

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 мая 2008 года по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №1–2008» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М2071» или «Ф2078». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М2073, М2075 и М2078 предлагались на III Всероссийской олимпиаде по геометрии имени И.Ф.Шарыгина.

Задачи М2071–М2080, Ф2078–Ф2087

М2071. Универсальным числом $U(n)$ назовем минимальное натуральное число, из которого вычеркиванием цифр можно получить любое натуральное число от 1 до n . Сколько цифр имеет число $U(2008)$?

С.Волчёнков

М2072. Найдите $(n+1)$ -ю цифру после запятой в десятичной записи числа $\sqrt[2n]{999\dots 99}$.

2n девяток

Я.Алиев

М2073. Даны две окружности, пересекающиеся в точках P и Q . Пусть C – произвольная точка одной из окружностей, отличная от P и Q ; точки A и B – вторые точки пересечения прямых CP и CQ с другой окружностью. Найдите геометрическое место центров описанных окружностей треугольников ABC .

А.Заславский

М2074. Посетитель обходит залы музея по следующему правилу. Находясь в некотором зале, он выбирает среди всех соседних залов тот, который до этого был посещен им меньшее число раз, и переходит в него (если таких соседних залов несколько, то он переходит в любой из них). Верно ли, что посетитель через некоторое время обойдет все залы? (Известно, что из любого зала музея можно пройти в любой другой зал.)

С.Волчёнков

М2075. Каждое ребро выпуклого многогранника параллельно перенесли на вектор так, что ребра образовали каркас нового выпуклого многогранника. Обязательно ли он равен исходному?

А.Заславский

М2076. Найдите все функции $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, удовлетворяющие при всех $x \neq 0$ и y равенству

$$xf(y) - yf(x) = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Э.Туркевич

М2077. Найдите наименьшее натуральное число k , обладающее следующим свойством: в любой таблице $n \times n$, заполненной действительными числами, можно увеличить не более k чисел так, чтобы суммы чисел во всех строках и столбцах стали равными.

П.Кожевников

М2078. Точки A', B', C' – основания высот остроугольного треугольника ABC . Окружность с центром B и радиусом BB' пересекает прямую $A'C'$ в точках K и L (K и A находятся по одну сторону от прямой BB'). Докажите, что точка пересечения прямых AK и CL лежит на прямой BO , где O – центр описанной окружности треугольника ABC .

В.Протасов

М2079. Существует ли такая тройка попарно взаимно простых натуральных чисел x, y, z , больших 10^{10} , что $x^8 + y^8 + z^8$ делится на $x^4 + y^4 + z^4$?

В.Сендеров

М2080*. Последовательность векторов $\{\vec{e}_n\}$ на плоскости задана условиями: $\vec{e}_1 = (0; 1)$, $\vec{e}_2 = (1; 0)$, $\vec{e}_{n+2} = \vec{e}_{n+1} + \vec{e}_n$ при $n \geq 1$. Отложим от начала координат все векторы, являющиеся суммами нескольких различных векторов из последовательности $\{\vec{e}_n\}$. Докажите, что множество концов отложенных векторов состоит из всех точек с целыми неотрицательными

координатами, лежащих внутри некоторой полосы между параллельными прямыми.

И.Пушкарев

Ф2078. Из листа фанеры вырезали кусок в форме прямоугольного треугольника с катетами 60 см и 80 см,

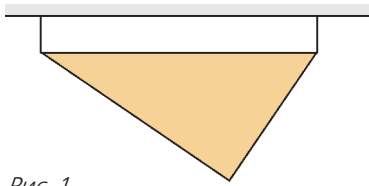


Рис. 1

масса этого куска равна 2 кг. Кусок фанеры подвесили к потолку при помощи двух одинаковых легких нитей, расстояние между точками прикрепления нитей к потолку равно 100 см (рис.1). Найдите силы натяжения нитей.

А.Простов

Ф2079. Клин массой M с углом α при основании находится на гладком горизонтальном столе. На наклонной грани клина

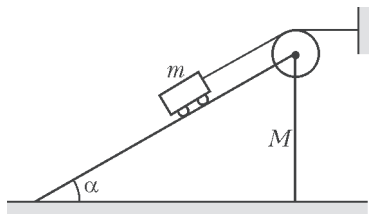


Рис. 2

стоит тележка массой m , к ней привязана легкая нить, переброшенная через блок, закрепленный осью в вершине клина (рис.2). Свободный конец нити привязан к стене. Вначале клин удерживают, затем отпускают. С каким ускорением он начнет двигаться?

Р.Клинов

Ф2080. Две большие параллельные пластины двигают навстречу друг другу с одинаковыми скоростями v_0 . Между пластинами находится очень маленький упругий шарик. В тот момент когда одна из пластин ударяется о него, расстояние между пластинами составляет L . Считая удары абсолютно упругими, найдите скорость шарика в тот момент, когда расстояние между пластинами составит $L/5$. Действием силы тяжести пренебречь. Скорость шарика перед первым ударом равна нулю.

А.Шариков

Ф2081. В комнате, заполненной воздухом, находится пустой кубический сосуд объемом 100 л. В стенке сосуда открывается маленькое отверстие площадью 1 см^2 и через 0,001 с закрывается. Оцените количество молекул, попавших в сосуд за это время. Оцените также давление, которое установится в сосуде. Стенки сосуда тепло не проводят, теплоемкостью стенок можно пренебречь.

А.Повторов

Ф2082. Моль гелия в сосуде расширяется от начального объема $V_1 = 10 \text{ л}$ до конечного объема $V_2 = 50 \text{ л}$, при этом давление газа в процессе меняется так, что $pV^2 = \text{const}$. Начальная температура газа $T_1 = 300 \text{ К}$. Найдите конечную температуру. Найдите также работу газа в процессе (если не получится найти точно, посчитайте приближенно) и полученное в процессе количество теплоты.

Р.Газов

Ф2083. К батарее подключают амперметр (вообще говоря, так поступать не следует!) — он показывает силу тока 1 А. Параллельно подключают еще один такой же амперметр — теперь они в сумме показывают 1,2 А. Сколько в сумме покажут 2008 таких же амперметров, если их подключить к батарее параллельно?

Т.Оков

Ф2084. Одна из квадратных пластин плоского конденсатора закреплена, а вторая может свободно смещаться параллельно, оставаясь на расстоянии d от первой. Масса подвижной пластины M , площадь каждой из пластин S . Конденсатор зарядили до напряжения U_0 . Сдвинем теперь подвижную пластину относительно положения равновесия. Найдите период малых колебаний этой пластины. Зависит ли он от того, как мы сдвинули пластину? Сила тяжести отсутствует.

З.Рафаилов

Ф2085. Катушка индуктивностью L и резистор сопротивлением R соединены параллельно, к выводам цепочки очень давно подключен внешний источник, ток в его цепи равен I_0 . Ток в цепи источника очень быстро увеличивают в 3 раза. Какое количество теплоты выделится в резисторе после этого? Какой полный заряд протечет через резистор?

А.Зильберман

Ф2086. Две одинаковые катушки индуктивности соединены последовательно. Выводы получившейся цепочки подключены к звуковому генератору последовательно с низковольтной лампочкой для фонарика. Параллельно одной из катушек подключают конденсатор и начинают изменять в широких пределах частоту генератора. На частоте $f = 600 \text{ Гц}$ наблюдается четкий минимум свечения нити накала лампочки. На какой частоте (частотах) лампочка будет гореть ярче всего?

Р.Старов

Ф2087. Небольшая плосковыпуклая линза отштампована из прозрачной пластмассы. Форма выпуклой поверхности аккуратно рассчитана при помощи ЭВМ, она отличается от сферической (сферическая поверхность «собирает» лучи параллельного пучка в фокусе только приблизительно). Диаметр плоской поверхности линзы 2 см, толщина линзы 0,5 см. Найдите фокусное расстояние линзы. Коэффициент преломления пластмассы 1,5.

З.Очков

Решения задач М2051–М2055, Ф2063–Ф2072

М2051. Пусть $a, b, c > 0$; $(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b) = abc$. Докажите, что $a = b = c$.

Положим $x = a + b - c$, $y = b + c - a$, $z = c + a - b$. Так как $x + y = 2b > 0$, $y + z = 2c > 0$, $z + x = 2a > 0$, то среди чисел x, y, z нет двух отрицательных. Кроме того, по условию $xyz = abc > 0$, значит, все три числа x, y, z положительны. Имеем:

$$xyz = \frac{z+x}{2} \cdot \frac{x+y}{2} \cdot \frac{y+z}{2} \geq \sqrt{zx} \sqrt{xy} \sqrt{yz} = xyz.$$

Знак « $\geq$ » превращается в равенство только при $x = y = z$. Отсюда $a - b = \frac{z - y}{2} = 0$ и $a - c = \frac{x - y}{2} = 0$, т.е. $a = b = c$.

П.Кожевников

M2052. а) Рассмотрим окружность и ее хорду AB . Найдите множество точек M , находящихся от прямой AB на расстоянии, равном длине касательной, проведенной из точки M к рассматриваемой окружности.

Докажите следующие утверждения

б) Для любых двух парабол, описанных около одной окружности и пересекающихся в четырех точках, диагонали «параболического четырехугольника» перпендикулярны (рис.1).

