Три эссе на физические темы

Р.ВИНОКУР

Трагический миг невесомости

В известном романе Жюля Верна «Из пушки на Луну» космические путешественники, летящие в огромном артиллерийском снаряде, якобы ощутили состояние невесомости в момент, когда снаряд пересекал центр притяжения между Луной и Землей. (Речь шла о точке, где силы притяжения, создаваемые Луной и Землей, одинаковы и противоположно направлены.) Известный американский физик-экспериментатор Роберт Вуд указал, что на самом деле состояние невесомости должно было установиться при выходе снаряда из атмосферы Земли. Этот же вывод сделан и в книге «Занимательная физика» замечательного популяризатора науки Якова Перельмана.

Роман Винокур был автором интересных публикаций в нашем журнале в 80-е годы прошлого века. Сейчас он живет в США, но контакта с журналом не теряет. (Прим. ред.)

Жюль Верн упустил из виду, что если тело и его опора движутся в пространстве с одинаковыми ускорениями, сообщаемыми только гравитационными силами, то давить друг на друга они не могут. (Имеется в виду ускорение во внешней системе отсчета, например относительно центра Земли или Солнца.) Поэтому как только на снаряд перестали действовать пороховые газы, выталкивающие его из орудийного ствола, и сопротивление воздуха (после выхода из земной атмосферы), все предметы внутри снаряда должны стать невесомыми. Эти негравитационные силы давления пороховых газов и сопротивления воздуха действовали только на снаряд, так что пока все они или их равнодействующая не равны нулю, ускорение снаряда отлично от ускорения находящихся в нем предметов.

Однако состояние невесомости могло возникнуть внутри снаряда еще раньше. Действительно, рассмотрим негравитационные силы, действующие на снаряд до и после его вылета из пушки. Внутри ствола на движущийся снаряд действует сила давления пороховых газов, которой противодействуют сила трения снаряда о стенки ствола и сила сопротивления воздуха. При этом сила давления пороховых газов существенно превосходит силы сопротивления воздуха, благодаря чему снаряд ускоряется в направлении движения. После вылета из ствола на снаряд действует лишь одна негравитационная сила – сила сопротивления воздуха, направленная против движения снаряда. Значит, равнодействующая негравитационных сил изменила свое направление после выхода снаряда из ствола. Поэтому в какой-то момент, когда снаряд еще находился в пушке, эта равнодействующая была равна нулю и на снаряд действовала только сила тяжести, что и соответствует условию невесомости.

К сожалению, космические путешественники не смогли бы ощутить состояние невесомости по причине гибели из-за гигантских перегрузок при разгоне снаряда в орудийном стволе…

Впрочем, по мнению поэта Игоря Северянина, творчество Жюля Верна не подлежит критическому научному анализу:

…Он предсказал подводные суда
И корабли, плывущие в эфире.
Он фантастичней всех фантастов в мире
И потому – вне нашего суда.

В конце концов, никто не бывает всегда и абсолютно прав, и это можно показать на примере все той же физической задачи. Помимо гравитационных сил со стороны Солнца, Луны и других космических гигантов на снаряд и предмет внутри него действует взаимная сила притяжения, которая мала из-за сравнительно небольших масс этих тел и практически неощутима. Однако из-за этого эффекта абсолютное состояние невесомости не могло быть достигнуто.

Минус две рыбы и открытие позитрона

Нас было трое на рыбалке – Джон, Пол и я, Гаррис. Темза здесь изобилует щуками, плотвой, угрями и уклейкой. Гуляя по берегу, вы можете видеть их целые стаи, но поймать их на крючок не так просто. Время шло, а рыба не ловилась. И тогда Пол рассказал нам с Джоном об одной математической задаче, которую он решал в рождественском конкурсе, организованном Кембриджским студенческим обществом:

Три рыбака улеглись спать, не поделив улова. В час ночи проснулся один из них и уехал домой, взяв с собой треть улова. При дележке на три равные части у него оказалась лишняя рыба, которую он выбросил в реку. В два часа ночи проснулся второй рыбак и, не зная, что один из его компаньонов уже уехал, снова разделил улов на три равные части. У него тоже осталась лишняя рыба, которую он выбросил в реку. В три ночи проснулся третий рыбак и проделал ту же операцию, поделив улов на троих и выбросив «лишнюю» рыбу. Сколько рыб выловили рыбаки?

Мы с Джоном достали карандаш и бумагу и получили общее решение задачи: рыбаки поймали $(27N - 2)$ рыбы, где N – целое число. При $N = 1$ эта формула дает 25 рыб, а при $N = 2$ получается, что рыбаки поймали 52 рыбы. Мы решили, что 25 рыб – наиболее реальное число, но оказалось, что Пол предложил другое решение: минус две рыбы (при $N = 0$). Мы с Джоном дружно рассмеялись. В свое время смеялись и члены жюри конкурса, увидев такое необычное решение.

Между тем, мы поймали лишь одну рыбу на троих, больше клева не было, и мы разбрелись по берегу, ища хорошее место каждый в отдельности. Впрочем, удача нам не сопутствовала. Первым вернулся Джон, вспомнив, что ему надо возвращаться домой раньше других. Решив взглянуть напоследок на ранее пойманную рыбу, он вытащил ее из ведра. Неожиданно рыба вырвалась из его рук и нырнула в реку. Огорченный Джон решил возместить эту общую потерю. Он сбегал в соседний трактир, занял у трактирщика похожую рыбу из свежего улова, бросил ее в наше ведро и уехал домой не прощаясь (как истинный англичанин). Следует заметить, что трактирщик поставил условие, чтобы ему впоследствии вернули не деньги, а рыбу. Затем появился Пол, и с ним произошла такая же история – он тоже задолжал трактирщику одну рыбу. Потом это случилось со мной, когда Джон и Пол уже уехали.

Встретившись на следующий день, мы выяснили, что произошло, и долго смеялись, так как в результате мы поймали ровно минус две рыбы: одну выловили в самом начале рыбалки, а три рыбы нам предстояло поймать, чтобы вернуть долг трактирщику. Непривычное математическое решение оказалось вполне реальным…

Фамилия Пола была Дирак, а его специальностью была теоретическая физика. Однажды Дирак, решая уравнения, описывающие движение электрона, обнаружил отрицательные решения там, где обычно рассматривались только положительные значения. Вспомнив задачу «о минус двух рыбах», он не пренебрег этим случаем, а предположил, что у электрона есть двойник, во всем подобный электрону, но с положительным электрическим зарядом вместо отрицательного.

Такая элементарная частица была вскоре обнаружена экспериментально, и ее назвали позитроном. Впоследствии двойники-античастицы были открыты почти у всех элементарных частиц.

Объемный взрыв над Тунгусской тайгой

В интересной статье Льва Дыхно «Тунгусская катастрофа: новая гипотеза», напечатанной в журнале «Вестник» в 1997 году, я увидел знакомое имя – Михаил Цикулин, член комиссии по изучению Тунгусского метеорита при Академии наук СССР.

Когда-то в бывшей стране Советов наука ассоциировалась с романтикой, а физики считались весьма уважаемым сословием. Молодежь зачитывалась романом Даниила Гранина «Иду на грозу», а фотографии Эйнштейна стали обязательным атрибутом дома и на работе.

Качает, качает, качает задира ветер
фонари над головой.
Шагает, шагает, шагает веселый парень
по весенней мостовой.
Листает, листает, листает, учебник физики
листает на ходу.
Не знает, не знает, не знает, что я
по улице вслед за ним иду,

– звучала песня по радио из репродукторов…

Зимой 1969 года я, тогда третьекурсник Московского физико-технического института, попал на практику в Институт физики Земли, где Михаил Цикулин заведовал лабораторией. Я уже успел прочитать его с соавторами статью о моделировании Тунгусского взрыва. По мнению Цикулина, огромное космическое тело вошло в атмосферу Земли и, пролетая над тайгой с большой скоростью, создало ударную воздушную волну, повалившую деревья. В эксперименте, поставленным для проверки гипотезы, роль деревьев играли пластмассовые модели, воткнутые в песок, а для создания ударной волны использовался шнуровой взрывной заряд, полого натянутый над ними – вдоль предполагаемой траектории космического пришельца. В конце шнурового заряда был прикреплен небольшой сферический заряд, имитирующий взрыв метеорита в конечной точке полета. Эксперимент показал, что форма зоны, где пластмассовые модели были повалены, соответствуют реальной картине в Тунгусской тайге.

Однако сам Цикулин был не очень удовлетворен этим научным успехом. «Есть и другие гипотезы, – сказал он. – Если хотите, приходите делать диплом по этой теме. А пока читайте и думайте – может появится своя идея. Только помните принцип Оккама: чем проще гипотеза, тем она надежней. Кое-кто, например, предполагает, что в 1908 году над тайгой взорвался инопланетный космический корабль». Потом Цикулин читал нашей группе курс по теории взрыва. В июне 1969 года он попросил нашего согласия, чтобы перенести экзамен на неделю раньше. «Ради бога, извините за неудобство, – говорил он смущенно, – однако у меня действительно важная причина». Причиной оказалась трудная операция, сразу после которой Цикулин скончался. Ему было тогда 42 года.

Мы успели обсудить с ним несколько новых гипотез и остановились на идее объемного взрыва пыли в воздухе. Давно известно, что при распылении в воздухе быстро сгорающих мелких частиц – угольной пыли в шахтах, мучной пыли на мельницах, сахарной пудры на конфетных фабриках и даже каменной пыли в каменоломнях и строящихся горных туннелях – нередко случались так называемые объемные взрывы. Физический эффект состоит в следующем.

Поскольку отношение площади поверхности к объему у пылинок намного больше, чем у того же вещества, сжатого в комок, пылинки могут быстро прогреться электрическим разрядом или вспышкой пламени до температуры воспламенения. При достаточном количестве кислорода сгорание происходит почти мгновенно и поэтому подобно взрыву. С другой стороны, благодаря большой суммарной поверхности движущаяся пыль сравнительно легко электризуется трением частиц о воздух и между собой, поэтому вероятность электрических разрядов довольно велика.

