Будет ЕГЭ по математике!

Л.ДЕНИЩЕВА, Б.ПИСАРЕВСКИЙ

Эксперимент по проведению в нашей стран единого государственного экзамена (ЕГЭ) начался в 2001 году. Введение ЕГЭ сопровождалось яростными спорами сторонников и противников этого метода итоговой аттестации выпускников средней школы и отбора наиболее подготовленных для зачисления в вузы. Дискуссии на эту тему возникают и сейчас, но ситуация радикально изменилась. В 2007 году Государственная дума и Совет Федерации приняли закон об обязательности ЕГЭ, и этот закон подписал Президент РФ. Начиная с 2009 года, ЕГЭ по математике, физике, большинству других предметов полностью заменят выпускные экзамены в школах и вступительные экзамены в высших учебных заведениях. В 2008 году ЕГЭ по математике и русскому языку станут обязательными для выпускников московских школ.

За время проведения эксперимента содержание ЕГЭ по математике плавно изменялось, пока в 2005 году организаторы не нашли оптимальную, с их точки зрения, форму, которая сохраняется и сейчас.

Вариант ЕГЭ по математике состоит из трех частей.

В Части 1 представлены задания базового уровня сложности. С их помощью проверяется, как выпускники умеют применять изученный теоретический материал (правила, формулы, свойства и т.п.) в знакомой ситуации. Формулировки заданий традиционны для школьных учебников по курсу алгебры и начал анализа.

В этой части представлены задания с выбором ответа (из четырех возможных) и задания с кратким ответом.[1]

Задания Части 1 успешно выполняют большинство учащихся, имеющих школьную оценку «3», а также практически все выпускники, имеющие оценку «4» и «5».

В Часть 2 варианта ЕГЭ включены задания повышенного уровня сложности. При их выполнении выпускник должен применить изученный материал в несколько измененной ситуации:

- либо преобразовать исходные данные задачи, чтобы стало возможно применить стандартный метод решения;
- либо перестроить в соответствии с данными задачи имеющийся метод решения.

Во второй части работы представлены два типа заданий: задания с кратким ответом и задания с развернутым ответом.[2] Задания этой части оказываются по силам лишь половине тех выпускников, которые имеют школьную оценку «4», и большинству выпускников, имеющих оценку «5». С отдельными заданиями повышенного уровня сложности справляется совсем незначительная часть выпускников, имеющих оценку «3».

[1] *Правильность выполнения этих заданий оценивается только по конечному ответу, внесенному в бланк ответов.*

[2] *При выполнении этих заданий решение выпускника проверяется и оценивается максимально 2 баллами двумя независимыми экспертами.*

В Части 3 варианта ЕГЭ представлены задания высокого уровня сложности. При их выполнении, исходя из всего багажа имеющихся знаний, выпускнику необходимо самостоятельно сконструировать новый метод решения, исследуя описанную в условии задачи проблему. Кроме того что выпускник найдет путь, приводящий его к ответу на вопрос задачи, он должен будет грамотно, используя принятую терминологию и символику, записать обоснованное решение.

С заданиями Части 3 справляются только те выпускники, которые имеют самый высокий уровень математической подготовки. Они составляют от 10% до 20% выпускников, имеющих школьную оценку «5».

Ниже приведен один из вариантов ЕГЭ по математике, который предлагался в 2007 году. На выполнение работы дается 4 часа (240 мин).

За выполнение работы выставляются две оценки: аттестационная отметка и тестовый балл. Аттестационная отметка за усвоение курса алгебры и начал анализа 10–11 классов выставляется по пятибалльной шкале. При ее выставлении не учитывается выполнение четырех заданий (B9, B10, B11, C4). В тексте работы номера этих заданий отмечены звездочкой. Тестовый балл выставляется по 100-балльной шкале на основе первичных баллов, полученных за выполнение всех заданий работы.

Советуем для экономии времени пропускать задание, которое не удается выполнить сразу, и переходить к следующему. К выполнению пропущенных заданий можно вернуться, если у вас останется время.

Вариант 2007 года

Часть 1

A1. Упростите выражение $b^{-3,4} \cdot 5b^{0,2}$.

1) $5b^{-3,6}$; 2) $5^{0,2}b^{-3,2}$; 3) $5b^{-3,2}$; 4) $5^{0,2}b^{-3,6}$.

A2. Вычислите $\dfrac{\sqrt[3]{189}}{3\sqrt[3]{7}}$.

1) 1; 2) $\dfrac{1}{3}$; 3) 9; 4) 27.

A3. Вычислите $\log_2 80 - \log_2 5$.

1) 0; 2) 2; 3) 3; 4) 4.

A4. Функция задана графиком (рис.1). На каком из указанных промежутков она возрастает?

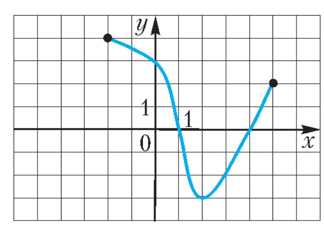

Рис. 1

1) [1; 4]; 2) [2; 5]; 3) [0; 5]; 4) [−2; 1].

A5. Найдите производную функции $y = 12x^3 - e^x$.

1) $y' = 15x^2 - xe^{x-1}$; 2) $y' = 3x^2 - \dfrac{e^x}{x+1}$;

3) $y' = 36x^2 - xe^{x-1}$; 4) $y' = 36x^2 - e^x$.

A6. Найдите множество значений функции $y = 3\sin x$.

1) [−3; 3]; 2) [0; 3]; 3) [−1; 1]; 4) $(-\infty; +\infty)$.

A7. Функция задана графиком (рис.2). Укажите промежуток, на котором она принимает только отрицательные значения.

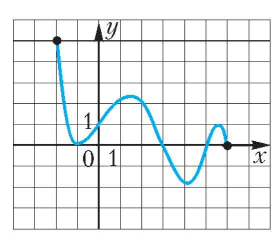

Рис. 2

1) (3; 6); 2) (3; 5); 3) (−2; −1); 4) (−2; 0).

A8. Решите неравенство $\dfrac{3+x}{(x-9)(x-1)} \le 0$.

1) $(-\infty; -3]$; 2) $(-\infty; -3] \cup (1; 9)$; 3) $(-\infty; -9)$;
4) $[-3; 1) \cup (9; +\infty)$.

А9. Решите уравнение $\sin x - \frac{1}{2} = 0$.

1) $\pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \boldsymbol{Z}$;

3) $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $(-1)^n \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \boldsymbol{Z}$.

А10. Найдите область определения функции

$$y = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^{5-4x} - \frac{1}{27}}.$$

1) $[0,5; +\infty)$; 2) $(-\infty; 0,5]$; 3) $(0,5; +\infty)$; 4) $[2; +\infty)$.

В1. Найдите значение выражения $3\sin^2\alpha - 5\cos^2\alpha$, если $\cos\alpha = -0,5$.

В2. Решите уравнение $3^{x+2} + 6 \cdot 3^x = 5$.

В3. Решите уравнение $\sqrt{2x^2 - x - 6} = -x$.

Часть 2

В4. Найдите значение выражения $\cos x$, если известно, что

$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2}, \\ 2\cos x + 8\sin y = 3. \end{cases}$$

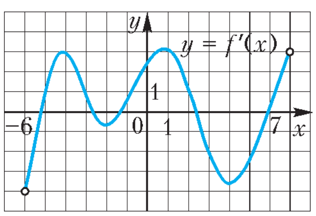

Рис. 3

В5. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-6;\ 7)$. На рисунке 3 изображен график производной этой функции. К графику функции провели все касательные, параллельные прямой $y = 3 - x$ (или совпадающие с ней). Укажите количество точек графика функции, в которых проведены эти касательные.

В6. Найдите значение выражения $\sqrt[4]{\left(37 - 20\sqrt{3}\right)^2} + 2\sqrt{3}$.

В7. Решите уравнение

$$\log_7(3x+5) + \sqrt[4]{\log_7^4(2x+5)} = 0.$$

(Если уравнение имеет более одного корня, то запишите произведение всех его корней.)

В8. Функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой и является периодической с периодом 3. На рисунке 4 изображен график этой функции при $-2 \le x \le 1$. Найдите значение выражения $f(-5) - f(-1) + f(12)$.

Рис. 4

В9*. Две бригады, работая вместе, ремонтировали дорогу в течение 6 дней, а затем одна вторая бригада закончила ремонт еще за 10 дней. За сколько дней могла бы отремонтировать дорогу одна первая бригада, если она может выполнить эту работу на 6 дней быстрее, чем одна вторая бригада?

В10*. Точки K и M лежат на окружностях двух оснований цилиндра. Синус угла наклона прямой KM к плоскости основания цилиндра равен 0,6, $KM = 10$, объем цилиндра равен 150π. Найдите площадь осевого сечения цилиндра.

В11*. Боковая сторона равнобедренного треугольника ABC равна 15, а его площадь равна 67,5. К основанию AC и стороне BC проведены высоты BE и AH, пересекающиеся в точке O. Найдите площадь треугольника BOH.

С1. Найдите точки минимума функции

$$f(x) = 3x^4 + 3x^3 - 72x^2 + 2^{-\log_{0,5}\left(x^3+8\right)}.$$

С2. Решите уравнение

$$x^2 + x = 0,5(6 - x) + \sqrt{2x^2 + 3x + 2}.$$

Часть 3

С3. Найдите все значения a, для которых при каждом x из промежутка $(-3; -1]$ значение выражения $x^4 - 8x^2 - 2$ не равно значению выражения ax^2.

С4*. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 на сторонах AD, A_1B_1, B_1C_1 его оснований лежат точки L, K, M соответственно так, что $AL : LD = 2 : 5$, $A_1K : KB_1 = 2 : 3$, $B_1M : MC_1 = 5 : 2$. Во сколько раз объем параллелепипеда больше объема пирамиды с вершиной K и основанием $LDMB_1$?

С5. Докажите, что система уравнений

$$\begin{cases} 15x^3 + 36x^2 + 22x + 4 = 0, \\ 9\sin\frac{\pi}{x} + \cos\left((5x+1)y\right) = \\ \qquad = y\left(y + \frac{2}{x} - 1\right) + \sqrt{\frac{4}{x} + 16 + 5x(1-5x)}\sin y \end{cases}$$

не имеет решений.