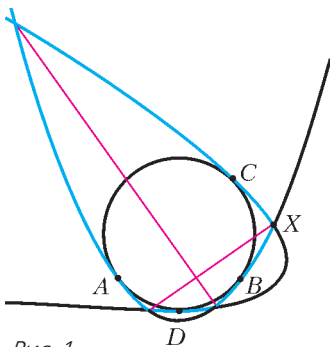


Рис. 1

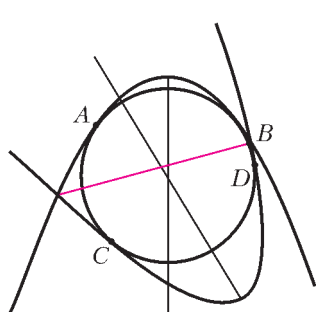


Рис. 2

в) Для любых двух парабол, описанных около одной окружности и пересекающихся в двух точках, оси парабол наклонены под одним и тем же углом к прямой, проходящей через точки пересечения этих парабол (рис.2).

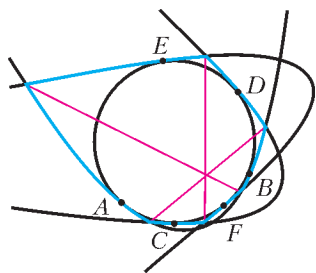


Рис. 3

г) Для любых трех парабол, описанных около одной окружности и таких, что любые две из них пересекаются в четырех точках, диагонали «параболического шестиугольника» пересекаются в одной точке (рис.3).

а) Введем систему координат так, чтобы точки A, B и центр окружности C имели координаты $(-a, 0)$, $(a, 0)$, $(0, c)$. Тогда радиус окружности равен $R = \sqrt{a^2 + c^2}$. Длина касательной из точки $M(x, y)$ к окружности равна $\sqrt{MC^2 - R^2} = \sqrt{x^2 + (y - c)^2 - R^2}$. Таким образом, искомое ГМТ задается уравнением $y^2 = x^2 + (y - c)^2 - R^2 \Leftrightarrow 2cy = x^2 - a^2$. При $c = 0$ (т.е. если AB – диаметр) получаем пару касательных в точках A и B . При $c \neq 0$ получается парабола, касающаяся окружности в точках A и B (это означает, что парабола и окружность имеют общую касательную в точке A и в точке B).

Нетрудно показать, что парабола, касающаяся окружности в данных точках A и B , единственна. С помощью

этого соображения и пункта а) решим остальные пункты. Обозначим точки касания парабол с окружностью A и B , C и D , E и F (см. рис.1, 2, 3).

б) Если X – точка пересечения парабол, то длина касательной из X к окружности равна, с одной стороны, расстоянию от X до AB , с другой стороны – расстоянию от X до CD , поэтому X лежит на одной из двух биссектрис углов между прямыми AB и CD . Две точки пересечения парабол лежат на одной биссектрисе и две – на другой. Остается заметить, что эти биссектрисы перпендикулярны.

в) Как и в пункте б), прямая, проходящая через точки пересечения парабол, – биссектриса угла между AB и CD . Нужное утверждение следует из того, что оси парабол перпендикулярны AB и CD соответственно.

г) Диагонали шестиугольника – биссектрисы (внутренние или внешние) треугольника, образованного прямыми AB, CD, EF . При надлежащем выборе (три внутренние биссектрисы или одна внутренняя и две внешние) диагонали будут пересекаться в одной точке.

Ф.Нилов, П.Кожевников

M2053. Пусть $n > 3$. Докажите, что существуют целые отличные от нуля числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ такие, что

$$x_1 x_2 \dots x_n = (x_2 + x_3 + \dots + x_n)(x_1 + x_3 + \dots + x_n) \times \dots \times (x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}).$$

При четном n достаточно взять любой набор ненулевых целых чисел $A_n = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, сумма которых равна 0. Эта конструкция, разумеется, не единственна: например, можно положить $A_4 = (-8, -7, 1, 5)$.

Пусть n нечетно. Если существует набор $A_n = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, удовлетворяющий условию, то существует и набор A_{n+4} . В самом деле, сумма $k = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ не равна 0, и набор $A_{n+4} = (5x_1, 5x_2, \dots, 5x_n, 3k, -3k, 4k, -4k)$ с суммой $5k$ – искомый, поскольку набор $(5x_1, 5x_2, \dots, 5x_n)$ удовлетворяет условию и $3k \cdot (-3k) \cdot 4k \cdot (-4k) = (5k - 3k)(5k + 3k)(5k - 4k)(5k + 4k)$. Остается указать примеры наборов A_5 и A_7 :

$$A_5 = (-2, -2, 2, 3, 3) \text{ или } A_5 = (-6, -1, 1, 4, 4),$$

$$A_7 = (-8, -2, -2, 3, 4, 4, 7) \text{ или } A_7 = (-6, -6, -6, -1, 4, 5, 7).$$

Прийти к наборам A_5 (и сходным образом к наборам A_7) можно с помощью следующих рассуждений. Достаточно найти нужные наборы рациональных чисел (а затем домножить их на общий знаменатель). Пусть a, b, c – ненулевые рациональные числа, $s = a + b + c$, $\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{abc} = \frac{1}{k}$. Достаточно подобрать такое ненулевое рациональное x , что $\frac{1}{k} \cdot \frac{(s-x)(s+x)}{x \cdot (-x)} = 1$.

Преобразуем: $s^2 = (1-k)x^2$. Таким образом, достаточно подобрать такие a, b, c , что $1-k = r^2$ для ненулевого рационального r ; например, достаточно взять $k = -3$. Отсюда нетрудно прийти к наборам $(-2, 3, 3, -2, 2)$, $(2, 2, -3, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ и т.п.

Авторам неизвестно, справедливо ли утверждение задачи для $n = 3$.

В.Сендеров, С.Токарев

M2054. Пусть $P(x) = x^2 + x + 1$. Существуют ли натуральные числа $x_1, \dots, x_n, k_1, \dots, k_n$ такие, что $P(x_1) = x_2^{k_2}, P(x_2) = x_3^{k_3}, \dots, P(x_n) = x_1^{k_1}$?

Решите задачу для случаев:

а) $n = 2$;

б) n – произвольное нечетное число;

в) $n = 4$.

Ответ: нет во всех пунктах.

Латинскими буквами всюду ниже обозначены натуральные числа.

а) Пусть $x \geq y$,

$$x^2 + x + 1 = y^n, \quad (1)$$

$$y^2 + y + 1 = x^m. \quad (2)$$

Так как $y > 1$ и $y^3 - 1$ делится на $y^2 + y + 1$, то $x^3 \geq y^3 > y^3 - 1 \geq y^2 + y + 1 = x^m$. Следовательно, $3 > m$. Но, поскольку $y^2 < y^2 + y + 1 < (y + 1)^2$, имеем $m \neq 2$. Таким образом, $m = 1$. Подставляя x из второго равенства в первое, видим, что y делит 3. Получили $y = 3, x = 13$. Но $P(13) = 183$ не является степенью тройки.

Вот еще одно решение. Левая часть каждого из равенств (1) и (2) либо делится на 3, либо имеет вид $3k + 1$. Так как n и m нечетны, то такой же вид имеют и сами числа y и x . При этом если x делится на 3 (соответственно, имеет вид $3k + 1$), то $P(x)$, а значит и y , имеет вид $3k + 1$ (соответственно, делится на 3). Значит, одно из чисел x, y (например, x) делится на 3, другое – не делится. Но $y^2 + y + 1$ ни при каком целом y не делится на 9. Получаем $m = 1$, и, подставив x из второго равенства в первое, видим, что y делит 3. Противоречие.

Это решение можно с помощью малой теоремы Ферма и некоторых ее следствий обобщить на случай многочленов $x^{p-1} + \dots + x + 1$, где p – произвольное нечетное простое число.

б) Будем рассуждать как при втором решении пункта а). Без ограничения общности считая, что x_1 делится на 3, имеем: x_2 не делится на 3. С другой стороны, $x_3, x_5, \dots, x_n, x_2$ делятся на 3. Противоречие.

Это решение нетрудно обобщить на случай многочленов $x^{p-1} + \dots + x + 1$ для произвольного нечетного простого p .

в) **Лемма.** Пусть n – произвольное четное число. Тогда в системе равенств задачи больше половины из показателей степеней $k_1, \dots, k_n$ равны 1.

Доказательство. Рассуждая аналогично пункту а) и без потери общности считая, что числа $x_2, x_4, \dots, x_n$ делятся на 3, имеем: $k_1 = k_3 = \dots = k_{n-1} = 1$. Следовательно, систему можно переписать в виде

$$P(P(z_1)) = z_2^{r_1}, \dots, P(P(z_m)) = z_1^{r_m} \quad \left(\text{где } m = \frac{n}{2} \text{ и } z_1 = x_1, z_2 = x_3, \dots \right).$$

Пусть для определенности $z_2 = \max\{z_1, \dots, z_m\}$. Докажем, что $r_1 = 1$.

Предположим противное. Имеем $r_1 \neq 3$. Действитель-

но, $z_1 = 3k + 1, P(z_1) = 9k' + 3, P(P(z_1)) = 9k'' + 4$. Но число t^3 несравнимо с 4 по модулю 9 ни при каком целом t . Следовательно, $r_1 \neq 3$. Поскольку $y^2 < y^2 + y + 1 < (y + 1)^2$, четным r_1 быть не может. Значит, $r_1 \geq 5$.