Предполагается, что Тунгусский метеорит был сравнительно малой кометой, просмотренной астрономами и состо-

(Продолжение см. на с.34)

...я исследовал остроумно найденную...формулу для количества, или градуса, теплоты в жидких смесях...

Георг Рихман

С покойным проф. Рихманом делал физико-химические опыты для исследования градуса теплоты, который на себя вода принимает от погашенных в ней минералов, прежде раскаленных.

Михаил Ломоносов

Ничего не зная о природе теплоты, можно построить полную систему термометрии, если смешивать горячую и холодную воду и в качестве термоскопа пользоваться нашими тепловыми ощущениями.

Уильям Томсон (Кельвин)

...даже без помощи термометров мы можем уловить стремление теплоты передаваться от какого-либо более горячего тела к более холодным окружающим телам до тех пор, пока она не будет распределена между ними так, что ни одно из них не будет более склонно забирать теплоту от остальных.

Джозеф Блэк

Внешнее воздействие, выводящее систему из термодинамического равновесия, вызывает в ней процессы, стремящиеся ослабить результаты этого воздействия.

Анри Ле Шателье

А так ли хорошо знакомо вам тепловое равновесие?

Разумеется, хорошо! Ведь тепловые явления начинают изучаться в школе одними из первых. И за помещенными здесь фрагментами из научных трудов сразу угадываются задачи на использование уравнения теплового баланса или лабораторные работы по нахождению температуры смешиваемых жидкостей. Да и в обиходе мы постоянно сталкиваемся либо с определением температуры нашего тела с помощью градусника, либо с приготовлением ванны комфортной температуры – для чего мешаем горячую воду с холодной, либо с добавлением в обжигающий чай или кофе молока – не дожидаясь их остывания. В общем, тепловое равновесие – это так наглядно и просто!

Однако уже в старших классах, при знакомстве с законами термодинамики, эта простота перестает казаться столь очевидной. Как вы отнесетесь, например, к идее «тепловой смерти Вселенной», к которой должно было бы привести всеобщее стремление к выравниванию температуры? Оказывается, все попытки объяснить, почему этого не произошло за невообразимо долгую историю нашего мироздания, были тщетными до создания общей теории относительности.

Еще одним примером нетривиальности понятия термодинамического равновесия и его глубокой связи с другими разделами науки служит приведенный в эпиграфе принцип Ле Шателье. С иной его формулировкой вы встретитесь, например, при изучении электромагнитной индукции или химических процессов, что подтвердит его справедливость и за рамками тепловых явлений.

Нельзя обойти вниманием и проблемы, возникшие у классической термодинамики при переходе к исследованию открытых систем и неравновесных процессов, протекающих как в живой, так и в неживой природе. Ведь возникновение разнообразнейших структур, их «самоорганизация», в конечном счете само появление жизни не согласуются с устоявшимися представлениями о разрушении всего стройного и упорядоченного при эволюции к равновесным, хаотическим состояниям.

Вот как далеко могут привести нас размышления над вроде бы нехитрыми вопросами. Поэтому, обдумывая их, не упустите за внешней незамысловатостью глубокого их содержания.

Вопросы и задачи

1. Почему калориметры делают из металла, а не из стекла?

2. Верно ли, что при теплообмене энергия всегда переходит от тел с большей внутренней энергией к телам с меньшей внутренней энергией?

3. Нормальная температура человеческого тела около $37\ ^\circ\mathrm{C}$. Отчего же нам не холодно при температуре воздуха $25\ ^\circ\mathrm{C}$ и очень жарко при $37\ ^\circ\mathrm{C}$?

4. Почему в очень жаркую погоду нет смысла обмахиваться веером?

5. Как влияет ветер на показания термометра в морозный день? Рассмотрите два случая: а) термометр находится в тени; б) термометр освещен солнечными лучами.

6. Если у вас имеются два непроградуированных термометра, то как определить, какой из них нагрет больше?

7. В жаркую погоду в тени один термометр кладут в лужу, а другой кладут на скамейку и поливают водой из той же лужи. Какой из термометров показывает более высокую температуру?

8. Можно ли довести воду до кипения, подогревая ее стоградусным паром при нормальном атмосферном давлении?

9. Большой сосуд с кипяченой водой, в котором плавает стакан с сырой водой, ставят на нагреватель. Через некоторое время вода в стакане закипает раньше, чем в сосуде. Как это объяснить?

10. Можно ли вскипятить воду в бумажном стаканчике?

11. Откуда берется энергия, поддерживающая кипение воды в чайнике в течение нескольких секунд после снятия чайника с газовой плиты?

12. На одинаковые плитки поставили две одинаковые кастрюли с равными количествами воды при одной и той же температуре. Через некоторое время в первую кастрюлю долили немного воды из кипящего чайника. В какой из кастрюль вода закипит быстрее?

13. В холодную воду опускают нагретый в кипящей воде металлический брусок. В каком случае вода нагреется больше: если брусок алюминиевый или свинцовый? Объемы брусков одинаковы.

14. Медный кубик A имеет температуру $200\ ^\circ\mathrm{C}$, такие же медные кубики B и C имеют температуру $0\ ^\circ\mathrm{C}$. Путем теплообмена между ними нужно охладить кубик A до температуры $50\ ^\circ\mathrm{C}$ и нагреть за счет этого кубики B и C до температуры $75\ ^\circ\mathrm{C}$. Возможно ли это? Теплообменом между кубиками и воздухом пренебречь.

15. Почему лед дольше не тает, если его завернуть в мокрую газету?

16. Зачем в погребах в холодную погоду рядом с овощами ставят большие емкости с водой?

17. Если в воду при температуре $0\ ^\circ\mathrm{C}$ бросить кусок льда при температуре $-22\ ^\circ\mathrm{C}$, произойдет заметное увеличение массы льда. Кристаллизация воды сопровождается выделением значительного количества теплоты, почему же при этом вода не нагревается?

18. При помещении в переохлажденную воду небольшого кристаллика льда вода немедленно начинает замерзать. Какую температуру должна была бы иметь переохлажденная вода, чтобы целиком превратиться в лед? Теплоемкость воды считать не зависящей от температуры.

19. В сосуде находятся в тепловом равновесии лед и вода одной и той же массы. Через сосуд пропускают пар при температуре $100\ ^\circ\mathrm{C}$ и в том же количестве. Какая установится конечная температура? Потерями тепла пренебречь.

Микроопыт

Поставьте рядом три вместительных сосуда: с горячей водой – слева, с холодной водой – справа и со смесью горячей и холодной воды – в центре. Подержав правую и левую руки в соответствующих емкостях несколько минут, одновременно опустите их в центральный сосуд. Опишите ваши ощущения и постарайтесь их объяснить.

Любопытно, что...

...теплом Платон считал то, что остается от огня в накаленных телах, когда пламя потушено; Бэкон полагал теплоту «расширяющимся движением»; по мнению Гассенди, тепло и холод – разные материи, причем холод состоит из «острых» атомов в форме тетраэдра; Галилей же учил, что холод не является «положительным качеством», а есть всего лишь отсутствие тепла.

...эксперимент, описанный в «Микроопыте», был проведен еще в XVII веке английским философом Джоном Локком для доказательства субъективности человеческих ощущений. Но, помимо философского значения, опыт навсегда закрыл возможность использовать наше тело в качестве термометрического прибора и дать с его помощью определение температуры.

...работа Рихмана «Размышление о количестве теплоты, которое должно получаться при смешивании жидкостей, имеющих определенные градусы теплоты», доложенная им в 1744 году в Петербургской Академии наук, положила начало точным количественным расчетам в области теплотехники. Хотя сам Рихман не разграничивал понятия «температура» и «теплота», ему удалось вывести формулу для определения температуры смеси однородных жидкостей и экспериментально исследовать влияние на теплообмен температуры, формы и поверхности тел, а также скорости движения охлаждающей среды.

...опыты Рихмана повторил в 1772 году шведский физик Иоганн Вильке, введший затем единицу измерения количества теплоты. Она легла в основу современного определения калории, правда это название возникло лишь в 1852 году во Франции. С появлением джоуля калория стала вытесняться из научного употребления, однако она до сих пор в ходу, например, при оценке энергетической ценности продуктов питания.

...несмотря на долгую путаницу в определении тепловых понятий и использование мифической материальной сущности – теплорода, к XIX веку был заложен фундамент термометрии – раздела физики, изучающего способы измерения температуры, и калориметрии – суммы методов измерения различных тепловых эффектов.

...давно известные тепловые явления длительное время представали областью, совершенно обособленной от явлений механических. Неудивительны поэтому попытки ученых найти связь теплоты с механикой, трактуя, скажем, температуру как аналог давления в сплошной среде. Подобно тому как механическое равновесие в такой среде образуется при выравнивании давлений, тепловое равновесие требует равенства температур.

...понятие теплового равновесия, через которое в физике приходят к понятию температуры, можно характеризовать как динамическое равновесие, когда процессы молекулярного масштаба идут весьма интенсивно, но все макроскопические процессы прекращаются.

...первым примером процесса установления теплового равновесия, когда тепло передается от более хаотической системы к более упорядоченной, было броуновское движение. Маленькие частицы примеси в жидкости образуют систему, схожую с идеальным газом частиц, хотя и не взаимодействующих между собой, но испытывающих действие молекул жидкости, в которой они плавают.

...в нагретой плазме в одном месте могут быть две температуры. Каждая из входящих в состав плазмы систем – электроны и ионы – находится сама по себе в тепловом равновесии. Поток тепла между ионами и электронами тем не менее существует, но он очень слаб, и температуры выравниваются сравнительно медленно.

...опытная проверка первого закона термодинамики не один раз проводилась в специальных калориметрах, где измерялась теплота, выделяемая в процессах жизнедеятельности различными существами – от мыши до человека. Как оказалось, она полностью соответствовала энергии, поглощенной вместе с питательными веществами. Это отрицало идею о том, что организмы могут являться независимыми источниками какого-либо нового вида энергии, а в конечном итоге привело к представлению о живых организмах как об открытых термодинамических системах, далеких от состояния равновесия.

