журнал© Квант ЯНВАРЬ ФЕВРАЛЬ 2008 №1

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

Квант

Учредители — Российская академия наук, Фонд поддержки фундаментальной науки и образования (Фонд Осипьяна), ИФТТ РАН

Бюро Квантум

TENEX

В праздновании 100-летнего юбилея академика И.К.Кикоина финансовое участие принимает ОАО «ТЕХСНАБЭКСПОРТ»

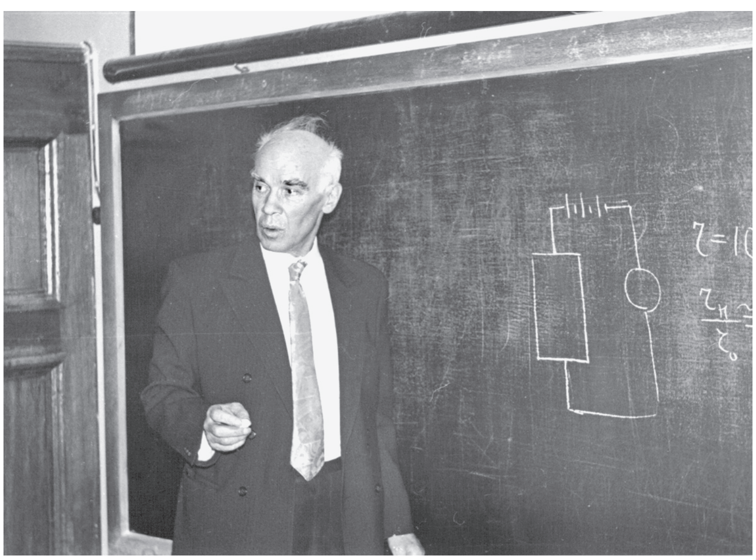
К 100-ЛЕТИЮ И.К.КИКОИНА

О Кикоине, единицах СИ и стандартах

Ю.БРУК

Идея о том, что все учебники физики для школ и вузов надо писать, используя Международную систему единиц, т.е. СИ, в середине 80-х годов прошлого века стала чуть ли не государственным стандартом. Разумеется, всякие учебные пособия можно писать, используя разные системы единиц. Важно лишь, чтобы студент, школьник или уже взрослый специалист умел переводить единицы СИ, скажем, в единицы системы СГС или наоборот.

Однако стремление облегчить жизнь изучающим физику и пользоваться одной-единственной системой единиц может довести и до абсурда. Так, для учебников физики, по которым учатся в технических вузах, единицы СИ действительно удобны, особенно если иметь в виду технические приложения (скажем, измерять ток в амперах, электрическое напряжение в вольтах, а длину в метрах). Но это, в известном смысле, дело привычки. Студенты же физических вузов (факультетов) должны ясно понимать, что в теоретической физике Международная система единиц неудобна хотя бы потому, что размерности векторов, входящих в уравнения Максвелла – основные уравнения электродинамики, – в этой системе разные. Можно, конечно, и уравнения Максвелла записывать в единицах СИ, но удобнее писать их в системе СГС.



Вот почему попытка «узаконить» одну систему единиц и изгнать из печатных изданий другие, например систему СГС, вызывала у преподающих и изучающих физику ощущение неправильности. С другой стороны, отказ от этого приводил к конфликтам с издателями, редакторами и не очень грамотными читателями.

Исаак Константинович Кикоин (ИКК) не был, конечно, «железным сторонником» единиц СИ, но он был еще и одним из руководителей комиссии по школьным учебникам в Министерстве просвещения СССР. А учебники полагалось, как уже говорилось, писать, используя именно эту систему единиц. Конечно, и журнал «Квант» в физических статьях перешел на единицы СИ.

Случилось так, что к 70-летию академика Я.Б.Зельдовича было решено напечатать его популярную статью о космологии. Называлась статья «Вселенная».

Яков Борисович был идеальным автором для популярного журнала. Он тщательнейшим образом сам отредактировал свою статью, она не требовала никакой дополнительной правки. Исаак Константинович же был идеальным главным редактором – все статьи по физике, готовящиеся для публикации в «Кванте», он читал самым внимательнейшим образом. Я выступал в формальной роли редактора статьи Зельдовича. Никаких проблем со статьей вроде бы не было, но показать ее ИКК полагалось.

Договорившись о визите, я приехал в назначенное время к ИКК домой и молча сидел на диване в его кабинете, пока он читал статью. ИКК читал медленно и был как будто доволен. Но неожиданно его густые брови поползли навстречу друг другу, и на лице обозначилось состояние, которое я определил как ожидаемую бурю. Кончив читать, ИКК отодвинул текст, помолчал и сказал мне:

– Не пойдет.

– Исаак Константинович, – возразил я, – что же Вам не нравится? Статья-то очень хорошая.