Далее в статье приводятся ответы к наиболее простым задачам, указания к решениям, полные решения и комментарии к ним для более сложных задач. Мы настоятельно рекомендуем читателям-выпускникам закрыть этот текст листом бумаги или тетрадкой, постараться решить задачи самостоятельно и только после этого проверить ответы.

Напоминаем, что на реальном ЕГЭ пользоваться справочниками и калькулятором не разрешается.

Ответы к задачам Части 1

А1	А2	А3	А4	А5	А6	А7	А8	А9	А10	В1	В2	В3
3	1	4	2	4	1	2	2	3	1	1	−1	−2

В4. Выразим y из первого уравнения системы, подставим во второе и используем формулу приведения. *Ответ:* 0,3.

Комментарии. При всей простоте этого задания при его выполнении у менее подготовленных выпускников возникают трудности и сомнения, связанные с формируемым в школе стереотипом решения систем уравнений. В предложенном задании требуется найти значение $\cos x$, а не множество пар чисел (x, y), являющихся решением данной системы. Именно поставленный вопрос и вызывает затруднение слабых учащихся. В целом с заданием справилось менее 40% выпускников.

В5. Заданная в условии задачи прямая $y = 3 - x$ имеет угловой коэффициент $k = -1$. Осталось выяснить, сколько найдется точек на графике, в которых $f'(x) = -1$. *Ответ:* 3.

Комментарии. Как мы видим из приведенного решения, при выполнении этого задания выпускнику не требуется проводить какие-либо преобразования или вычисления. Здесь проверяется владение геометрическим смыслом производной, а все числовые данные представлены на рисунке, который нужно только «прочитать». Вместе с тем, решение задачи вызвало серьезные затруднения у выпускников (справились с заданием менее трети участников экзамена).

Вероятнее всего, дело в том, что в школьных учебниках обычно по графику производной требуется определить угловой коэффициент касательной, проведенной в точке с заданной абсциссой x_0. Здесь же приведена (в определенном смысле) обратная задача.

В6. Для любого действительного числа справедливо равенство $\sqrt[4]{a^4}=|a|$. Чтобы использовать это равенство для выполнения задания, проверим, нельзя ли выражение $37-20\sqrt{3}$ представить в виде квадрата двучлена: $37-20\sqrt{3}=25-2\cdot5\cdot2\sqrt{3}+12=\left(5-2\sqrt{3}\right)^2$. Учитывая полученный результат, преобразуем исходное выражение:

$$\sqrt[4]{\left(37-20\sqrt{3}\right)^2}+2\sqrt{3}=\sqrt[4]{\left(5-2\sqrt{3}\right)^4}+2\sqrt{3}=\left|5-2\sqrt{3}\right|+2\sqrt{3}=$$
$$=5-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}=5,$$

так как $5-2\sqrt{3}>0$.

Комментарии. При выполнении этого задания можно было бы к конечному результату двигаться постепенно, воспользовавшись тем, что для произвольного действительного числа a справедливо равенство $\sqrt[4]{a^2}=\sqrt{|a|}$. В нашем случае $a=37-20\sqrt{3}$, и надо выяснить, какой знак имеет это число (напоминаем, что калькулятора, к сожалению, нет). Поскольку $37^2=1369$, а $\left(20\sqrt{3}\right)^2=1200$, то ясно, что $a>0$, так что исходное выражение принимает вид $\sqrt{37-20\sqrt{3}}+$ $+2\sqrt{3}$. После этого можно начать размышлять и вычислять, квадратом какого числа является подкоренное выражение. Решение получается гораздо быстрее, если вспомнить, что ответом в задаче может быть только десятичное число. Это значит, что должно выполняться равенство $\sqrt{37-20\sqrt{3}}=$ $=x-2\sqrt{3}$, где x – десятичное число. Из этого равенства легко получается, что $x=5$, это и есть ответ к задаче.

В7. Поскольку $\sqrt[4]{a^4}=|a|$, уравнение принимает вид $\log_7(3x+5)+\left|\log_7(2x+5)\right|=0$ и распадается на две системы:

$$\begin{cases}\log_7(2x+5)\ge0,\\ \log_7(3x+5)+\log_7(2x+5)=0\end{cases}$$

или

$$\begin{cases}\log_7(2x+5)<0,\\ \log_7(3x+5)-\log_7(2x+5)=0.\end{cases}$$

После отбрасывания логарифмов эти системы выглядят так:

$$\begin{cases}x\ge-2,\\ (3x+5)(2x+5)=1\end{cases}$$

или

$$\begin{cases}x<-2,\\ \dfrac{3x+5}{2x+5}=1.\end{cases}$$

Вторая система решений не имеет, из двух корней квадратного уравнения первой системы неравенству $x\ge-2$ удовлетворяет только ответ задачи $x=-1{,}5$.

Комментарии. Здесь приведено стандартное решение уравнения, содержащего переменную под знаком модуля. Однако выпускник, имеющий хороший уровень подготовки, проанализировав условие задачи и найдя область определения первого логарифмического выражения ($x>-\dfrac{5}{3}$), легко заметит, что значение выражения, стоящего под знаком второго логарифма, всегда больше 1, т.е. $\log_7(2x+5)>0$ при любом x, удовлетворяющем условию $x>-\dfrac{5}{3}$. Таким образом, решение приведенного выше уравнения будет сводиться к решению уравнения $\log_7(3x+5)+\log_7(2x+5)=0$.[3]

В8. То обстоятельство, что для заданной на всей числовой прямой функции $y=f(x)$ число 3 является периодом, означает, что для любого значения x выполняется равенство $f(x+3)=f(x-3)=f(x)$. Поэтому $f(-5)=f(-5+3)=$ $=f(-2)=-3$. Непосредственно из данного графика находим, что $f(-1)=3$. Наконец, $f(12)=f(9)=f(6)=f(3)=$ $=f(0)=2$. В итоге значение искомого выражения равняется $-3-3+2=-4$.

Комментарии. Заметим, что в школьных учебниках при исследовании свойств функций уделяется мало внимания свойству периодичности. Число упражнений на закрепление определения понятия периодичности невелико, основная часть их посвящена исследованию периодичности тригонометрических функций. Поэтому формулировка задачи могла показаться части учащихся необычной. На самом же деле, как видно из приведенного решения, из теоретического материала в нем используется лишь определение периодической функции.

В9. Если первая бригада может отремонтировать дорогу за x дней, то вторая – за $x+6$ дней. Из условия задачи имеем уравнение $\dfrac{6}{x}+\dfrac{16}{x+6}=1$. Положительный корень квадратного уравнения есть $x=18$.

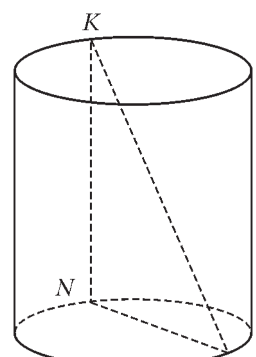

Рис. 5

В10. Через точку K, лежащую на окружности верхнего основания цилиндра, проведем образующую цилиндра KN (рис. 5). Теперь из прямоугольного треугольника KMN можно найти KN, т.е. высоту H цилиндра. Зная объем цилиндра и его высоту, легко находим радиус основания R. Площадь осевого сечения цилиндра есть $S=2RH$. *Ответ:* 60.

В11. Данный равнобедренный треугольник с высотами BE и AH изображен на рисунке 6. По известной площади ABC и стороне BC находим, что $AH=9$. Теперь в прямоугольном треугольнике ABH получаем, что $BH=$ $=12$, поэтому $HC=3$. Отсюда $\operatorname{tg}\angle HCE=3$, но $\angle BOH=\angle HCE$. Получается, что $OH=$ $=BH\operatorname{ctg}\angle BOH=12\cdot\dfrac{1}{3}=$ $=4$, и искомая площадь треугольника BOH есть $S=\dfrac{1}{2}BH\cdot OH=24$.

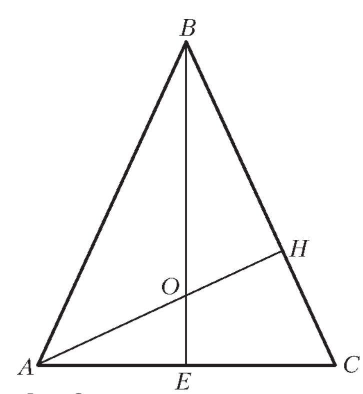

Рис. 6

Другой возможный способ отыскания длины отрезка OH основан на свойстве биссектрисы BO в треугольнике ABH, т.е. на пропорции $\dfrac{OH}{AH-OH}=\dfrac{BH}{AB}$.

[3] *Заметим, что в большинстве задач Части 2 анализ исходных данных задачи позволяет упростить (сократить) стандартные процедуры решения. Решение задачи «в лоб» приводит к более громоздким преобразованиям и вычислениям, а также к потере времени.*

С1. Область определения данной функции задается условием $x^3+8>0$. Поскольку $x^3+8=(x+2)\left(x^2-2x+4\right)$ и неполный квадрат принимает только положительные значения, то $f(x)$ определена при $x\in(-2;+\infty)$. Далее, $2^{-\log_{0,5}\left(x^3+8\right)}=\left(2^{-1}\right)^{\log_{0,5}\left(x^3+8\right)}=0,5^{\log_{0,5}\left(x^3+8\right)}=x^3+8$, и данная функция задается формулой $f(x)=3x^4+4x^3-72x^2+8$ на области определения $D(f)=(-2;+\infty)$. Требуется найти точки минимума этой функции, лежащие в промежутке $(-2;+\infty)$. Для их отыскания находим производную:

$$f'(x)=12x^3+12x^2-144x=12x\left(x^2+x-12\right)=$$
$$=12x(x-3)(x+4).$$

Нули производной есть $x=-4$, $x=0$, $x=3$, а знаки производной легко определяются методом интервалов: $f'(x)>0$ при $x\in(-4;0)\cup(3;+\infty)$ и $f'(x)<0$ при $x\in(-\infty;-4)\cup(0;3)$. Вспомним теперь, что на все эти промежутки надо наложить область определения – промежуток $(-2;+\infty)$. В итоге приходится делать выбор из двух точек $x=0$ и $x=3$. Поскольку при $x\in(0;3)$ данная функция убывает, а при $x\in(3;+\infty)$ возрастает, то минимум достигается при $x=3$.

