

журнал© Квант МАРТ 2008 №2 АПРЕЛЬ 2008

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:



Учредители — Российская академия наук, Фонд поддержки фундаментальной науки и образования (Фонд Осипьяна), ИФТТ РАН

ПРЕДСЕДАТЕЛЬ
РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ
Ю.А.Осипьян

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР
С.С.Кротов

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
А.Я.Белов, Ю.М.Брук, А.А.Варламов,
А.Н.Виленин, В.И.Голубев, С.А.Гордюнин,
Н.П.Долбилин (*заместитель главного редактора*), В.Н.Дубровский,
А.А.Егоров, А.В.Жуков,
А.Р.Зильберман, В.В.Кведер (*заместитель председателя редколлегии*), П.А.Кожевников,
В.В.Козлов (*заместитель председателя редколлегии*), С.П.Коновалов, А.А.Леонович,
Ю.П.Лысов, В.В.Произволов, Н.Х.Розов,
А.Б.Сосинский, А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин,
В.М.Тихомиров, В.А.Тихомирова, В.М.Уроев,
А.И.Черноуцан (*заместитель главного редактора*)

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ
А.В.Анджанс, В.И.Арнольд, М.И.Башмаков,
В.И.Берник, В.Г.Болтянский, А.А.Боровой,
Н.Н.Константинов, Г.Л.Коткин, С.П.Новиков,
Л.Д.Фаддеев

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
1970 ГОДА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР
И.К.Кикоин

ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

А.Н.Колмогоров

Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков,
В.Г.Болтянский, И.Н.Бронштейн,
Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург, В.Г.Зубов,
П.Л.Капица, В.А.Кириллин, Г.И.Косоуров,
В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский,
А.И. Маркушевич, М.Д.Миллиончиков,
Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов,
А.П.Савин, И.Ш.Слободецкий,
М.Л.Смолянский, Я.А.Сморodinский,
В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер

Бюро  Квантум

© 2008, РАН,
Фонд Осипьяна, «Квант»

- 2 К 100-летию И.К.Кикоина
7 Об Исааке Константиновиче Кикоине. *А.Боровой*
7 Физика ядерного взрыва. *Л.Белопухов*
11 Две знаменитые формулы. *В.Вавилов, А.Устинов*

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 16 Задачи М2081–М2085, Ф2088–Ф2092
17 Решения задач М2056–М2065, Ф2073–Ф2077

К М Ш

- 23 Задачи

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

- 24 Будет ЕГЭ по математике! *Л.Денищева, Б.Писаревский*
29 ЕГЭ по физике. *М.Демидова, А.Черноуцан*

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

- 32 По порядку становись!

ВАРИАНТЫ

- 36 Материалы вступительных экзаменов 2007 года

ОЛИМПИАДЫ

- 49 XLVIII Международная математическая олимпиада
52 XXXVIII Международная физическая олимпиада

- 56 Ответы, указания, решения

НА ОБЛОЖКЕ

- I *Иллюстрация к статье Л.Белопухова*
II *«Невозможные» объекты*
III *Шахматная страничка*
IV *Коллекция головоломок*



В праздновании 100-летнего юбилея академика
И.К.Кикоина финансовое участие принимает
ОАО «ТЕХСНАБЭКСПОРТ»

К 100-ЛЕТИЮ И.К.КИКОИНА

Об Исааке Константиновиче Кикоине

А.БОРОВОЙ

Я ПРИШЕЛ НА РАБОТУ В «КУРЧАТОВСКИЙ ИНСТИТУТ» в начале 60-х годов теперь уже прошлого века. Лаборатория помещалась на втором этаже трехэтажного здания, носящего название «Главное». С этого здания начинался Институт. В нем, еще не до конца достроенном, в 1943 году И.В.Курчатов со своими немногочисленными сотрудниками проводил первые исследования по созданию атомного оружия. А через двадцать лет над помещениями нашей лаборатории, на третьем этаже, размещалась дирекция, в том числе и кабинет директора – академика Анатолия Петровича Александрова.

Нельзя сказать, что работать в таком престижном месте было особенно комфортно. В дирекцию привозили иностранные делегации, приезжало начальство из министерства, прибывали многозвездные генералы, а изредка и члены Правительства. Поэтому проскакивать по лестницам со свинцовыми кирпичами, контейнерами с радиоактивными источниками или дюарами, наполненными жидким азотом, приходилось максимально быстро. Нельзя было шуметь в коридорах. Рекомендовалось также ходить в чистом и выглаженном халате, что при характере нашей работы представляло известную трудность. С другой стороны, наш балкон, нависающий над подъездом, являл собой идеальный наблюдательный пункт для знакомства с «великими людьми», посещавшими Директора. Именно с этого балкона в 1961 году мы наблюдали встречу Анатолия Петровича с Нильсом Бором, приехавшим в «Курчатовский институт».

Однажды, когда мы стояли на балконе, один из старожилы лаборатории показал на выходящего из машины очень худого высокого человека и сказал: «Смотри, Кикоин приехал». В те времена имена создателей атомного оружия были известны куда менее широко, чем сейчас. Поэтому я тотчас же начал его расспрашивать о том, кто это, откуда и чем знаменит. «Исаак Константинович – заместитель нашего директора, начальник Отделения молекулярной физики (раньше, из-за секретности, его называли отделом приборов теплового контроля). Замечательный чело-

век. Сотрудники в нем души не чают, за глаза называют И.К. Да, самое главное, он академик, дважды герой, научный руководитель большой отрасли промышленности».

Сейчас я мог бы добавить к этой краткой характеристике, что самым главным все-таки было то, что Кикоин – выдающийся физик. Хотел написать «выдающийся ученый» и вспомнил, что сам Исаак Константинович с большой осторожностью и уважением относился к слову «ученый» и вообще был скуп на хвалебные определения. На моей памяти звания «ученый» удостоивались от него только немногие классики науки. В этом он походил на своего друга – Льва Давидовича Ландау. Последний, как рассказывают, на каком-то торжественном приеме при словах «Провозгласим этот тост за славных советских ученых!», для того чтобы смягчить неловкость момента, с места (но громко) произнес: «Учеными бывают только коты и секретари!»

По моим балконным наблюдениям, Кикоин не особенно часто посещал Главное здание – кабинеты центральной дирекции. Как говорили, Александров любил ездить к нему сам.

* * *

Прошло несколько лет. Мы с тремя моими товарищами написали книгу «Механика», и издательство «Наука» готовилось опубликовать ее в «Библиотеке физико-математической школы», выходящей под редакцией Я.А.Сморodinского (книга появилась в 1967 году). В этот период ожидания знаменательного для авторов события в нашей лаборатории раздался звонок, и вежливый женский голос поинтересовался, не могу ли я вечером, часов в 7, прийти к академику Кикоину. Пропуск будет заказан.

Отделение молекулярной физики помещалось достаточно далеко от Главного здания. Все время, пока я шел через парк, минуя десятки корпусов разросшегося института, я продолжал волноваться и гадать, что же могло заинтересовать академика, пытался представить себе возможную тему разговора и подготовиться к ответам на вопросы, если они будут. Вряд ли Кикоин будет говорить о нейтринной физике, которой занималась наша лаборатория. В этом случае он обратился бы к ее руководству, понимающему проблемы существенно лучше, чем молодой специалист. Тогда о чем?

Мысль о «Механике» в голову мне не приходила.

Когда я, наконец, попал в кабинет Кикоина, академик предложил мне садиться и сразу же заговорил о теме нашей встречи. «Сморodinский дал мне прочитать рукопись Вашей книги «Механика». Поэтому хотелось бы поговорить о школьных учебниках по физике. Из книжки довольно ясно видно, что Вас они не устраивают. Я не ошибаюсь?» Я подтвердил, что мы имеем серьезные претензии и к учебникам, и к методам преподавания физики в школе. Начал объяснять более подробно, сначала волновался и говорил достаточно путанно, потом, увидев, что И.К. удобно устроился в своем кресле и внимательно слушает, иногда даже одобрительно кивает, успокоился и аргументировал свою точку зрения более связно. Насколько помню, говорил я в основном о трех вещах. О совершенно не современном изложении материала – для учащихся физика остановилась в лучшем случае на рубеже XIX и XX веков. О том, что написанное в учебниках чаще всего представляет собой набор отдельных глав. Нет единого подхода. Исчезает единый метод физики. Даже, помню, привел слова Декарта – «наблюдение, размышление, опыт», чем вызвал легкую улыбку собеседника. Наконец, о том, что курс школьной физики совершенно не учит решать задачи.

Следующий вопрос академика был о том, какое отношение мы имеем к преподаванию физики в школе. Я объяснил, что все началось с комсомольского поручения дать несколько дополнительных занятий в подшефной школе. Понравилось и слушателям и нам. Организовали постоянно действующий физический кружок, в который стали приходить ребята из многих школ района. Готовим их к поступлению в трудные технические вузы. Сознался, что дома занимаемся и частным репетиторством. «Я в свое время, когда учился, прирабатывал, давая уроки, и считался в Пскове лучшим репетитором по физике и математике», – успокоил мою совесть академик.