– Да, – сказал ИКК, – статья хорошая, но не пойдет. Яков Борисович написал ее, используя единицы СГС, а должны быть единицы СИ.

Надо сказать, что в этом конкретном случае проблемы не было. Достаточно было заменить граммы на килограммы, а сантиметры на метры. Третья единица, используемая в статье, была секунда, но она секунда и в СИ, и в СГС. Тем не менее, я осмелился сказать, что такая замена может не понравиться автору, потому что в космологии не принято использовать в научных текстах метры, более привычно использовать сантиметры или уж парсеки.

– Я сейчас позвоню Зельдовичу, – произнес ИКК и набрал его номер.

– Яша, – сказал ИКК в трубку, – ты написал замечательную статью, и мы ее к твоему дню рождения в «Кванте» напечатаем. Но надо единицы СГС (см, г, с) заменить на единицы СИ (м, кг, с).

Что ответил Зельдович, я не знаю, но на лице ИКК опять обозначилась буря. Положив телефонную трубку, он сидел некоторое время молча, а потом сказал мне:

– Яша говорит, что если он будет писать в единицах СИ, то над ним все смеяться будут.

– И что же будем делать? – спросил я.

– Ничего, – сказал ИКК, – оставим в статье единицы СГС. Но в скобках напишем еще и единицы СИ.

После этого он, наконец, улыбнулся, и я понял, что бури не будет.

Может быть, этот эпизод и не заслуживает столь длинного изложения. Но мне кажется важным еще раз подчеркнуть, что ИКК абсолютно все понимал. Он вовсе не был упрямым, но был дисциплинированным. То, что полагалось требовать от других, он старался выполнять и сам. И еще. Я.Б.Зельдович и К.К.Кикоин были людьми очень ответственными, они не могли отдать в печать статью, которая в каком-либо смысле выглядела бы «сырой».

Такая вот история.

«ВОТ КВАНТ, КОТОРЫЙ ПОСТРОИЛ ИСААК...»

А.САВИН

Вот Квант, который построил Исаак,
А вот ученица,
Которая изредка любит хвалиться,
Что все понимает на целой странице
В Кванте, который построил Исаак.

Вот автор статьи – знаменитый ученый,
Который писал ее так увлеченно
Для этой без меры серьезной девицы,
Которая изредка любит хвалиться,
Что все понимает на целой странице
В Кванте, который построил Исаак.

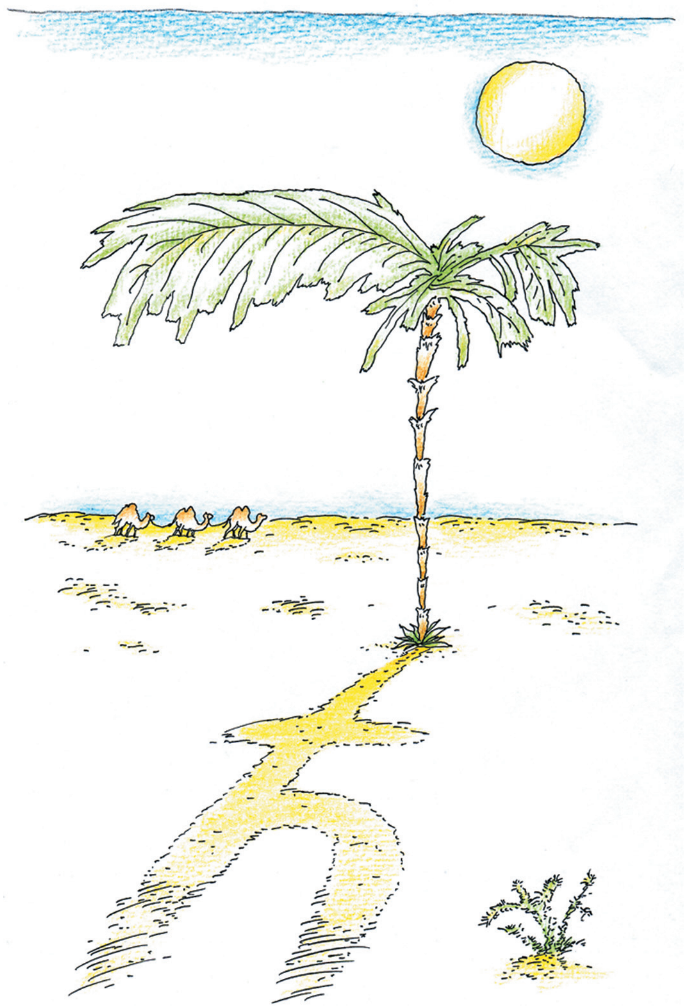
А вот рецензент – давний член редсовета,
Который прочел сочинение это,
Представив себя симпатичной девицей,
Которая тщетно мурыжит страницу,
Пытаясь понять то, о чем говорится
В Кванте, который построил Исаак.