Что читать в «Кванте» о тепловом равновесии

(публикации последних лет)

1. «Костры в поле и русская баня» – 2002, № 1, с. 31;
2. «Тепловые свойства воды» – 2002, № 3, с. 10;
3. «Обратимые и необратимые процессы в термодинамике» – 2003, Приложение № 4, с. 44;
4. «Где найти прошлогоднюю зиму?» – 2004, Приложение № 4, с. 69;
5. «Теплоемкость равновесных тепловых процессов» – 2005, № 3, с. 44;
6. «Тепло и холод: физика и биология» – 2006, Приложение № 6, с. 100;
7. «Калейдоскоп «Кванта» – 2004, № 3, с. 32; 2007, № 1, с. 32;
8. «Работа газа при переходе из начального состояния в конечное» – 2007, № 3, с. 43;
9. «Температура» – 2007, Приложение №5.

Материал подготовил А.Леонович

(Начало см. на с. 30)

явшей в основном из углистого хондрита. Могло произойти вот что. Комета, с ее небольшим твердым ядром и объемистым пылевым шлейфом, полого вошла в земную атмосферу и вызвала поначалу свечение облаков в зоне длиной около тысячи километров, наблюдаемое рядом свидетелей. Облако углистой пыли, вытянувшееся вдоль траектории движения, под действием земного тяготения опускалось все ниже и ниже, пока не достигло плотных слоев атмосферы, где кислорода уже было достаточно для быстрого сгорания. Роль детонатора мог сыграть электрический разряд в атмосфере (например, молния). После взрыва остатки небесного тела упали на землю в виде черной пыли, содержащей углистый хондрит.

Объемная, или вакуумная, бомба давно имеется в военных арсеналах, но широко не применяется (существуют определенные международные соглашения на этот счет).При ее первичной детонации выделяется облако взрывчатого геля, затекающее в щели, окопы и убежища. Потом (секунд через двадцать) срабатывает второй детонатор, и облако взрывается по всему своему объему.

Интересно, что гипотеза Льва Дыхно по существу тоже базируется на идее объемного взрыва. Однако в его модели необходимо одновременное наличие двух редких явлений – небесного тела, принесшего космические частицы, и большого газового выброса из недр Земли. Вероятность такого совпадения крайне мала. Так что гипотеза пылевого взрыва в нижних слоях атмосферы представляется более надежной.

Тема с вариациями

В.ЭПШТЕЙН

Структура курса физики иногда напоминает музыкальные формы. Простые темы (народные мотивы) композитор разворачивает вариациями, и в результате получается, к примеру, оркестровая симфония. Простые школьные задачи (поучительные сами по себе) демонстрируют идеи, лежащие в основе фундаментальных физических теорий. Вот пример такого рода.

Тема – задача 35

(«Сборник задач по физике» А.П.Рымкевича, 1992 г.)

Расстояние s необходимо проехать на лодке туда и обратно один раз по реке, скорость течения которой $v_р$, а другой раз по озеру. Скорость лодки относительно воды оба раза $v_л$. Докажите, что поездка туда и обратно по реке всегда занимает больше времени, чем по озеру.

Предварительный анализ

Первая (и вполне естественная) реакция на условие задачи – времена равны: выигрыш времени при движении по течению компенсируется потерей времени на обратном пути. Более глубокий анализ (или, для физиономистов, выражение лица преподавателя) показывает, что все не так просто. Компенсация, конечно, имеется, но не полная. К этому выводу можно прийти, исходя из качественных соображений, которые стоит запомнить: их можно будет применить при решении других задач.

1) *Придадим параметрам задачи допустимые значения, при которых ответ становится очевидным.*

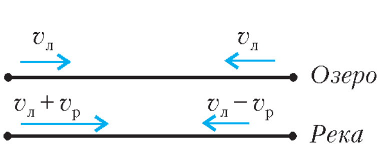


Рис. 1

В нашем случае при $v_р > v_л$ катер, движущийся по реке, никогда не вернется в исходный пункт (рис.1). Можно предположить, что и при других значениях скоростей время движения в реке будет больше, чем в озере.

2) *Сравним времена воздействия различных факторов.*

В нашей задаче время движения против течения заведомо больше, чем по течению. Таким образом, фактор, мешающий движению, действует дольше, чем фактор помогающий. Следует, очевидно, ожидать, что мешающий фактор будет превалировать над помогающим.

Решение задачи

Время движения в озере равно

$$t_1 = \frac{2s}{v_л}.$$

Время движения в реке составляет

$$t_2 = \frac{s}{v_л + v_р} + \frac{s}{v_л - v_р} = \frac{2v_л s}{v_л^2 - v_р^2} = \frac{2s}{v_л - \dfrac{v_р^2}{v_л}}.$$

Видно, что время движения в реке больше, так как числители обеих формул одинаковы, в то время как знаменатель второй заведомо меньше знаменателя первой.

Вариации на тему задачи 35

Рассмотрим конструкцию прибора для определения скорости движения лодки относительно воды. Прибор представляет собой жесткое основание, на котором располагаются источник звука и отражатель (рис.2). Для измерений прибор закрепляют на корпусе лодки снаружи так, чтобы во время движения прибор не увлекал воду.

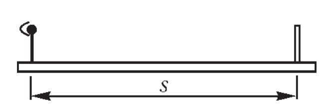


Рис. 2

Измеряется время, за которое звуковой импульс распространяется от источника до отражателя и возвращается к источнику. По этому времени легко вычисляется скорость движения лодки относительно воды. При этом необходимо учитывать следующее обстоятельство. Дело в том, что распространение звука имеет важную особенность: скорость звука относительно среды, в которой он распространяется, не зависит от скорости источника звука. (Этим распространение звука существенно отличается, например, от движения осколков разорвавшейся гранаты: если в момент взрыва граната двигалась, скорость осколков относительно гранаты суммируется со скоростью гранаты.) С учетом этого обстоятельства в системе отсчета, связанной с прибором, скорость звука будет равна $v_{зв} - v_л$ ($v_{зв}$ – скорость звука относительно воды), когда звук распространяется от источника к отражателю, и $v_{зв} + v_л$ при распространении в обратном направлении. Но тогда совершенно ясно, что время между излучением и приемом звукового импульса определяется формулой для времени движения лодки в реке с заменой $v_л$ на $v_{зв}$ и $v_р$ на $v_л$:

$$t_2 = \frac{2s}{v_{зв} - \dfrac{v_л^2}{v_{зв}}}.$$

Зная расстояние s между источником звука и отражателем и определив время t_2 , мы легко определяем искомое значение скорости лодки:

$$v_л = \sqrt{v_{зв}\left(v_{зв} - \frac{2s}{t_2}\right)}.$$

Усложним задачу. Попробуем определить скорость лодки, если величина s не известна (или изменяется). Решение можно получить, если произвести измерение времени до того, как лодка начала двигаться. Это время определяется формулой для времени движения лодки в озере с соответствующей заменой:

$$t_1 = \frac{2s}{v_{зв}}.$$

Из двух последних формул можно исключить s и, таким образом, решить поставленную задачу:

$$v_л = v_{зв}\sqrt{1 - \frac{t_1}{t_2}}.$$

А можно ли найти скорость лодки, если измерения в условиях неподвижной лодки не проведены? Предположим также, что опустить прибор, скажем, в движущуюся вместе с лодкой ванну и определить t_2 тоже нельзя. (Например, если вода протекает сквозь лодку и ванну, как сквозь решето, – странная конструкция, не правда ли?) Оказывается, и такую задачу можно решить. Для этого необходимо развернуть прибор перпендикулярно движению лодки и произвести второе измерение времени распространения звука. Ясно, что принятый звуковой импульс распространялся вдоль равных сторон треугольника, как это показано на рисунке 3. Легко рассчитать время распространения t_3 . Как видно из рисунка,

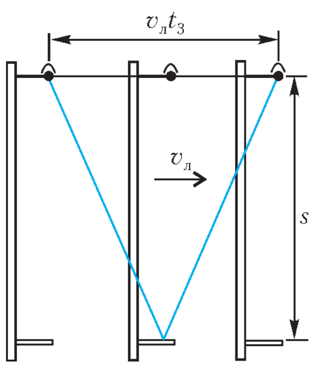


Рис. 3

$$\left(v_л \frac{t_3}{2}\right)^2 + s^2 = \left(v_{зв} \frac{t_3}{2}\right)^2,$$

откуда получаем

$$t_3 = \frac{2s}{\sqrt{v_{зв}^2 - v_л^2}}.$$

Сравнивая времена t_2 и t_3 , находим

$$\frac{t_2}{t_3} = \frac{v_{зв}}{\sqrt{v_{зв}^2 - v_л^2}}.$$

Отсюда и определяется скорость лодки:

$$v_л = v_{зв}\sqrt{1 - \frac{t_3^2}{t_2^2}}.$$

«Индикатором» движения, таким образом, является отношение времен t_2 и t_3 .

Вряд ли рассмотренный прибор может быть действительно использован для определения скорости корабля или самолета. Существуют более простые и надежные средства для решения той же задачи. И тем не менее, идея устройства оказывается плодотворной. Она имеет прямое отношение к революционному преобразованию классической физики – созданию теории относительности. Впрочем, речь при этом пойдет о необычной лодке, плывущей по необычному озеру.

Теория Максвелла. Плавание Земли в эфире

Во второй половине XIX века в истории науки произошло знаменательное событие. В результате создания Максвеллом теории электромагнетизма была теоретически предсказана возможность излучения электромагнитных волн, при этом были указаны их свойства и условия излучения. Также было показано, что частным случаем излучения является видимый свет. Расчеты Максвелла были подтверждены опытами Герца. В частности, выяснилось, что, в полном соответствии с общими свойствами волновых процессов, скорость распространения электромагнитной волны (света) не зависит от скорости движения источника излучения относительно среды. С другой стороны, и расчеты и эксперименты показали, что свет может распространяться в вакууме. Исходя из этого, Максвелл приходит к заключению (единственно возможному, с его точки зрения): то, что мы считаем пустотой, на самом деле упругая среда. Максвелл называет ее эфиром. Эфир заполняет всю Вселенную. Он играет для света ту же роль, что и вода для звука: звук – распространение колебаний воды, а свет – эфира.