Выслушав меня, И.К. заговорил сам. Медленно и очень тихо, так что я вначале даже не все разбирал, но потом приспособился и слушал со всем возможным вниманием. Кикоин рассказывал о том, что ясно видит необходимость не просто улучшить преподавание физики в школе, а совсем по-новому подойти к нему. «Сейчас сплошь и рядом физика находится на задворках учебного процесса, не редки случаи, когда в сельских школах ее преподают учителя физкультуры. По созвучию, наверное, выбирают. А ведь теперешним ребятам жить в мире сложнейшей техники». Говорил о том, насколько важен вопрос «КАК учить», что успех



И.К.Кикоин в своем кабинете

обучения на 90% зависит от учителя, который должен заинтересовать школьников, а физика далеко не такой выигрышный предмет, как, например, история. «Конечно, надо начинать с подготовки учителей, с педагогических институтов, которых достаточно много, но которые очень бедны и совсем не престижны.... Вот видите, сколько вопросов, сколько направлений для работы. И пока только на одном существенные сдвиги – решено, что будут создаваться новые школьные учебники по физике. Я поэтому хотел поговорить с Вами, чтобы предложить вместе с Вашими товарищами в этом поучаствовать».

Совершенно неожиданное предложение! Я честно сказал, что ответить на него не готов, надо посоветоваться с соавторами и все обдумать. Наверное, возникнет много вопросов. «Хорошо, подумайте». Еще некоторое время И.К. разбирал достоинства и недостатки нашей «Механики» (последних оказалось существенно больше). На этом мы и расстались.

После ожесточенных споров с моими соавторами мы пришли к двум выводам. Садиться за написание школьных учебников – означало на несколько лет посвятить себя исключительно этой работе. Слишком большое и ответственное это дело. А мы только-только начинали свой путь в физике, ничего еще в ней путного не сделали. Прервать сейчас на некоторое время научную работу – это наверняка означает навсегда с ней проститься и стать педагогом. Наш первый вывод гласил – от написания учебников надо отказаться. С другой

стороны, совсем прекращать преподавание мы не собирались. Более того, уже формировалась идея создать при «Курчатовском институте» вечернюю физико-математическую школу для одаренных детей и учить их там по своим методикам. Поэтому второй вывод – предложить Исааку Константиновичу использовать нашу школьную аудиторию для проверки его идей, которые будут заложены в новом курсе физики.

Эти два вывода я сообщил академику по телефону и получил его одобрение на дальнейшее сотрудничество. С тех пор посещения кабинета И.К. стали достаточно частыми. Сначала мы появлялись там все вместе. Однако различные житейские причины привели к тому, что я все чаще стал приходить один, особенно после того, как был основан журнал «Квант» и я стал отвечать за раздел «Лаборатория «Кванта».

* * *

К сожалению, за прошедшие десятилетия мои воспоминания стали напоминать старый фильм. Иногда пленка рвется, часто мелькают стертые кадры, пропадает звук. Но вдруг на каком-то месте возникает цвет, сцены наполняются звуком и смыслом. О них я и хочу рассказать.

Место действия почти всегда одно и то же – кабинет Исаака Константиновича. Высокий, очень худой, в неизменном своем черном костюме, он сидит в кресле за большим письменным столом и держит в руках потухшую трубку. За креслом и по другим стенам кабинета располагаются книжные шкафы. Книги, книги. На русском языке, немецком, английском. Книги по физике, инженерным наукам, справочники, словари ... В огромном кабинете жарко, я постоянно вытираюсь платком, а И.К., по-видимому, зябнет. Ходят слухи, что он до сих пор не до конца победил туберкулез и что у него больной желудок. Иногда я задаю вопросы, не относящиеся прямо к теме нашей встречи. Академик отвечает и начинает рассказывать о чем-нибудь. Несмотря на тихий голос рассказчик он замечательный.

* * *

«Где учился я сам? Когда переехали в Псков, а было это в 21 году, то перешел в школу, которая находилась через несколько домов от нашего. Трудовую школу №1, бывшую Первую гимназию, знаменитую во Пскове. Чем знаменитую? Во-первых, возрастом – открылась она еще при Александре I. Во-вторых, прекрасным преподавательским составом. В-третьих, конечно, своими выпускниками». Академик перечисляет несколько действительно знаменитых фамилий. Я запомнил писателей Ю.Тынянова и В.Каверина, микробиолога Л.Зильберта и еще скрипачку Г. Баринову.

«В эти годы школа, как и вся страна, была очень бедной. Ставок преподавателей не хватало. Не было заведующего физическим кабинетом, не было библиотекаря. И через некоторое время мне предложили, на общественных началах, привести в порядок библиотеку (а это были десятки тысяч томов) и постараться наладить хоть какие-нибудь демонстрации по физике. Как говорится, «не было бы счастья, да несчастье помогло». Я все свободное время либо сортировал и

запоем читал в библиотеке книги, в основном по физике и математике, либо придумывал демонстрации по физике и часто сам собирал нужные приборы. Именно тогда и решил твердо, что стану физиком».

Замечу, что эти увлечения, очевидно, не отражались на общей успеваемости И.К., поскольку школу он окончил в 15 лет, дважды «перескочив» через класс. Позднее я узнал, что Исаак Константинович ездил на празднование 180-летия первой гимназии и выступал там перед учащимися и преподавателями.

* * *

По мере общения с И.К. я все больше убеждался в его превосходной памяти. Обычно в конце наших встреч он интересовался моими рабочими делами и новостями в области нейтринной физики. И вот, рассказывая как-то о знаменитых опытах группы американского профессора Ф. Рейнеса, я привел величины сечения взаимодействия реакторных антинейтрино с протоном и дейтоном. Через несколько месяцев, когда И.К. спросил, как обстоят дела с моей диссертацией, я стал рассказывать о предполагаемой скорости счета проектируемого детектора, а он на какой-то бумажке, валявшейся на столе, карандашом быстро проверил мои расчеты (слава Богу, результаты совпали). Только через несколько минут до меня дошло, что И.К. откуда-то знает нейтринные сечения. Я у него спросил об этом и получил обескураживающий ответ: «Но Вы же сами мне их назвали тогда-то и тогда-то».

Вот что рассказывал сам И.К.: «Я никак не могу пожаловаться на свою память. Например, когда я занимался репетиторством, то перерешал все задачи из задачника по математике. И на вступительном экзамене в Ленинградский политехнический институт я даже не читал условие задачи, а смотрел на номер, который указывал преподаватель, и сразу говорил ответ. Он проверял и каждый раз очень удивлялся. А я объяснял, что задача легкая и ее можно решить устно. И лекции никогда не записывал, сразу запоминал. Очень много раз в жизни меня буквально спасала хорошая память. А иногда она здорово помогала другим людям».

И дальше последовал один из интересных рассказов И.К., который я постараюсь воспроизвести.

«Это было в начале пятидесятых годов. Тогда во всю шла борьба с низкопоклонством перед зарубежной наукой. Может быть, в этой кампании и были рациональные зерна, но они очень скоро оказались буквально погребены под грудой невежественных статей, выступлений и просто доносов. С их помощью люди, которые не могли или не хотели заниматься настоящей наукой, пытались расчистить себе путь наверх».

Вы, конечно, знаете сами, как это сказало на нашей биологии. Она была буквально отброшена на десятилетия назад. Атаковали и физику, теорию относительности, квантовую механику. Заявляли, что это насквозь ложные, буржуазные науки. Хорошо еще не обзывали их так, как кибернетику. Но здесь борцам с низкопоклонством пришлось довольно быстро отступить. Не буду подробно об этом рассказывать, но в 52 году многие из тех, кто работал в атомном проекте (я в том числе), обратились в Правительство с просьбой пре-

кратить спекуляции вновь явленных философов на тему о буржуазности теории относительности и квантовой механики. Мы просили опубликовать статью академика В.А.Фока, в которой все ставилось на свои места. Я знаю, что Игорь Васильевич Курчатов дополнительно говорил об этом на самом верху: если вся современная наука не верна, то и атомное оружие создать нельзя, надо прекращать работу. Этот аргумент оказался самым сильным и, говорят, был даже доложен Сталину. Статью Фока опубликовали, все нападки прекратились.

* * *

На одной из наших встреч я спросил И.К., готовится ли он специально к своим лекциям и научным докладам. Какими приемами добивается того, чтобы изложить сложную тему и быть до конца понятным аудитории? К сожалению, моя память сохранила только отрывки из того, что сказал по этому поводу своим тихим голосом академик.

«Вот Абрам Федорович <А.Ф.Иоффе, учитель И.К. – А.Б.> говорил, что научный доклад не должен напоминать детектив. Слушатели еще в самом начале должны знать и главную цель работы, и главные ее трудности, и что сделано нового. Потом можно переходить к деталям. Иоффе на одном из наших семинаров процитировал записку Марка Твена к докладчику: «Если в Ваших словах есть какой-либо смысл, то не стесняйтесь и сообщите его. Надо уважать слушателей. Нельзя, махнув указкой на таблицу в двадцать строк и в десять столбцов, всю заполненную цифрами, сказать, что из нее легко видеть, что то-то и то-то верно, а это не верно, и быстро перейти к следующему плакату».