А это редактор, статью эту правивший,
Лишь автора имя на месте оставивший,
Чтоб даже тупейшая в мире девица
Смогла хоть единожды в год похвалиться,
Что все понимает на целой странице
В Кванте, который построил Исаак.

А это художник в глубокой прострации
Пытается выдумать те иллюстрации,
Которые так очаруют девицу,
Что сходу она прочитает страницу
В Кванте, который построил Исаак.

Это стихотворение взято из специального номера журнала «Квант», выпущенного в единственном экземпляре к 75-летию И.К.Кикоина.

Вот главный редактор – большой академик,
Он правит (за это не требуя денег),
Чтоб делалось все только так и вот так,
Поскольку он есть этот самый Исаак,
Который по уши влюбился в девицу,
Которая пальчиком тычет в страницу,
Пытаясь понять то, о чем говорится
В Кванте, который построил Исаак.



К 100-ЛЕТИЮ И.К.КИКОИНА

Ударные волны и детонация

Л.БЕЛОПУХОВ

В статье «Взрыв» говорилось о том, что всякий взрыв обязательно сопровождается образованием ударных волн в пространстве и что ударная волна есть непременный элемент детонационного взрывного процесса во взрывающейся газовой (или пылевоздушной) среде и в конденсированном взрывчатом веществе.

Немного о газовой динамике

Ударные волны – это очень интересное явление природы. Их существование было предсказано многими учеными, в частности знаменитым математиком Риманом. Его имя связано прежде всего с развитием идей своего учителя Гаусса в области геометрии. В 1854 году 28-летний Риман дал общую идею математического пространства, а затем подробно разработал одну из неевклидовых геометрий, с тех пор носящую его имя. Но Риман внес вклад во многие области математики. Так, в работах по теории дифференциальных уравнений он обнаружил (на бумаге) возможность ударных волн. Именно по этому поводу возникло крылатое изречение – «явление возникло на кончике пера теоретика».

Дифференциальные уравнения, которые исследовал Риман, представляют собой математический аппарат науки, которая называется газовой динамикой. Она изучает, как следует из названия, движение воздушных масс, в частности бури и ураганы, течение газа по трубам, движение газа в турбинах и соплах ракетных двигателей и многое другое.

Основным газодинамическим уравнением является закон Ньютона, примененный к элементу газовой среды (в этом случае оно называется уравнением Эйлера). Но поскольку элемент газа при движении изменяет свою плотность, а часто и температуру, то кроме силовых необходимо использовать и энергетические (термодинамические) уравнения.

Одним из простых следствий решений системы уравнений газовой динамики является волновое уравнение, в котором скорость волны для идеального газа зависит только от температуры. Это – звуковые волны, т.е. продольные колебания элемента газа. Скорость звука равна

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}},$$

где T – абсолютная температура, M – молярная масса, R – универсальная газовая постоянная, γ – показатель адиабаты, равный отношению теплоемкостей при постоянном давлении и постоянной температуре. Для воздуха при температурах меньше 1000 К показатель адиабаты равен 1, 4. Скорость звука при этом равна

$$v = 20\sqrt{T}\ \ (\text{м/с}),$$

что дает для стандартных условий 342 м/с.

Если же учитывать неидеальность газа, возможность высоких температур, при которых показатель адиабаты непостоянен и выражается сложной функцией параметров состояния, то система газотермодинамических уравнений становится довольно сложной.

Поскольку газовая динамика не интересуется отдельными атомами или молекулами, а рассматривает элемент газа, который в теории может быть бесконечно малой величиной, то в дифференциальных уравнениях газовой динамики и в их решениях все параметры состояния – непрерывные функции координат и времени. Но в 1860-е годы Риман показал, что существует особое решение системы газотермодинамических уравнений. Не общее решение, методы получения которого он разрабатывал, и не частные решения, которые вытекают из общего решения при использовании начальных и граничных условий, а именно особое решение, которое нельзя получить стандартными математическими методами. Это особое решение представляет собой разрыв функций давления, плотности и скорости движения среды, т.е. мгновенный, не имеющий ширины скачок параметров. Этот скачок и получил название ударной волны.

Слово «волна» не совсем точно передает характер явления, поскольку в обычном понимании волна характеризуется периодичностью, частотой, а скачок – это однократное резкое изменение. Правильнее было бы назвать явление ударным импульсом.

Возникновение ударной волны

Образование ударной волны проще всего представить на примере плоского движения газа в трубе, в которую вдвигается ускоряющийся поршень. Когда поршень приходит в движение и начинает перемещать и сжимать прилегающий к нему слой газа, известие об этом событии (повышении давления и плотности) распространяется в газе со скоростью звука. В газе возникает «кусок» волны сжатия (четверть волны) с

Продолжение. Начало – статью «Взрыв» – см. в «Кванте» №6 за 2007 год.

