, А.Симонов, В.Федорчук

Российский государственный университет нефти и газа им. И.М.Губкина

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Упростите

$$\frac{a^6 + 0,064}{a^4 - 0,4a^2 + 0,16} - \frac{a^4 - 0,16}{a^2 + 0,4}$$

2. Найдите наибольшее целое отрицательное число из области определения функции

$$f(x) = \log_5(2x^2 + 3x - 14).$$

3. Сумма первых 12 членов арифметической прогрессии равна 198. Найдите разность прогрессии, если ее первый член равен 33.

4. Решите уравнение $|x| - 7x - 24 = 0$.

5. Решите уравнение $(\sqrt[8]{23})^{x-3} = (\sqrt[9]{24})^{x-3}$.

6. Вычислите $[4^4]^{\log_6 3\sqrt{3}}$.

7. Вычислите $(\cos^2 65^\circ + \cos^2 25^\circ)(4 \operatorname{tg} 45^\circ + 1)$.

8. Найдите в градусах наименьший положительный корень уравнения

$$\cos 12x + \cos 6x = 7 \cos 3x.$$

9. Найдите наибольшее целое значение параметра a , при котором неравенство

$$x^6 - ax^2 + 20\sqrt{10} > 0$$

выполняется для всех значений x .

10. Сколько целых решений имеет неравенство

$$|x|^{x^2+2x-48} < 1?$$

11. В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой AB проведена высота CH . Эта высота пересекает биссектрису AL в точке P , а медиану AM – в точке Q . Известно, что $PL : AP = 2 : 1$. Найдите отношение $QM : AQ$.

12. Около правильной треугольной пирамиды описана сфера. Две другие сферы радиусов 13 и 7 расположены так, что каждая из них проходит через середины всех сторон основания и касается описанной сферы изнутри. Найдите радиус описанной сферы.

Вариант 2

1. Упростите и вычислите при $a = 5 + \sqrt{7}$, $c = 1/31$:

$$\left(\frac{\sqrt{2}c^2}{\sqrt[4]{2}ac - a^2} - \frac{a}{\sqrt[4]{2}c - a} \right) \frac{a}{a + \sqrt[4]{2}c}.$$

2. Найдите наименьшее целое решение неравенства

$$\sqrt{3(x+2)} > 2x + 1.$$

3. Сумма семнадцатого и тридцать первого членов арифметической прогрессии равна 22. Найдите двадцать четвертый член этой прогрессии.

4. Решите уравнение

$$0,8|x - 0,4| = x^2 + 0,48.$$

5. Решите уравнение

$$(\sqrt{12})^{x-9} : 5^{x-9} = \frac{12}{25}.$$

6. Вычислите $(\lg 2^{3 \log_2 10})^3$.

7. Вычислите $\frac{\cos^2 186^\circ - \sin^2 6^\circ}{0,5 \cos 12^\circ}$.

8. Найдите в градусах наибольший отрицательный корень уравнения $\frac{\operatorname{tg} 8x - \operatorname{tg} 5^\circ}{1 + \operatorname{tg} 8x \operatorname{tg} 5^\circ} = -1$.

9. К графику функции $y = x^4 - 6a^2x^2 - 3a^4$ можно провести единственную касательную, параллельную прямой $y =$

$= 400x - 100$. Найдите наибольшее целое значение, которое может принимать параметр a .

10. Найдите 3^x , где x – меньший корень уравнения $3^x \cdot 2^{x-1} = 36$.

11. Около равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) площади 132 описана окружность. Продолжение биссектрисы, проведенной из вершины A , пересекает эту окружность в точке L , а продолжение медианы, проведенной из той же вершины, – в точке M . Площадь треугольника ALC равна 77. Найдите площадь треугольника AMC .

12. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ боковая грань образует с плоскостью основания угол, косинус которого равен 0,6. В пирамиду вписана сфера радиуса 1. Найдите радиус сферы, которая проходит через все вершины основания так, что вписанная сфера касается ее изнутри.

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Внимание! Если единицы измерения не указаны, выразите ответ в единицах СИ. Ускорение свободного падения $g = 10 \text{ м/с}^2$.

Вариант 1

1. Камень, брошенный под углом к горизонту, находился в полете 4 с. Какой наибольшей высоты достиг камень?

2. Радиус некоторой планеты в $\sqrt{3}$ раза меньше радиуса Земли, а ускорение силы тяжести на поверхности планеты в 3 раза меньше, чем на поверхности Земли. Во сколько раз масса планеты меньше массы Земли?