Комментарии. Заметим, что при выполнении этого задания выпускники должны показать владение стандартным умением найти точку минимума функции. Трудность задания состояла в том, чтобы, во-первых, правильно выполнить преобразования выражений, входящих в формулу, задающую функцию, а во-вторых, правильно указать область определения функции и не забыть ее при исследовании.

С исследованием функции справились около четверти выпускников, имеющих оценку «4», и около 80% выпускников, имеющих оценку «5». Одна из основных ошибок состояла в том, что выпускники забыли учесть область определения исходной функции.

С2. Отметим, что $2x^2+3x+2>0$ при всех x, так что никаких ограничений на корни уравнения нет. Избавимся для начала от дробных коэффициентов, умножив обе части уравнения на 2. После приведения подобных членов получается уравнение $2x^2+3x-6=2\sqrt{2x^2+3x+2}$. Замена $2x^2+3x=y$ приводит к стандартному иррациональному уравнению $y-6=2\sqrt{y+2}$, после возведения обеих частей в квадрат получается уравнение $y^2-16y+28=0$, корень $y=2$ – посторонний и остается корень $y=14$. Уравнение $2x^2+3x-14=0$ имеет корни $x_1=-3,5$, $x_2=2$, это и есть ответ к задаче.

Если догадаться сделать замену $t=\sqrt{2x^2+3x+2}, t>0$, то получается уравнение $t^2-2t-8=0$ с единственным (удовлетворяющим условию $t>0$) корнем $t=4$. Такой путь немного быстрее приводит к ответу.

Комментарии. Для выпускников это задание оказалось более трудным, чем предыдущее. Уравнение решили около 70% выпускников, имеющих оценку «5», и лишь десятая часть выпускников, имеющих оценку «4». Дело в том, что стандартный метод решения иррациональных уравнений – возведение в квадрат – приводит к громоздким выкладкам с многочленом четвертой степени, и многие учащиеся не смогли довести решение до конца.

С3. Условие задачи $x^4-8x^2-2\neq ax^2$ при $x\in(-3;-1]$ означает, что функция $f(z)=z^2-(a+8)z-2$, где $z=x^2$, не обращается в 0 на промежутке $z\in[1;9)$. Данная функция есть квадратный трехчлен с положительным дискриминантом. Два его корня z_1, z_2 имеют разные знаки, так как по теореме Виета $z_1\cdot z_2=-2$. Парабола, являющаяся графиком этого трехчлена, направлена осями вверх, при этом мы не знаем знака абсциссы вершины параболы. В итоге мы имеем или график, изображенный на рисунке 7, или аналогичный с отрицательной, а может быть и нулевой, абсциссой вершины параболы. В силу очевидного условия $z\geq 0$ часть параболы, соответствующая отрицательным значениям аргумента, является фиктивной.

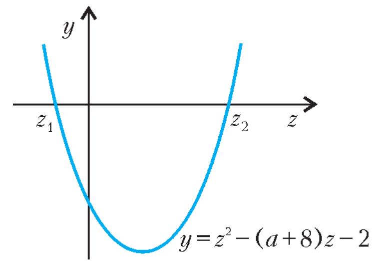

Рис. 7

Чтобы $f(z)$ не имела корней при $z\in[1;9)$, необходимо и достаточно, чтобы точка z_2 не попадала в этот промежуток, иначе – чтобы выполнялось одно из неравенств $z_2\geq 9$ или $z_2<1$. Длинный и хлопотный путь дальнейшего решения состоит в том, чтобы явно записать корень z_2 и затем решать два неравенства. Много проще обратиться к рисункам 8 и 9, иллюстрирующим описанную выше ситуацию.

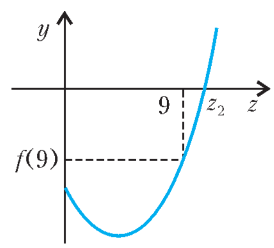

Рис. 8

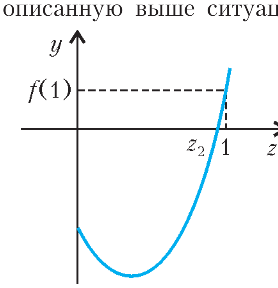

Рис. 9

Из рисунка 8 видно, что, для того чтобы выполнялось условие $z_2\geq 9$, необходимо и достаточно потребовать $f(9)\leq 0$, или $81-9(a+8)-2\leq 0$, откуда $a\geq 7/9$. Из рисунка 9 видно, что, для того чтобы выполнялось условие $z_2<1$, необходимо и достаточно потребовать $f(1)>0$, или $1-(a+8)-2>0$, откуда $a<-9$. Итого, $a\in(-\infty;-9)\cup\left[\frac{7}{9};+\infty\right)$. Легко проверяется, что изменение на чертеже положения вершины параболы никак не повлияет на окончательный результат.

С4. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – данный прямоугольный параллелепипед (рис. 10), длины его сторон обозначим $AB=a$, $AD=b$, $AA_1=c$. Тогда объем параллелепипеда есть $V=abc$, а по известным из условия задачи отношениям, в которых точки K, L, M делят соответствующие ребра, мы легко определяем длины частей этих ребер:

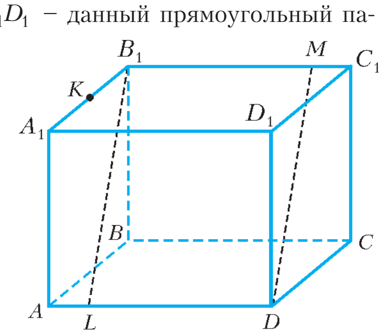

Рис. 10

$$A_1K=\frac{2}{5}a,\ KB_1=\frac{3}{5}a,\ B_1M=\frac{5}{7}b,$$

$$MC_1=\frac{2}{7}b,\ AL=\frac{2}{7}b,\ LD=\frac{5}{7}b.$$

Поскольку $AD\perp AA_1$ и $AD\perp AB$, то ребро AD перпендикулярно плоскости AA_1B_1. Но $B_1C_1\parallel AD$, значит, также перпендикулярно этой плоскости. Поэтому диагональное

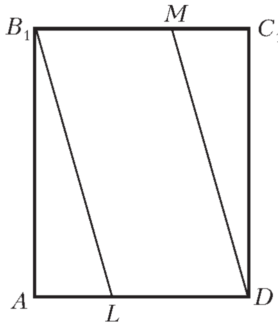

Рис. 11

сечение параллелепипеда AB_1C_1D представляет собой прямоугольник (рис.11). Основание пирамиды $LDMB_1$ лежит в этом прямоугольнике. При этом $LD \parallel B_1M$ и, как мы определили выше, $LD = B_1M$. Это означает, что $LDMB_1$ – параллелограмм, при этом B_1A – высота этого параллелограмма, так что площадь основания пирамиды есть

$$S = LD \cdot B_1A = \frac{5}{7} b \cdot \sqrt{a^2 + c^2} = \frac{5b\sqrt{a^2 + c^2}}{7}.$$

В плоскости AA_1B_1 проведем $KN \perp AB_1$ (рис. 12). Докажем, что KN перпендикулярно плоскости диагонального сечения AB_1C_1D. В самом деле, B_1C_1 перпендикулярна плоскости AA_1B_1, поэтому $B_1C_1 \perp KN$. По построению $AB_1 \perp KN$, так что KN перпендикулярна двум пересекающимся прямым в плоскости диагонального сечения AB_1C_1D и потому перпендикулярна самой этой плоскости. Отсюда следует важный вывод: KN есть высота пирамиды $KLDMB_1$.

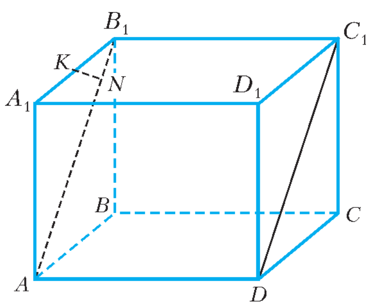

Рис. 12

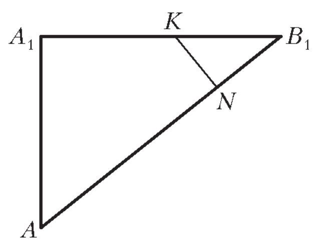

Рис. 13

Найти длину KN удобнее, рассмотрев треугольник AA_1B_1 на отдельном чертеже (рис.13). Треугольники KNB_1 и AA_1B_1 несомненно подобны. Из пропорции $\frac{KN}{AA_1} = \frac{KB_1}{AB_1}$ определяем, что

$$KN = \frac{AA_1 \cdot KB_1}{AB_1} = \frac{c \cdot \frac{3}{5} a}{\sqrt{a^2 + c^2}} = \frac{3ac}{5\sqrt{a^2 + c^2}}.$$

Теперь находим объем пирамиды $KLDMB_1$:

$$V_1 = \frac{1}{3} S \cdot KN = \frac{1}{3} \cdot \frac{5b\sqrt{a^2 + c^2}}{7} \cdot \frac{3ac}{5\sqrt{a^2 + c^2}} = \frac{abc}{7}.$$

Искомое в задаче отношение объемов есть $V/V_1 = 7$.

Комментарии. По сравнению с первой из стереометрических задач (B10) эта задача имеет значительно более высокий уровень сложности, поскольку здесь рассматривается комбинация многогранников: пирамида, «вписанная» в прямоугольный параллелепипед. Выпускнику потребуется проанализировать взаимное расположение фигур и установить, какой четырехугольник лежит в основании пирамиды и как удобно провести ее высоту. Если ответ на первый из поставленных вопросов для хорошо подготовленных выпускников не составит труда, то ответ на второй вопрос потребует хороших пространственных представлений и владения системой геометрических знаний для обоснования расположения высоты пирамиды.