Помню, что И.К. посетовал, что особенно трудно выступать перед аудиторией, компетентность которой неизвестна. И привел, в качестве примера, случай, который произошел при работе над атомным проектом: «Курчатов попросил провести «ликбез» по вопросу разделения изотопов для высшего руководства. Поскольку все выглядели очень деловыми и знающими, я изложил свои соображения подробно. Да еще и увлекся темой. Когда кончил – взглянул на слушателей и по их виду понял, что они в полном недоумении. Что было делать, начинать все сначала? Спас меня Игорь Васильевич. Начал задавать простейшие вопросы, один за другим. Я отвечал максимально популярно и подробно. Так вдвоем и добились понимания».

* * *

В одно из посещений речь зашла об управляемой термоядерной реакции. И.К. держал перед собой недавно изданную нашу книгу «Законы электромагнетизма» из серии «Библиотечка физико-математической школы» и высказывал свои замечания. «Почему Вы пишете, что создание термоядерной энергетики – дело ближайшего будущего? Насколько ближайшего? Я думаю, что будет очень хорошо, если Ваши дети застанут это «будущее», но что-то сильно в этом сомневаюсь».

Надо сказать, что фраза о термоядерной энергетике в книге вообще совершенно лишняя. Ничего больше об этом предмете там нет, просто авторам, постоянно упоминавшим Ампера, Фарадея, Максвелла, захоте-

лось показать свою современность и разносторонность. Тем не менее, я искренне удивился: «Как же так, постоянно всюду пишут, что скоро человечество термоядом овладеет. Надо увеличить размер камеры-бублика, и хотя это технически трудная задача, но вполне разрешимая. И даже Курчатов говорил ...»

Тень набежала на лицо академика, какая-то горькая тень, и он проговорил еще тише, чем обычно: «Игорь Васильевич был прекрасным физиком, но никто не мог предвидеть всех трудностей. Даже человек такого масштаба, как он. В самом начале 50-х годов мы обсуждали эту проблему, он предлагал работать над ней вместе, настаивал. Я сначала загорелся и даже сконструировал бублик. Но через некоторое время понял, что положительные результаты могут быть получены через долгое время, значительно превышающее пределы моей жизни. И решил заниматься другими, тоже очень важными и интересными работами».

* * *

Перечитываю то, что написал, и с сожалением сознаю, что во время моего общения с И.К. я даже представить себе не мог, какую гигантскую работу по своей «главной специальности» он вел в это время. Понадобились эти прошедшие десятилетия, за время



И.К.Кикоин получает Почетную грамоту Министерства просвещения

которых постепенно раскрывались и появлялись в печати подробности осуществления атомного проекта, чтобы начать это понимать. Но и тогда, общаясь с сотрудниками Исаака Константиновича, я со временем узнал, что его рабочий день превышал 12 часов. Утром в 8.30 он приезжал из дома и шел в свой кабинет, чтобы ознакомиться с неотложными делами и подписать срочные бумаги. В 9–10 часов брал с собой главного инженера и обходил экспериментальные лаборатории и производственные подразделения. Здесь, непосредственно на месте, обсуждались и решались возникшие вопросы, раздавались поручения. К 11 часам он приходил в корпус разделения изотопов к «вертушкам» (центрифугам) и садился там в зале. Любой сотрудник мог подойти к нему со своими вопросами. Потом И.К. возвращался в свой кабинет и продолжал заниматься делами, общаться с вызванными или пришедшими к нему по своей инициативе сотрудниками. Иногда ездил в разные инстанции. Рабочий день оканчивался часов в 9–10 вечера. Наши вечерние беседы, несмотря на то что секретарь И.К. переносил на следующий день не особо срочные телефонные обращения, постоянно прерывались срочными звонками, часто междугородними. Иногда раздавался настойчивый сигнал белого телефона, на котором не было диска, а был только золотой герб, – «кремлевки». Я выходил из кабинета и ожидал окончания разговора. Когда мы засиживались до очень позднего времени, И.К., выходя из подъезда, часто указывал мне на светившиеся в здании окна и говорил: «Есть ребята и более усидчивые, чем мы с Вами».

Для его работы над учебниками были отведены редкие выходные дни.

Перед каждым Новым годом И.К. совершал обход буквально всех сотрудников своего отделения (сотни человек!), поздравлял, справлялся о здоровье и жизни.

* * *

Исаак Константинович сам был остроумным человеком и умел ценить шутки других. Пожалуй, одна из наиболее известных веселых историй касалась подарка, который сделал ему Анатолий Петрович Александров. Директор «Курчатовского института» подарил своему заместителю замечательный набор – большой самовар из стекла и стоявший на нем стеклянный заварной чайник. В самовар была налита прозрачная жидкость, как вскоре выяснилось водка, в чайнике находился коричневый напиток – коньяк. Подарок вызвал смех и некоторое изумление, поскольку было известно, что И.К. абсолютный трезвенник. Но скоро все объяснилось. После того как самовар с чайником поставили в комнате отдыха Кикоина, Анатолий Петрович стал изредка жаловаться своим сотрудникам, что он устал и ему надо поехать к И.К., попить его замечательного чайку. Академики уединялись, и один пил настоящий чай, а второй прихлебывал свой, дареный. На «чай» к Кикоину Александров иногда привозил и наиболее важных (или особенно приятных ему) гостей, вплоть до членов Политбюро.

Мне запомнилась шутка И.К., обращенная лично ко мне. Несколько месяцев я болел, лежал в больнице, и академик об этом знал. Придя на работу, в один из дней

я с помощью своего наблюдательного пункта на балконе увидел приближавшуюся машину И.К. и побежал на первый этаж, чтобы встретить его еще в вестибюле. Академик поздоровался и очень грозно мне сказал: «Вы что же это, сударь, носитесь здесь, как приказчик? Извольте ходить, как купец первой гильдии! Положение-с обязывает».

* * *

Физико-математическая школа при «Курчатовском институте» успешно работала, стала называться ШЕН – Школа естественных наук – и осенью 1984 года была награждена Почетными грамотами Министерства просвещения и ЦК ВЛКСМ. Грамоты вручались в торжественной обстановке в большом зале Дома культуры «Курчатовского института». Выступали представители Министерства и комсомольские начальники, а от Дирекции института награды принимали два академика – Спартак Тимофеевич Беляев и Исаак Константинович Кикоин.

Первым говорил С.Т.Беляев, и его выступление сильно контрастировало с предыдущими казенными словами чиновников. Он говорил о том, что в процессе обучения учатся обе стороны – и ученик, и учитель. Приобретают не только технические знания, но и знания человеческие.

А потом к рампе вышел И.К. Я давно его не видел, почти год был в командировке на Ровенской АЭС. Академик сильно постарел и выглядел нездоровым. Традиционный черный костюм казался ему непомерно широк. «Я хочу рассказать вам, о чем я думал, принимая награду, – сказал Кикоин. – Думал о том, что вот я, академик, руководитель большого коллектива, заместитель директора «Курчатовского института», у меня много наград, в том числе две звезды героя и много других высоких орденов, я лауреат Ленинской и Государственных премий ...»

«Зачем он это говорит, – подумал я. – Как-то не скромно». Но уже следующие несколько слов заставили меня все забыть, схватить лежавшую рядом книгу и на ее полях вкривь и вкось начать записывать то, что слышал.

«И все-таки я без всяких сомнений все это – положение, степени, звания – обменял бы на вашу молодость, на ваши 15, пусть даже 17 лет. А поменяться мне надо потому, что за долгую жизнь я не успел насладиться любимой своей физикой, не хватило мне времени, ясно вижу теперь – не хватило. Хотя не было ни одного дня в жизни, ни выходного, ни праздника, ни отпуска, когда бы я ею не занимался. Часто и сны вижу о физике. И все равно времени не хватило. Вы сами узнаете, как это бывает, когда проживете жизнь. Поэтому сейчас не упускайте времени. Все равно его не хватит, но хоть будет не так обидно. Знаете, ученый – это не название должности и не место работы. Вот он вошел в лабораторию – и стал думать о науке, и стал ученым. Это не так. Ученый – это постоянное и часто мучительное, а иногда прекрасное состояние. Вот примерно об этом я и думал, когда мне передавали эту награду».

Больше я И.К. не видел.

К 100-ЛЕТИЮ И.К.КИКОИНА

Физика ядерного взрыва

Л. БЕЛОПУХОВ

В ПРЕДЫДУЩИХ «ВЗРЫВНЫХ» СТАТЬЯХ ПОДчеркивался тот факт, что проявления взрыва очень похожи при самых разных источниках взрывного процесса. Так стоит ли специально рассматривать такой специфический источник взрыва, как ядерные превращения? Думаю, что это стоит сделать по следующим причинам.