Из уравнений системы следует, что $z_1, z_2, \dots > 1$. Отсюда $2z_1^2 > P(z_1)$; поскольку функция $P(t)$ на положительной полуоси возрастает, имеем $2(2z_1^2)^2 > P(2z_1^2) \geq P(P(z_1)) = z_2^{r_1} \geq z_2^5$. Получили $8z_1^4 \geq 8z_1^4 > z_2^5$, откуда $8 > z_2$. Однако z_2 (как и z_1) – нечетное число вида $3k + 1$. Следовательно, $z_2 = 7$. Но $z_1 \leq z_2$, откуда $z_1 = 7$. С другой стороны, из равенства $P(P(z_1)) = z_2^{r_1} = z_1^{r_1}$ следует, что z_1 делит 3. Полученное противоречие доказывает лемму.

В силу леммы, можно переписать систему равенств задачи при $n = 4$ в виде $P(P(P(P(x)))) = x^l$, или $x^{16} + \dots + 27 \times 21x + 183 = x^l$. Следовательно, x – делитель 183, больший 1 и не делящийся на 3 (поскольку заведомо $l > 1$). Отсюда $x = 61$. Значит, число $27 \times 21 \times 61 + 183$ должно делиться на 61^2 , или $27 \times 21 + 3 = 570$ – на 61. Противоречие.

Авторам неизвестно, справедливо ли утверждение задачи для произвольного четного n . Неизвестно также, справедливо ли в случае $n = 4$ его естественное обобщение на многочлены $x^{p-1} + \dots + 1$, где $p \geq 3$ – простое число.

Замечания.

1. При доказательстве леммы мы получили неравенство $P(P(z_1)) \neq z_2^3$. Легко показать, что оно справедливо при любых целых z_1 и z_2 ; можно также распространить его на случай произвольного простого $p > 3$.

2. Утверждение задачи нельзя распространить на случай $p = 2$: уже при $n = 2$ это показывает система равенств $2 + 1 = 3, 3 + 1 = 2^2$. «Дублированием» примера его легко распространить на случай любого четного n .

3. Может ли вообще уравнение $x^n + \dots + 1 = y^k$ иметь нетривиальные решения в натуральных числах? Ответ положителен: $3^4 + \dots + 1 = 11^2, 7^3 + \dots + 1 = 20^2$. Однако, согласно глубокой теореме Туэ, на любой неособой кривой степени ≥ 3 лежит лишь конечное число целых точек, откуда следует, что каждое из таких уравнений может иметь лишь конечное количество решений.

В.Сендеров, Б.Френкин

M2055. Клетки бесконечной вправо клетчатой полочки последовательно занумерованы числами $0, 1, 2, \dots$. В некоторых клетках лежат камни. Если на i -й клетке ($i > 0$) лежит ровно i камней, то разрешается снять с нее и разложить по одному на клетки с номерами $i - 1, i - 2, \dots, 0$. Леша распределил 2006! камней по клеткам, начиная с первой, так, чтобы можно было собрать их в нуле, сделав несколько операций. Найдите минимальный номер клетки, на которой лежит камень.

Ответ: 2010.

Заметим сразу, что в любой момент времени на клетке

с номером $i > 0$ лежит не более i камней; в противном случае их количество на этой клетке может только возрасти, и все камни на нулевой клетке собрать не удастся.

Для произвольного натурального k рассмотрим множество клеток с номерами $0, 1, \dots, k-1$. Выясним, как изменяется общее количество камней S_k в этих клетках при наших операциях. Пусть Леша сделал операцию с i -й клеткой. Если $i < k$, то камни перекладывались только в пределах нашего множества клеток, и S_k не изменилось. Если же $i \geq k$, то по одному камню появилось во всех наших клетках, т.е. S_k увеличилось на k . Значит, остаток от деления S_k на k остается неизменным; в конце же он равен остатку от деления 2006! на k .

Заметим, что 2006! делится на все числа от 1 до 2006 (очевидно), а также на $2007 = 3 \cdot 669$, $2008 = 2 \cdot 1004$, $2009 = 7 \cdot 287$ и $2010 = 2 \cdot 1005$. Докажем индукцией по $0 \leq i \leq 2009$, что i -я клетка вначале была пуста. База при $i = 0$ выполняется по условию. Пусть все клетки от 0-й до $(i-1)$ -й были пусты. Тогда число камней на i -й клетке было равно суммарному количеству камней на клетках $0, \dots, i$, т.е. делилось на $i+1$; кроме того, оно не превосходило i . Значит, оно было нулевым, что и требовалось.

С другой стороны, 2006! не делится на 2011 (так как 2011 – число простое), поэтому общее число камней на клетках от 0 до 2010 имеет ненулевой остаток от деления на 2011; в частности, это число не равно нулю, поэтому на 2010-й клетке изначально были камни.

Замечание. Решение позволяет выяснить, каков наименьший номер занятой клетки, если изначально число камней было равно n . Именно, это наименьшее натуральное число k такое, что n не делится на $k+1$. Более того, из решения легко увидеть, как следует разложить n камней на клетках с положительными номерами так, чтобы их можно было собрать в нуле. Будем раскладывать камни в клетки по порядку. На i -ю клетку положим такое (единственное!) количество камней $a_i \leq i$, чтобы число $a_1 + \dots + a_i$ имело тот же остаток от деления на $i+1$, что и n . Предоставляем читателю самостоятельно доказать, что при такой раскладке камни собрать в нуле удастся.

И. Богданов

Ф2063. Фигурку из металла взвешивают на очень точных весах, используя золотые гирьки, – измеренная масса составила 47,98 г. Когда воздух под колпачком весов откачали до 0,1 атмосферного давления, получилось практически точно 49 г. Определите по этим данным, из какого металла сделана фигурка.

Плотность воздуха при нормальных условиях равна

$$\rho = \frac{pM}{RT} = \frac{1 \cdot 10^5 \cdot 29 \cdot 10^{-3}}{8,3 \cdot 293} \text{ кг/м}^3 \approx 1,2 \text{ кг/м}^3.$$

Отношение измеренных масс гирек составляет

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{\rho_0 - 0,1\rho}{\rho_0 - \rho} = \frac{1 - 0,1 \frac{\rho}{\rho_0}}{1 - \frac{\rho}{\rho_0}} = \frac{49}{47,98}.$$

Тогда для искомой плотности металла получим

$$\rho_0 = \frac{\rho}{0,023} \approx 53 \text{ кг/м}^3.$$

Металл такой плотности найти не просто... Либо фигурка пустотелая, либо в условии задачи ошибка. Разность измеренных масс для сплошной металлической фигурки должна быть совсем малой, больше 1 г разницы для 50-граммовой фигурки – это слишком много. Вот если бы данные в задаче были 47,98 г и 48 г, тогда мы получили бы

$$1 - 0,1 \frac{\rho}{\rho_0} = 1,0004 \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0} \right), \text{ или } \rho_0 \approx 2600 \text{ кг/м}^3.$$

Такая плотность соответствует алюминию – это решение выглядит куда лучше. Должно быть, автор задачи и в самом деле ошибся...

Кстати, вес воздуха, вытесненного гирьками, можно не учитывать – в решение входит отношение m_2/m_1 .

Н. Простов

Ф2064. Длинная тонкая прозрачная трубка заполнена глицерином, посередине трубки находится маленький воздушный пузырек. Когда трубка вертикальна, пузырек всплывает практически с постоянной скоростью 1 см/с. Сделаем трубку горизонтальной, подождем достаточно долго – пока все успокоится, а пузырек перестанет двигаться. Теперь разгоним трубку вдоль ее оси до скорости 10 см/с и продолжим двигать ее с этой скоростью. Найдите смещение пузырька относительно его начального положения. Считать силу сопротивления пропорциональной скорости пузырька относительно жидкости.

Будем считать, что диаметр пузырька во много раз меньше диаметра трубки и что при движении пузырька жидкость в трубке практически не перемешивается. Когда трубка расположена вертикально, в ней возникает распределение давлений – чем ниже, тем больше давление. При этом на пузырек действуют силы со стороны окружающей воды – распределение давлений такое, что будь на месте пузырька такая же капля воды, сила тяжести была бы уравновешена силами со стороны окружающей воды. Так мы можем найти сумму этих сил – она равна mg , где m – масса воды в объеме нашего пузырька (просто сила Архимеда, ничего неожиданного). При движении пузырька со скоростью v_1 она уравновешена силой сопротивления: $mg = kv_1$. Если мы двигаем горизонтальную трубку вдоль ее оси с ускорением a , распределение давления получится таким, что капля воды (вместе с окружающей водой) имеет такое же ускорение. Тогда сила со стороны окружающей воды равна ma и в каждый момент почти полностью (считаем – полностью, масса воздушного пузырька совсем мала) уравновешена силой сопротивления: $kv = kv_1 v/v_1 = mg v/v_1$. В итоге получим соотношение $a = gv/v_1$. За малый интервал времени τ получаем

$$a\tau = g \frac{v\tau}{v_1}, \text{ или } \Delta v = \frac{g}{v_1} \Delta x.$$

Суммируя изменения скорости, получим слева v_2 ,

справа суммирование дает полное смещение пузырька относительно трубки. Окончательно найдем

$$x = \frac{v_1 v_2}{g} = \frac{0,01 \cdot 0,1}{10} \text{ м} = 0,1 \text{ мм}.$$

Совсем немного ...

А.Повторов

Ф2065. На гладком горизонтальном столе покоится клин массой M , его наклонная поверхность составляет угол α с горизонтом. Маленькая шайба массой m движется по столу со скоростью v_0 и «въезжает» на наклонную поверхность клина. Считая, что наклонная поверхность имеет плавное короткое сопряжение с горизонталью, найдите время подъема шайбы до верхнего своего положения. Найдите также смещение клина к этому моменту. Трения в системе нет.