Но почему же мы не замечаем присутствия этой среды? Ответ прост: частицы, из которых состоит эфир, настолько малы, что они свободно проходят сквозь любое тело, а следовательно, и сквозь датчик измерительного прибора. А как же тогда установить факт существования эфира? Максвелл предлагает идею, суть которой рассматривалась нами в решении задачи 35 и в вариациях на тему этой задачи. Источник звука заменяется источником света, а в качестве лодки используется наша планета Земля, которая несется по своей орбите вокруг Солнца, т.е. сквозь эфир, со скоростью 30 км/с.

Идея этого опыта была реализована Майкельсоном и Морли в 1887 году. Увы, результат эксперимента оказался отрицательным – движение Земли относительно эфира обнаружено не было ($t_3 = t_2$). Именно отрицательный результат опыта Майкельсона и Морли был одной из основных предпосылок для пересмотра основ классической механики и значительно способствовал признанию специальной теории относительности.

Впрочем, это уже совсем другая история.

Не пренебрежем трением качения...

А.СТАСЕНКО

В течение тысяч лет трение было самым знакомым и вместе с тем весьма загадочным явлением. От добывания огня (желанный эффект) до замены волочения грузов (где трение выступает как вредный фактор) качением прошло, вероятно, много времени. Во всяком случае, изобретение колеса признается величайшей технической революцией человечества.

Количественное описание трения (как и все научные теории) началось приблизительно три века тому назад, пройдя путь от феноменологических соотношений до современной молекулярно-механической теории.

В 1699 году Гильом Амонтон опубликовал результаты своих экспериментов и сформулировал закон трения в виде пропорциональности между тангенциальной (F_τ) и нормальной (F_n) силами взаимодействия соприкасающихся твердых тел:

$$F_\tau = kF_n . \qquad (1)$$

Прошло более восьмидесяти лет, и Шарль Кулон подтвердил (1781 г.) закон Амонтона, но ввел в него дополнительное слагаемое:

$$F_\tau = kF_n + F_{\text{а}} . \qquad (2)$$

Это был существенный шаг в понимании явления: новое слагаемое F_a подчеркивало, что притяжение соприкасающихся тел существует даже без внешней прижимающей силы: тела как бы «прилипают» друг к другу, не будучи смазаны каким-либо клеем. Эта дополнительная сила стала называться силой адгезии (от латинского «прилипание»), а новое выражение для F_τ назвали законом Амонтона–Кулона.

Сейчас любой школьник знает этот закон, по крайней мере в виде (1), и коэффициент пропорциональности k уверенно называет «коэффициентом трения скольжения». Но опыт показывает, что нужно приложить касательную к плоскости соприкосновения силу не только для того, чтобы сдвинуть с места кирпич, лежащий на столе. Для качения цилиндра по столу тоже нужна сила – правда, существенно меньшая, чем в случае кирпича. Эту силу по аналогии назвали «силой трения качения». Кулон предложил выражение и для этой силы:

$$F_{\text{к}} = \frac{\lambda}{a} F_n . \qquad (3)$$

Здесь a – радиус цилиндра, а коэффициент λ, аналогично случаю трения скольжения, был назван «коэффициентом трения качения». Но если k в выражениях (1) и (2) является безразмерным, то λ в выражении (3), как легко видеть, имеет ту же размерность, что и радиус a, т.е. размерность длины.

Понимание физической причины взаимодействия соприкасающихся тел приходило постепенно с развитием представлений о молекулярном строении вещества. Выяснилось, что потенциальная энергия притяжения двух электронейтральных молекул друг к другу растет с уменьшением расстояния между ними обратно пропорционально шестой степени этого расстояния. Значит, сила притяжения обратно пропорциональна седьмой степени этого же расстояния. Конечно, в конденсированном состоянии каждая молекула взаимодействует со многими другими, причем результирующая сила со стороны этих других молекул различна в глубине вещества и у поверхности. Интуитивно ясно, что вблизи поверхности должно существовать ненасыщенное поле притяжения – кто не наблюдал, как даже на вертикальных полированных поверхностях шкафов со временем образуется слой тонкой пыли.

Прямые измерения показали, что сила взаимодействия (притяжения) двух диэлектрических тел действительно обратно пропорциональна седьмой степени расстояния между ними. Это очень резкая зависимость: стоит уменьшить зазор между телами до размера диаметра атома, как сила притяжения уменьшится на два порядка! Иными словами, «бесконечность» наступает уже на расстоянии порядка размеров молекул.

Таким образом было понято, что и трение скольжения и трение качения имеют одну и ту же физическую природу – электромагнитное взаимодействие элементов, составляющих твердое тело. Правда, любопытно, что сопутствующие коэффициенты, несмотря на почти одинаковую словесную формулировку, имеют разные размерности.

Однако пора поговорить о физических свойствах соприкасающихся твердых тел и о физических величинах, их характеризующих. Прежде всего рассмотрим *модуль упругости.* Он определяется следующим образом. Возьмем цилиндр длиной l и площадью поперечного сечения S и растянем его (или сожмем) осевой силой F, при этом его длина увеличится (или уменьшится) на Δl. Естественно предположить, что это изменение длины пропорционально силе F и обратно пропорционально площади сечения S, а коэффициент пропорциональности и есть (обратный) модуль упругости:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E}\frac{F}{S} .$$

Этот модуль E ввел двести лет назад (1807 г.) английский ученый Томас Юнг. Из формулы видно, что если формально положить $\Delta l = l$, то $E = \frac{F}{S}$. Это означает, что модуль упругости есть механическое напряжение (сила на единицу площади), которое должно увеличить (уменьшить) длину стержня в два раза. Отсюда же видна и размерность модуля упругости:

$$[E] = \frac{[F]}{[S]} = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = \text{Па} .$$

Эксперименты со стержнями подтверждают линейную зависимость между относительной деформацией и напряжением. Но растянуть стержень вдвое не получится – разве что если он будет резиновый. Еще раньше стержень «потечет» – начнутся необратимые деформации. Соответствующее напряжение так и называется – *предел текучести* σ и, конечно, тоже измеряется в паскалях. В таблице приведены значения E и σ для нескольких металлов. Пусть вас не удивляет разброс численных значений: разные способы обработки, разные справочники... И этот разброс вполне оправдывает приближенные соотношения, к поиску которых мы и приступим.

Таблица

	E, ГПа	σ, МПа	$d_м/2$, Å	γ	$\gamma_{теор}$	$\gamma_{эксп}$
Алюминий	70	21–30	1,5	0,36–0,46	0,59	1,14–1,66
Медь	112–130	33–333	1,3	0,55–1,7	0,96–1,11	1,79–1,83
Свинец	16	5–10	1,8	0,1–0,14	0,137	–
Молибден	330	330–415	1,4	2,8–3,3	2,8	–
Сталь	190–200	230–310	1,25	1,7–1,9	1,6–1,7	–
Кремний	110–166	120	1,4	1,12	1,42	1,14–1,23

Для начала обсудим такой вопрос: как оценить *поверхностную плотность энергии* адгезии γ, т.е. энергию, приходящуюся на единицу площади. Примем, что она должна както зависеть от коэффициента упругости E, от «коэффициента мягкости» σ (предел текучести) и от характерного расстояния порядка диаметра молекулы $d_м$ (смещение на это расстояние всех слоев стержня и приводит к удвоению его длины). Из соображений размерности можно предложить зависимость вида

$$\gamma \sim d_м \sqrt{E\sigma}\ .$$

Видно, что здесь оба коэффициента E и σ представлены равноправно, через их среднее геометрическое значение.

Сравним предложенную формулу с более простой теоретической зависимостью, принятой почти полвека назад:

$$\gamma_{теор} = \frac{E}{2\text{Å}}\left(\frac{1{,}3\text{Å}}{\pi}\right)^2 = 0{,}856 \cdot 10^{-11} E\ .$$

Здесь 2Å – характерный период решетки твердого тела, 1,3Å – характерное расстояние, на котором действуют силы притяжения, ну а число «пи» появилось, конечно, из-за того, что в рассмотренной модели молекулы считаются шариками, а где кругло, там и «пи».

В таблице даны рассчитанные по соответствующим формулам значения γ и $\gamma_{теор}$, а также экспериментально измеренные значения $\gamma_{эксп}$ (которые удалось обнаружить в литературе). Видно, что наша оценка γ довольно близка и к теоретическим и к экспериментальным значениям.

Итак, мы получили правдоподобную оценку для поверхностной плотности энергии адгезии γ и, следовательно, *поверхностной плотности силы* адгезии $f_а \sim \dfrac{\gamma}{d_м} \sim \sqrt{E\sigma}$. А каковы сами энергия и сила?

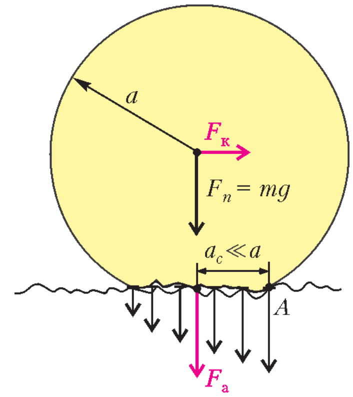
Очевидно, что для этого величины γ и $f_а$ нужно умножить на некоторую площадь контакта соприкасающихся тел. Но как ее найти? Ведь, например, для кирпича, лежащего на столе, *видимая* площадь контакта равна произведению его длины на ширину, а на самом он соприкасается со столом всего лишь в нескольких «пятнах» (достаточно трех) – в тех местах, где были самые большие бугорки шероховатости. Эти пятна и приняли на себя всю нагрузку. И тут опять приходит на помощь предел текучести: прижимающая сила будет уравновешена силой упругости деформированных бугорков, площадь контакта s которых можно оценить из соотношения

$$F_n = mg \sim s\sigma\ .$$

Таким образом, энергия и сила прилипания соприкасающихся тел будут порядка

$$\gamma s \sim F_n \sqrt{\frac{E}{\sigma}} d_м \ \text{ и } \ F_а \sim F_n \sqrt{\frac{E}{\sigma}}\ .$$

Получается чудовищная сила, на 1–2 порядка больше прижимающей?! Но чему же тут удивляться: ведь чтобы растянуть стержень в два раза, т.е. сместить соседние слои друг относительно друга на межатомное расстояние, нужна была бы плотность силы порядка модуля Юнга $E \sim 10^{11}\ \text{Н/м}^2$. Это означает, что для удвоения длины проволоки сечением $1\ \text{мм}^2 = 10^{-6}\ \text{м}^2$ потребовалась бы сила порядка $10^{11} \cdot 10^{-6}\ \text{Н} = 10^5\ \text{Н}$.