непрерывным распределением параметров (рис.1,*а*). Но повышение давления и плотности соответствует повышению температуры. Это означает, что скорость звука за началом (фронтом) волны сжатия непрерывно увеличивается, достигая максимума на границе газа с поршнем. Поэтому по мере движения поршня и увеличения его скорости возмущения от него с известием о возрастании давления и плотности догоняют переднюю часть волны сжатия и усиливают ее (рис.1,*б*).

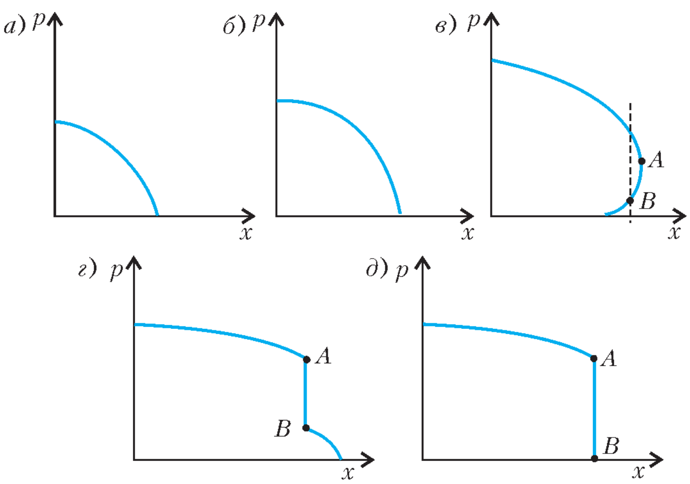


Рис.1. Профиль давления в трубе (р — давление, х — расстояние от поршня)

Со временем форма волны сжатия изменяется. Это происходит по двум причинам. Во-первых, как уже говорилось, в волне непрерывно увеличивается температура, следовательно, увеличивается и «местная» скорость звука. А во-вторых, скорость звука складывается со скоростью поршня, которая также непрерывно увеличивается. Профиль волны становится совершенно непохожим на четверть синусоиды (рис.1,*в*). Казалось бы, участок волны с давлением p_A сможет даже перегнать участок с давлением p_B. Но эта ситуация абсурдна, ибо в одной точке x не может быть двух разных давлений.

Развитие волны сжатия будет происходить по другому сценарию. Сначала может появиться вертикальная касательная (рис.1,*г*), а потом и полноценный скачок – ударная волна (рис.1,*д*). Естественно, что скорость перемещения разрыва, т.е. скорость ударной волны, больше скорости звука в невозмущенном газе и больше скорости движения газа (но не звука) за фронтом волны.

Во времена Римана термодинамика еще только создавалась, и он изучал не конкретные уравнения, в которые входят параметры газа (например, показатель адиабаты), а математические методы нахождения решений систем уравнений, похожих на уравнения газовой динамики. И математика подсказала возможность особого решения – скачка параметров. Но ученые, развивавшие газовую динамику, не верили в то, что такие скачки могут реально существовать в природе – мало ли что могут показать математические «игры». Кажется, и сам Риман был в числе сомневающихся.

Сто лет назад проверить наличие ударных волн экспериментом было невозможно – соответствующие приборы не имели необходимого разрешения по времени и могли зафиксировать только усредненные величины. Но внезапный и сильный звук при грозе или взрывах приводил к мысли о существовании этого явления. Выявлены были и другие скачки – например, внезапный переход некоторых магнетиков из парамагнитного состояния в ферромагнитное и иные так называемые фазовые переходы второго рода, в которых характеристики вещества меняются скачкообразно. Примером скачка может служить и резкое изменение характера излучения энергичных электронов системы, когда их концентрация достигает определенной величины (лазеры и мазеры). И все это разрешено фундаментальными законами природы.

Уравнение Гюгонио

Приведенное рассмотрение механизма образования ударных волн при всей его элементарности было сделано только в начале XX века и тогда же было найдено соотношение между параметрами состояния до и после разрыва. Для этого оказалось достаточно использовать закон Ньютона, закон сохранения энергии (первое начало термодинамики) и условие отсутствия местных скоплений газа (закон непрерывности массы), или, другими словами, закон постоянства расхода газа, отнесенного к площади сечения трубы. Эти уравнения легко написать. Сделаем это.

Один и тот же элемент газа до ударной волны имеет массу $\rho_0 V_0 = \rho_0 S v_0 \Delta t$, где ρ_0 и v_0 – плотность и скорость движения этого элемента, S – сечение трубы, Δt – время прохождения элемента газа через фронт волны, а за фронтом волны его масса равна $\rho S v \Delta t$ (ρ и v – параметры газа за фронтом).