3. Тело брошено вертикально вниз со скоростью 10 м/с с высоты 45 м. На какой высоте от поверхности земли кинетическая энергия тела увеличится вдвое?

4. Горячее тело, температура которого 65°C , приведено в соприкосновение с холодным телом с температурой 20°C . В тепловом равновесии установилась температура 35°C . Во сколько раз теплоемкость холодного тела больше теплоемкости горячего?

5. Какова должна быть емкость (в пФ) конденсатора, который надо соединить последовательно с конденсатором емкостью 20 пФ, чтобы получить батарею конденсаторов емкостью 16 пФ?

6. Какой длины нужно взять никелиновую ленту, чтобы изготовить реостат сопротивлением 12 Ом? Удельное сопротивление никелина $4 \cdot 10^{-7} \text{ Ом} \cdot \text{м}$, толщина ленты 1,5 мм, ширина 20 мм.

7. Математический маятник длиной 2,5 см совершает гармонические колебания с амплитудой 0,003 м. Определите наибольшую скорость движения грузика маятника (в см/с).

8. В реакции изотопа алюминия $^{27}_{13}\text{Al}$ и углерода $^{12}_6\text{C}$ образуются α -частица, нейтрон и ядро некоторого изотопа. Определите количество нейтронов в образующемся ядре.

9. Шарик, подвешенный на легкой нити к потолку, вращается по окружности, лежащей в горизонтальной плоскости, с угловой скоростью 5 рад/с. Найдите расстояние (в см) между точкой подвеса и центром окружности.

10. В гладкий высокий стакан радиусом 4 см поставили палочку длиной 10 см и массой 90 г. После того как в стакан налили до высоты 4 см жидкость плотностью 900 кг/м^3 , сила давления верхнего конца палочки на стенку стакана стала 0,4 Н. Чему равна плотность материала палочки?

11. Давление воздуха внутри плотно закупоренной бутылки при температуре 7°C равно 150 кПа. До какой температуры (по шкале Цельсия) надо нагреть бутылку, чтобы из нее вылетела пробка, если известно, что для вынимания пробки

до нагревания бутылки требовалась минимальная сила 90 Н? Площадь поперечного сечения пробки 8 см^2 .

12. По П-образной рамке, наклоненной под углом 30° к горизонту и помещенной в однородное вертикальное магнитное поле, начинает соскальзывать без трения перемычка массой 30 г. Длина перемычки 10 см, ее сопротивление 1 мОм, индукция магнитного поля 0,1 Тл. Найдите установившуюся скорость движения перемычки. Сопротивлением рамки пренебречь.

Вариант 2

1. Автомобиль, двигаясь равноускоренно, через 4 с после начала движения достиг скорости 8 м/с. Какой путь прошел автомобиль за четвертую секунду движения?

2. Вверх по наклонной плоскости высотой 9 м и длиной 15 м пущена шайба. Коэффициент трения равен 0,5. Найдите ускорение шайбы. В ответе укажите абсолютную величину ускорения.

3. На горизонтальной плоскости лежит тонкая цепь длиной 1 м и массой 4 кг. Чему равна минимальная работа по подъему цепи, взятой за один конец, на высоту, при которой нижний ее конец отстоит от плоскости на расстояние, равное длине цепи?

4. Однородный шар плавает на поверхности воды, на 60% погруженный в воду. Чему равен объем шара (в см^3), если на него действует выталкивающая сила 3 Н? Плотность воды 1000 кг/м^3 .

5. Резиновую лодку надули утром, когда температура воздуха была 7°C . На сколько процентов увеличилось давление воздуха в лодке, если днем он прогрелся под лучами солнца до 21°C ? Изменением объема лодки пренебречь.

6. Найдите полезную мощность батареи, ЭДС которой 48 В, если внешнее сопротивление 23 Ом, а внутреннее сопротивление батареи 1 Ом.

7. На катушке сопротивлением 2 Ом поддерживается напряжение 80 В. Чему равна энергия магнитного поля катушки, если ее индуктивность 15 мГн?

8. Расстояние между предметом и его уменьшенным в 6 раз мнимым изображением равно 25 см. Найдите расстояние от предмета до линзы (в см).

9. Стальной шар массой 300 г падает без начальной скорости с высоты 5 м на наклонную плоскость, составляющую угол 60° с горизонтом. Считая удар абсолютно упругим, найдите среднюю силу взаимодействия шара с наклонной плоскостью. Продолжительность удара составляет 0,02 с. Действием силы тяжести за время удара и сопротивлением воздуха пренебречь.