Заметим, что хотя теоретические факты, необходимые для решения подобных задач, и не выходят за рамки школьного курса геометрии, но времени на обучение их решению, отводимого только программой по геометрии, явно недостаточно. По-видимому, именно с этим связаны низкие результаты выполнения задания С4 (менее 1% участников экзамена справились с заданием и только около 10% школьных отличников правильно его решили).

C5. Начнем с того, что было бы хорошо угадать какой-нибудь корень кубического уравнения, но подстановка в него первых целых отрицательных чисел (понятно, что положительных корней у уравнения нет) ни к чему не приводит.

Обратимся ко второму уравнению системы. Единственное, что мы можем сделать, – это найти ОДЗ из условия $\frac{4}{x} + 16 + 5x(1 - 5x) \ge 0$, которое после преобразований приводится к виду $\frac{25x^3 - 5x^2 - 16x - 4}{x} \le 0$. Неравенство надо решать методом интервалов, для этого числитель необходимо разложить на множители. В отличие от первого уравнения системы, здесь корень угадывается практически сразу: $x = 1$. Далее удобнее всего разделить «уголком» $25x^3 - 5x^2 - 16x - 4$ на $(x - 1)$. Тем, кто не умеет этого делать, лучше бы научиться, иначе придется выкручиваться, например, так:

$$\begin{aligned}25x^3 - 5x^2 - 16x - 4 &= 25x^3 - 25x^2 + 20x^2 - 16x - 4 = \\ &= 25x^2(x - 1) + 4\left(5x^2 - 4x - 1\right) = \\ &= 25x^2(x - 1) + 4(x - 1)(5x + 1) = \\ &= (x - 1)\left(25x^2 + 20x + 1\right) = (x - 1)(5x + 2)^2.\end{aligned}$$

Решением неравенства $\frac{(x - 1)(5x + 2)^2}{x} \le 0$ будут промежуток $x \in (0; 1]$ и число $x = -\frac{2}{5}$. Похоже, что это число играет какую-то важную роль во всей задаче. Ничего не остается, кроме как попробовать подставить это число в первое уравнение системы:

$$15 \cdot \left(-\frac{8}{125}\right) + 36 \cdot \frac{4}{25} - 22 \cdot \frac{2}{5} + 4 = \frac{-24 + 144 - 220 + 100}{25} = 0.$$

Итак, $x = -\frac{2}{5}$ является корнем первого уравнения; теперь надо понять, есть ли у него другие корни. Для этого снова придется раскладывать на множители: $15x^3 + 36x^2 + 22x + 4 = \left(x + \frac{2}{5}\right) \cdot Q(x)$, где $Q(x)$ – многочлен второй степени. Чтобы не возиться с дробными числами, удобнее, разделив все коэффициенты $Q(x)$ на 5, переписать предыдущее разложение в виде

$$15x^3 + 36x^2 + 22x + 4 = (5x + 2) \cdot P(x),$$

где $P(x) = Q(x)/5$. Найти этот многочлен можно либо делением «уголком» левой части этого равенства на $(5x + 2)$, либо разложением на множители. Снова продемонстрируем второй способ:

$$\begin{aligned}15x^3 + 36x^2 + 22x + 4 &= 15x^3 + 6x^2 + 30x^2 + 22x + 4 = \\ &= 3x^2(5x + 2) + (6x + 2)(5x + 2) = (5x + 2)\left(3x^2 + 6x + 2\right).\end{aligned}$$

Входящий в это разложение квадратный трехчлен имеет корни $\frac{-3 \pm \sqrt{3}}{3}$, оба эти числа отрицательны и не входят в ОДЗ. Получается, что $x = -\frac{2}{5}$ – единственное возможное значение неизвестной x в решении системы, но теперь необходимо проверить, удовлетворяет ли это число в паре с каким-нибудь значением неизвестной y второму уравнению системы. При $x = -\frac{2}{5}$ имеем

$$9\sin\frac{\pi}{x} = 9\sin\left(-\frac{5\pi}{2}\right) = -9,$$

$$\cos\left((5x+1)y\right) = \cos(-y) = \cos y,\ \frac{2}{x} - 1 = -6,$$

и второе уравнение превращается в $-9 + \cos y = y(y-6)$, или $\cos y = (y-3)^2$. При $y \in (-\infty; 2) \cup (4; +\infty)$ правая часть этого равенства больше единицы, так что в этих промежутках решения не найти. Если же $y \in [2;4]$, то это значит, что аргумент косинуса лежит во второй или третьей четвертях, но не на вертикальном диаметре, т.е. в этом промежутке $\cos y < 0$ и уравнение также не имеет решений. Итак, отсутствие решений у системы доказано.

Комментарии. Последняя задача варианта ЕГЭ – самая трудная. Она рассчитана на выпускников, имеющих высокий уровень математической подготовки и готовящихся к поступлению в те вузы, которые предъявляют самые высокие требования. Обычно с последней задачей справляется только небольшая часть тех выпускников, которые имеют школьную оценку «5» (около 5% отличников).

При ознакомлении с приведенными решениями задач высокого уровня сложности у читателя, очевидно, возникает желание получить дополнительную информацию о других типах задач, о характеристике методов их решения и т.п. Естественно, источником такой информации служат печатные издания о ЕГЭ. Для тех, кто хочет иметь реальную информацию о ЕГЭ, а не только авторское мнение какого-либо коллектива, советуем пособия, имеющие гриф Федерального института педагогических измерений (ФИПИ).

ЕГЭ по физике

М.ДЕМИДОВА, А.ЧЕРНОУЦАН

В 2008 году вступительный экзамен по физике, в отличие от математики и русского языка, может сдаваться как в форме ЕГЭ, так и в традиционной форме. Однако уже в 2009 году при поступлении в те вузы, где физика является одним из конкурсных предметов, должен быть обязательно представлен результат ЕГЭ. Это относится и к тем вузам, которые получат право проводить дополнительные испытания по физике. При этом ЕГЭ по физике остается экзаменом по выбору. Понятно, что его будут выбирать, в первую очередь, те выпускники, кто собирается заявить полученный результат в выбранный ими вуз. Ведь для успешного поступления в престижные вузы необходимо добиться более высоких результатов, чем для получения хорошей школьной оценки.

При подготовке к ЕГЭ необходимо решать разнообразные задачи разного уровня сложности, совмещая эту традиционную форму подготовки с изучением теории и регулярным выполнением тренировочных тестов. Отметим, что настоящее понимание теории приходит не при выучивании законов и формул и разборе тестовых вопросов (хотя это тоже необходимо), а при использовании этих законов и формул в достаточно сложных задачах. Единственной гарантией высокого результата может быть глубокое и заинтересованное изучение физики, решение нетривиальных задач, разбор каверзных вопросов и ситуаций.

Ниже мы приводим один из вариантов ЕГЭ 2007 года с кратким решением части задач. После этого мы обсудим типичные трудности, которые возникали у сдающих ЕГЭ по физике, и отметим новые элементы в ЕГЭ 2008 года.

Вариант 2007 года

Часть 1

А1. Тело упало с некоторой высоты с нулевой начальной скоростью и при ударе о землю имело скорость 40 м/с. Чему равно время падения? Сопротивлением воздуха пренебречь.

1) 0,25 с; 2) 4 с; 3) 40 с; 4) 400 с.

А2. Точка движется с постоянной по модулю скоростью v по окружности радиусом R. Как изменится центростремительное ускорение точки, если ее скорость увеличить вдвое, а радиус окружности вдвое уменьшить?

1) Уменьшится в 2 раза; 2) увеличится в 2 раза; 3) увеличится в 4 раза; 4) увеличится в 8 раз.

А3. Четыре одинаковых кирпича массой m каждый сложены в стопку (рис.1). Если убрать верхний кирпич, то сила N, действующая со стороны горизонтальной опоры на 1-й кирпич, уменьшится на:

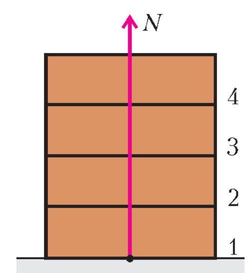

Рис. 1

1) $\frac{mg}{4}$; 2) $\frac{mg}{2}$; 3) mg; 4) $\frac{mg}{3}$.

А4. Под действием силы 3 Н пружина удлинилась на 4 см. Чему равен модуль силы, под действием которой удлинение этой пружины составит 6 см?

1) 3,5 Н; 2) 4 Н; 3) 4,5 Н; 4) 5 Н.

А5. Мальчик взвесил рыбу на самодельных весах с коромыслом из легкой рейки (рис.2). В качестве гири он использовал батон хлеба массой 1 кг. Масса рыбы равна:

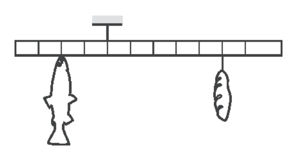
Рис. 2

1) 5 кг; 2) 2,5 кг; 3) 0,4 кг; 4) 1 кг.

А6. Первоначальное удлинение пружины равно Δl. Как изменится потенциальная энергия пружины, если ее удлинение станет вдвое больше?

1) Увеличится в 2 раза; 2) увеличится в 4 раза; 3) уменьшится в 2 раза; 4) уменьшится в 4 раза.

А7. Частота колебаний струны равна 500 Гц. Скорость звука в воздухе 340 м/с. Длина звуковой волны равна:

1) 68 м; 2) 340 м; 3) 170 м; 4) 0,68 м.

А8. На рисунке 3 приведен график зависимости скорости тела от времени при прямолинейном движении. Какой из графиков на рисунке 4 выражает зависимость модуля равнодействующей всех сил, действующих на тело, от времени движения? Систему отсчета считать инерциальной.

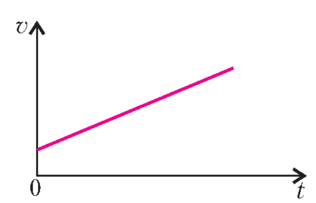

Рис. 3

А9. Доска массой 0,5 кг шарнирно подвешена к потолку на легком стержне (рис.5). На доску со скоростью 10 м/с налетает пластилиновый шарик массой 0,2 кг и прилипает к ней. Скорость шарика перед ударом направлена под углом 60° к нормали к доске.