Запишем закон Ньютона в виде

$$\Delta F = \frac{mv - m_0 v_0}{\Delta t}.$$

Поскольку

$$\Delta F = \Delta p S = (p_0 - p) S,$$

имеем

$$p - p_0 = \rho_0 v_0^2 - \rho v^2.$$

Закон сохранения энергии в данном случае совпадает с законом Бернулли:

$$u_0 + \frac{p_0}{\rho_0} + \frac{v_0^2}{2} = u + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2},$$

где u_0 и u – внутренние энергии элемента газа, в расчете на единицу массы, до и после фронта волны.

Закон непрерывности массы можно записать в виде

$$\rho_0 S v_0 \Delta t = \rho S v \Delta t, \text{ или } \rho_0 v_0 = \rho v.$$

Для идеального газа

$$u_0 = \frac{1}{\gamma - 1}\frac{p_0}{\rho_0}, \quad u = \frac{1}{\gamma - 1}\frac{p}{\rho}.$$

Из написанных уравнений несложно получить такое соотношение:

$$\frac{p}{p_0} = \frac{(\gamma + 1)\rho - (\gamma - 1)\rho_0}{(\gamma + 1)\rho_0 - (\gamma - 1)\rho}.$$

Это соотношение можно упростить, если учесть, что для воздуха (двухатомный газ) $\gamma = 1{,}4$, и перейти от плотностей к удельным объемам:

$$\frac{p}{p_0} = \frac{6 - \dfrac{V}{V_0}}{6\dfrac{V}{V_0} - 1}.$$

Два последних выражения называют уравнением Гюгонио (в честь французского ученого, получившего их в 1903 году), а соответствующие графики – адиабатой Гюгонио.

На рисунке 2 представлены (в полулогарифмическом масштабе) три кривые: кривая *1* соответствует изотермическому процессу, кривая *2* – адиабатическому (для воздуха), кривая *3* – это адиабата Гюгонио. При не очень сильном сжатии, например в 2 раза, соответствующие значения относительного давления немного отличаются друг от друга и составляют 2; 2, 7 и 2, 75. Но когда относительное сжатие равно 6, то соответствующие значения для относительного давления составляют 6; 12, 3 и… бесконечность. Согласно ударной адиабате, при сильном (почти шестикратном) сжатии давление в ударной волне может скачком возрасти до огромной величины. А это значит (в соответствии с уравнением состояния), что до огромной величины может подскочить и температура.

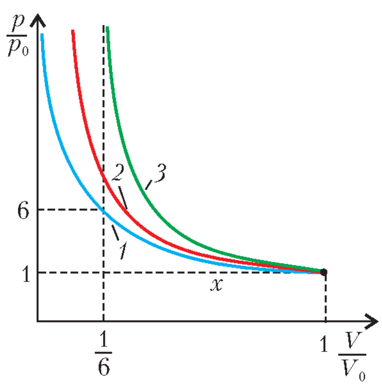


Рис.2. Изотерма (1), адиабата (2) и адиабата Гюгонио (3)

При обычном адиабатическом сжатии в 5,75 раза абсолютная температура возрастает в 2, 45 раза – по уравнению адиабаты $\dfrac{T}{T_0} = \left(\dfrac{V_0}{V}\right)^{\gamma - 1}$. А по уравнению Гюгонио температура увеличивается в 23,3 раза – от 300 К до 6990 К, что выше температуры излучающего слоя Солнца (6000 К).

При ядерном взрыве образуется сильная ударная волна, в которой давление возрастает в 1000 и более раз. Температура при этом, согласно уравнению Гюгонио, возрастает в 167 раз! Правда, более точные расчеты приводят к увеличению температуры в этом случае «всего» в 47 раз, т.е. до 14000 К. Ударная волна выглядит при этом как сверхраскаленный (огненный) шар, который ярче Солнца в 1000 раз. (При этом расчете нужно учесть, что энергия излучения пропорциональна четвертой степени абсолютной температуры, а огненный шар видится на расстоянии 10 км от ядерного взрыва под углом в 5,3 раза больше, чем солнечный диск). Вот почему первая в мире популярная книга о ядерных взрывах (американского ученого Р.Юнга) имела название «Ярче тысячи солнц».

Физика ударной волны

Но есть еще одно важнейшее отличие ударного сжатия от изотермического или адиабатического. Если снять давление за фронтом ударной волны (например, тем или иным способом вернуть поршень в начальное положение), то газ после разгрузки не вернется в исходное состояние с параметрами p_0, ρ_0, T_0. Ударное сжатие – процесс необратимый. При расширении сжатого в ударной волне газа не может образоваться ударная волна расширения. Давление и плотность газа и убегающего назад поршня будут уменьшаться, и информация об этом не будет накапливаться, как в случае сжатия, поскольку скорость звука теперь около поршня меньше, чем вдали от него, где температура еще не успела понизиться. Поэтому ударный фронт быстро «размоется», скачок исчезнет, и переход сжатого газа в исходное состояние будет происходить обычным адиабатическим путем. А это значит, что если плотность газа и объем вернутся к первоначальным значениям (масса газа не изменится), то давление газа будет больше исходного (рис.3). Больше будет и его температура.