10. Шарик массой 5 г с зарядом 2 мКл подвешен на нити в горизонтальном электрическом поле с напряженностью 20 В/м, направленной слева направо. Шарик с нитью отводят вправо до горизонтального положения нити и отпускают. Найдите натяжение нити (в мН) в тот момент, когда она впервые составит с вертикалью угол α ($\cos \alpha = 0,8$).

11. Пуля, летевшая горизонтально со скоростью 500 м/с, пробилась насквозь доску на высоте 20 см от земли. При этом температура пули увеличилась на 150°C . Считая, что на нагревание пули пошла вся выделившаяся энергия, найдите, на каком расстоянии (по горизонтали) от места удара пуля упала на землю. Удельная теплоемкость материала пули $300 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{K)}$.

12. Магнит массой 200 г лежит на горизонтальной металлической плите. Чтобы оторвать магнит от плиты, его надо потянуть вверх с силой 16 Н. Вместо этого плиту заставляют колебаться в вертикальном направлении по закону $y = A \sin \omega t$ с амплитудой $A = 5 \text{ см}$. При какой

минимальной циклической частоте ω магнит оторвется от плиты?

Публикацию подготовили Б.Писаревский, А.Черноуцан

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(физико-механический факультет)

1. Упростите выражение $\left(4x + \frac{x+3}{x-2}\right) : \frac{x-1}{x-2}$.

2. Решите неравенство $|x-1| < 2$.

3. Найдите производную функцию $y = 2x^2\sqrt{x} + \sqrt{x}$ в точке $x = 1$.

4. Одну из сторон прямоугольника увеличили на 25%. На сколько процентов следует уменьшить другую сторону, чтобы вернуть площадь к прежнему значению?

5. Решите неравенство $\sqrt{x+3} \leq 9-x$.

6. Вычислите $x_1^3 x_2^5 + x_1^5 x_2^3$, если x_1, x_2 – корни уравнения $x^2 - 4x + 2 = 0$.

7. Найдите целое число – значение выражения $\text{ctg} 15^\circ + 2\sqrt{2} \cos 105^\circ$.

8. Решите уравнение $\sin 2x - 3 = 3 \cos x - 3 \sin x$.

9. Найдите целое число – значение выражения $\frac{\log_2(\sqrt{19} - 3\sqrt{2})}{\log_8(\sqrt{19} + 3\sqrt{2})}$.

10. Какое число больше: $a = \log_{\sqrt{2}+1}(\sqrt{2} + 2)$ или $b = \log_{\sqrt{2}}(\sqrt{2} + 1)$?

11. Решите уравнение $3^x + 5^x = 2^{3x}$.

12. Найдите разность возрастающей арифметической прогрессии с целочисленными членами, среди первых 20 членов которой имеются числа 33, 48, 88.

13. Найдите целое число – значение выражения $\frac{15}{\pi} \arcsin \sin \frac{112\pi}{15}$.

14. Решите уравнение $\arccos(2x^2 - 1) + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$.

15. Найдите область определения функции

$$y = \sqrt{(6-x) \log_3(x-1)}.$$

16. Найдите множество значений функции

$$y = 2 \sin^2 x - \sin x.$$

17. Решите уравнение $x - |x-3| = \sqrt{3 - |x-4|}$.

18. Биссектриса и медиана, проведенные из вершины прямого угла прямоугольного треугольника, образуют угол, синус которого равен $1/\sqrt{3}$. Вычислите площадь треугольника, если биссектриса имеет длину 3.

19. Вычислите объем правильного тетраэдра, площадь полной поверхности которого равна $16\sqrt{3}$.

20. При каких значениях параметра $a > 0$ окружности $(x-6a)^2 + (y-2a)^2 = 36a^2$ и $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 9$ касаются друг друга?

Вариант 2

(физико-технический факультет)