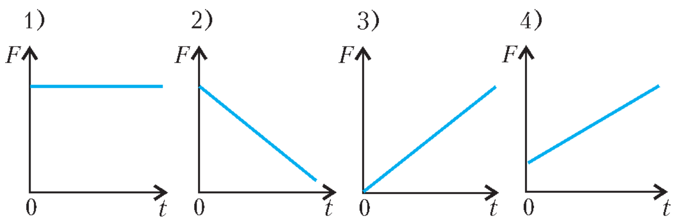

Рис. 4

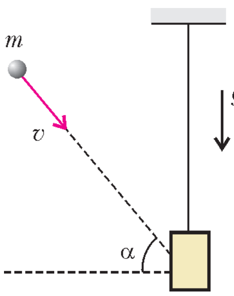

Рис. 5

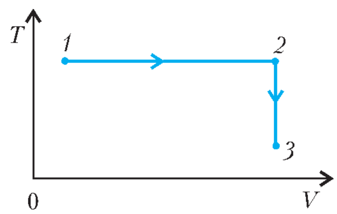

Рис. 6

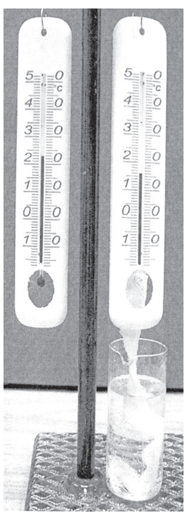
Рис. 7

Кинетическая энергия системы тел после соударения равна:

1) 0,7 Дж; 2) 1,0 Дж; 3) 2,9 Дж; 4) 10,0 Дж.

А10. Постоянная масса идеального газа участвует в процессе, показанном на рисунке 6. Наибольшее давление газа в процессе достигается:

1) в точке *1*; 2) на всем отрезке *1–2*; 3) в точке *3*; 4) на всем отрезке *2–3*.

А11. Как изменяется внутренняя энергия одноатомного идеального газа при изохорном увеличении его давления?

1) Уменьшается; 2) увеличивается; 3) увеличивается или уменьшается в зависимости от изменения объема; 4) не изменяется.

А12. На фотографии (рис.7) представлены два термометра, используемые для определения относительной влажности воздуха с помощью психрометрической таблицы, в которой влажность указана в процентах. Относительная влажность воздуха в помещении, в котором проводилась съемка, равна:

1) 37%; 2) 45%; 3) 48%; 4) 59%.

Психрометрическая таблица

Показания сухого термометра, °C	Разность показаний сухого и влажного термометров, °C								
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
	Относительность влажность, %								
15	100	90	80	71	61	52	44	36	27
16	100	90	81	71	62	54	45	37	30
17	100	90	81	72	64	55	47	39	32
18	100	91	82	73	64	56	48	41	34
19	100	91	82	74	65	58	50	43	35
20	100	91	83	74	66	59	51	44	37
21	100	91	83	75	67	60	52	46	39
22	100	92	83	76	68	61	54	47	40
23	100	92	84	76	69	61	55	48	42
24	100	92	84	77	69	62	56	49	43
25	100	92	84	77	70	63	57	50	44

А13. При охлаждении твердого тела массой m температура тела понизилась на ΔT. Какое из приведенных ниже выражений определяет удельную теплоемкость вещества этого тела, если при этом охлаждении тело передало окружающим телам количество теплоты Q?

1) $\frac{Q\Delta T}{m}$; 2) $\frac{Q}{\Delta T}$; 3) $\frac{Q}{m\Delta T}$; 4) $Qm\Delta T$.

А14. На pT-диаграмме (рис.8) показан процесс изменения состояния идеального одноатомного газа неизменной массы. Газ совершает работу 5 кДж. Количество теплоты, полученное газом, равно:

1) 1 кДж; 2) 3 кДж; 3) 3,5 кДж; 4) 5 кДж.

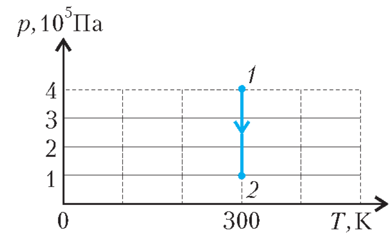

Рис. 8

А15. Тепловая машина имеет КПД 25 %. Средняя мощность передачи теплоты холодильнику в ходе ее работы составляет 3 кВт. Какое количество теплоты получает рабочее тело машины от нагревателя за 10 с?

1) 0,4 Дж; 2) 40 Дж; 3) 400 Дж; 4) 40 кДж.

А16. Как направлена кулоновская сила, действующая на точечный заряд $2q$, помещенный в центр квадрата, в вершинах которого находятся заряды: $+q$, $+q$, $-q$, $-q$ (рис.9)?

1) $\rightarrow$; 2) $\leftarrow$; 3) $\uparrow$; 4) $\downarrow$.

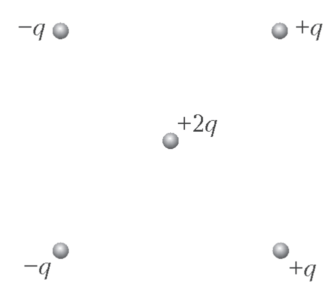

Рис. 9

А17. Как изменится электроемкость плоского воздушного конденсатора, если расстояние между его пластинами уменьшить в 2 раза?

1) Увеличится в 4 раза; 2) увеличится в 2 раза; 3) уменьшится в 2 раза; 4) уменьшится в 4 раза.

А18. Как изменится сила тока, протекающего через медный провод, если увеличить в 2 раза напряжение на его концах, а длину этого провода уменьшить в 2 раза?

1) Не изменится; 2) уменьшится в 2 раза; 3) увеличится в 2 раза; 4) увеличится в 4 раза.

А19. В электрической цепи, представленной на рисунке 10, тепловая мощность, выделяющаяся на резисторе сопротивлением R_1 = 20 Ом, равна 2 кВт. Мощность, выделяющаяся на резисторе сопротивлением R_2 = 30 Ом, равна:

1) 1 кВт; 2) 2 кВт; 3) 3 кВт; 4) 4 кВт.

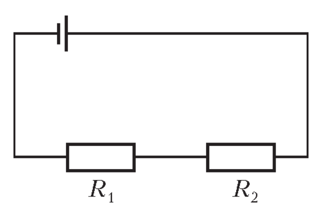

Рис. 10

А20. Сравните индуктивности L_1 и L_2 двух катушек, если при одинаковой силе тока энергия магнитного поля, создаваемого током в первой катушке, в 9 раз больше энергии магнитного поля, создаваемого током во второй катушке.

1) L_1 в 9 раз больше, чем L_2; 2) L_1 в 9 раз меньше, чем L_2; 3) L_1 в 3 раза больше, чем L_2; 4) L_1 в 3 раза меньше, чем L_2.

А21. На плоскую непрозрачную пластину с двумя узкими параллельными щелями падает по нормали плоская монохроматическая волна из зеленой части видимого спектра. За пластиной на параллельном ей экране наблюдается интерференционная картина. Если использовать монохроматический свет из красной части видимого спектра, то:

1) расстояние между интерференционными полосами уве-

личится; 2) расстояние между интерференционными полосами уменьшится; 3) расстояние между интерференционными полосами не изменится; 4) интерференционная картина повернется на 90°.

A22. Какой из образов 1–4 (рис.11) служит изображением предмета AB в тонкой линзе с фокусным расстоянием F?

1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4.

A23. Протон p, влетевший в зазор между полюсами электромагнита, имеет горизонтальную скорость $\vec{v}$, перпендикулярную вектору индукции $\vec{B}$ магнитного поля, направленного вертикально (рис.12). Куда направлена действующая на него сила Лоренца?

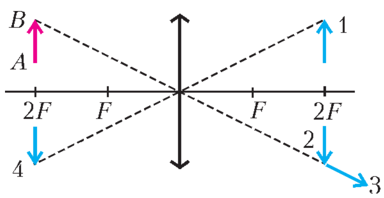

Рис. 11

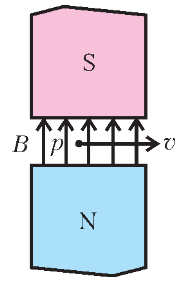

Рис. 12

1) Горизонтально к нам ⊙; 2) горизонтально от нас ⊗; 3) вертикально вверх ↑; 4) вертикально вниз ↓.

A24. Синус предельного угла полного внутреннего отражения на границе стекло – воздух равен $\frac{8}{13}$. Какова скорость света в стекле?

1) $4{,}88 \cdot 10^8$ м/с; 2) $2{,}35 \cdot 10^8$ м/с; 3) $1{,}85 \cdot 10^8$ м/с; 4) $3{,}82 \cdot 10^8$ м/с.

A25. В некоторой инерциальной системе отсчета (ИСО) частица покоится. В любой другой ИСО она:

1) покоится; 2) движется прямолинейно; 3) движется с ускорением; 4) либо покоится, либо движется равномерно и прямолинейно.

A26. На рисунке 13 приведены фрагмент спектра поглощения неизвестного разреженного атомарного газа (в середине), а также спектры поглощения атомов водорода (вверху) и гелия (внизу). В химический состав газа входят атомы:

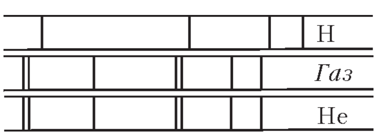

Рис. 13

1) только водорода; 2) только гелия; 3) водорода и гелия; 4) водорода, гелия и еще какого-то вещества.

A27. Какая доля от большого количества радиоактивных атомов остается нераспавшейся через интервал времени, равный двум периодам полураспада?

1) 25%; 2) 50%; 3) 75%; 4) 0%.

A28. Ядро $^{238}_{92}\mathrm{U}$ претерпело ряд α- и β-распадов. В результате образовалось ядро $^{206}_{82}\mathrm{Pb}$. Определите число α-распадов.

1) 32; 2) 10; 3) 8; 4) 5.