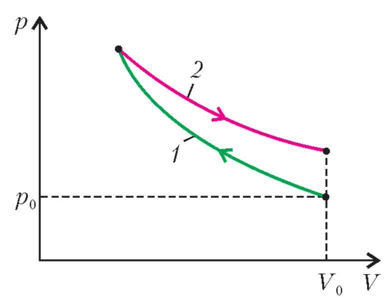


Рис.3. Адиабата Гюгонио (1) и адиабата разгрузочного процесса (2)

Таким образом, процесс «ударное сжатие – адиабатическое расширение» приводит к необратимому нагреву газа. Это означает, что работа, затраченная на ударное сжатие газа, не компенсируется работой газа при его расширении. Часть работы «застревает» в газе, как при всяком необратимом процессе. Адиабата Гюгонио не является графиком обратимого процесса, а просто отражает соотношение параметров газа до и после ударного скачка. При ударном сжатии физический смысл имеют только две точки ударной адиабаты – начальная и конечная. Можно сказать, что ударная адиабата – это геометрическое место точек на графике зависимости давления от удельного объема (или об плотности), достижимых путем ударного сжатия газа из данного начального состояния.

А как изменится газодинамическая теория, если учесть реальность молекулярной структуры газа? При этом придется учитывать передачу энергии и импульса от одних молекул к другим за фронтом волны, т.е. так называемые нестационарные явления переноса. Кроме газодинамических уравнений нужно будет учесть и уравнения нестационарной термодинамики – уравнения вязкости (передачи импульса) и теплопроводности (передачи кинетической энергии). Эта более сложная задача принципиально решаема, хотя аналитическое решение возможно лишь для некоторых упрощенных случаев. В результате решения можно определить толщину ударного фронта, который уже не будет разрывом в математическом смысле. Для не очень сильных ударных волн эта толщина оказывается порядка нескольких длин свободного пробега молекул в невозмущенном газе ($\sim 10^{-6}$ м), а в пределе с увеличением интенсивности волны стремится к одной длине свободного пробега ($\sim 10^{-7}$ м).

Молекулярно-кинетическая теория ударных волн вносит поправки и в адиабату Гюгонио, точнее в величину показателя адиабаты γ. С учетом колебательного движения атомов в двухатомных молекулах для воздуха $\gamma = 9/7 \approx 1,286$. Соответственно, уравнение адиабаты Гюгонио принимает вид

$$\frac{p}{p_0} = \frac{8 - \frac{V}{V_0}}{8\frac{V}{V_0} - 1},$$

а предельно возможное сжатие в волне для идеального газа получается уже не 6, а 8.

Как возникают ударные волны?

Кроме разобранного примера движения поршня в трубе, удобного для теории (одномерная задача), ударные волны возникают во многих случаях сверхзвуковых движений. Например, при сверхзвуковом истечении газа из ракетного сопла внутри него, недалеко от выхода, возникает скачок давления. При сверхзвуковом движении какого-либо тела в воздухе (например, самолета) оно действует на воздух, как поршень, и в воздухе возникает коническая ударная волна, сопровождающая летящее тело. Если такая ударная волна достигает поверхности земли, то она может произвести разрушительный эффект (поломку крыши, разрушение оконных рам и стекол и т.п.). Поэтому переходить от дозвуковой скорости к сверхзвуковой (преодолевать «звуковой барьер») самолетам разрешается только на определенной высоте, когда интенсивность сопровождающей самолет ударной волны при достижении земной поверхности ослабевает до безопасной величины. Человек при этом слышит резкий звук с раскатами, очень похожий на звук при взрыве.

Самый же распространенный случай возникновения ударных волн – это взрывы. Ударные волны сопровождают все виды взрывов – подземные, подводные, приземные и воздушные, независимо от их природы. В статье «Взрыв» рассматривались взрывы различной природы – химические, ядерные, тепловые, электрические, механические. Общее для всех взрывов свойство – достаточно быстрое (внезапное) превращение части энергии, содержащейся в источнике взрыва, в кинетическую энергии продуктов взрыва.

В случае сферической симметрии источника взрыва почти при всех типах взрыва возникает сферический «поршень», представляющий собой сильно сжатый и нагретый газ, стремящийся расширяться. В окружающей среде (воздухе) образуется сферическая ударная волна. Поскольку ускоряющийся вначале газовый поршень по мере увеличения размеров замедляет свое движение (прежде всего, за счет сферичности расширения), за ударной частью волны следует волна разрежения. Мгновенный профиль давления в такой волне изображен на рисунке 4.