Почему же возможно качение цилиндра по плоскости, с которой он, казалось бы, сросся? А все дело *в правиле рычага* – ведь ширина контактной полоски $2a_c$ (см. рисунок) много меньше радиуса цилиндра. На рисунке изображена сильно преувеличенная полоса контакта, образовавшаяся в результате деформации цилиндра под действием прижимающей силы, например его веса $F_n = mg$. Там же условно показаны пятна контакта, суммарная площадь которых много меньше видимой площади $2a_c l$, и локальные силы адгезии в этих пятнах. Под действием силы $F_к$, приложенной к оси цилиндра, возникает момент относительно точки A, стремящийся разорвать локальные спайки. В момент отрыва имеем

$$F_к a = F_а a_c\ ,\ \text{или}\ \ F_к = F_а \frac{a_c}{a}\ .$$

А поскольку $a_c/a \ll 1$, сила трения качения $F_к$ много меньше результирующей $F_а$ сил адгезии в локальных пятнах.

Итак, осталось оценить отношение a_c/a. Теперь у нас достаточно оснований предполагать, что здесь должны играть роль модуль Юнга E, вес цилиндра $mg = \pi a^2 a\rho g$ (мы приняли его длину равной радиусу). Более того, ясно, что чем больше вес и чем меньше модуль Юнга, тем большей будет ширина видимой контактной полосы. Значит, модуль Юнга должен стоять где-то в знаменателе, а вес – в числителе:

$$a_c \sim \sqrt{\frac{\pi a^2 a\rho g}{E}}\ .$$

Подставив выражения для $F_а$ и a_c в формулу для $F_к$, из соотношения (3) найдем коэффициент трения качения:

$$\lambda = \frac{F_к a}{F_n} \sim \sqrt{\frac{E}{\sigma}}\sqrt{\frac{\pi a^3 \rho g}{E}} = \sqrt{\frac{\pi a^3 \rho g}{\sigma}}\ .$$

Примем следующие характерные значения: $\rho \sim 10^3\ \text{кг/м}^3$, $g = 10\ \text{м/с}^2$, $\sigma \sim 100\ \text{МПа} = 10^8\ \text{Па}$. Для радиуса цилиндра выберем значения из «человеческой практики»: $a \sim \left(10^{-2} - 1\right)$ м. Тогда получим

$$\lambda \sim \sqrt{\frac{\pi\left(10^{-2} - 1\right)^3 \cdot 10^3 \cdot 10}{10^8}}\ \text{м} \sim \left(10^{-5} - 10^{-2}\right)\ \text{м}\ .$$

В литературе указываются такие значения: для металлов (например, стальной цилиндр катится по стальной подложке) $\lambda = (1-2)\cdot 10^{-5}$ м; при движении автомобиля (например, со скоростью 80 км/ч) по асфальту $\lambda = 2 \cdot 10^{-4}$ м; для дерева по дереву $\lambda = (5-6)\cdot 10^{-4}$ м.

Таким образом, наша оценочная теория не так уж плоха. Тем более что внешние условия влияют на величину трения качения ничуть не меньше, чем природа трущихся тел.

Оригами и построения

А.ПЕТРУНИН

Моему сыну Никодиму

Представьте себе, что вы сидите на уроке и вам скучно-скучно и очень хочется заняться геометрическими построениями: начертить, например, треугольник, найти в нем центры вписанной и описанной окружностей и ортоцентр, провести прямую Эйлера и все такое. Но вот беда: циркуль и линейка оставлены дома.

Вот в такой ситуации, наверное, оказались 15 лет назад два оригамиста, итальянец Бенедетто Скимеми и японец Хамяки Худзита. (Оригамистами называют людей, увлекающихся древним японским искусством *оригами* – складыванием из листа бумаги различных зверушек, птичек, фонариков и т.д.) Вдруг их осеняет: «А ведь складка листа бумаги – это прямая». Например, если взять на листке отрезок и согнуть лист так, чтобы концы отрезка соединились, а потом разгладить лист аккуратненько на парте, то перегиб образует срединный перпендикуляр к исходному отрезку (рис.1,*а*). Обычное построение срединного перпендикуляра (рис.1,*б*) длиннее. Для него требуется и циркуль и линейка (одной

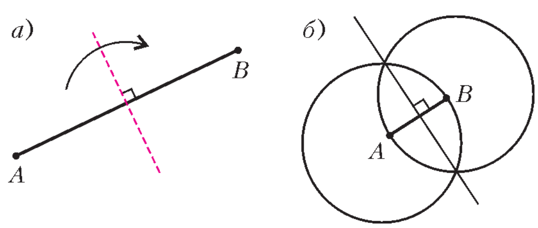


Рис. 1

линейкой не обойдешься), а тут никаких инструментов не надо.

Чтобы продолжить, им пришлось придумать набор правил для этого нового типа построений. Например, при обычных построениях с помощью циркуля и линейки разрешается делать такие операции:

1. Провести прямую через две данные точки.
2. Построить окружность с данным центром и радиусом.
3. Найти точку пересечения двух данных прямых, точку пересечения прямой с окружностью или двух окружностей. [1]

Что-то подобное нужно было и Бенедетто с Хамяки. Для этого они математически описали приемы, которыми давно пользовались оригамисты. Вот эти правила.

Правила складывания

Мы будем говорить, что прямая задана, если на листе имеется соответствующая складка. На рисунках далее складки показаны пунктиром.

[1] *Такие точки пересечения существуют не всегда, правило утверждает только, что если такая точка есть, то ее «можно» найти.*

1. Пусть заданы две точки A и B, тогда лист можно сложить так, что данные две точки будут на складке (рис.2).

2. Пусть заданы две точки, тогда лист можно сложить так, что одна точка перейдет в другую (рис.3).

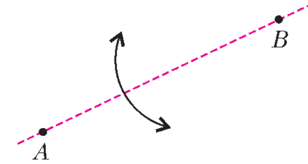


Рис. 2

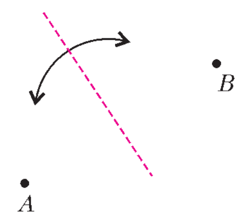


Рис. 3

3. Пусть заданы две прямые l и m, тогда лист можно сложить так, что одна прямая перейдет в другую (рис.4).

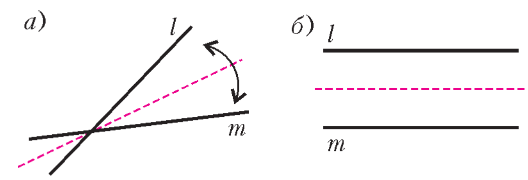


Рис. 4

4. Пусть заданы прямая l и точка A, тогда лист можно сложить так, что точка попадет на складку, а прямая перейдет в себя (т.е. линия складки будет ей перпендикулярна) (рис.5).

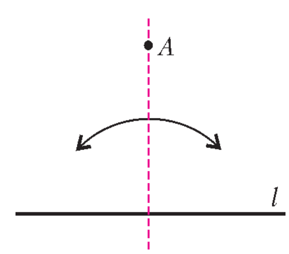


Рис. 5

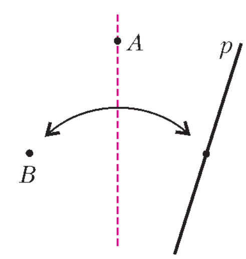


Рис. 6

5. Пусть заданы прямая p и две точки A и B, тогда лист можно [2] сложить так, что точка A попадет на складку, а B – на прямую p (рис.6).

6. Пусть заданы две прямые p и q и две точки A и B, тогда лист можно [2] сложить так, что точка A попадет на прямую p, а точка B попадет на прямую q (рис.7).

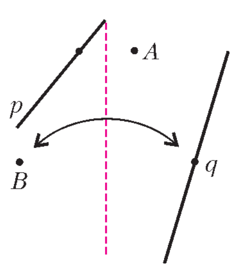


Рис. 7

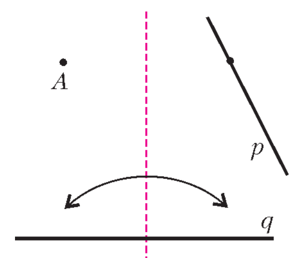


Рис. 8

7. Пусть заданы две прямые p и q и точка A, тогда лист можно сложить так, что точка A попадет на прямую p, а прямая q прейдет в себя (т.е. линия складки будет ей перпендикулярна) (рис.8).

[2] *Такая складка существует не всегда, правило утверждает только, что если такая складка есть, то ее «можно» найти.*

Последнее – седьмое – правило добавил позже другой японский оригамист Косиро Хатори, заметив, что Бенедетто с Хамяки забыли его включить. Эту последнюю складку, как и некоторые другие из этого набора, можно получить как результат последовательного применения остальных, т.е. для математика она ничего не добавляет, но оригамисты не мнут бумагу зря.

Упражнения

1. Какие построения циркулем и линейкой соответствуют складкам 1 – 5 и 7?

2. Через точку A вне прямой l проведите прямую l', параллельную данной, с помощью перечисленных выше правил.

3. С помощью правил оригами постройте квадрат.

4. Разделите данный отрезок AB: а) на 2 равные части; б) на 3 равные части; в) на n равных частей.