Попробуем решить эту задачу в «лоб», т.е. укажем все силы, действующие на шайбу и на клин в процессе их движения (до наивысшей точки), и учтем связи между ускорениями шайбы относительно плоскости и относительно клина. Будем считать, что скорость шайбы относительно клина линейно убывает со временем от v_0 до нуля, а скорость клина линейно возрастает от нуля до скорости V_c центра масс системы «шайба–клин», которую найдем из закона сохранения импульса (по горизонтали):

$$V_c = \frac{v_0 m}{m + M} = \frac{v_0}{1 + n}.$$

Как нетрудно подсчитать, ускорение шайбы относительно клина a_1 направлено вниз под углом α к горизонту и равно

$$a_1 = \frac{g(n+1)\sin\alpha}{n + \sin^2\alpha},$$

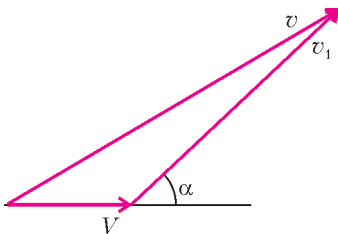
а ускорение клина относительно плоскости направлено горизонтально и равно

$$A = \frac{g \sin\alpha \cos\alpha}{n + \sin^2\alpha}.$$

Разделив изменения скоростей на соответствующие ускорения, получим сильно различающиеся между собой искомые времена:

$$t_1 = \frac{-v_0}{-a_1}, \quad t_2 = \frac{V_c}{A}.$$

Скорее всего, неверны оба результата, и въезд шайбы на клин следует рассматривать как удар, в результате которого клин получает импульс, направленный горизонтально, а шайба и плоскость (вместе с Землей в целом) получают компенсирующие друг друга вертикальные составляющие начального импульса шайбы. Пусть сразу после въезда шайбы на клин V и v – скорости клина и шайбы, а v_1 – скорость шайбы относительно клина (см рисунок). Так как размеры плавного сопряжения клина малы, то временем его прохождения можно пренебречь. Считая малой и высоту



поднятия шайбы после въезда, запишем законы сохранения энергии и импульса (по горизонтали):

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{MV^2}{2} + \frac{mv^2}{2}, \quad mv_0 = MV + m(V + v_1 \cos\alpha),$$

или

$$v_0^2 = nV^2 + v^2, \quad v_0 = (n+1)V + v_1 \cos\alpha.$$

Как видно из рисунка,

$$v^2 = V^2 + 2Vv_1 \cos\alpha + v_1^2.$$

Решая систему последних трех уравнений, находим

$$v_1 = v_0 \sqrt{\frac{n}{n + \sin^2\alpha}}, \quad V = \frac{v_0}{n+1} \left(1 - \sqrt{\frac{n}{n + \sin^2\alpha}} \cos\alpha \right).$$

Учтем, что относительная скорость шайбы уменьшается от v_1 до нуля с ускорением a_1 , а скорость клина увеличивается от V до V_c с ускорением A . Если временем въезда пренебречь, то для времени движения до наивысшей точки получаем

$$T_1 = \frac{-v_1}{-a_1}, \quad T_2 = \frac{V_c - V}{A}.$$

Преобразования дают, разумеется, одинаковые времена:

$$T_1 = T_2 = T = \frac{v_0}{g(n+1)\sin\alpha} \sqrt{n(n + \sin^2\alpha)}.$$

Центр масс системы движется с постоянной скоростью V_c , его смещение за время T получится $L = V_c T$. Но шайба относительно клина смещается по горизонтали вперед, значит, клин отстает от центра масс и это отставание нужно учесть при расчете смещения клина. Мы нашли скорость шайбы вдоль клина после въезда v_1 , ее проекция на горизонталь меняется равномерно от $v_1 \cos\alpha$ до нуля, смещение шайбы относительно клина по горизонтали составляет $s = 0,5T v_1 \cos\alpha$. Тогда смещение клина «назад» относительно центра масс равно $x = ms/(M+m)$, и полное смещение клина по горизонтали за время T будет $L - x$. Можно подставить теперь в формулу записанные выше выражения для L и x , но можно этого и не делать – все равно красивой формулы не получится...

Г.Панькевич

Ф2066. Тележки с массами $m = 1$ кг и $M = 2$ кг связаны легким упругим шнуром длиной $L = 0,3$ м. Вначале тележки неподвижны, а шнур почти натянут. Легкой тележке ударом сообщают скорость $v_0 = 2$ м/с в направлении соединяющего их шнура (рис.1). Через какое время произойдет удар тележек друг о друга? Жесткость шнура $k = 20$ Н/м.



Рис. 1

Центр масс тележек все время движется со скоростью

$$u_{ц} = v_0 \frac{m}{M+m}.$$

Пересядем в эту систему отсчета. Точка шнура, которая делит длину шнура в отношении $\frac{l_1}{l_2} = \frac{M}{m}$, как раз и есть

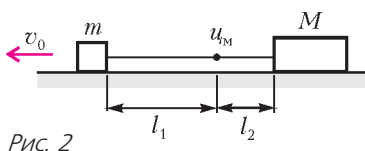


Рис. 2

центр масс, $u_{\text{ц}}$ – это ее скорость (рис.2). Жесткость куска шнура длиной l_1 равна

$$k_1 = k \frac{l_1 + l_2}{l_1} = k \left(1 + \frac{m}{M} \right),$$

и шнур останется натянутым в течение интервала времени

$$\tau_1 = \frac{1}{2} T_1 = \frac{\pi}{\omega_1} = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{k_1}{m}}} = \pi \sqrt{\frac{mM}{k(M+m)}}.$$

После этого шнур уже не влияет на движение системы (до удара тел – уж точно!), тела едут навстречу друг друга со скоростями u_1 и u_2 , которые можно найти из уравнений (мы все еще находимся в системе, связанной с центром масс), описывающих законы сохранения импульса и энергии:

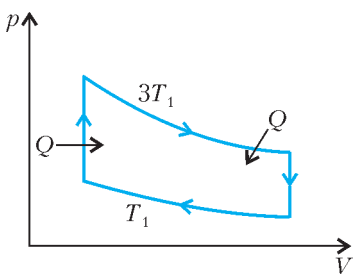
$$\begin{cases} mu_1 = Mu_2, \\ \frac{mu_1^2}{2} + \frac{Mu_2^2}{2} = \frac{m(v_0 - u_{\text{ц}})^2}{2} + \frac{Mu_{\text{ц}}^2}{2}. \end{cases}$$

Можно, конечно, решать эту систему, но можно и вспомнить, что *относительная* скорость тел после абсолютно упругого лобового удара (а это – наш случай) остается неизменной, т.е. равной v_0 , а длина шнура в тот момент, когда он станет не натянут, равна l . Тогда полное время до удара будет равно

$$t = \tau + \frac{l}{v_0} = \pi \sqrt{\frac{mM}{k(M+m)}} + \frac{l}{v_0} \approx 0,7 \text{ с}.$$

Р.Александров

Ф2067. Цикл тепловой машины, работающей с идеальным газом, состоит из двух изохорических участков и двух изотермических участков с отношением температур $T_1 : T_2 = 3$. Известно, что на участке



изохорического нагревания газ получает столько же тепла, сколько на участке изотермического расширения. Найдите КПД этого цикла.

Это – совсем простая задача. Работы на изотермах (по абсолютной величине) относятся как

3:1 (для каждого малого участка ΔV давление на «верхней» изотерме в 3 раза больше (см. рисунок).

Тогда полная работа в цикле равна $A_{\text{ц}} = Q - \frac{1}{3}Q = \frac{2}{3}Q$. Значит, термодинамический КПД равен

$$\eta = \frac{A_{\text{ц}}}{Q_{\text{ц}}} = \frac{2Q/3}{2Q} = \frac{1}{3}.$$

С.Простов

Ф2068. Простой омметр состоит из последовательно соединенных миллиамперметра с током полного отклонения 1 мА, батарейки напряжением 1,5 В и переменного резистора

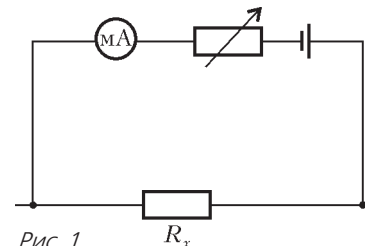


Рис. 1

(рис.1). Регулируя сопротивление этого резистора, мы производим «установку нуля» омметра – при замкнутых выводах омметра стрелку прибора устанавливаем в крайнее правое положение («нуль омметра»). При разомкнутых выводах ток нулевой – это соответствует «бесконечному» измеряемому сопротивлению. Можно ли при помощи этого прибора измерить сопротивления резисторов R_x порядка 1 Ом; 1 кОм; 1 МОм? Какое сопротивление покажет этот омметр, если к его выводам

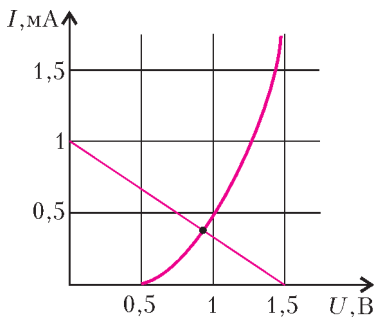


Рис. 2

подключить полупроводниковый диод, вольт-амперная характеристика которого приведена на рисунке 2?