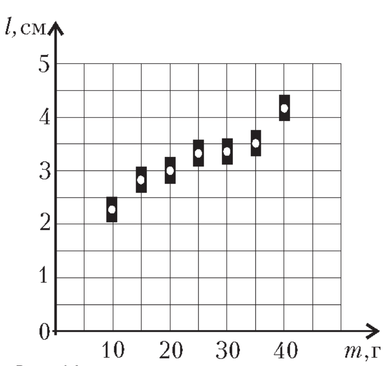

Рис. 14

A29. Работа выхода для материала пластины равна 2 эВ. Пластина освещается монохроматическим светом. Какова энергия фотонов падающего света, если максимальная кинетическая энергия фотоэлектронов 1,5 эВ?

1) 0,5 эВ; 2) 1,5 эВ; 3) 2 эВ; 4) 3,5 эВ.

A30. На графике (рис.14) представлены результаты измерения длины пружины при различных значениях массы грузов, лежащих в чашке пружинных весов (рис.15). С учетом погрешностей измерений ($\Delta m = \pm 1$ г, $\Delta l = \pm 0{,}2$ см) жесткость пружины k приблизительно равна:

1) 7 Н/м; 2) 10 Н/м; 3) 20 Н/м; 4) 30 Н/м.

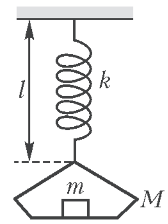

Рис. 15

Часть 2

B1. Груз массой 2 кг, закрепленный на пружине жесткостью 200 Н/м, совершает гармонические колебания с амплитудой 10 см. Какова максимальная скорость груза?

B2. В баллоне находятся 20 кг азота при температуре 300 К и давлении 10^5 Па. Каков объем баллона? Ответ округлите до целых.

B3. Прямолинейный проводник длиной l = 0,2 м, по которому течет ток I = 2 А, находится в однородном магнитном поле с индукцией B = 0,6 Тл и расположен параллельно вектору $\vec{B}$. Каков модуль силы, действующей на проводник со стороны магнитного поля?

B4. Плоская монохроматическая световая волна с длиной волны 400 нм падает по нормали на дифракционную решетку с периодом 5 мкм. Параллельно решетке позади нее размещена собирающая линза с фокусным расстоянием 20 см. Дифракционная картина наблюдается на экране в задней фокальной плоскости линзы. Найдите расстояние между ее главными максимумами 1-го и 2-го порядков. Ответ запишите в миллиметрах (мм), округлив до целых. Считать для малых углов φ ($\varphi \ll 1$ в радианах) $\mathrm{tg}\varphi \approx \sin\varphi \approx \varphi$.

Часть 3

C1. Наклонная плоскость пересекается с горизонтальной плоскостью по прямой AB (рис.16). Угол между плоскостями $\alpha = 30°$. Маленькая шайба начинает движение вверх по наклонной плоскости из точки A с начальной скоростью $v_0 = 2$ м/с под углом $\beta = 60°$ к прямой AB. В ходе движения шайба съезжает на прямую AB в точке B. Пренебрегая трением между шайбой и наклонной плоскостью, найдите расстояние AB.

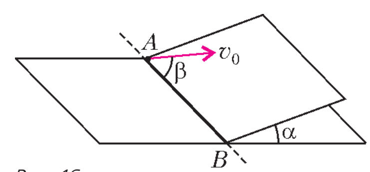

Рис. 16

C2. Один моль одноатомного идеального газа переходит из состояния *1* в состояние *3* (рис.17) в соответствии с графиком зависимости его объема V от температуры T (T_0 = = 100 К). На участке *2–3* к газу подводят 2,5 кДж тепла. Найдите отношение полной работы газа A_{123} ко всему количеству подведенного к газу количества теплоты Q_{123}.

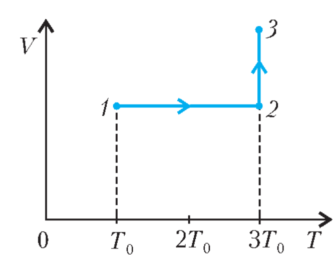

Рис. 17

C3. К источнику тока с ЭДС $\mathcal{E}$ = 9 В и внутренним сопротивлением r = = 1 Ом подключили парал-

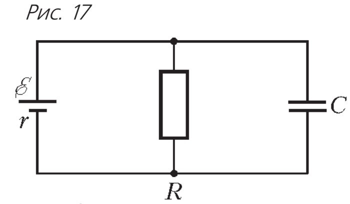

Рис. 18

(Продолжение см. на с. 34)

По порядку становись!

Множество M называют счетным, если его элементы можно пронумеровать натуральными числами – выписать в виде последовательности: $M = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$. Например, счетны множества целых чисел, простых чисел, квадратов:

0, 1, −1, 2, −2, 3, −3, 4, …;
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, …;
0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, …

Рисунок 1 показывает, что счетно множество $\mathbb{Z}^2$ точек плоскости с целыми координатами. На рисунке 2 показан другой способ нумерации: начинаем с точки (0; 0), нумеруем точки, сумма модулей координат которых равна 1, затем те, для которых эта сумма равна 2, и так далее – по возрастанию суммы модулей абсциссы и ординаты. Способов бесконечно много; вряд ли можно выбрать из них «самый красивый», «самый правильный».

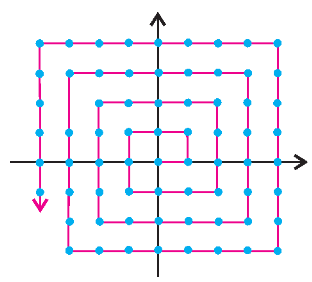

Рис. 1

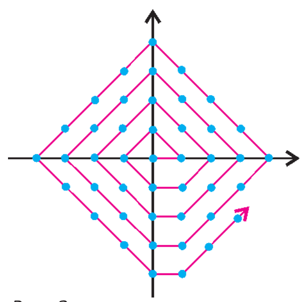

Рис. 2

Рисунок 3 доказывает счетность множества $\mathbb{N}^2$ точек плоскости с натуральными координатами. Выведем формулу для номера, которым эта нумерация снабжает точку $(x;\ y)$. Для этого заметим, что длины катетов закрашенного на рисунке 4 треугольника равны $x + y$; поэтому количество точек с натуральными координатами, расположенных внутри него, равно

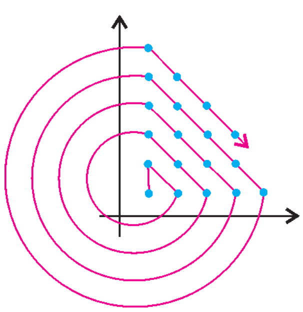

Рис. 3

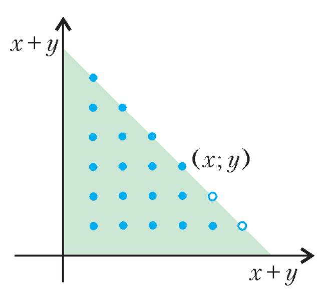

Рис. 4

$$1 + 2 + \ldots + (x + y - 2) = \frac{(x + y - 2)(x + y - 1)}{2},$$

а номер точки $(x;\ y)$ равен $\dfrac{(x + y - 2)(x + y - 1)}{2} + x$.

Множество $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ точек $(x;\ y)$, где x – натуральное число, а y – целое, тоже счетно (рис.5). Поскольку каждое рациональное число единственным образом представимо в виде дроби y/x, где $x \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{Z}$, $\text{НОД}(x; y) = 1$, то рисунок 6, отличающийся от рисунка 5 только тем, что

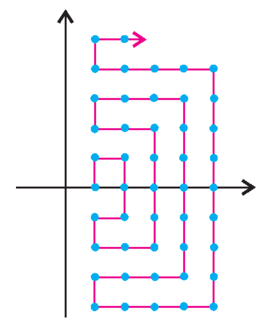

Рис. 5

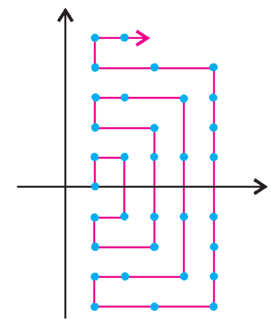

Рис. 6

пропущены точки $(x;\ y)$, у которых наибольший общий делитель чисел x и y больше 1, задает следующий способ нумерации рациональных чисел: 0, 1, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, −1, −2, $-\frac{2}{3}$, $-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, 2, 3, $\frac{3}{2}$, $\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{4}$, $-\frac{3}{2}$, −3, −4, $-\frac{4}{3}$, $-\frac{4}{5}$, $-\frac{3}{5}$, $-\frac{2}{5}$, $-\frac{1}{5}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{4}{3}$, 4, 5, $\frac{5}{2}$, …

Разумеется, этот способ не единственный, можно придумать много других, не менее естественных нумераций множества $\mathbb{Q}$ рациональных чисел.

В 2000 году Нейл Калкин и Герберт Вилф придумали изящную нумерацию множества положительных рациональных чисел. Построение начинаем с несократимой дроби 1/1 (рис.7). Из каждого числа $x = a/b$ строим – тоже несократимые! – дроби $a/(a+b) = x/(1+x)$ («налево-вниз») и $(a+b)/b = x+1$ («направо-вниз»). Поскольку дробь 1/1 несократима и поскольку из всякой несократимой дроби мы строим несократимые дроби, то все дроби дерева Калкина–Вилфа несократимы.

Узнать, где в дереве расположена та или иная дробь, нетрудно. Например, дробь 19/66 меньше 1 и поэтому получена из дроби 19/47, которая получена из 19/28, которая, в свою очередь, получена из 19/9. Поскольку 19 > 9, то дробь 19/9 получена из 10/9 и так далее:

$$\frac{19}{66} \leftarrow \frac{19}{47} \leftarrow \frac{19}{28} \leftarrow \frac{19}{9} \leftarrow \frac{10}{9} \leftarrow \frac{1}{9} \leftarrow \frac{1}{8} \leftarrow \frac{1}{7} \leftarrow \frac{1}{6} \leftarrow$$

$$\leftarrow \frac{1}{5} \leftarrow \frac{1}{4} \leftarrow \frac{1}{3} \leftarrow \frac{1}{2} \leftarrow \frac{1}{1}.$$

Таким образом, индукцией по величине $m + n$ легко доказать, что каждая положительная несократимая дробь m/n встречается в дереве Калкина–Вилфа ровно один раз.