Построение сгибанием

Теперь можно наслаждаться и заниматься любыми построениями. Например, такими:

Если задан произвольный треугольник, то его *биссектрисы*, а стало быть, и *центр его вписанной окружности* можно найти, применив правило 3 ко всем парам его сторон.

Серединные перпендикуляры и *центр описанной окружности* можно найти, применив правило 2 ко всем парам его вершин. После этого можно найти *медианы* и *центр тяжести*, применив правило 1 к каждой вершине в паре с уже найденной выше серединой противоположной стороны.

Высоты и *ортоцентр* легче всего найти, применив правило 4 к каждой вершине в паре с противоположной стороной.

Далее можно убедиться, что ортоцентр, центр тяжести и центр описанной окружности действительно лежат на одной прямой, применив правило 1 к любой паре из этих точек. Эта прямая называется прямой Эйлера треугольника.

Конечно, сгибая листок, невозможно построить окружность, но, оказывается, верно следующее: любую точку, которую удается построить с помощью циркуля и линейки, можно построить сгибаниями. Чтобы доказать это, достаточно предъявить построение двух типов точек:

1) Точки пересечения окружности с прямой, если про окружность известно только местоположение центра и одна точка на ней.

2) Точки пересечения двух окружностей, если про каждую окружность известно только местоположение центра и одна точка на ней.

Первое можно сделать, применив правило 5, взяв за A центр окружности, за B – точку на окружности, а за p – данную прямую. Второе сделать сложнее, короткой последовательности сгибаний мне найти не удалось. Но такую последовательность можно получить, показав, что с помощью сгибаний можно построить *инверсию* точки относительно окружности, если про окружность известно только местоположение центра и положение одной точки на ней. Потом, применив инверсию, которая переводит одну из двух данных окружностей в прямую, свести задачу к предыдущей.

Упражнение 5. Постройте инверсию точки относительно окружности, заданной местоположениями центра и одной точки на ней.

Таким образом, все построения точек циркулем и линейкой можно осуществить с помощью сгибаний. Оказывается при этом, что сгибаниями можно построить точки, которые невозможно построить с помощью циркуля и линейки. Для примера приведем две задачи на построение, которые известны уже более двух тысяч лет, но только в первой половине XIX века была доказана невозможность решения каждой из них с помощью циркуля и линейки.

Трисекция угла

Задача 1. *Разделите данный угол на три равные части.*

Вот решение, предложенное Хисаси Абэ.

Пусть угол задан двумя складками p и q, обозначим через A вершину угла (рис.9). Сначала проведем подготовительное построение. Нам нужно: 1) восставить перпендикуляр l к q через A (правило 4); 2) отметить на l произвольно точку B и восставить срединный перпендикуляр q' к отрезку AB (правило 2).

Теперь все готово для главной складки. Сложим лист так, чтобы A попала на q', а B – на p (правило 6). При этом образ A' вершины A ляжет на первую трисектрису нашего угла, а точка C на пересечении q' с новой складкой будет лежать на второй. Таким образом, лучи AA' и AC будут делить угол на три равные части.

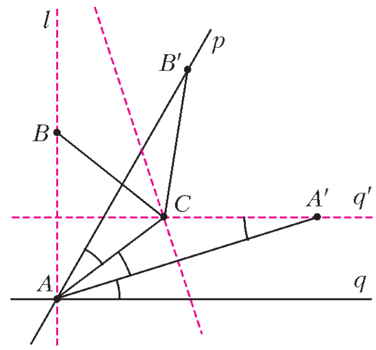


Рис. 9

Докажем это. По свойствам выполненных складок, $BC = AC = CA' = CB'$, а также $A'B = AA' = AB'$. Поэтому равны треугольники $AB'C$ и ACA', но тогда равны и углы, отмеченные дужками на рисунке 9.

Удвоение куба

Мы не будем вдаваться в легендарные подробности истории этой задачи. Напомним лишь, что речь идет о построении ребра куба, объем которого вдвое больше объема данного куба с ребром a, т.е. отрезка $a\sqrt[3]{2}$.

Задача 2. *Постройте два отрезка с отношением длин* $\sqrt[3]{2}$.

Вот решение, которое предложил Петер Мессер.

Сначала построим квадрат $ABCD$ (рис.10), разделенный на 3 равные части складками p и q, параллельными стороне AB (см. упражнения 3 и 4). Теперь сложим лист так, чтобы точка B попала в точку B' на стороне AD, а точка X – в точку X' на отрезке EF. Возможность осуществить такую складку предусмотрена правилом 6. Тогда

$$\frac{DB'}{B'A} = \sqrt[3]{2}.$$

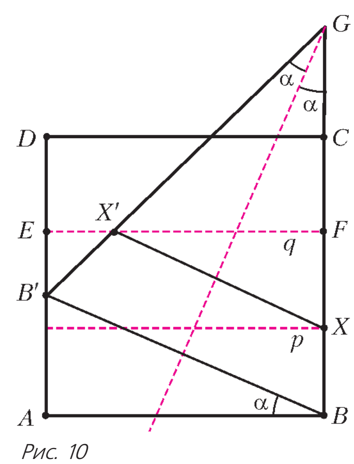


Рис. 10

Действительно, пусть $\angle B'BA = \alpha$, а $BX = 1$. Тогда (поскольку $\angle AB'B = \frac{\pi}{2} - \alpha = \angle GB'B = \frac{\pi}{2} - \alpha$) $\angle EB'X' = 2\alpha$. Так как $q \parallel p$, а $X'X \parallel B'B$, то $\angle XX'F = \alpha$. Поэтому $EX' = \sin 2\alpha$, $FX' = \operatorname{ctg}\alpha$. Отсюда получаем, что

$$\sin 2\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = EF = 3.$$

Положим $t = \operatorname{ctg}\alpha$. Тогда $\sin 2\alpha = \frac{2t}{1+t^2}$, и мы получаем уравнение относительно t:

$$\frac{2t}{1+t^2}+t=3,$$

откуда $t^3-3t^2+3t-3=0$, $(t-1)^3=2$, $t=\sqrt[3]{2}+1$. Далее, $AB'=3\operatorname{tg}\alpha$, $DB'=3-3\operatorname{tg}\alpha$, и

$$\frac{DB'}{AB'}=\frac{3-3\operatorname{tg}\alpha}{3\operatorname{tg}\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha-1=\sqrt[3]{2}.$$

На этом список «невозможных построений» не кончается. При помощи складываний можно также построить некоторые другие объекты, которые не поддаются построению циркулем и линейкой. Например, правильный семиугольник.

В чем же причина? Какое из описанных правил добавляет новые возможности? Чтобы это понять, достаточно построить складку в каждом из правил 1—7 с помощью циркуля и линейки. Решив упражнение 1, вы увидите, что довольно легко построить все прямые складок в правилах 1—5 и 7. Стало быть, дополнительные возможности скрыты в правиле номер 6. Не удивительно, что основной шаг в построениях трисекции угла и удвоении куба был сделан с применением именно этого правила.

Причина, оказывается, в следующем: чтобы найти прямую сгиба в правиле 6, требуется решить уравнение третьей степени, тогда как в каждом из построений с помощью циркуля и линейки решаются уравнения только 1 и 2 степеней. Любителям геометрии мы рекомендуем убедиться в этом.

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

Эта «простенькая» кинематика

В.ТРОЯНОВСКИЙ

В САМОМ ДЕЛЕ, ЕСЛИ ПОЖЕРТВОВАТЬ ОБСУЖДЕНИЕМ необходимых первоначальных понятий и результатов, то в кинематике все ясно и понятно: скорость v, время движения t и пройденный путь s связаны известным соотношением $v=s/t$. Насколько все просто, вы сможете оценить, решив для разминки такую задачу.

Задача 1. *Кольцо радиусом R состоит из двух половинок, в которых скорости звука v_1 и v_2 ($v_2<v_1$, для определенности). По одному из стыков половинок кольца ударили молоточком. Найдите время T от момента удара до момента встречи звуковых волн.*

Прежде чем читать предлагаемое решение, попытайтесь решить задачу самостоятельно. В частности, подумайте, почему скорость звука в разных веществах разная, что будет с «быстрой» волной после того, как она пересечет границу половинок полуколец, где (примерно) произойдет встреча звуковых волн. В случае успешного самостоятельного решения задачи все-таки взгляните на предлагаемое решение. Возможно, обсуждение некоторых вопросов вам пригодится в будущем.

Решение. Ясно, что встреча волн произойдет где-то на той из половинок кольца, в которой скорость звука меньше. При переходе волны из одной среды в другую должна измениться скорость волны, в соответствии со свойствами новой среды (скорость распространения волны в среде – это скорость распространения упругих деформаций).

Для записи уравнений надо, прежде всего, ввести обозначения. Воспользуемся рисунком 1. Кроме скоростей на нем показаны время движения t «быстрой» волны от точки старта до середины кольца (до границы раздела сред с разными скоростями волн), время движения T «медленной» волны до встречи волн (т.е. искомое время) и время движения $T-t$ бывшей «быстрой» волны в другой среде, куда попадает волна после пересечения границы сред.

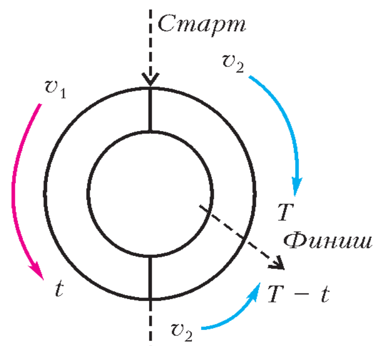


Рис. 1

Нередко задачу удается начать решать, делая не то, что нужно, а то, что видно сразу. Воспользуемся этим способом решения. Легко найти путь «быстрой» волны от точки старта до середины кольца: длина полукольца равна πR. Просто находится и время t, затраченное на прохождение этого пути: $t=\pi R/v_1$. Для того чтобы приблизиться к ответу на вопрос задачи, надо хотя бы «вставить» искомую величину в какое-нибудь уравнение. Можно, например, записать величину пути двух волн в правом полукольце, выразив ее через скорости и времена движений каждой из волн («медленной» и бывшей «быстрой»): $\pi R=v_2T+v_2(T-t)$. В итоге имеем систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$t=\frac{\pi R}{v_1},\quad \pi R=v_2T+v_2(T-t).$$

Не сомневаюсь, что вы быстренько решите эту систему и получите какой-нибудь один из приведенных ответов или им подобный ответ:

а) $T=\dfrac{\pi R(v_1+v_2)}{2v_1}$; б) $T=\dfrac{\pi R(v_2-v_1)}{v_1v_2}$;

в) $T=\dfrac{\pi R(v_1-v_2)}{4v_1v_2}$; г) $T=\dfrac{\pi R(v_1+v_2)}{v_1v_2}$.