- Упростите выражение $\frac{(a-5)(a^2-3a+2)(a^2-7a+12)}{(a^2-5a+6)(a^2-9a+20)}$.
- Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби $1/(1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})$.
- Найдите произведение общих корней уравнений $x^3+2x^2-1=0$ и $x^3-2x+1=0$.
- Решите уравнение $\sqrt{-x^2+4x-3}=1-x$.
- Решите неравенство $|x-2|-|x-1|\geq 1$.
- Найдите $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$, если $\operatorname{tg}\alpha=2$, а $\operatorname{tg}(\beta/2)$ – корень уравнения $t^2-6t-1=0$.
- Найдите такую четную функцию $y=f(x)$, что разность $e^x-f(x)$ – нечетная функция.
- Найдите множество значений функции $y=\cos((\pi \sin x)/2)$.
- Найдите наименьший из положительных корней уравнения $\sin 5x=\cos 4x$.
- Решите неравенство $\operatorname{arctg}(2\sqrt{1/x-1})\geq \operatorname{arcsin}\sqrt{x}$.
- Решите уравнение $3^{2x+1}+2^{2x+1}=5\cdot 6^x$.
- Решите неравенство $\lg(4x-x^2-3)\leq \lg(x-3)^2$.
- Найдите наибольшее из двузначных чисел, которые имеют остаток 1 при делении на 5 и остаток 2 при делении на 7.
- Найдите наименьшее из таких значений a , для которых расположенные в некотором порядке числа $a; 1; 4$ образуют конечную геометрическую прогрессию.
- Решите систему уравнений
$$\begin{cases} y=x^2-2x+2, \\ x=y^2-2y+2. \end{cases}$$
- Найдите номер наибольшего элемента последовательности $\{n^{12}/e^{4n}\}$.
- Касательная к параболе $x=y^2$ проходит через точку $A(0;1)$. Найдите точку касания $(x_0; y_0)$.
- Площадь треугольника равна 6, а две его стороны имеют длины 1 и 15. Найдите длину медианы, проведенной к третьей стороне.
- В правильную треугольную призму вписан шар и около нее описан шар. Найдите радиус описанного шара, если радиус вписанного шара равен $\sqrt{5}$.
- Найдите все значения параметра a , при которых уравнения $|\sin x|=a$ и $\cos 2x=1-2a^2$ равносильны.

Публикацию подготовили А.Басов, А.Моисеев,
С.Преображенский

Санкт-Петербургский государственный
университет
МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(математико-механический факультет)

- Две вершины квадрата лежат на оси абсцисс координатной плоскости Oxy , а две другие – на графике функции

$y=2x^2+6x+\frac{1}{2}$. Найдите площадь квадрата.

- Решите уравнение $x\sqrt{\frac{x-3}{x}}=x^2-3x-6$.

- Решите неравенство $x\log_2\left(4^{\frac{1}{x}}-\frac{3}{4}\right)>1$.

- Все вершины правильной четырехугольной призмы лежат на поверхности тетраэдра $ABCD$, ребра которого равны 2. При этом AB и CD параллельны ребрам основания призмы. Найдите высоту призмы, если известно, что она в два раза короче каждого из ребер основания призмы.

- Найдите все целые положительные n , при которых уравнение $\sin nx+\sin x=0$ имеет только одно решение на промежутке $(0; 1)$.

Вариант 2

(факультет психологии)

- Арифметическая прогрессия состоит из пяти членов. Сумма квадратов членов с нечетными номерами равна 14. Сумма кубов членов с четными номерами равна 19. Найдите сумму членов прогрессии.

- Решите уравнение

$$\log_2^2(5x)+\log_2^2(7x)=\log_2^2 5+\log_2^2 7.$$

- Решите уравнение

$$\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(x+\frac{\pi}{12}\right)+\sqrt{3}\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

- Решите систему

$$\begin{cases} \frac{1}{x}-\frac{1}{x+y+z}=\frac{1}{2}, \\ \frac{1}{y}-\frac{1}{x+y+z}=\frac{1}{5}, \\ \frac{1}{z}-\frac{1}{x+y+z}=\frac{1}{10}. \end{cases}$$

- Дан треугольник PQR . Точка T – центр вписанной окружности. Лучи PT и QT пересекают прямую, проходящую через точку R параллельно стороне PQ , в точках E и F соответственно. Известно, что площади треугольников PQR и TFE равны. Какую часть сторона PQ составляет от периметра треугольника PQR ?

Вариант 3

(филологический факультет)

- Между городами A и B организовано регулярное круглосуточное автобусное сообщение. Каждый час одновременно из A и из B отправляются автобусы. Через полчаса после отправления очередных автобусов из A и B выехал автомобиль и через 1 час догнал вышедший перед ним автобус, а еще через 3 часа 40 минут доехал до города B . Со сколькими встречными автобусами он повстречался?

- Решите уравнение $\sin 8x+2\sin 4x+4\cos 2x=0$.

- Решите неравенство $\sqrt{x^2-x}<(x+2)|x-3|$.

- Одна окружность вписана в треугольник ABC , а другая касается лишь двух его сторон AC и BC . Кроме того, обе окружности касаются прямой, параллельной стороне AB , и расстояние между их точками касания с AC равно 6. Найдите AB , если известно, что $AC=35$ и $BC:AB=1:2$.

- Решите уравнение $4\cdot 3^{x+2}+14\cdot 5^x=25^x+49$.

Публикацию подготовили А.Громов, А.Осинов, Ю.Чуриш