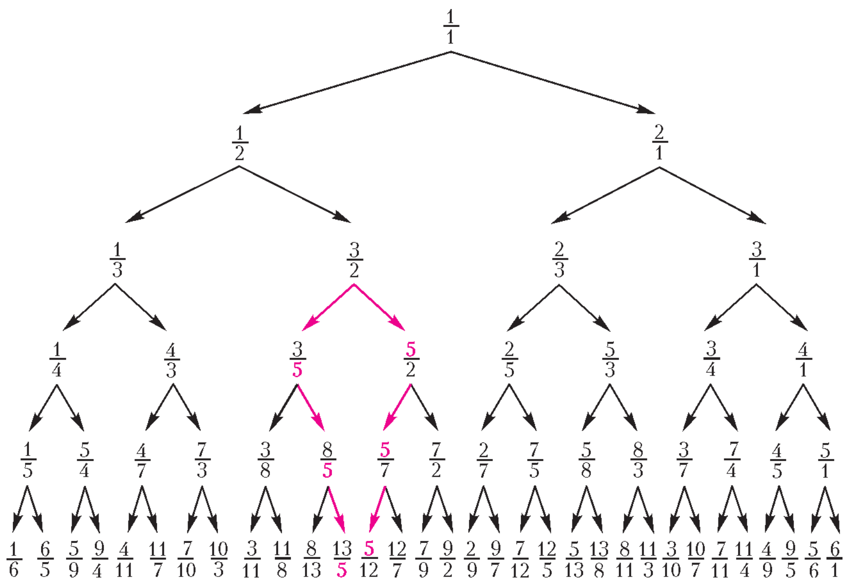

Рис. 7

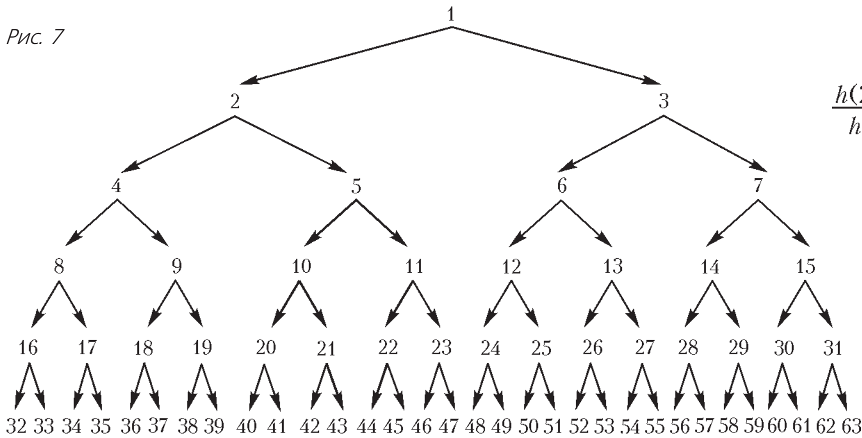

Рис. 8

Начиная с самого верха, спускаясь с этажа на этаж и двигаясь по каждому этажу слева направо, получаем нумерацию Калкина–Вилфа:

$$\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{2}{1},\frac{1}{3},\frac{3}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{1},\frac{1}{4},\frac{4}{3},\frac{3}{5},\frac{5}{2},\frac{2}{5},\frac{5}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{1},\frac{1}{5},\frac{5}{4},\frac{4}{7},\frac{7}{3},\ldots$$

Знаменатель каждой дроби является числителем следующей за ней дроби. (При переходе с этажа на следующий это очевидно верно: 1 = 1. При движении по горизонтали доказательство чуть сложнее. Идея в том, что красный на рисунке 7 знаменатель дроби $13/5$ совпадает со знаменателями дробей $8/5$ и $3/5$. Число 5 равно сумме числителя и знаменателя дроби $3/2$. Эта же сумма равна числителям дробей $5/2$, $5/7$ и $5/12$.) Поэтому существует последовательность h такая, что n-я дробь нумерации Калкина–Вилфа равна $\dfrac{h(n-1)}{h(n)}$. Вот первые 20 членов:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$h(n)$	1	1	2	1	3	2	3	1	4	3	5

n	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$h(n)$	2	5	3	4	1	5	4	7	3

Рисунок 8 отличается от рисунка 7 тем, что вместо дробей указаны их номера. Как видите, каждое натуральное число n «раздваивается» в числа $2n$ и $2n+1$. При этом дробь $\dfrac{h(n-1)}{h(n)}$ «раздваивается» в дроби $\dfrac{h(n-1)}{h(n-1)+h(n)}$ и $\dfrac{h(n-1)+h(n)}{h(n)}$ (рис.9). Значит, выполнены следующие рекуррентные соотношения:

$$h(2n-1) = h(n-1),$$
$$h(2n) = h(n-1) + h(n),$$
$$h(2n+1) = h(n).$$

(Третье соотношение получается из пер-

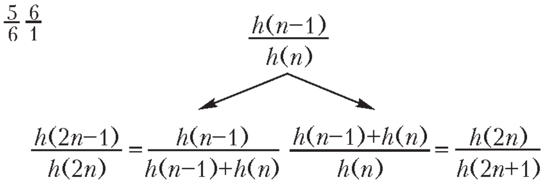

Рис. 9

вого увеличением n на единицу, так что по сути соотношений два, а не три.) Последовательность h изучил Морис Абрахам Штерн в 1858 году. Оказывается, $h(n)$ – количество способов разложить число n в сумму (быть может, состоящую из одного слагаемого или даже – в случае $n = 0$ – состоящую из нуля слагаемых) степеней двойки, где ни одно слагаемое не присутствует более чем дважды. Например,

$$18 = 2 + 16 = 2 + 8 + 8 = 2 + 4 + 4 + 8 =$$
$$= 1 + 1 + 16 = 1 + 1 + 8 + 8 = 1 + 1 + 4 + 4 + 8 =$$
$$= 1 + 1 + 2 + 2 + 4 + 8,$$

так что $h(18) = 7$. А вот объяснение равенства $h(19) = 3$:

$$19 = 1 + 2 + 16 = 1 + 2 + 8 + 8 = 1 + 2 + 4 + 4 + 8.$$

Моше Ньюман изучил функцию

$$f(x) = \frac{1}{x + 1 - 2\{x\}}$$

и последовательность 1, $f(1) = \dfrac{1}{2}$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2$, $f(2) = \dfrac{1}{3}$, $f\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{3}{2}$, …, каждый очередной член которой получается из предыдущего применением функции f. А это и есть уже рассмотренная выше последовательность Калкина–Вилфа. Попробуйте обосновать это самостоятельно.

При подготовке «Калейдоскопа» использованы материалы главы XVII книги М.Айгнера и Г.Циглера «Доказательства из Книги. Лучшие доказательства со времен Евклида до наших дней» (М.: Мир, 2006).

Е.Пронина

(Начало см. на с. 29)

лельно соединенные резистор сопротивлением $R = 8$ Ом и плоский конденсатор, расстояние между пластинами которого $d = 0{,}002$ м (рис.18). Какова напряженность электрического поля между пластинами конденсатора?

C4. Равнобедренный прямоугольный треугольник ABC площадью $50\,\text{см}^2$ расположен перед тонкой собирающей линзой так, что его катет AC лежит на главной оптической оси линзы (рис.19). Фокусное расстояние линзы 50 см. Вершина прямого угла C находится ближе к центру линзы, чем вершина острого угла A. Расстояние от центра линзы до точки C равно удвоенному фокусному расстоянию линзы. Постройте изображение треугольника и найдите площадь получившейся фигуры.

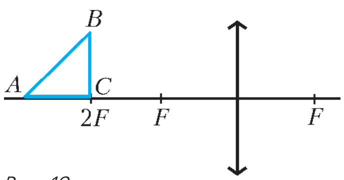

Рис. 19

C5. Предположим, что схема энергетических уровней атомов некоего вещества имеет вид, показанный на рисунке 20, и атомы находятся в состоянии с энергией $E^{(1)}$. Электрон, движущийся с кинетической энергией 1,5 эВ, столкнулся с одним из таких атомов и отскочил, приобретя некоторую дополнительную энергию. Определите импульс электрона после столкновения, считая, что до столкновения атом покоился. Возможностью испускания света атомом при столкновении с электроном пренебречь.

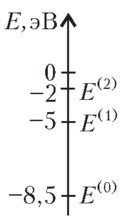

Рис. 20

C6. На рисунке 21 показана схема устройства для предварительного отбора заряженных частиц для последующего детального исследования. Устройство представляет собой конденсатор, пластины которого изогнуты

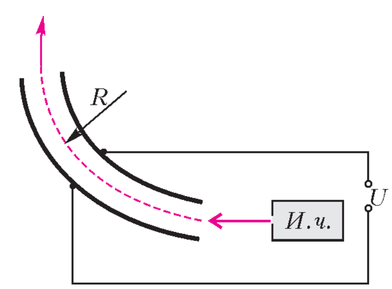

Рис. 21

дугой радиусом $R \approx 50$ см. Предположим, что в промежуток между обкладками конденсатора из источника заряженных частиц (*И.ч.*) влетает электрон, как показано на рисунке. Напряженность электрического поля в конденсаторе по модулю равна 500 В/м. При каком значении скорости электрон пролетит сквозь конденсатор, не коснувшись его пластин? Считать, что расстояние между обкладками конденсатора мало, напряженность электрического поля в конденсаторе всюду одинакова по модулю, а вне конденсатора электрическое поле отсутствует. Влиянием силы тяжести пренебречь.

Ответы к вопросам Части 1

A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12	A13	A14	A15
2	4	3	3	2	2	4	1	1	1	2	3	3	4	4

A16	A17	A18	A19	A20	A21	A22	A23	A24	A25	A26	A27	A28	A29	A30
2	2	4	3	1	1	2	1	3	4	2	1	3	4	3

Ответы к задачам Части 2

B1	B2	B3	B4
1	18	0	16

Краткие решения, указания и комментарии

A9. Скорость системы после удара найдем из закона сохранения импульса в проекции на ось, перпендикулярную стержню: $mv\cos\alpha = (m+M)u$.