Рассмотрим связь между током и напряжением, приложенным к измеряемому резистору. Впрочем, не обязательно к резистору – к любому «устройству», подключенному к нашему омметру. Видно, что эта зависимость линейная, при $U = 0$ ток равен 1 мА (мы его установили), при $U = 1,5$ В ток обратится в ноль. Полученная прямая показана на том же рисунке, на котором приведена вольт-амперная характеристика диода. Ясно, что точка пересечения двух кривых дает нам возможность найти ответ: такой же ток через прибор, какой мы получили из графика – примерно 0,4 мА при напряжении 0,9 В, – будет течь при подключении резистора сопротивлением

$$R = \frac{0,9 \text{ В}}{0,4 \cdot 10^{-3} \text{ А}} = 2,25 \text{ кОм}.$$

А.Старов

Ф2069. В схеме на рисунке 1 «горизонтальная» батарейка имеет напряжение 1 В, три из четырех конденсаторов имеют одинаковые емкости, а последний – вдвое большую. Каким может быть напряжение второй, «вертикальной» батарейки, чтобы хотя бы один конденсатор в этой схеме остался незаряженным? До подключения батареек все конденсаторы заряжены не были.

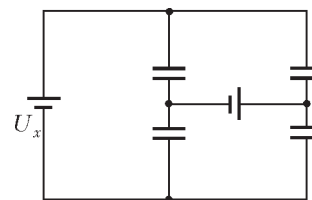


Рис. 1

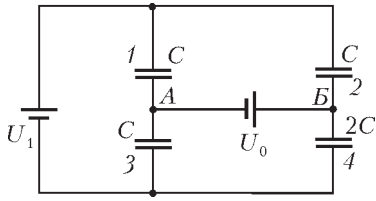


Рис. 2

Задача несложная, важно только не упустить каких-либо возможных вариантов. Можно рассматривать единственную схему (рис.2), но придется учитывать два возможных значения известного напряжения: $U_0 = 1$ В и $U_0 = -1$ В. При этом мы учтем «перестановку» конденсаторов 3 и 4; то же для 1 и 4 и 2 и 4 получится автоматически, с учетом полярности батарейки напряжением U_1 . Итак, при незаряженном конденсаторе емкостью $2C$ потенциал точки B равен нулю (примем далее за ноль потенциал «нижней» точки), $\varphi_A = -U_0$, суммарный заряд «нижних» обкладок конденсаторов 3 и 4, а также «верхних» обкладок конденсаторов 1 и 2 равен нулю:

$$CU_1 - (-U_0) + CU_1 + C(+U_0) + 0 = 0.$$

Отсюда находим $U_1 = U_0 = 1$ В. При $U_0 = -1$ В получим $U_1 = -1$ В (полярность обратная).

Запишем условие нулевого заряда конденсатора 3:

$$\varphi_A = 0, \quad \varphi_B = U_0, \quad CU_1 + C(U_1 - U_0) + 2C(-U_0) = 0, \\ U_1 = \frac{3}{2}U_0, \quad U_1 = \pm 1,5 \text{ В}.$$

Теперь запишем условие нулевого заряда конденсатора 1:

$$\varphi_A = U_1, \quad \varphi_B = U_1 + U_0, \\ CU_1 - (U_1 + U_0) + C(-U_1) + 2C(-U_1 - U_0) = 0, \\ -U_0 - U_1 - 2U_1 - 2U_0 = 0, \\ U_1 = -U_0 = -1 \text{ В (полярность обратная)}.$$

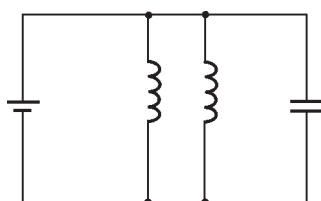
И, наконец, запишем условие нулевого заряда конденсатора 2:

$$\varphi_B = U_1, \quad \varphi_A = U_1 - U_0, \\ C(U_1 - U_1 + U_0) + C(-U_1 + U_0) + 2C(-U_1) = 0, \\ U_0 - U_1 + U_0 - 2U_1 = 0, \quad 2U_0 = 3U_1, \quad U_1 = \frac{2}{3}U_0 = \frac{2}{3} \text{ В}.$$

Итак, вот возможные напряжения «вертикальной» батарейки: $\frac{2}{3}$ В; 1 В; 1,5 В.

З.Рафаилов

Ф2070. На одинаковые тороидальные сердечники, сделанные из материала с большой магнитной проницаемостью, намотаны тонким проводом катушки, одна из них содержит вдвое больше витков, чем другая. Катушка с меньшим числом витков имеет индуктивность 0,5 Гн. Катушки соединены парал-



лельно, к выводам катушек присоединены конденсатор емкостью 10 мкФ и батарейка напряжением 6 В с внутренним сопротивлением 10 Ом (см. рисунок). Когда

токи в цепи практически перестали изменяться, батарейку отключают. Найдите максимальное значение заряда конденсатора. Какое количество теплоты выделится в каждой катушке после отключения батарейки? Провод, которым намотаны катушки, имеет очень маленькое сопротивление.

Вначале о катушках. Пусть индуктивность катушки с меньшим числом витков равна L , тогда индуктивность «двойной» катушки в 4 раза больше и составляет $4L$. Обозначим малое сопротивление куска провода, которым намотана меньшая катушка, через r , сопротивление «двойной» катушки вдвое больше и равно $2r$. После того как токи в цепи практически перестают изменяться, ЭДС самоиндукции катушек становятся нулевыми и полный ток в цепи батарейки равен $I_{\text{общ}} = 6 \text{ В} / 10 \text{ Ом} = 0,6 \text{ А}$. Между катушками этот ток распределяется в отношении, определяемом сопротивлениями обмоток, т.е. через малую катушку течет вдвое больший ток, чем через «двойную». Таким образом, ток первой катушки равен $2I = 0,4 \text{ А}$, а ток «двойной» катушки равен $I = 0,2 \text{ А}$. Конденсатор при этом не заряжен (его напряжение было бы нулевым при идеальных катушках, а в нашем случае оно равно падению напряжения на сопротивлениях проводов, которыми намотаны катушки). Максимальный заряд конденсатора получится в тот момент, когда заряжающий его ток первый раз станет нулевым (для идеальных катушек такие моменты наступали бы дважды в течение каждого периода колебаний – в нашем случае колебания медленно затухают и самый большой заряд получается именно в первый такой момент). Пренебрежем затуханием за время одного периода колебаний (сопротивление проводов по условию мало), ЭДС индукции катушек все время одинаковы, изменения токов обратно пропорциональны индуктивностям катушек – ток через катушку индуктивностью L меняется в 4 раза быстрее, он сменит знак до того, как второй ток упадет до нуля. Суммарный ток станет нулевым при значении тока каждой катушки J , определяемом уравнением $4(0,2 - J) = 0,4 + J$, откуда $J = 0,08 \text{ А}$. Максимальный заряд конденсатора определим из закона сохранения энергии (выделением тепла за небольшой интервал времени пренебрегаем):

$$L \frac{(2I)^2}{2} + 4L \frac{I^2}{2} = L \frac{J^2}{2} + 4L \frac{J^2}{2} + \frac{Q_m^2}{2C},$$

откуда

$$Q_m = I\sqrt{7,2LC} = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ Кл}.$$

Общее количество теплоты, выделившееся в системе после отключения батарейки, найти совсем просто – это суммарная энергия катушек сразу после отключения: $W_{\text{общ}} = L(2I)^2/2 + 4LI^2/2 = 0,08 \text{ Дж}$. Намного сложнее посчитать, как это тепло распределится между катушками. В схеме одновременно происходят два разных процесса – понемногу затухает «кольцевой» ток в контуре, образованном двумя катушками, и медленно затухают колебания в контуре из конденсатора и двух катушек, включенных параллельно. В «кольцевом» процессе расходуется энергия $W_1 = 5LI^2/2 =$

$= 0,008$ Дж, в «колебательном» – остальные $W_2 = 0,072$ Дж. В первом из процессов токи катушек одинаковы, отношение количеств теплоты определяется отношением сопротивлений катушек. Тогда в одинарной катушке выделяется $W_1/3 \approx 3 \cdot 10^{-3}$ Дж, в «двойной» – примерно $6 \cdot 10^{-3}$ Дж. В колебательном процессе токи катушек определяются отношением индуктивностей, т.е. через одинарную катушку течет в каждый момент вчетверо больший ток. С учетом отношения сопротивлений проводов получится отношение 8:1 в пользу одинарной катушки, в ней выделится $8W_2/9 = 0,064$ Дж, в «двойной» катушке выделится $W_2/9 = 0,008$ Дж. Будем считать, что в одинарной катушке всего выделилось чуть меньше 0,07 Дж, а в «двойной» в сумме выделилось примерно 0,015 Дж. Конечно, это довольно грубая оценка, нельзя просто суммировать количества теплоты, выделяющиеся в каждом из процессов, но это все же лучше, чем ничего...

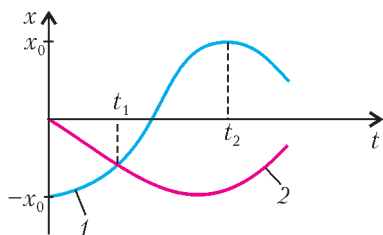
А.Зильберман

Ф2071. На двух одинаковых легких пружинах жесткостью k , прикрепленных к потолку, висят одинаковые грузы массой M . На один из грузов аккуратно ставят грузик массой m , а после того, как колебания прекратятся, быстро переносят грузик на другой груз. Через какое время грузы поравняются? А через какое время скорости грузов впервые будут направлены в одну сторону?