Во-первых, навсегда останутся вписанными в историю человечества черные августовские дни 1945 года, когда больше 100000 японцев погибли от впервые примененного американцами ядерного оружия.

Во-вторых, 30 октября 1961 года в 11 часов 33 минуты по московскому времени на Новоземельском архипелаге разразился аналог библейского апокалипсического «Армагеддона» – самая страшная иллюстрация могущества современной науки и техники. За долю секунды выделилась энергия, равная той, которую за это время Земля получила от Солнца (10^{18} Дж). Политикам всего мира стало ясно, что третья мировая война – это гибель всего человечества. Тем не менее, вероятность применения ядерного оружия, увы, не нулевая. Слова «оружейный плутоний» не исчезают из политических новостей.

В-третьих, в советском атомном проекте участвовали многие выдающиеся ученые, в том числе и академик Исаак Константинович Кикоин, столетний юбилей которого отмечается в этом году. Их участие не было вынужденным советской системой. Оно определялось пониманием необходимости этой работы – ведь там, за океаном, ее начали раньше нас. И сердца многих ученых разрывались между долгом и чувством ужаса от «на волю пустим джинна из бутылки» (В.Высоцкий, «Марш физиков»).

И в-четвертых, глубинная физика высвобождения ядерной энергии – одна и та же при взрывном и мирном использовании. А человечеству в третьем тысячелетии не миновать практически полного перехода на ядерную энергетику.

Физика ядерных превращений – это красивая физика и, что существенно, не очень сложная, вполне доступная школьнику или

студенту. В учебниках эти вопросы затрагиваются, но вот беда – и в школе и в вузе на них не хватает ни времени, ни внимания.

Немного истории

Уже в начале прошлого столетия стало ясно, что при радиоактивных превращениях (например, солей радия) выделяющаяся удельная энергия во много раз больше, чем в химических реакциях. А в 30-е годы были открыты особо энергичные превращения ядер, которые были названы реакциями деления тяжелых ядер, или,



Иллюстрация В.Власова

Окончание. Начало – статьи «Взрыв» и «Ударные волны и детонация» – см. в двух предыдущих номерах журнала.

точнее, реакциями *вынужденного* деления – под действием нейтронов, тогда только что открытых.

Реакция вынужденного деления, например, урана выглядит так:

ядро урана + нейтрон = ядро элемента А +
+ ядро элемента В + несколько нейтронов.

Ведущие специалисты в области радиохимии (химии радиоактивных изотопов) О.Ган и Ф.Штрассман определили, что элементы А и В принадлежат середине периодической системы (например – лантан и барий), и тем самым доказали факт деления ядра урана на две части (Нобелевская премия О.Гана по химии 1944 года). Очевидно, что обязательное появление нескольких нейтронов в результате деления может привести к цепному (лавинному) характеру процесса, аналогично тому как это происходит в химических реакциях горения и взрыва.

В 1939 году разразилась вторая мировая война, а указанное открытие было сделано в Германии. Поэтому уже в 1941 году в США были начаты серьезные работы по созданию ядерного оружия, в которых участвовали многие европейские физики, и прежде всего Э.Ферми – самый крупный физик-ядерщик того времени.

В СССР ядерная физика тоже начала развиваться. В 1937 году в Москве состоялась вторая научная конференция по изучению атомного ядра. На открытии этой конференции вице-президент Академии наук СССР, крупнейший геолог И.М.Губкин сказал пророческие слова, что «конференция приблизит человечество и к решению проблемы практического использования внутриядерной энергии».¹ В 1940–42 годах советские ученые, анализируя статьи по ядерной тематике в зарубежных физических журналах, поняли, что в США, Англии, Германии разворачиваются масштабные исследования в области ядерной физики, и обратили внимание Академии наук и правительства на серьезность положения. И уже 28 сентября 1942 года (при тяжелейшем положении на Южном фронте) И.Сталин подписал распоряжение Государственного комитета обороны № 2352сс «Об организации работ по урану», где впервые прозвучали слова о «возможности создания урановой бомбы». Но только после того как в январе 1943 года смертельная угроза для страны миновала, началась атомная эпопея.

В апреле 1943 года в Москве (в гостинице «Москва») И.В.Курчатов, Ю.Б.Харитон, Г.Н.Флеров, Я.Б.Зельдович, И.К.Кикоин и А.И.Алиханов наметили первоочередность исследований, распределили обязанности. В частности, И.К.Кикоин отвечал за проблему разделения изотопов. А за два месяца до этого, 11 февраля 1943 года 40-летний И.В.Курчатов распоряжением Го-

¹ Интересно, что одним из первых, кто четко представлял себе возможность гигантского опасного выделения энергии, связанного с превращениями атомных ядер, был писатель-фантаст А.Казанцев, который в романе «Пылающий остров» (печаталом почти весь 1939 год в газете «Пионерская правда») описал возможную катастрофу. Именно поэтому на Физтехе в 1950 году состоялась встреча будущих физиков-ядерщиков с этим писателем.

сударственного комитета обороны был назначен научным руководителем проекта.

Вот основные этапы советского атомного проекта:

- 1946 год – создание на территории Саровского² монастыря (в 60 км от города Арзамас Горьковской области) сверхсекретного конструкторского бюро (КБ-11) для разработки атомного оружия, впоследствии это учреждение получило название «Арзамас-16», а сейчас это Всероссийский научно-исследовательский институт энергетической физики;

- 25.12.1946 года – запуск экспериментального ядерного реактора для получения плутония в Лаборатории №2 АН СССР (ныне – знаменитый «Курчатовский институт»);

- 29.09.1949 года – успешное испытание ядерного взрывного устройства на Семипалатинском полигоне;

- 12.08.1953 года – испытание модели термоядерной бомбы;

- 27.06.1954 года – пуск первой в мире атомной (ядерной) электростанции в городе Обнинске;

- 22.11.1955 года – успешное испытание термоядерной бомбы мегатонного класса;

1958 год – создание крупнейшей в мире установки для исследований в области регулируемых термоядерных реакций («Токамак»).

Энергия ядерной реакции деления

Особенность атомного ядра состоит в том, что в очень малой области пространства (в 100000 раз меньше пространства атома) сосредоточено небольшое количество (от 1 до 250) массивных (по сравнению с электроном) объектов – нуклонов. Согласно современной теории, каждый нуклон – это три кварка разных видов, сцепленных ядерным клеем – глюонами. Не углубляясь в тайны кварко-глюонного мира, для рассмотрения вопроса о ядерной энергии достаточно воспользоваться модельным представлением о ядре как о сумме нуклонов, часть из которых являются положительно заряженными протонами, а другая часть – незаряженными нейтронами.

Протоны и нейтроны объединены особыми короткодействующими силами притяжения, не зависящими от наличия или отсутствия электрического заряда. Но естественно, что между заряженными протонами действуют и электрические (кулоновские) силы отталкивания. Устойчивость ядер, т.е. наличие устойчивых атомов (от гелия до свинца), определяется балансом противоположно действующих электрических и ядерных сил.

У атомных ядер с числом протонов (номером элемента) больше 82 (свинец) баланс чуть-чуть нарушен. В этих ядрах «лишние» протоны имеют вероятность отделиться и оттолкнуться от ядра, захватив с собой и нейтроны. Это – механизм радиоактивного альфа-распада. У некоторых тяжелых ядер, а также у изотопов легких ядер внутри ядра происходит процесс возвращения к нормальному балансу таким образом,

² В США аналогичный центр находился в Лос-Аламосе, а в 10 км от Сарова была маленькая деревенька Аламасово. Бывают же совпадения!

что из ядра вылетает электрон, рождающийся в результате превращения нейтрона в протон. Это – механизм бета-распада. Оба эти вида распадов сопровождаются очень коротковолновым электромагнитным излучением (гамма-частицы). Кинетическая энергия альфа-, бета- и гамма-частиц – это и есть энергия радиоактивных превращений в ядрах.

Естественная радиоактивность была впервые обнаружена (А.Беккерелем) в 1896 году, а через 40 с небольшим лет была открыта реакция деления ядра урана. Выделяющаяся в этой реакции энергия – это прежде всего кинетическая энергия продуктов реакции – «половинок» уранового ядра А и В. К ней добавляется энергия нейтронов и гамма-частиц. Происхождение кинетической энергии осколков объясняется действием электрических сил отталкивания.³

Расчет для энергии деления всех ядер, содержащихся в 1 кг урана, дает величину порядка 10^{14} Дж, или, в пересчете на эквивалентную по взрывной энергии массу тротила, – 5 килотонн. Эта величина является верхним пределом выделяющейся энергии. Но, во-первых, в бомбе не весь уран успевает прореагировать. В зависимости от конструкции и назначения бомбы, КПД колеблется в пределах 10–30%. Во-вторых, в ядрах с меньшим числом нуклонов роль ядерных сил притяжения значительнее, чем для тяжелых ядер. Это и означает, что ядерные силы при делении противодействуют электрическим силам, ослабляют их действие.