A10. Многих сбивает нетрадиционное расположение осей по горизонтали и вертикали.

B4. $d\sin\alpha_m = m\lambda$, $x_m = F\operatorname{tg}\alpha_m \approx F\sin\alpha_m = Fm\lambda/d$, $x_2 - x_1 = F\lambda/d = 16$ мм.

C1. Запишем второй закон Ньютона в проекции на наклонную плоскость:

$$mg\sin\alpha = ma .$$

Ускорение a равно $g\sin\alpha$ и направлено вниз вдоль плоскости. Направим ось X вдоль AB, а ось Y – вверх вдоль плоскости. Движение по плоскости аналогично движению тела, брошенного под углом β к горизонту, с заменой $g \to g\sin\alpha$. Получаем

$$AB = \frac{v_0^2 \sin 2\beta}{g\sin\alpha} = \frac{2\sqrt{3}}{5}\ \text{м} .$$

C2. Поскольку $A_{12} = 0$ и $\Delta U_{23} = 0$, то $A_{123} = A_{23} = Q_{23}$. Далее,

$$Q_{12} = \Delta U_{12} = \frac{3}{2}\nu R\left(3T_0 - T_0\right) = 3\nu RT_0 , \quad Q_{123} = 3\nu RT_0 + Q_{23} .$$

Окончательно,

$$\frac{A_{123}}{Q_{123}} = \frac{Q_{23}}{3\nu RT_0 + Q_{23}} \approx 0{,}5 .$$

C3. $U_C = U_R = \dfrac{\mathcal{E}}{r+R}R$, $E = \dfrac{U_C}{d} = \dfrac{\mathcal{E}R}{d(r+R)} = 4$ кВ/м.

C4. При решении этой задачи большие трудности возникли при построении изображения точки A с помощью побочной оптической оси. Однако, как видно из рисунка 22, достаточно с помощью традиционных опорных лучей построить изображение B' точки B, после чего определяется ход луча AB и положение точки C'. Длину горизонтального катета $A'C'$ найдем с помощью формулы линзы:

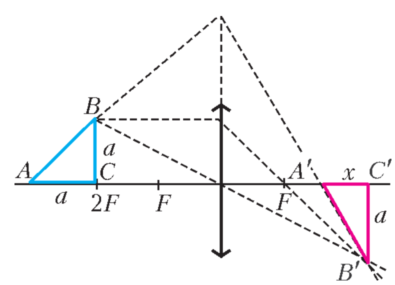

Рис. 22

$$\frac{1}{2F+a} + \frac{1}{2F-x} = \frac{1}{F}, \quad x = \frac{aF}{F+a}, \text{ где } a = \sqrt{2S} .$$

Поскольку точка C' находится на расстоянии $2F$ от линзы, то $C'B' = CB = a$. Тогда

$$S_1 = \frac{1}{2}A'C' \cdot B'C' = \frac{a^2}{2}\frac{F}{F+a} = S\frac{F}{F+\sqrt{2S}} = \frac{5}{6}S \approx 41{,}7\ \text{см}^2 .$$

C5. Энергией отдачи атома можно пренебречь, поэтому энергия электрона после столкновения равна $E = 1{,}5\,\text{эВ} + 3{,}5\,\text{эВ} = 5\,\text{эВ} = 8\cdot 10^{-19}$ Дж. Импульс электрона равен $p = \sqrt{2mE} \approx 1{,}2\cdot 10^{-24}\ \text{кг}\cdot\text{м/с}$.

C6. Второй закон Ньютона в проекции на радиальное направление имеет вид

$$qE = m\frac{v^2}{R}, \text{ откуда } v = \sqrt{RE\frac{q}{m}} \approx 6{,}6\cdot 10^6\ \text{м/с} .$$

Проблемы, возникающие при решении задач ЕГЭ по физике

В контрольно-измерительных материалах ЕГЭ по физике все простые вопросы (или, как их называют, задания базового уровня) находятся в первой части работы. Они, как правило, для подготовленных учащихся не представляют особых затруднений. Самыми «привлекательными» являются всевозможные вопросы на проверку знания различных формул и законов с использованием простейших расчетов, например такие, как задания А1, А4, А6, А7, А19 и т.п. в приведенном выше варианте экзаменационного теста.

При выборе ответа имеет смысл проверять полученный результат на соответствие здравому смыслу. В серии заданий (например, А24) один или два из ответов (ответы 1, 4) были «запрограммированы» на какую-либо ошибку в расчетах, но при этом заведомо не имели смысла, и их можно было просто отбросить. Однако, как показывает опыт, эти ответы выбирают больше трети учащихся.

Гораздо хуже обстоит дело с вопросами качественного характера. Причем здесь результаты ниже ожидаемых как для совсем элементарных вопросов, так и для более сложных. Например, с заданием А3 в рассмотренном варианте справились чуть более половины школьников.

Наиболее проблемными оказываются вопросы на понимание особенностей тех или иных явлений. Так, в приведенном ниже примере 1 более трети учащихся выбирают четвертый ответ, не понимая, что речь идет о диэлектриках, а не о проводниках.

Пример 1. Два стеклянных кубика *1* и *2* сблизили вплотную и поместили в электрическое поле отрицательно заряженного шара, как показано в верхней части рисунка 23. Затем кубики раздвинули и уже потом убрали заряженный шар (нижняя часть рисунка). Какое утверждение о знаках зарядов разделенных кубиков *1* и *2* правильно?

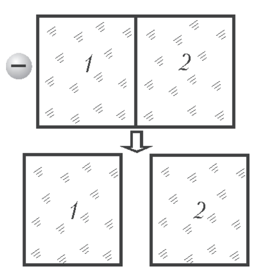

Рис. 23

1) Заряды первого и второго кубиков положительны; 2) заряды первого и второго кубиков отрицательны ; 3) заряды первого и второго кубиков равны нулю; 4) заряд первого кубика положителен, второго – отрицателен.

Как правило, в каждом варианте ЕГЭ по физике есть 4–6 заданий, в которых используются различные графики. В большинстве случаев нужно просто правильно извлечь информацию из предложенного графика (как в задании А14) или выбрать верный график для той или иной зависимости физических величин (как в задании А8). Однако нередко с анализом графических зависимостей успешно справляется лишь группа сильных выпускников (как в задании А10).

Ежегодно задолго перед проведением ЕГЭ публикуются демонстрационный вариант и так называемая спецификация экзаменационной работы. В этом документе, в частности, указывается, на каких местах будут располагаться задания повышенного и высокого уровней сложности. При подготовке к экзамену имеет смысл обратить на это внимание, чтобы не посчитать слишком простым задание, которое таковым не является. Так, в прошлом году в одной из серий вариантов использовались задания, аналогичные приведенному ниже примеру 2.

Пример 2. В опытах по фотоэффекту взяли пластину из металла с работой выхода $3{,}4 \cdot 10^{-19}$ Дж и стали освещать ее светом частотой $3 \cdot 10^{14}$ Гц. Затем частоту увеличили в 2 раза, оставив неизменным число фотонов, падающих на пластину за 1 с. В результате этого число фотоэлектронов, покидающих пластину за 1 с:

1) не изменилось; 2) стало не равным нулю; 3) увеличилось в 2 раза; 4) увеличилось менее чем в 2 раза.

По спецификации это задание повышенного уровня. Однако большинство выпускников не обратили внимания на то, что энергия первоначальных фотонов меньше работы выхода.

Существенную часть экзаменационной работы составляет решение задач по всем темам школьного курса физики и различного уровня сложности. Обычно задачи повышенного уровня второй части работы (В1–В4) особый затруднений не вызывают. Наиболее сложные задачи даются в третьей части работы, хотя и здесь включены как типовые задачи, встречающиеся в традиционных школьных задачниках (например, С2 или С3), так и оригинальные (например, С1, С5 и С6). При решении типовых задач выпускников не пугает обилие необходимых уравнений и сложности математических преобразований. К этой части работы приступает лишь сильная группа учащихся, имеющих, как правило, хорошую математическую подготовку. Проблемы возникают исключительно по физике. Оригинальные задачи, как правило, решаются «в одну формулу», но для этого необходимо самостоятельно предложить физическую модель, поскольку в тексте в явном виде ее описание отсутствует (например, С6). Объективная сложность новизны ситуации существенно влияет на результаты выполнения, которые для этих задач колеблются в пределах 4–8%.

Новое в ЕГЭ 2008 года

Главные изменения в структуре вариантов 2008 года состоят в следующем. Вместо 6 задач в группе С будет 5 задач, каждая из которых оценивается от 0 до 3 баллов. Группа В будет содержать 3 традиционные задачи на получение численного ответа (каждая из которых оценивается в 1 балл) и одного тестового вопроса с выбором трех правильных ответов на три вопроса (оценивается от 0 до 2 баллов). Приведем пример такого вопроса.

Пример 3. Тело трижды бросают с некоторой высоты над поверхностью земли в разных направлениях (рис.24). Для каждого направления броска *A*, *B*, *C* подберите правильную зависимость проекции скорости на ось *y* от времени *t* (рис.25).

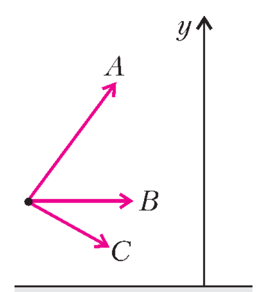

Рис. 24

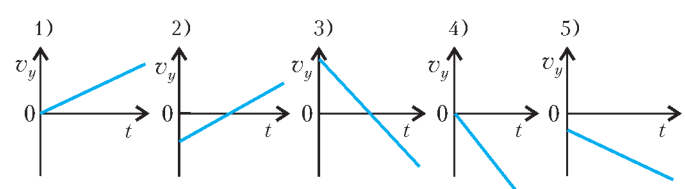

Рис. 25

Ответ:

A	B	C
3	4	5