Каждый из маятников после переноса грузика будет совершать гармонические колебания. Частоты колебаний разные:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{M}} \text{ и } \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{M+m}},$$

амплитуды – одинаковые и равные $x_0 = \frac{mg}{k}$. Отсчитывая координаты от положения равновесия ненагруженного



ного маятника, получим графики изменения координат со временем (см. рисунок). Поравняются грузы в момент t_1 , для которого $-x_0 \cos \omega_1 t_1 = -x_0 \sin \omega_2 t_1$. При этом

$$\cos \omega_1 t_1 = \sin \omega_2 t_1,$$

или

$$\omega_1 t_1 + \omega_2 t_1 = \frac{\pi}{2}, \quad t_1 = \frac{\pi}{2(\omega_1 + \omega_2)} = \frac{\pi}{2\left(\sqrt{\frac{k}{M}} + \sqrt{\frac{k}{M+m}}\right)}.$$

Скорости грузов впервые будут направлены в одну сторону, как только один из них изменит направление движения. Так как $\omega_1 > \omega_2$, первым это сделает груз, с которого сняли грузик массой m , через половину периода своих колебаний. Итак,

$$t_2 = \frac{1}{2} T_1 = \frac{\pi}{\omega_1} = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{k}{M}}} = \pi \sqrt{\frac{M}{k}}.$$

А.Грузов

Ф2072. Корпус светодиода отштампован из прозрачной пластмассы (рис.1). На одном его конце сформирована линза, излучающая область представляет кружок диаметром 2 мм. Оцените диаметр светлого пятна на экране, расположенном на оси излучения на расстоянии 20 см от диода. Отражениями света внутри пластмассового корпуса можно пренебречь.

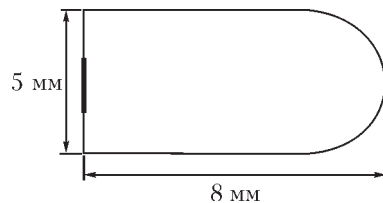


Рис. 1

При решении этой задачи нам придется сделать несколько допущений. Будем считать, что центр излучающей поверхности находится в главном фокусе линзы, т.е. $F = 8$ мм. Пусть коэффициент преломления пластмассы равен $n = 1,5$, тогда радиус кривизны сферической поверхности составляет $R = F(n - 1) = 4$ мм. Центр излучающей поверхности после преломления даст параллельный пучок света, его радиус $r_0 = 2,5$ мм. Далее проводим вычисления (рис.2). Отрезок GD имеет

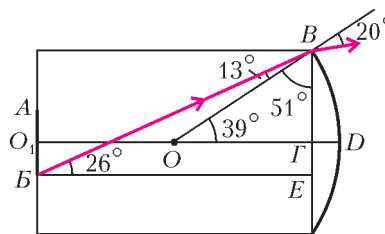


Рис. 2

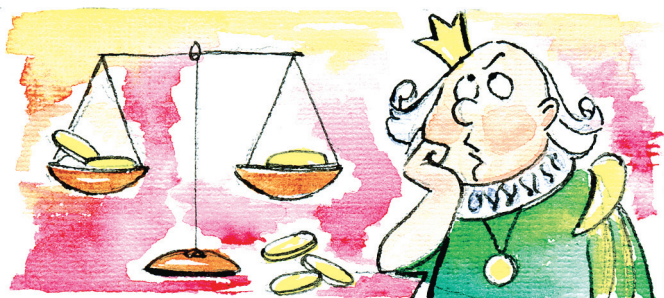
длину 0,9 мм, расходимость пучка после линзы определяется ходом «самого невыгодного» луча BB . Для угла падения его к нормали – радиусу OB – расчет дает 13° . Тогда угол преломления составит примерно 20° . При этом луч идет под углом 19° к главной оптической оси линзы и на расстоянии 20 см от нее отойдет от этой оси еще на $20 \text{ см} \cdot \tan 19^\circ \approx 7 \text{ см}$. Таков и будет радиус пятна на экране. Интересно, что измеренный в прямом эксперименте со светодиодом радиус пятна был чуть больше 5 см – для такого грубого расчета совпадение хорошее.

А.Светлов

Задачи

1. Даны 6 легких и 6 тяжелых монет. По внешнему виду они неразличимы. За одно взвешивание про любое множество монет можно узнать, сколько в нем тяжелых монет. Как за два взвешивания найти две монеты, одна из которых легкая, а другая тяжелая?

А.Шаповалов



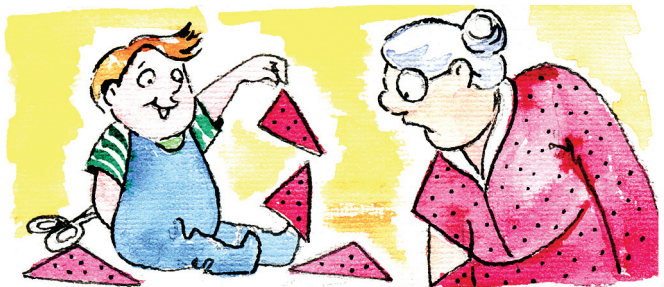
2. Вася задумал три натуральных числа. Для каждой пары чисел он нашел разность между их произведением и суммой. Оказалось, что одна из этих разностей отрицательна, а другая положительна. Каков знак третьей разности?

Б.Френкин



3. В прямоугольном треугольнике один катет вдвое длиннее другого. Разрежьте его на 5 одинаковых треугольников.

Р.Сарбаш



4. Для каких натуральных чисел x и y выполняется равенство

$$1 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^x = 3^y?$$

В.Сендеров



5. В стране, каждый житель которой либо рыцарь, либо лжец (рыцари, как известно, всегда говорят правду, а лжецы — врут), за круглым столом собралась компания из 19 аборигенов. Каждый из собравшихся заявил, что оба его соседа — лжецы. Разразился скандал, в результате которого часть компании покинула застолье.

После этого каждый из оставшихся с удовлетворением объявил, что теперь оба его соседа — рыцари.

— И в самом деле, среди вас теперь ни одного лжеца, — согласился с ними последний из покидавших компанию.

Тем временем «отщепенцы» организовали новое собрание и вновь за круглым столом. Каждый из сидящих за этим столом произнес, что среди его соседей ровно один рыцарь.

Сколько человек остались сидеть на своих местах после раскола компании?

В.Лецко

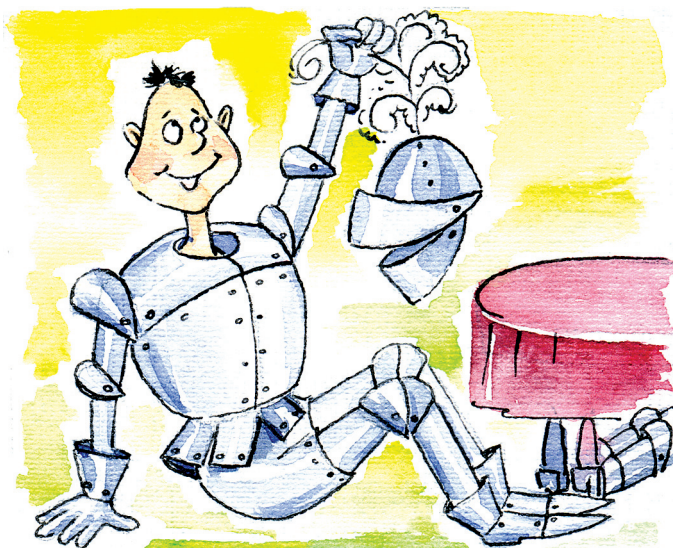


иллюстрация Д.И.Ришук

Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»

Мы завершаем очередной конкурс по решению математических задач для учащихся 6–8 классов. Решения задач высылайте в течение месяца после получения этого номера журнала по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» (с пометкой «Конкурс «Математика 6–8»»). Не забудьте указать имя, класс и домашний адрес.

Как и прежде, мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и математических кружков. Руководителей кружков просим указать электронный адрес или контактный телефон. По традиции, кружки-победители заочного конкурса приглашаются на финальный очный турнир.

16. При каких натуральных $n > 2$ можно записать в одну строку числа от 1 до n так, чтобы среди любых трех чисел, записанных подряд, одно из них было не меньше суммы двух других?

И.Акулич

17. Найдите все натуральные степени простых чисел, представимые в виде суммы двух кубов натуральных чисел.

В.Сендеров

18. Точку D , лежащую внутри остроугольного треугольника ABC , отразили симметрично относительно трех его сторон AB , BC , CA . Оказалось, что соответствующие три новые точки C_1, A_1, B_1 лежат на окружности, описанной вокруг треугольника ABC . Затем на чертеже оставили точки A_1, B_1, C_1 , а все остальное стерли. Восстановите треугольник ABC по этим трем точкам.

С.Дворянинов

19. Числовая последовательность $f_0, f_1, f_2, \dots$ строится следующим образом:

$$f_0 = 0, \quad f_{n+1} = \frac{3f_n + \sqrt{5f_n^2 + 4}}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Докажите, что все числа этой последовательности — целые.

В.Лецко

20. Натуральные числа x и y таковы, что $xy + 1$ является квадратом целого числа. Докажите, что найдется натуральное число z такое, что числа $yz + 1$, $zx + 1$, а также число $xy + yz + zx + 1$ являются квадратами целых чисел.

В.Произволов

Призрак Леонардо

И. АКУЛИЧ

Пусть тот, кто не математик, не читает меня.

Леонардо да Винчи. Научная проза

ПОЛТЫСЯЧЕЛЕТИЯ ОТДЕЛЯЕТ НАС ОТ ВЕЛИКОГО ЛЕОНАРДО да Винчи, но человечество и по сей день неустанно ищет ответ на вопрос: кто же он был такой? Художник? Изобретатель? Философ? Гений, намного опередивший свое время, или вообще посланник инопланетного разума?