Ядерная бомба и ядерная электростанция

Долгое время это оружие называлось *атомной* бомбой, что не имеет никакого физического смысла. В результате атомных (молекулярных) превращений выделяется энергия при взрыве обыкновенной, а не ядерной взрывчатки.

Для создания *ядерной* бомбы кроме решения теоретически принципиальных вопросов, частично рассмотренных выше, нужно было осуществить многие практические задачи. Перечислю их кратко:

- обработка природного урана с целью извлечения из него изотопа урана-235 высокой степени чистоты (0,9999);

- получение плутония-239 из урана-238 при мощном воздействии нейтронов;

- создание конструкции, в которой соединение отдельных блоков, имеющих размер меньше критического, в единый блок происходило бы достаточно эффективно;

- создание испытательного полигона совершенно нового типа;

- создание средств доставки бомбы к точке взрыва.

Почему для ядерной бомбы нужны только указанные два типа ядер – уран-235 и плутоний-239? Дело в том, что реакция деления этих ядер происходит, когда инициирующий реакцию нейтрон имеет любую энер-

гию (и даже чем она меньше, тем больше вероятность реакции). А другие ядра, например уран-238, делятся только в том случае, если энергия нейтрона строго определена.

Отделение урана-235 от урана-238 – очень непростая задача. Ведь химические свойства этих ядер одинаковы. Поэтому пригодны лишь физико-механические процессы, использующие маленькую разницу в массах этих изотопов. Например, применяются методы, использующие разную скорость диффузии, различное отклонение ионов в магнитном поле, но наиболее выгодным оказался метод центрифугирования. Всеми этими работами долгие и самые ответственные годы руководил И.К.Кикоин, один из самых блестящих физиков-экспериментаторов.

Отмечу, что каждую операцию обогащения смеси нужным изотопом необходимо повторять не два или три раза, а десятки и даже сотни раз. Заводы по разделению изотопов представляют собой километровые ряды одинаковых аппаратов, которые дают все более и более чистую продукцию. В аппаратах циркулирует газообразный гексафторид урана, который еще нужно получить из урановой руды и очистить от всевозможных посторонних примесей – а это тоже километровые ряды одинаковых аппаратов.

Самым эффективным, с экономической точки зрения, является метод разделения изотопов с помощью центрифуг. В 1970–80 годы в СССР были созданы уникальные центрифуги, до сих пор не имеющие в мире аналогов. Достаточно сказать, что скорость вращения ураносодержащего сосуда достигает 1000 оборотов в секунду. Представьте, какими необычайными механическими свойствами должны обладать эти сосуды и какими должны быть подшипники!

Получение плутония несколько проще методов разделения изотопов урана. Плутоний образуется при поглощении ядром урана-238 нейтрона и последующим бета-превращением урана сначала в нептуний, а потом уже и в плутоний. Это – другой химический элемент, и его выделение из смеси с ураном может быть произведено химическими путями. Но единственный способ создания мощных потоков нейтронов – это урановый ядерный реактор, в котором идет медленный невзрывной процесс деления, поскольку в реакторе в основном содержится обычный уран-238. Небольшая доля изотопа урана-235 обеспечивает процесс деления и поток нейтронов для превращения урана-238 в плутоний.

Вы заметили, конечно, что это – описание ядерной электростанции. Ведь энергия, выделяющаяся в процессе деления в виде кинетической энергии продуктов деления, нагревает всю окружающую среду. Отбор энергии производится теплоносителем (водой или жидкими металлами), который за пределами активной зоны реактора отдает ее в конечном счете генераторам электрического тока.

В конструкции ядерного реактора главное – обеспечение надежности в стационарности процесса. Автоматика вполне в состоянии справиться с этой задачей. В печально известной Чернобыльской катастрофе 1986 года именно отключение автоматики привело к срыву

³ Исходя из формулы потенциальной энергии электрического взаимодействия осколков А и В, попробуйте оценить их суммарную кинетическую энергию вдали от точки разлета, считая для простоты осколки одинаковыми, а начальное расстояние между центрами осколков равным 10^{-14} м.

стационарности, быстрому разогреву, парообразованию и тепловому взрыву с выбросом содержимого активной зоны реактора с сильно радиоактивными продуктами реакции деления.

В конструкции ядерной бомбы задачи – противоположные. Необходимо обеспечить как можно более быстрое и полное превращение урана или плутония в продукты деления. Как известно, в небольшом объеме изотопа реакция деления не становится лавинной, потому что большинство нейтронов успевают вылететь за пределы этого объема, не сумев произвести очередное деление. Только начиная с некоторого «критического» размера может осуществиться цепная реакция (часто говорят не о критическом размере, а о критической массе, что, впрочем, одно и то же с физической точки зрения). Поэтому в бомбе должны быть несколько отдельных, докритических блоков ядерного «горючего», которые в некоторый момент нужно соединить. От скорости и синхронности их соединения зависит полнота использования ядерного вещества и, следовательно, энергия взрыва.

Может возникнуть вопрос: а почему в природе, где размеры блоков породы, содержащей уран, достигают больших величин, реакция деления не развивается? Дело в том, что изотопа урана-235 в породе очень мало, а самопроизвольная реакция деления урана (есть и такой процесс) происходит очень редко. И все рождающиеся нейтроны поглощаются окружающими ядрами изотопа урана-238, рождая различные радиоактивные изотопы и создавая общий повышенный фон излучения в окрестностях залежей урана. В конструкциях же ядерных бомб, кроме устройств по синхронному соединению блоков горючего, используется многое другое, в частности – отражатели нейтронов и специальные источники нейтронного излучения.

Непростым делом оказалось и создание специального испытательного полигона. Достаточно сказать, что полигон – это многокилометровые линии с приборными комплексами самых различных назначений (измерения параметров ударной волны, потоков радиоактивных частиц и излучений, теплового и светового излучений), инженерные сооружения военного и гражданского назначения, военная техника, подопытные животные и т.д. Полигон – это институты, в которых производится обработка результатов измерений и анализ возникающих научных проблем. Это, наконец, огромное военное хозяйство, обслуживаемое несколькими дивизиями.

Семипалатинский полигон был создан в рекордно короткие сроки в 1948–49 годы по проекту Г.Л.Шнирмана под руководством М.А.Садовского, будущего академика, директора Института физики Земли АН СССР.

Термоядерное оружие

Термоядерная реакция противоположна реакции деления тяжелых ядер по роли взаимодействия между частицами. Это – реакция синтеза, т.е. соединения изотопов водорода в более тяжелое ядро гелия. При этом электрические силы отталкивания положительно

заряженных ядер мешают процессу синтеза, а кинетическая энергия продуктов реакции получается как результат «срабатывания» ядерных сил притяжения. Но эти силы включаются только тогда, когда частицы подойдут на расстояние порядка 10^{-15} м. А чтобы преодолеть электрическое отталкивание, соединяющимся ядрам нужно иметь скорость порядка десятков тысяч километров в секунду, что соответствует температуре в десятки и сотни миллионов градусов. Поэтому реакцию синтеза и называют *термоядерной* реакцией.

Придать такую скорость частицам можно разными способами. Например, можно сфокусировать в одном месте сотни потоков быстрых электронов, чтобы они передали свою кинетическую энергию ядрам. Можно воздействовать мощным лазерным излучением. Один из перспективных путей – это разгон ядер мощным электрическим полем (искровой разряд, молния).

Но все эти пути не годятся для ядерного оружия, которое должно быть достаточно портативным. Единственный способ – это помещение ядерной бомбы внутрь контейнера, содержащего легкие элементы, скажем изотопы водорода дейтерий и тритий (или дейтерид лития). Необходимые для начала термоядерного процесса синтеза кинетические энергии (или температуры) дает огненный шар ядерного взрыва. Начавшийся процесс синтеза будет сам себя поддерживать, поскольку продукты реакции синтеза будут обладать большей кинетической энергией, чем исходные ядра.

На деле все, однако, оказалось не таким простым. Для мощных термоядерных бомб пришлось придумать схемы добавочного «производства» нейтронов от реакций деления урановых изотопов (кроме первичной «запальной» бомбы) и обжата водорода «сырья» излучением вторичного ядерного уранового взрыва. Этот принцип получил название радиационной имплозии. При этом полностью использовался запас ядерного горючего.

Успешные испытания новой конструкции в 1955 году на Семипалатинском полигоне и в 1961 году на Ново-земельском полигоне открыли эру гонки вооружений и одновременно поставили вопрос о прекращении этой гонки. Разрешение этого противоречия, возможно, стало одной из причин той ломки нашего государства, которая произошла в 1991 году. В 1996 году было, наконец, достигнуто международное соглашение о прекращении любых испытаний ядерного оружия, а также и применения ядерных взрывов в мирных целях.

Формат этой статьи не позволяет подробно рассмотреть вопрос о стационарном контролируемом термоядерном процессе синтеза легких ядер, о термоядерных электростанциях. Пятьдесят лет назад оптимистам казалось, что эта задача будет решена лет за 10–20. Современные оптимисты считают, что она будет решена в XXI веке. А современные пессимисты полагают, что законы природы не разрешат это сделать никогда.