На экзамене ответов для самопроверки обычно не дают, поэтому надо уже при подготовке к экзамену научиться проверять себя хотя бы косвенно.

Конечно, вы знаете о том, что прежде всего ответ должен быть верен по размерности. Начинаем проверять ответы таким образом и в первом же из них (а) находим:

$$\text{с}=\frac{\text{м}\cdot\text{м/с}}{\text{м/с}}=\text{м},$$

чего не может быть. Верная размерность не гарантирует правильность ответа, а вот неверная размерность гарантирует неправильность ответа. Так что первый из ответов заведомо неверен.

Думаю, для вас не составит труда проверить остальные ответы и убедиться в том, что они по размерности верны. Однако никаких гарантий верности ответа вы еще не получили. Возьмем, например, второй ответ (б). Хотя он верен по размерности, но при $v_2 < v_1$ получается отрицательное время, чего быть не должно. И, пожалуйста, не надо выписывать подобный ответ по модулю, так как модуль существует не для того, чтобы съедать нежелательный минус и облагораживать кое-что неблагородное. Так что и второй ответ неверен.

Третий ответ «проходит» по размерности и по знаку, но все-таки вызывает сомнения: при равенстве скоростей время до встречи оказывается равным нулю. Ясно, что этого быть не может – волны мгновенно встретиться не смогут. Увы, и третий ответ неверен, поскольку он неверен в проверяемом частном случае. Такая проверка – для какого-либо известного частного случая – также должна быть в вашем арсенале.

Наконец, четвертый ответ верен по размерности, положителен и при равенстве скоростей дает вполне разумный ответ: $2\pi R/v$. А насколько верен этот ответ? Как легко понять, при равенстве скоростей волны должны встретиться у противоположного стыка и каждая из них пройдет до встречи путь πR со скоростью v. Такое движение требует время $\pi R/v$, что вдвое меньше получившегося. Значит, и четвертый ответ неверен (он не дает в частном случае то, что должно быть в этом случае очевидно).

Рассмотрим еще один ответ:

$$T = \frac{\pi R\left(v_1 + v_2\right)}{2v_1v_2}.$$

Этот ответ верен по размерности, положителен, в частном случае равенства скоростей дает правильный результат. Более того, мы можем сделать еще одну проверку: для предельного случая. Представьте, что скорость v_1 очень велика. Тогда левое полукольцо волна проскакивает мгновенно, временем t можно пренебречь, а время до встречи должно равняться $\pi R/\left(2v_2\right)$. Получится ли такой результат из последнего ответа? Проверим. Посмотрим, что происходит, когда v_1 становится много больше v_2 (т.е. $v_1 \gg v_2$):

$$T = \frac{\pi R\left(v_1 + v_2\right)}{2v_1v_2} = \frac{\pi R\left(1 + \left(v_2/v_1\right)\right)}{2v_2} \approx \frac{\pi R}{2v_2},$$

как и должно быть.

Вывод, который напрашивается после всех проверок, можно сформулировать следующим образом: есть основания надеяться на то, что последний из ответов является верным.

Закончив разминку, перейдем к основной части тренировки. Рассмотрим важный вопрос – *правило сложения скоростей* и связанный с ним результативный способ решения достаточно сложных задач.

Начнем с примера, который иллюстрирует рисунок 2. На рисунке указаны скорости трех тел – девушки, юноши и вагона. Как вы думаете, относительно каких систем отсчета указана каждая из скоростей? Можете ли вы найти скорость каждого из тел относительно земли? Правильные ответы на заданные вопросы очевидны. Скорости людей заданы относительно вагона, скорость вагона указана относительно земли. Скорость девушки относительно земли равна 65 км/ч, скорость юноши составляет 50 км/ч.

Рис. 2

Этот пример – напоминание о том, что скорости (векторные величины) складываются по правилу сложения векторов (по параллелограмму или треугольнику). В общем виде результат можно формулировать следующим образом. Пусть есть неподвижная система отсчета, представленная на рисунке 3 системой координат без штрихов, и подвижная система, помеченная штрихами, скорость тела в подвижной системе v', скорость тела в неподвижной системе v, скорость подвижной системы относительно неподвижной u. Правило сложения скоростей и его следствие – формула для расчета скорости тела в подвижной системе отсчета – таковы:

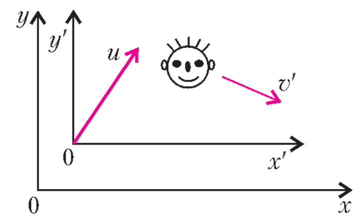


Рис. 3

$$\vec{v} = \vec{u} + \vec{v}', \quad \vec{v}' = \vec{v} - \vec{u}.$$

Задача 2. *Электричка едет прямолинейно со скоростью 0,4 м/с относительно земли. Человек идет поперек вагона со скоростью 0,3 м/с относительно вагона. Найдите скорость человека относительно земли.*

Решение. Задача, конечно, «мечта двоечника», но и в ней есть подводный камень.

Рассмотрим рисунок 4 (вид вагона сверху). На этом рисунке видно, что искомая скорость является гипотенузой треугольника с катетами, один из которых это скорость человека относительно поезда $v_{чп} = v_ч = 0,3$ м/с (эта скорость играет роль скорости тела v' относительно подвижной системы отсчета), второй – скорость поезда относительно земли $v_{пз} = v_п = 0,4$ м/с (эта скорость играет роль скорости u подвижной системы относительно неподвижной системы). Таким образом, величина скорости человека относительно земли равна $v_{чз} = 0,5$ м/с (она играет роль скорости тела относительно неподвижной системы v).

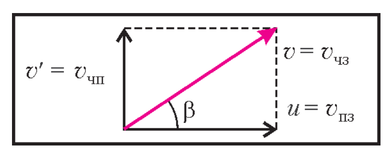


Рис. 4

Обычно абитуриенты ограничиваются нахождением величины скорости, в данном случае $v_{чз}$. Но скорость – вектор, и надо охарактеризовать направление скорости. Как правило, достаточно найти какую-либо тригонометрическую функцию одного из удобных углов. В этой задаче можно найти тангенс угла между искомой скоростью и скоростью поезда:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{v_ч}{v_п} = 0,75.$$

Вот на этот подводный камень (направление скорости) и не надо налетать. Причем, даже если в условии задачи ничего не говорится о нахождении направления скорости (и в ответе нет этого), вам все равно надо найти эту характеристику векторной величины, так как иначе вы, как минимум, оставляете основание для придирки.

Теперь рассмотрим важную задачу, идея решения которой (как и результат решения) используется достаточно часто.

Задача 3. *Мяч летит горизонтально со скоростью $v_м$ и налетает по нормали на массивную стенку, которая* *движется ему навстречу со скоростью $v_с$. Найдите скорость мяча после отскока, если никаких потерь нет. (Траектория мяча в этой задаче считается все время прямолинейной.)*

Решение. Прежде всего заметим, что встречающееся в условии задачи понятие «нормаль» означает перпендикуляр к плоскости в данной точке или перпендикуляр к касательной плоскости в данной точке поверхности. В этой задаче сказано, что стена – массивная. Это означает, что ее скорость при соударении практически не меняется. Далее. На первый взгляд, из-за встречного движения тел результирующая скорость мяча должна быть равна сумме скоростей, но это, как мы сейчас убедимся, не так. Причем это не связано с потерями (их, по условию, и нет).

Для решения задачи нужны идеи. Вы можете остановиться и подумать, прежде чем читать дальше.

Первая идея проста: целесообразно перейти в движущуюся систему координат. Мы неоднократно будем поступать таким образом, этот прием для вас должен стать стандартным. Вторая идея, которая оказывается полезной в данной задаче и благодаря которой удобно перейти в подвижную систему координат, состоит в следующем. Представьте себе, что стена неподвижна. В этом случае скорость мяча относительно стены до и после удара по величине одна и та же (векторы скоростей до и после удара отличаются лишь знаком). В отсутствие потерь не меняется по величине скорость мяча и относительно движущейся стены. Теперь надо выбрать удобную подвижную систему координат. Связывать ее с мячом не стоит, так как мяч меняет направление движения, а вот связать ее со стеной, которая не меняет ни направления движения, ни величины скорости, удобно.

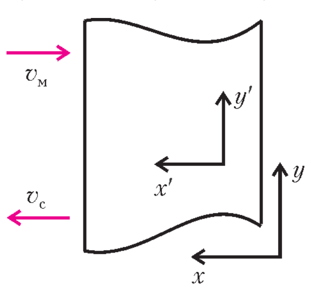


Рис. 5

Рассмотрим рисунок 5 и воспользуемся двумя указанными идеями, а также правилом сложения скоростей и следствием из него. Найдем скорость мяча относительно стены (т.е. скорость в подвижной системе) до удара (начальную скорость):

$$v'_{мн} = +(-v_м) - (+v_с) .$$

В этой формуле знаки в скобках связаны с ориентацией векторов относительно неподвижной системы координат, знаки перед скобками – это знаки, стоящие в используемой формуле сложения скоростей. Далее найдем скорость мяча относительно стены после удара (конечную скорость):

$$v'_{мк} = -v'_{мн} = v_м + v_с .$$

Наконец, по правилу сложения скоростей получим искомый результат, т.е. конечную скорость мяча в неподвижной системе отсчета:

$$v_{мк} = v_с + (v_м + v_с) = v_м + 2v_с .$$

Используем рассмотренные идеи на примере еще одной задачи.