Свидетельствами неувядающего интереса к этому титану эпохи Возрождения являются наделавшая много шума книга (а затем и фильм) «Код да Винчи», а также увлекательная компьютерная игра¹. Она прямо-

таки насыщена задачами, головоломками и прочими затруднениями, что делает ее чрезвычайно трудной, но и весьма интересной.

Одна из задач этой игры и явилась отправной точкой истории, которую мы сейчас изложим. Итак, дан клетчатый квадрат размером 5×5 клеток, каждая клетка которого может быть либо белой, либо черной (первоначально все клетки белые, хотя это и несущественно). Разрешается выбрать любую клетку и одновременно перекрасить в противоположный цвет ее саму и все клетки, имеющие с ней общую сторону (мы их будем называть соседями). Требуется за несколько таких операций перекрасить все клетки квадрата в противоположный цвет.

Трудно сказать, приложил ли руку к этой задаче сам Леонардо да Винчи, но вполне возможно, что да. Во

¹ См., например, www.1980-games.com/us/reflexion-games/reflexion-others/026.php или www.1980-games.com/us/reflexion-games/reflexion-others/debout.php

всяком случае, похоже на то. Уж очень... но об этом позже.

Безусловно, многие пользователи компьютерной игры решали головоломку «методом тыка», щелкая мышью по различным клеткам по велению души. Но мы постараемся подойти к делу научно.

Для начала назовем перекрашивание какой-либо клетки (и одновременно всех ее соседей по стороне) *ходом в эту клетку*. Пусть мы сделали какое-то количество ходов в какие-то клетки и добились своего, перекрашив все клетки квадрата в противоположный цвет. Рассмотрим любую клетку. При каждом ходе в нее саму или в любую соседнюю с ней клетку она меняет цвет. Следовательно, если в итоге клетка получила противоположный цвет, суммарное число ходов в эту клетку и все соседние с ней клетки должно быть нечетным. При этом *очередность* ходов, очевидно, не имеет никакого значения — от перестановки слагаемых сумма (а тем более четность) не меняется.

Поразмыслив, можно сделать еще один, не менее важный вывод: если в какую-либо клетку было сделано не меньше двух ходов, то, уменьшив количество ходов в эту клетку на 2, мы приходим к такому же результату. Закон четности проявляется и здесь. Но если так, то, уменьшая число ходов в каждую клетку на 2 до тех пор, пока это возможно, мы доведем количество ходов в каждую клетку до *одного* или вообще *до ни одного*. Другими словами, если возможно с помощью некоторого набора ходов в некоторые клетки достичь желаемого результата, то того же можно добиться, сделав в каждую клетку *не более одного* хода. Такой вывод позволяет нам разделить клетки на две категории: в которые был сделан ход (единственный!) и в которые не было сделано хода. Посему давайте отметим клетки, в которые надо сделать ход, и подумаем, каким условиям должна удовлетворять полученная конфигурация.

Заметим, что с каждой *отмеченной* клеткой обязано соседствовать *четное* число отмеченных клеток (т.е. или ни одной, или две, или четыре), а с каждой *неотмеченной* клеткой — *нечетное* число отмеченных клеток (т.е. или одна, или три). Несомненно, большинство читателей согласится с этим без колебаний, а для тех, кто сомневается, поясним подробнее.

Рассмотрим любую *неотмеченную* клетку *А*. С ней соседствует нечетное число отмеченных клеток. Так как при ходе в любую такую соседнюю клетку клетка *А* поменяет цвет, то после всех ходов она поменяет цвет

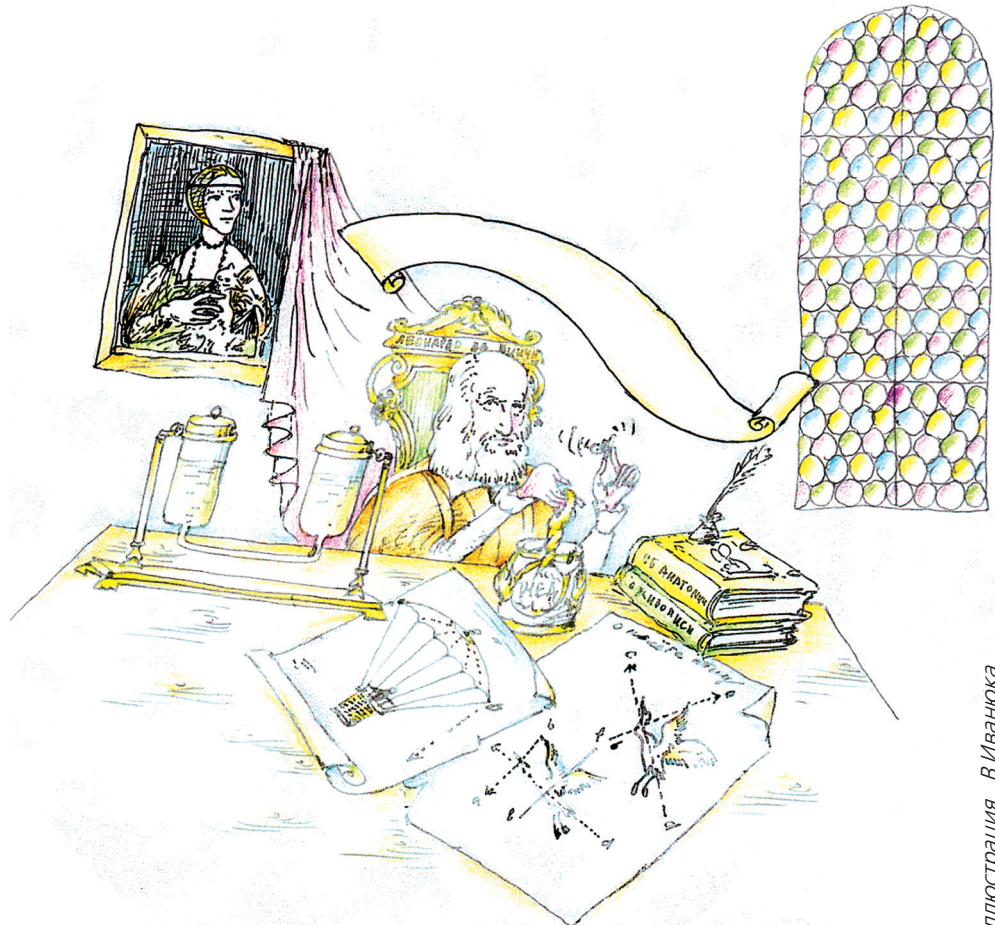


Иллюстрация В.Иванюка

нечетное число раз, и в итоге ее цвет станет противоположным исходному.

Теперь рассмотрим любую *отмеченную* клетку *В*. С ней соседствует четное число отмеченных клеток. Так как при ходе в любую такую соседнюю клетку клетка *В* поменяет цвет, то после всех ходов в соседние отмеченные клетки она поменяет цвет *четное число раз*. Плюс к тому же она один раз поменяет цвет при ходе *в саму клетку В*. Таким образом, в итоге ее цвет станет противоположным исходному.

Что ж, нам удалось преобразовать «динамическую» задачу (где клетки то и дело меняют цвет) в «статический» вариант, где нужно всего лишь отметить некоторые клетки доски определенным образом: чтобы с каждой отмеченной клеткой соседствовало четное число отмеченных клеток, а с каждой неотмеченной — нечетное число отмеченных клеток.

Приступим. Для квадрата 5×5 решение имеется (рис.1, отмеченные клетки окрашены в красный цвет). С помощью поворотов и отражений можно получить еще три решения, но самое интересное, что других решений нет! Уже это позволяет предположить, что великий Леонардо мог быть причастен к такой задаче — ведь интуитивно кажется, что решение должно быть «более симметричным», ну хотя бы относительно вертикальной и горизонтальной осей.

Разумеется, мы не станем ограничиваться квадратом 5×5 , а «потрогаем» квадраты $n \times n$ и для других n .

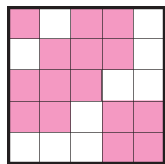


Рис. 1

При небольших n это можно сделать без особого труда. Проще всего получить ответ для $n = 1$ — это просто единственная отмеченная клетка. При $n = 2$ имеем четыре закрашенные клетки, и решение тоже единственное. Значение $n = 3$ дает красивую конфигурацию, опять-таки единственную (рис.2).

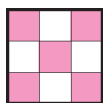


Рис. 2

Неожиданную россыпь различных конфигураций порождает $n = 4$. Существует пять принципиально различных способов отметить клетки (рис.3).

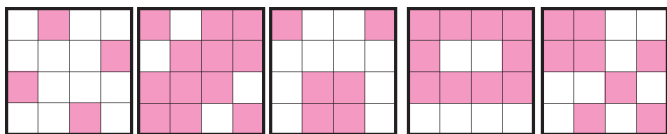


Рис. 3

Первые два из них с помощью поворотов и отражений «раздваиваются», а остальные три «расчетверяются». Итого, получается 16 способов. Весьма «выпадающий» результат на фоне остальных уже рассмотренных n .

Далее решения вплоть до $n = 8$ еще удалось подобрать вручную (отметим, кстати, что задача для квадрата 8×8 , т.е. собственно шахматной доски, была предложена в конкурсе «Математика 6–8» текущего учебного года (задача 5) — так что заодно мы решили и ее). При этом были обнаружены весьма симпатичные, обладающие высокой степенью симметрии конфигурации (рис.4).