Но на что тогда останется надеяться человечеству, когда закончатся уголь, нефть и газ и будут выработаны все урановые месторождения? А пессимисты ожидают, что это произойдет уже в текущем тысячелетии.

Две знаменитые формулы

В. ВАВИЛОВ, А. УСТИНОВ

Н АПОМНИМ, ЧТО ЦЕЛОЧИСЛЕННОЙ РЕШЕТКОЙ \mathbb{Z}^2 называется множество точек декартовой плоскости с целыми координатами. Бывает удобным представлять себе целочисленную решетку как бесконечный лист клетчатой бумаги. Многоугольник считается расположенным на \mathbb{Z}^2 , если все его вершины являются точками (узлами) этой решетки.

В статье речь пойдет о формуле Пика для вычисления площадей многоугольников, расположенных на целочисленной решетке, и об одной комбинаторной формуле Эйлера. Отдельное внимание будет уделено связи между ними.

Примитивные треугольники

Прежде чем изучать произвольные многоугольники на решетке, рассмотрим простейший (и важнейший!) частный случай. Предположим, что многоугольник является треугольником и кроме своих вершин не имеет внутри и на сторонах других узлов решетки. Такие треугольники называются *примитивными* (см. примеры на рисунке 1).

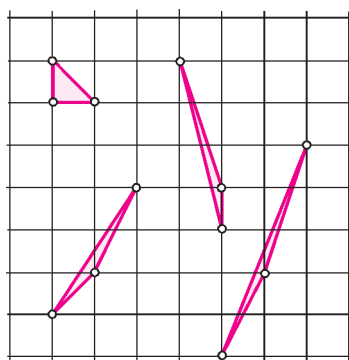


Рис. 1

Их свойства мы сначала и изучим.

Их свойства мы сначала и изучим.

Их свойства мы сначала и изучим.

Теорема 1. *Треугольник является примитивным тогда и только тогда, когда он имеет площадь $1/2$.*

Доказательство. Пусть $T = ABC$ – примитивный треугольник. Рассмотрим минимальный прямоугольник с вершинами в узлах решетки \mathbb{Z}^2 и сторонами, параллельными осям координат, содержащий треугольник ABC . Из всех возможных случаев взаимного

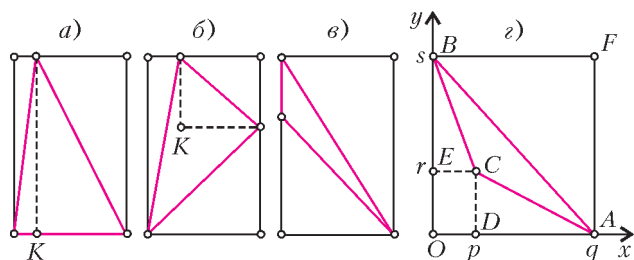


Рис. 2

расположения треугольника и прямоугольника (рис. 2) наиболее общей является ситуация, показанная на рисунке 2, г.

Действительно, в случаях а) и б) треугольник T не является примитивным, так как точка K имеет целые координаты; случай г) включает в себя случай в), если предполагать, что вершина C может располагаться на OB или OA (в частности, может совпадать с O).

Будем считать, что точка O на рисунке 2, г является началом координат, $D = (p; 0)$, $A = (q; 0)$, $E = (0; r)$, $B = (0; s)$. Через $I(P)$ будем обозначать число узлов решетки, расположенных внутри многоугольника P , но не на его сторонах. Тогда

$$I(OAFB) = (q - 1)(s - 1).$$

Так как внутри отрезка AB не содержится узлов решетки, то

$$I(OAB) = I(OAFB)/2 = (q - 1)(s - 1)/2.$$

Аналогично,

$$I(ACD) = (q - p - 1)(r - 1)/2,$$

$$I(CBE) = (s - r - 1)(p - 1)/2.$$

Треугольник T не содержит внутри себя узлов решетки. Значит,

$$I(OAB) - I(ACD) - I(CBE) = pr,$$

где pr – число узлов решетки, расположенных внутри прямоугольника $ODCE$, но включая число узлов на его сторонах CD и CE (без точек D и E). Отсюда следует, что

$$(q - 1)(s - 1) - (q - p - 1)(r - 1) - (s - r - 1)(p - 1) = 2pr,$$

и, тем самым,

$$qs - ps - qr = 1.$$

Используя это равенство, получаем – здесь и далее $[F]$ обозначает площадь фигуры F –

$$\begin{aligned} [ABC] &= [OAB] - [ACD] - [CBE] - [ODCE] = \\ &= sq/2 - (p - q)r/2 - (s - r)p/2 - pr = \\ &= (qs - ps - qr)/2 = 1/2, \end{aligned}$$

что и дает прямое утверждение теоремы.

Докажем обратное утверждение, предположив противное: существует треугольник площади $1/2$, который не является примитивным.

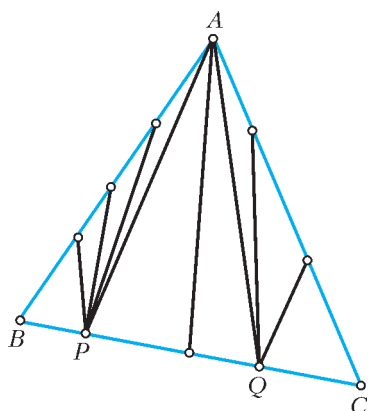


Рис. 3

и AQC, окажутся примитивными, а у этих двух крайних треугольников имеется по две стороны, которые не содержат узлов решетки. Соединив точки P и Q с узлами решетки, находящимися на сторонах AB и AC соответственно, мы разобьем треугольники ABP и AQC на примитивные треугольники.

Пусть у данного треугольника имеются узлы решетки внутри. Выбрав произвольный из них, соединим его

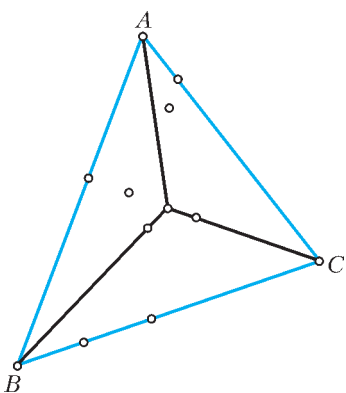


Рис. 4

на треугольники, не содержащие внутри себя узлов решетки. Теперь разбиение на примитивные треугольники можно закончить, используя описанную ранее процедуру.

Вернемся к доказательству достаточности. Разобьем треугольник T на примитивные. Согласно сделанному предположению, их будет не менее двух. Из прямого утверждения теоремы вытекает, что каждый из них имеет площадь 1/2, а это невозможно, так как [T] = 1/2.

Упражнение 1. Докажите, что для любого сколь угодно большого числа M на решетке Z² существует примитивный треугольник, все стороны которого больше этого числа M.

Формула Пика

Далее, если не оговорено противное, рассматриваются простые многоугольники, т.е. такие, которые ограничены замкнутой несамопересекающейся ломаной. На рисунке 5 показаны примеры многоугольников, которые простыми не являются.

Теорема 2 (Г.Пик). Для любого простого многоугольника P на целочисленной решетке имеет место

Сначала покажем, что любой треугольник можно разбить на примитивные. Пусть внутри треугольника T = ABC нет точек решетки, но имеются узлы решетки на одной из его сторон, скажем BC. Тогда соединим вершину A со всеми узлами решетки на стороне BC (рис.3). Все полученные треугольники, кроме ABP

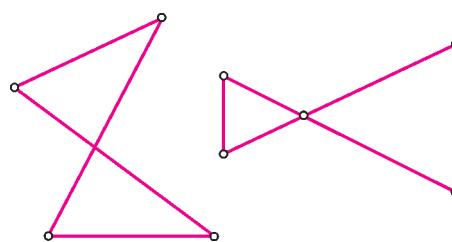


Рис. 5

формула

$$[P] = N_i + N_e/2 - 1,$$

где N_i – число узлов решетки, расположенных строго внутри многоугольника, и N_e – число узлов решетки, расположенных на его границе (включая вершины).

Так, например, на рисунке 6 мы имеем: N_i = 9, N_e = 11, и, тем самым, по формуле Пика

$$[P] = 9 + 11/2 - 1 = 27/2.$$

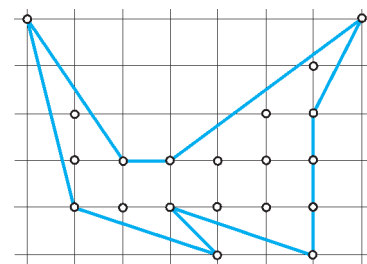


Рис. 6

Доказательство. Приступая к доказательству теоремы, во-первых, отметим, что любой простой многоугольник имеет по крайней мере одну диагональ, которая целиком расположена внутри многоугольника.

Упражнение 2. Докажите это утверждение.

Отсюда и из принципа математической индукции следует, что любой простой k-угольник можно разбить на (k – 2) треугольника, все вершины которых являются вершинами исходного многоугольника и, в частности, узлами решетки. Поэтому сумма всех внутренних углов простого k-угольника равна (k – 2)π.