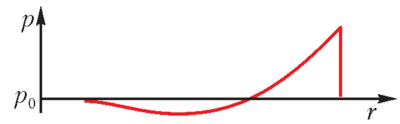


Рис.4. Мгновенный профиль сферической взрывной волны (p_0 – атмосферное давление)

Было получено (в первую очередь для военных целей) выражение для давления во фронте ударной воздушной взрывной волны как функции расстояния от точки взрыва. Из общих соображений теории подобия в механике сплошных сред это давление должно быть функцией величины $\frac{q}{r^3}$, где q – энергия взрыва, r – расстояние от точки взрыва. Для химических взрывчатых веществ, например,

$$\Delta p_ф = 0,7\frac{q}{r^3} + 0,27\left(\frac{q}{r^3}\right)^{2/3} + 0,084\left(\frac{q}{r^3}\right)^{1/3},$$

где $\Delta p_ф$ – избыточное давление во фронте ударной волны, измеряемое в мегапаскалях, q измеряется в килограммах тротилового эквивалента, r – в метрах. Численные значения коэффициентов в этом выражении были впервые экспериментально получены в 40-х годах прошлого века М.А.Садовским, а теоретическое обоснование формулы было выполнено в то же время Л.И.Седовым в СССР и Э.Тейлором в Англии.

Воздействие ударных волн

Основным фактором воздействия ударной волны на препятствие является давление во фронте волны. Однако не представляется возможным однозначно сопоставить давление с характером воздействия волны. Кроме давления существенным оказывается и время действия волны сжатия. Так, например, разрушение рам, стекол и крыш при взрыве 1 килограмма тротила может происходить на расстоянии 10 метров от взрыва. При таком же отношении q/r^3 для ядерного взрыва, у которого q в 10^9 раз больше («мегатонная» водородная бомба), на расстоянии 1 километр действие ударной волны будет гораздо сильнее (вплоть до полного разрушения зданий), а стекла вылетят при этом на расстоянии вплоть до 20 километров. А если еще будет дуть сильный ветер, то по направлению этого ветра разрушение окон может произойти и в 50 километрах от взрыва.

Очень сложно и неоднозначно воздействие ударных волн на живой организм. При сильной контузии (близкой к летальному исходу) поражающим фактором оказывается удар по грудной клетке, в результате которого в легких происходит закупорка воздушных путей. Для килограмма тротила это возможно на расстоянии около 3 метров. При мегатонном взрыве ударная волна поражает на расстоянии до 24 километров. Легкой контузией считается поражающий удар по барабанным перепонкам. Для килограмма тротила это происходит на расстоянии около 5 метров, а для «мегатонника» – до 20 километров (без ветра).

Но при взрывах разрушающее и поражающее действие чаще всего оказывает не воздушная взрывная волна, а местное (близкое к взрыву), так называемое бризантное действие и метательное действие взрыва.

Так, для разрушения большого строения иногда достаточно небольшого заряда, заложенного непосредственно внутрь (или рядом) с опорной конструкцией. А поражение людей производится либо оболочкой взрывного устройства (граната «лимонка»), либо специально заложенными в устройство мелкими металлическими предметами.

При ядерных взрывах к действию ударной волны добавляются и такие поражающие факторы, как тепловой (излучение огненного шара) и радиационный.

Ударные волны возникают не только в воздухе. При очень больших давлениях способность твердого тела сохранять свою форму теряется, и вещество «течет» подобно газу. Но, конечно, другое соотношение между давлением и плотностью приводит к другому уравнению ударного сжатия, нежели адиабата Гюгонио для газа.

Наибольшее давление, которое может создать химический взрыв в контакте с твердым телом, порядка $3\cdot10^8$ Па (или 300000 атм). Если окружить твердотельный шар взрывчатым веществом, при его взрыве в твердом теле возникнет сферическая сходящаяся ударная волна, которая, отразившись «сама от себя», даст рекордное давление в веществе – до 10^{12} Па (или 10 млн атм). При этом, правда, возрастает и температура, что затрудняет научное исследование вещества при таких сверхвысоких параметрах.

Сжатие твердого тела сходящейся волной используется в конструкциях ядерных бомб, которые могут найти (и находят) применение в мирных целях, а не в целях уничтожения культуры.

Детонация и ее возникновение

Детонация – это особое волновое (точнее, импульсное) явление, когда химическая реакция распространяется по веществу со сверхзвуковой скоростью. Например, скорость детонационной волны в тротиле составляет 7 км/с, а в не менее печально известном в наше время гексогене – около 9 км/с. Есть взрывчатые вещества со скоростью детонации 13 км/с. А скорость звука в веществах такого типа (точнее, скорость распространения продольных упругих колебаний) – порядка 3 км/с.