Уже на этом этапе, несмотря на достигнутые успехи, появились смутные мрачные предчувствия. Во-первых, не удалось нащупать никаких «общих» способов отметить клетки требуемым способом. Неудачной оказались и попытки использовать найденные результаты для меньших n при поиске решений для больших n . Правда, конфигурация для $n = 8$, как легко заметить, получается как бы дополнением «каймы» к конфигу-

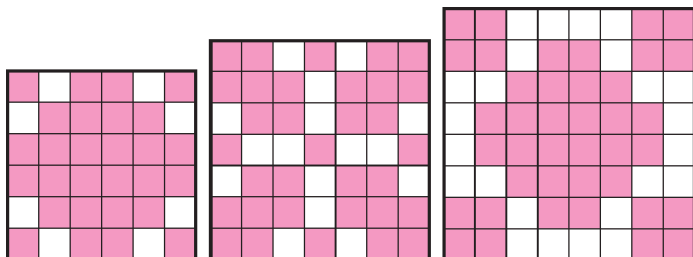


Рис. 4

рации для $n = 6$, но этот успех слишком скромен (и выявлен он был, честно сказать, задним числом).

Что делать? Пришлось поставить на службу достижения современной вычислительной техники и поручить компьютеру поискать, для каких еще n можно отметить клетки (а заодно подсчитать количество способов это сделать для каждого n). Бодро стартовав, компьютер добрался только до $n = 28$, поскольку с дальнейшим ростом n он начинает думать безбожно долго. Тем не менее, анализ результатов оказался настолько поразительным, что предположение о причастности да Винчи к рассматриваемой задаче только укрепилось. Посудите сами. Во-первых, компьютер подтвердил единственность решения для $n = 6, 7$ и 8 . Более того, выяснилось, что решение существует для всех рассмотренных n , причем для $n = 10, 12, 13, 15, 18, 20, 21, 22, 25, 26, 27$ и 28 оно *единственно*. Следовательно, оно обладает симметрией относительно всех осей симметрии самой доски (иначе появились бы дополнительные решения, полученные поворотами и отражениями). Далее, для $n = 17$ (как и для известного нам $n = 5$) имеется 4 решения, для $n = 14$ и 24 имеется 16 решений, для $n = 11$ число решений достигает 64, для $n = 9$ и 16 оно равно 256. А дальше — прямо-таки потрясающий взлет: при $n = 23$ число решений резко «прыгает» до 16384, а для $n = 19$ — до 65536. Отметим, что каждое из фигурирующих здесь чисел (1, 4, 16, 64, 256, 16384 и 65536) является целой неотрицательной степенью четверки. При этом на свет уже появляются и конфигурации, не обладающие ни осевой, ни поворотной симметрией (хотя отдельные их фрагменты могут быть симметричны). Например, вот как выглядит один из возможных результатов для доски 19×19 (рис.5).

Фантазмагория какая-то! Такого рода результаты просто ошарашивают, и начинает казаться, что где-то рядом неслышной тенью проходит восставший из глубины веков призрак Леонардо. Неужели он предчувствовал нечто подобное (отсутствие компьютера гению, как известно, не помеха)? Так или иначе, но то,

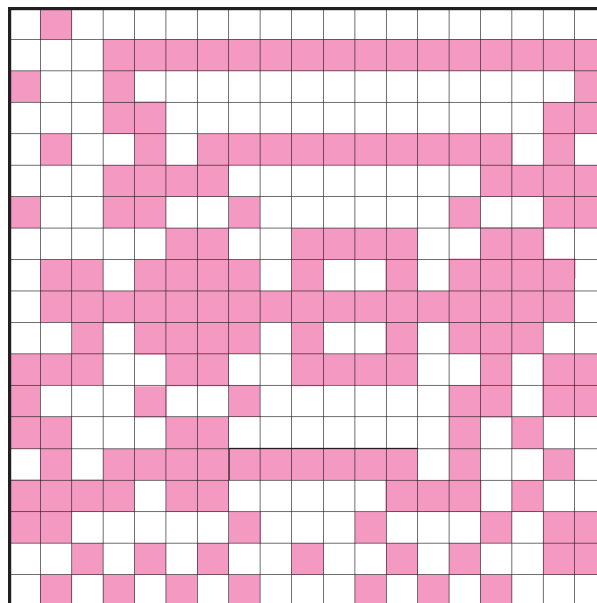


Рис. 5

что мы имеем, заставляет сформулировать два безответных пока вопроса.

Вопрос 1. Для любого ли n можно отметить требуемым образом клетки квадрата $n \times n$?

Вопрос 2. Если да, то всегда ли количество способов, которыми можно это сделать, является целой неотрицательной степенью числа 4?

Что ж, «провалившись» с квадратом, попробуем поступить излюбленным методом отечественного персонажа деда Щукаря: *вильнуть куда-то в сторону*. Рассмотрим не квадрат, а прямоугольник размером $m \times n$ клеток. Что будет для него при решении той же задачи?

После запуска компьютера на всю мощь были получены результаты для всех досок размером вплоть до 20×50 (далее опять начались проблемы со временем). Результаты оказались не менее удивительны. Во-первых, по-прежнему *для всех* проверенных прямоугольников решение существует, причем для большинства из них (не менее 70%) оно *единственно*. При этом были выявлены два значения $m = 12$ и 18 , для которых решение единственно при *любом* (из рассмотренных) значении n . Ну а если количество решений не единственно, то в некоторых случаях оно уже не является степенью четверки, но является степенью двойки. Так что вопросов только добавилось.

Вопрос 3. Для любых ли m и n можно отметить требуемым образом клетки прямоугольника $m \times n$?

Вопрос 4. Если да, то всегда ли количество способов, которыми можно это сделать, является целой неотрицательной степенью числа 2?

Вопрос 5. Существует ли такое m , что для любого n решение единственно?

После такого безответного удара задача перешла в стадию «разброд и шатания». Уязвленное самолюбие требовало ответных действий. Были предприняты многократные попытки исследовать не квадрат и не прямоугольник, а *любую* фигуру, которую можно вырезать из клетчатой бумаги (в том числе и с дырками), причем с единственной целью: найти *хотя бы одну* фигуру, клетки которой *нельзя* отметить требуемым образом.

Читатель наверняка уже догадался, что получилось в результате: таких фигур обнаружено не было! Любое самое заковыристое нагромождение клеток, которое только могло изобрести воспаленное воображение, позволяло после некоторых мучений добиться нужной «разметки». О количестве решений речь здесь, конечно, не шла — не до того как-то было. Остается последний вопрос.

Вопрос 6. Существует ли *хотя бы одна* фигура, которую можно вырезать из клетчатой бумаги (возможно, с дырками), клетки которой нельзя отметить требуемым образом?

Автор будет благодарен читателям, которые прояснят хотя бы часть поставленных вопросов. Но на всякий случай предупреждаем (ибо проверено на себе): не исключено, что в процессе раздумий у вас появится ощущение, что где-то совсем рядом находится призрак Леонардо да Винчи, который смотрит на вас и сочувственно улыбается. Точь-в-точь как Джоконда.

Мозаика из снежинок

(Начало см. на с. 14)

Теперь будем строить не одну, а много снежинок. Для начала замостим плоскость правильными треугольниками и шестиугольниками, как показано на рисунке 2. Затем в каждом из шестиугольников проведем три диагонали. В результате плоскость будет покрыта большими правильными треугольниками (закрасим их в красный цвет), маленькими правильными треугольниками (закрасим их в синий цвет) и равнобедренными

треугольниками с углом 120° (оставим их белыми). Начнем строить снежинки Кох из всех правильных треугольников. Как видно из рисунка 3, после первой итерации от каждого белого треугольника останутся незакрашенными 4 подобных ему втрое меньших треугольника. На второй итерации с этими ма-

ленькими треугольниками произойдет то же самое и т.д. Таким образом, красные и синие снежинки не будут

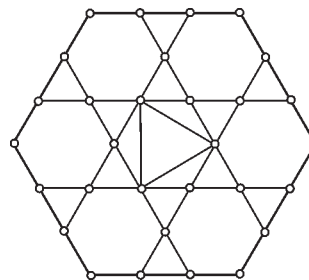


Рис. 2

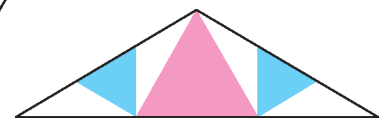


Рис. 3

пересекаться и в пределе заполнять почти всю плоскость. Последнее утверждение означает, что площадь белой части плоскости стремится к нулю, хотя существуют точки, которые никогда не будут окрашены.

Мозаика на рисунке 4 получается после трех итераций.

А.Заславский

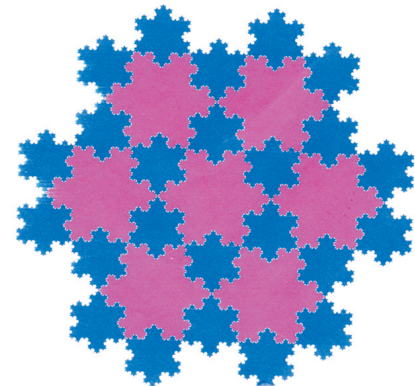


Рис. 4

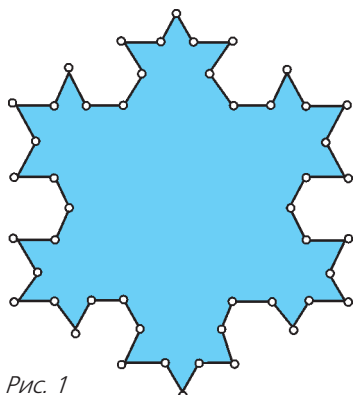


Рис. 1