Во-вторых, каждый из полученных треугольников разобьем на примитивные так, как это делалось при доказательстве теоремы 1. Поскольку площадь каждого примитивного треугольника равна 1/2, то число примитивных треугольников в разбиении равно N = 2[P] и поэтому не зависит от способа разбиения.

Для завершения доказательства теоремы 2 осталось проверить равенство

$$N = 2N_i + N_e - 2.$$

Далее будем предполагать, что P является k-угольником. Его вершины также будут и вершинами некоторых примитивных треугольников разбиения (рис.7,а). Сумма углов треугольников при таких вершинах равна сумме внутренних углов многоугольника P и, тем самым, равна 180°(k – 2).

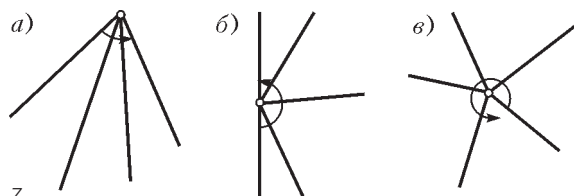


Рис. 7

Узел решетки, который находится на границе P , но не является его вершиной, также участвует в разбиении и служит вершиной некоторых примитивных треугольников (рис.7,б), а сумма всех углов при всех таких вершинах-узлах равна $180^\circ(N_e - k)$.

Каждая из N_i точек решетки (находящихся внутри P) участвует в разбиении на примитивные треугольники и является их вершинами. Сумма углов, сходящихся в такой точке, равна 360° (рис.7,в). Поэтому сумма всех углов всех примитивных треугольников с вершинами во внутренних узлах равна $360^\circ N_i$.

С другой стороны, сумма углов всех примитивных треугольников равна $180^\circ N$, и поэтому

$$180^\circ N = 360^\circ N_i + 180^\circ(N_e - k) + 180^\circ(k - 2).$$

Следовательно, $N = 2N_i + N_e - 2$, и теорема 2 полностью доказана.

Замечание. Пусть плоскость разбита на равные параллелограммы двумя семействами параллельных прямых (это разбиение можно представлять себе как «косоугольную клетчатую бумагу»). Тогда вершины параллелограммов образуют множество, которое называется *точечной решеткой* Λ . Целочисленная решетка – важный частный случай, когда параллелограммы являются квадратами.

Для многоугольника P на произвольной решетке Λ также справедлива формула Пика

$$[P] = (N_i + N_e/2 - 1)\Delta(\Lambda),$$

где $\Delta(\Lambda)$ – площадь каждого из параллелограммов. Доказательство проводится точно по той же схеме.

Логический анализ доказательства теоремы 2

Сформулируем еще раз три доказанных нами утверждения.

1°. Для любого простого многоугольника P на решетке \mathbb{Z}^2 имеет место формула Пика

$$[P] = N_i + N_e/2 - 1.$$

2°. Площадь любого примитивного треугольника на решетке \mathbb{Z}^2 равна $1/2$.

3°. В любом разбиении простого многоугольника на примитивные треугольники для их числа N справедлива формула

$$N = 2N_i + N_e - 2.$$

Проследим логические связи между этими утверждениями и сравним их «силу».

Если бы с самого начала была доказана формула Пика, то утверждение 2° было бы ее тривиальным следствием, а утверждение 3° следовало бы из 1° и 2° вместе взятых (рис.8,а). При таком подходе (а он возможен – см. упражнение 3) для проверки всех трех утверждений нам понадобилось бы доказать формулу Пика независимо от 2° и 3°.

Мы избрали другой путь: сначала доказали утверждение 2° независимо, затем получили 3°, а формула Пика оказалась следствием их обоих (рис.8,б).

Интересно проследить и за другими возможными

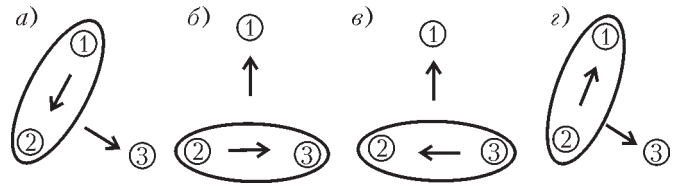


Рис. 8

логическими подходами к доказательству этих трех утверждений, показанными на рисунке 8,в и з.

Покажем, как из 3° следует 2°. Заметим сначала, что площадь любого треугольника на решетке \mathbb{Z}^2 (а тем самым, и любого простого многоугольника на ней) выражается числом вида $n/2$. Для этого частично повторим рассуждения, использованные нами при доказательстве теоремы 1. Опишем вокруг треугольника минимальный прямоугольник со сторонами вдоль линий решетки. Как и раньше, возможны несколько случаев их взаимного расположения, показанных на рисунке 2. В каждом из них треугольник дополняется до прямоугольника фигурами, имеющими целую или полуцелую площадь. Таким образом, площадь любого треугольника на целочисленной решетке должна быть полуцелым числом, и, следовательно, эта площадь не меньше $1/2$.

Пусть теперь T – примитивный треугольник и P – минимальный прямоугольник, описанный около него. Разобьем все многоугольники, дополняющие T до P , на примитивные треугольники. В итоге получим разбиение P на примитивные треугольники $\{T_k\}$, один из которых совпадает с T .

Разобьем P на примитивные треугольники другим способом, проводя диагонали в каждой из pq составляющих его квадратных ячеек решетки.

Число примитивных треугольников во втором разбиении (а по условию 3° – и в первом) равно $2pq$. Значит,

$$\sum_{k=1}^{2pq} [T_k] = pq.$$

Каждое слагаемое в сумме, по доказанному, не меньше $1/2$. Поэтому равенство возможно лишь тогда, когда все слагаемые, в том числе и $[T]$, равны $1/2$.

Докажем импликацию $2^\circ \Rightarrow 1^\circ$. Для этого рассмотрим функцию

$$F(P) = N_i + N_e/2 - 1,$$

определенную на всех простых многоугольниках, расположенных на решетке \mathbb{Z}^2 . Если разбить многоугольник P при помощи какой-либо ломаной с вершинами в узлах решетки на два других многоугольника P_1 и P_2 (в этом случае мы пишем $P = P_1 + P_2$; рис.9), то, как легко проверить, имеет место следующее аддитивное свойство:

$$F(P_1 + P_2) = F(P_1) + F(P_2).$$

Площадь обладает тем же свойством:

$$[P_1 + P_2] = [P_1] + [P_2].$$

Поэтому, если формула

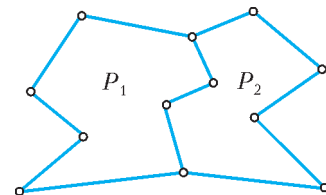


Рис. 9

Пика верна для многоугольников P_1 и P_2 , то она верна и для многоугольника $P = P_1 + P_2$. Но так как любой простой многоугольник можно разбить на примитивные треугольники, а формула Пика для них по нашему предположению верна, то она верна и для произвольного многоугольника.

Подводя итоги проведенного логического анализа, заключаем, что самым «сильным» является утверждение 1°. Но нами установлено, что каждое из трех утверждений может быть получено как следствие любого другого. И в этом смысле они эквивалентны!

Упражнение 3. Используя аддитивность функции $F(P)$ и рассуждения из доказательства теоремы 1 об описанном прямоугольнике, найдите независимое (от 2° и 3°) доказательство формулы Пика.

Формула Эйлера

Связь утверждений 1° и 3°, отмеченная в предыдущем разделе, показывает, что формула Пика имеет также и комбинаторный характер.

Более общим, чем разбиение многоугольника на треугольники, является понятие карты. *Правильная многоугольная карта* – это такое разбиение простого многоугольника на другие простые многоугольники, когда любые два многоугольника либо имеют общую сторону, либо имеют только одну общую вершину, либо вообще не имеют общих точек.

Карту можно рассматривать как частный случай *плоского односвязного графа*. При таком подходе многоугольники разбиения являются гранями графа, а стороны многоугольников – ребрами.

Для плоских графов (а в частности, и многоугольных карт) имеет место знаменитая *формула Эйлера*, которая утверждает, что

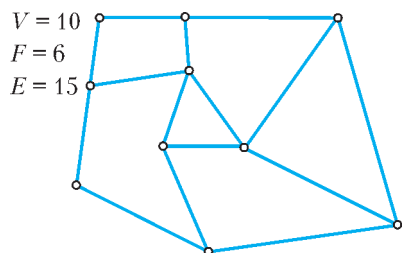


Рис. 10

$$V + F - E = 1,$$

где V обозначает число вершин графа, F – число граней, E – число ребер (рис. 10).

Слово «карта» подчеркивает, что формула Эйлера имеет место и для «криволинейных разбиений» (рис. 11), когда важна не форма линий, а

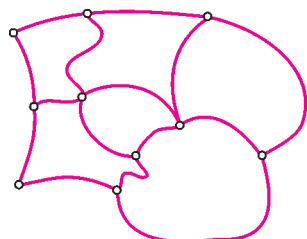


Рис. 11

только способ соединения точек с выполнением требования «правильности» (например, из разбиения пятиугольника на треугольники и четырехугольники, показанного на рисунке 10, заменой отрезков кривыми линиями получается правильная криволинейная карта).