Задача 4. *Футболист ударил по покоившемуся мячу. Скорость ноги во время удара практически постоянна и равна $v_ф$. Найдите величину стартовой скорости мяча.*

Решение. Надеюсь, вы узнали в этой задаче только что решенную задачу 3 с нулевой начальной скоростью мяча и скоростью ноги футболиста в качестве скорости стены. Пользуясь полученным ранее результатом, сразу пишем искомый ответ:

$$v_{мк} = 0 + 2v_ф = 2v_ф .$$

Для того чтобы поупражняться в решении задач с использованием перехода в подвижную систему, можете найти стартовую скорость мяча «честно», не используя результат решения предыдущей задачи.

Конечно, идея перехода в подвижную систему отсчета применима не только при движении тел вдоль одной прямой, но и в более сложных случаях.

Задача 5. *Точка 1 движется вдоль оси 0x к началу координат из положения $x_н$ = 10 см со скоростью v_1 = = 2 см/с. Точка 2 движется вдоль оси 0y к началу координат из положения $y_н$ = 5 см со скоростью v_2 = = 4 см/с. Встретятся ли точки? Если нет, то каково минимальное расстояние между ними?*

Решение. Рассмотрим два способа решения данной задачи.

Первый способ. Каждая из точек движется строго по своей оси, поэтому встретиться они могут только в начале координат. «Встретиться» в данном случае формально означает одновременное попадание точек в начало координат. Найдем время движения каждой из точек. Для этого нам надо записать изменение во времени текущей координаты каждой из точек, а затем приравнять это значение нулю, так как в интересующий нас момент точки попадают в начало координат.

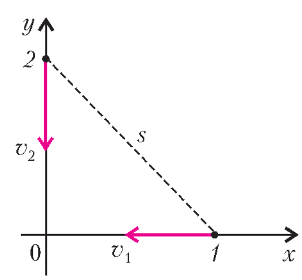


Рис. 6

Координата первой точки (рис.6) равномерно убывает во времени от $x_н$ до нуля, поэтому можно записать $x = x_н - v_1 t$. Используя условие x = 0, найдем $t_1 = 5$ с. Аналогично, из уравнения $y = y_н - v_2 t$ и условия $y = 0$ получаем $t_2 = 1{,}25$ с. Итак, точки движутся до начала координат разное время и встретиться не могут.

Для нахождения минимального расстояния между точками запишем значение этого расстояния в общем виде (расстояние s между точками показано на рисунке 6 пунктиром):

$$s = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x_н - v_1 t)^2 + (y_н - v_2 t)^2} .$$

Минимум этого выражения можно найти, используя дифференцирование, но можно и элементарным способом, как мы и сделаем. Преобразуем выражение для расстояния следующим образом:

$$s = \sqrt{\left(x_н^2 + y_н^2\right) - 2t\left(v_1 x_н + v_2 y_н\right) + \left(v_1^2 + v_2^2\right)t^2} =$$

$$= \sqrt{v_1^2 + v_2^2}\sqrt{\frac{x_н^2 + y_н^2}{v_1^2 + v_2^2} - 2t\,\frac{v_1 x_н + v_2 y_н}{v_1^2 + v_2^2} + t^2} .$$

Под корнем прибавим и вычтем одну и ту же величину $A = \left(\frac{v_1 x_н + v_2 y_н}{v_1^2 + v_2^2}\right)^2$ и выделим полный квадрат разности двух величин (времени и вспомогательной величины A):

$$s = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}\sqrt{\frac{x_н^2 + y_н^2}{v_1^2 + v_2^2} - A + A - 2t\,\frac{v_1 x_н + v_2 y_н}{v_1^2 + v_2^2} + t^2} =$$

$$= \sqrt{v_1^2 + v_2^2}\sqrt{\left(t - \frac{v_1 x_н + v_2 y_н}{v_1^2 + v_2^2}\right)^2 - \left(\frac{v_1 x_н + v_2 y_н}{v_1^2 + v_2^2}\right)^2 + \frac{x_н^2 + y_н^2}{v_1^2 + v_2^2}} .$$

Первая из скобок под большим корнем – неотрицательное выражение, все остальное – постоянные величины, поэтому минимум расстояния достигается в тот момент, когда имеет место равенство

$$t - \frac{v_1 x_н + v_2 y_н}{v_1^2 + v_2^2} = 0\text{, т.е. } t = \frac{v_1 x_н + v_2 y_н}{v_1^2 + v_2^2}.$$

По этому времени можно непосредственно найти минимальное значение расстояния между точками. Но проще заметить, что для найденного момента последнее произведение корней дает

$$s = \sqrt{\frac{v_1^2 y_н^2 - 2v_1 v_2 x_н y_н + v_2^2 x_н^2}{v_1^2 + v_2^2}} = \frac{|v_1 y_н - v_2 x_н|}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} \approx 6{,}7 \text{ см}.$$

Обратите внимание на следующее обстоятельство. Найденное минимальное расстояние между точками равно нулю только тогда, когда $v_1 y_н - v_2 x_н = 0$. В условиях задачи это не так, значит, точки не встретятся (ответ на первый вопрос задачи можно было бы получить и таким образом).

Второй способ. Выберем в качестве неподвижной системы отсчета заданную систему координат $x0y$, а в качестве подвижной системы $X0Y$ – систему, связанную с первым телом, которое двигается вдоль оси $0x$. В этой системе начало координат совместим с первым телом, ось $0X$ подвижной системы направим по скорости первого тела, т.е. навстречу оси $0x$, ось $0Y$ подвижной системы направим по оси $0y$ неподвижной системы (рис.7). Перейдем в систему отсчета, связанную с первым телом. В этой системе первое тело покоится, а второе тело приближается к нему со скоростями v_1 и v_2. Искомое минимальное расстояние s – это расстояние от первого тела до точки A. Как можно увидеть на рисунке,

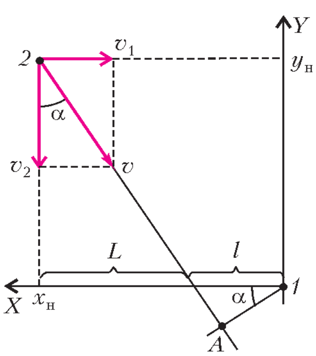


Рис. 7

$$l = \frac{s}{\cos\alpha},\quad L = y_н \operatorname{tg}\alpha,\quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{v_1}{v_2},\ \cos\alpha = \frac{v^2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}.$$

Собираем все и находим

$$s = \frac{x_н v_2 - y_н v_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}},$$

как и в предыдущем способе решения. Получающейся знак позволяет увидеть «перед» или «за» первой точкой пройдет вторая точка.

Упражнения

1. Клин с углом β у основания едет горизонтально со скоростью $v_к$, стержень может (свободно) перемещаться только вертикально (рис.8). Найдите скорость стержня.

2. Человек идет вдоль трамвайных путей. Каждые семь минут его обгоняет трамвай, каждые пять минут ему навстречу проходит трамвай. Найдите интервал движения между трамваями.

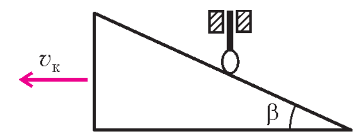


Рис. 8

3. Расстояние между гребнями волн в море $\lambda = 5$ м. При встречном движении катера за время $\tau = 1$ с волны ударяются о корпус $k_1 = 4$ раза, а при попутном движении за то же время – $k_2 = 2$ раза. Найдите скорости катера и волн, считая их постоянными относительно берега.

4. Шарик налетает на массивную стенку со скоростью $v_{шн}$ под углом α к нормали. Стенка едет навстречу шарику со скоростью $v_с$. Найдите величину скорости шарика $v_{шк}$ и угол β этой скорости с нормалью к стенке после отскока. Потерь нет.

5. Торпеду, имеющую скорость $v_т = 100$ км/ч, выпускают из точки A в момент, когда корабль противника находится в точке B и двигается неизменным курсом со скоростью $v_к = 50$ км/ч под углом $\beta = 30°$ (рис.9). Найдите угол α, при котором торпеда поразит цель.

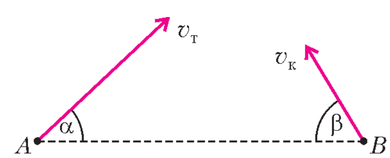


Рис. 9

Статья написана по материалам книги «Кинематика. Практическое пособие по решению задач для старшеклассников и абитуриентов». (Автор-составитель В.М.Трояновский. М.: Издательство РДЛ, 2007.)

КОЛЛЕКЦИЯ ГОЛОВОЛОМОК

Пенто-пенто-пирамида

(Начало см. на 4-й с. обложки)

Головоломка «Пенто-пенто-пирамида» заключается в том, чтобы собрать пирамиду из шариков, объединенных в группы. Конечно, объединять шарики в группы можно тысячами способов, и каждый раз будет получаться новая головоломка. Но изобретатели игрушек стремятся придумывать головоломки с какими-нибудь особенностями, которые выделяли бы их из произвольно составленных вариантов.

Как раз этими качествами хорошо продуманной конструкции обладает головоломка Дианы Пасхиной, выпускницы Московского государственного института стали и сплавов. Название головоломки говорит о том, что в пирамиде должно быть пять слоев и что каждая деталь конструкции состоит из пяти шариков. При этом детали разные и отличаются взаимным расположением шариков. Это не первая игрушка Дианы, ею придумано более десятка различных головоломок из шариков. То что она предпочитает конструкции из шариков, объясняется очень просто. Шарики можно купить готовыми, склеивать их в группы нетрудно, а игрушки получаются очень красивыми. Лучше всего для этих целей подходят шарики от пластмассовых бус, которыми украшают новогодние елки. Для семи деталей вам понадобится 35 шариков.

Головоломка «Пенто-пенто-пирамида» трудна в решении, поэтому на рисунке (см. 4-ю с. обложки) дана подсказка – отмечено расположение детали номер 7. С нее и начинайте построение пирамиды.

Желаем успеха!

А.Калинин