В случае когда все внутренние части правильной многоугольной карты являются треугольниками, говорят о *триангуляции* многоугольника.

Ясно, что любой простой многоугольник P на плоскости может быть триангулирован бесконечным чис-

лом способов. Однако для числа N треугольников в триангуляции всегда (а не только на \mathbb{Z}^2) будет справедлива та же формула $N = 2N_i + N_e - 2$, которая ранее была установлена только для многоугольников на решетке. Отметим, что здесь смысл чисел N_i и N_e уже несколько иной: N_i – число вершин графа, находящихся внутри P , а N_e – на границе P . Докажите эту формулу самостоятельно!

Другое свойство триангуляций связано с общим числом E всех сторон треугольников, входящих в триангуляцию:

$$E = 3N_i + 2N_e - 3.$$

Действительно, так как имеется N_e вершин на границе P , то существует N_e треугольников, одна сторона которых находится на границе P и $E - N_e$ сторон которых находятся строго внутри P , причем каждая такая «внутренняя сторона» принадлежит ровно двум треугольникам. Следовательно, $3N$ сторон у N треугольников включают каждую из $E - N_e$ сторон дважды и каждую из N_e сторон по одному разу. Таким образом,

$$3N = 2(E - N_e) + N_e = 2E - N_e.$$

Следовательно,

$$E = \frac{3N + N_e}{2} = \frac{3(2N_i + N_e - 2) + N_e}{2} = 3N_i + 2N_e - 3,$$

что и утверждалось.

Теорема 3 (Л.Эйлер). Для любой правильной многоугольной карты имеет место равенство

$$V + F - E = 1.$$

Доказательство. Пусть имеется правильная многоугольная (криволинейная) карта. Выберем внутри каждого многоугольника разбиения одну точку. Соединим ее с вершинами многоугольника линиями (не обязательно отрезками) так, чтобы они находились строго внутри этого многоугольника (см. пример на рисунке 12).

Теперь заметим, что формула $E = 3N_i + 2N_e - 3$ справедлива и для вновь полученной «криволинейной триангуляции» R исходной карты. Для триангуляции R , очевидно, имеем

$$N_i + N_e = V + F.$$

Каждый треугольник в R одной своей стороной имеет ребро исходного графа, а две другие стороны – кривые, нами проведенные. Каждое новое ребро является общим для двух треугольников в R . Таким образом, удвоенное число новых ребер графа равно удвоенному числу треугольников. Поэтому для числа E' всех ребер в R имеем равенство

$$E' = E + N,$$

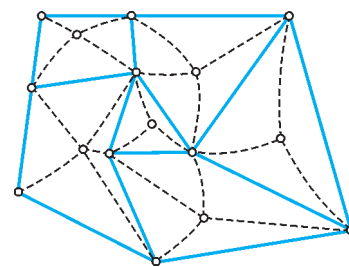


Рис. 12

где N – число треугольников в R . Используя теперь еще и полученное выше равенство $3N = 2E' - N_e$, находим

$$\begin{aligned} V + F - E &= (N_i + N_e) - (E' - N) = \\ &= N_i + N_e - (E' + N_e) = \\ &= N_i + N_e - (3N_i + 3N_e - 3)/3 = 1, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Упражнения

4. Проведите рассуждения в обратную сторону, т.е. из формулы Эйлера $V + F - E = 1$ выведите равенство $N = 2N_i + N_e - 2$.

5. Докажите формулу Эйлера независимо, т.е. не пользуясь равенством $N = 2N_i + N_e - 2$.

Проведенные исследования позволяют сформулировать такой результат:

Формулы Эйлера и Пика, как и утверждения 1° – 3°, могут быть выведены друг из друга и также могут пониматься как эквивалентные формулы.

Продумайте соответствующие цепочки утверждений самостоятельно.

Формулы Пика и Эйлера могут быть обобщены на правильные карты с «лакунами» (отверстиями), которые сами являются простыми многоугольниками (рис. 13,а).

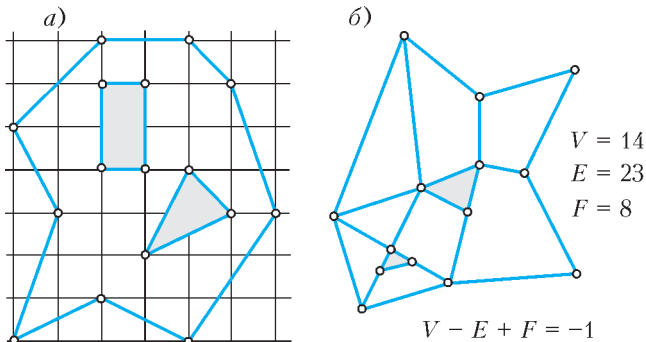


Рис. 13

Для таких многоугольников справедливы следующие результаты:

Теорема 4. Для любого простого многоугольника P с n лакунами на решетке \mathbb{Z}^2

$$[P] = N_i + N_e/2 - 1 + n,$$

где N_i – число узлов решетки, расположенных внутри P , но не на границе лакун и не внутри лакун, а N_e – число узлов решетки, которые принадлежат границе P и границам всех лакун.

Теорема 5. Для любой простой многоугольной карты с n лакунами (в прежних обозначениях)

$$V - E + F = 1 - n.$$

Пример, иллюстрирующий эту теорему приведен на рисунке 13,б.

Доказательства теорем 4 и 5 оставляем читателю в качестве полезных упражнений.

Упражнения

6 (Ю.И.Ионин). Три кузнечика (три точки) в начальный момент времени сидят в трех вершинах одной клетки, а затем начинают «играть в чехарду»: каждый может прыгнуть через одного из двух других, после чего оказывается в симметричной относительно него точке (рис. 14). В каких тройках точек

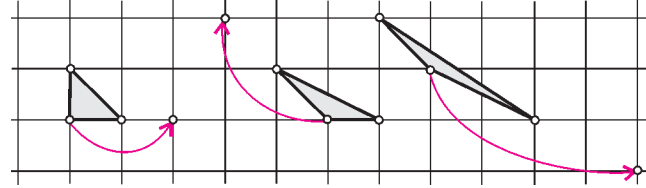


Рис. 14

(с точностью до параллельного переноса) могут через несколько прыжков оказаться кузнечики?

7. Вершины треугольника являются узлами решетки \mathbb{Z}^2 и на его сторонах нет других узлов решетки. Докажите, что если такой треугольник внутри себя содержит ровно один узел решетки, то этот узел является центром пересечения медиан данного треугольника.

8. Пусть вершины выпуклого n -угольника находятся в узлах решетки \mathbb{Z}^2 , а внутри и на его сторонах нет других узлов решетки. Докажите, что $n \leq 4$.

9. Докажите, что для любых двух узлов A и B решетки \mathbb{Z}^2 , на отрезке между которыми нет других узлов, найдется узел C такой, что треугольник ABC примитивный. Чему равно расстояние от точки C до прямой AB , если точки A и B находятся на расстоянии d ?

10 (Н.Б.Васильев). Докажите, что если решетку \mathbb{Z}^2 разбить на четыре непересекающиеся подрешетки с клетками 2×2 , то вершины любого примитивного треугольника решетки \mathbb{Z}^2 обязательно попадут в узлы трех разных указанных подрешеток.

11. На решетке \mathbb{Z}^2 отмечены $n \geq 3$ узлов так, что любые три из них образуют треугольник, медианы которого не пересекаются в узле этой решетки. Найдите наибольшее число n , при котором это возможно.

12 (Н.Б.Васильев). Шахматный король обошел доску 8×8 клеток, побывав на каждом поле ровно один раз и последним ходом вернувшись на исходное поле. Ломаная, соединяющая последовательно центры полей, которые проходил король, не имеет самопересечений. Какую площадь может ограничивать эта ломаная?

13. При любом расположении на плоскости квадрата размерами $n \times n$ он покрывает не более $(n + 1)^2$ узлов целочисленной решетки \mathbb{Z}^2 . Докажите это.

14. В каждом из случаев, представленных на рисунке 15, вычислите площадь указанного параллелограмма, если стороны параллелограмма $ABCD$ разделены на n и m равных частей, а его площадь равна 1.

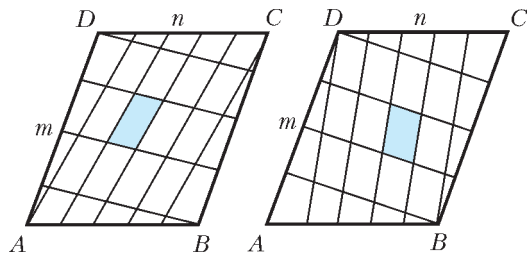


Рис. 15

роны параллелограмма $ABCD$ разделены на n и m равных частей, а его площадь равна 1.

(Продолжение см. на с. 22)