Как объяснить такие большие скорости распространения химических реакций? В газовых смесях возникает быстрое горение. При этом перенос температуры от горючей смеси к еще не воспламенившейся происходит за счет теплопроводности и за счет диффузии активных центров реакции – свободных радикалов. Скорости переноса частиц и температуры много меньше скорости звука, поэтому скорость горения в газах порядка 20 м/с, а скорость горения твердых смесей (порохов) порядка 100 м/с.

Большая скорость детонации объясняется другими причинами. Детонация – явление не только химическое, но в большой степени и газодинамическое. Она объясняется распространением ударных волн. В ударной волне, где повышаются давление и температура, резко возрастает скорость химической реакции. Выделяющаяся при этом энергия (скорость движения частиц) играет роль поршня, сжимающего еще не прореагировавшее вещество ударным (а не обычным адиабатическим) способом. Таким образом детонационная волна сама себя поддерживает.

Интересны процессы возникновения детонации в конденсированных средах. У многих взрывчатых веществ она начинается только при определенных и достаточно сильных воздействиях. Тротиловые шашки (кирпичики, похожие на мыло) можно поджечь, и они будут гореть, чадя, как плохие дрова (партизаны частенько использовали их для растопки в сырую погоду). Для того чтобы тротил сдетонировал, нужно применить ударное воздействие – произвести взрыв сначала в капсюле-детонаторе. Ударная волна этого «провокатора» в свою очередь заставит сдетонировать тротиловую шашку. А в капсюле-детонаторе содержится другое, гораздо более чувствительное взрывчатое вещество, которое может сдетонировать при небольшом ударе (гремучая ртуть). Сейчас чаще применяют электродетонаторы, в которых находится специалное вещество – азид свинца, легко детонирующее от нагрева (от проволочки, по которой пропускается ток).

Очень многое в детонационных процессах еще остается загадочным и ждет своих исследователей.

Взрыв–спаситель

Ударные волны и детонационные процессы играют важную роль и при ядерных взрывах. Эти взрывные явления станут темой следующей статьи из «взрывной» серии. Я уверен, что когда-нибудь настанет пора глобализаци большинства земных государств и навсегда исчезнет опасность ядерной войны, а ядерные взрывы вновь с успехом будут применяться в самых разнообразных мирных целях.

Может быть, именно ядерные взрывы спасут человечество от глобальной катастрофы – столкновения нашей планеты с астероидом или кометой. Специалисты Центра космических полетов имени Маршалла, входящего в состав NASA, уже разработали модель аппарата, предназначенного для этой цели. Корабль-перехватчик будет иметь до шести ядерных боеголовок, которые, поочередно взрываясь на поверхности астероида, придадут импульсы, переводящие его на другую траекторию, безопасную для Земли.

Одной из первых целей кораблей-перехватчиков может стать астероид Апофис, который по предварительным расчетам в 2029 году пролетит мимо Земли на расстоянии около 37000 км, что примерно соответствует высоте геостационарной орбиты. При последующем «визите» он сможет под действием земного тяготения и упасть на Землю. Диаметр этого астероида около 400 км, масса порядка $2\cdot10^{20}$ кг. Это побольше, чем весь австралийский материк. Масштабы катастрофы невозможно даже представить – вряд ли после этого сможет сохраниться жизнь на Земле.

Так что взрыв-воитель, который бывает и взрывом-работником, может стать и взрывом-спасителем.

(Продолжение следует)

Множества Жюлиа

Н.ДОЛБИЛИН

Вместо пролога: воспоминание о давнем путешествии

В далеком 1968 году мне посчастливилось совершить путешествие в Карпаты с моим учителем, выдающимся математиком Борисом Николаевичем Делоне. В один пасмурный день во время прогулки я оказался на седле под вершиной Говерла. В спускавшемся на восток цирке, в метрах 100 ниже седла, бурлил мощный поток. Это был исток реки Прут. Склон, сбегавший на юго-запад, быстро углубляясь, переходил в ущелье, из которого вытекала речка Говерлянка. Надо мной нависал интенсивно таявший (дело было в начале мая) снежник. Часто падавшие с огромной сосульки капли образовывали почти непрерывную струйку. Сильный ветер, поднимавшийся с юго-западного цирка, сносил эту струйку на восточный склон обледенелой площадки под снежником, откуда вода уходила вниз, к Пруту, впадающему в Дунай. Но как только ветер на мгновение стихал, вода вертикально падала на площадку, наклоненную к западу, и стекала в другую сторону, к Говерлянке, которая много ниже впадала в Тису, а та – в Дунай. И хотя рано или поздно эти «восточный» и «западный» потоки сливались в один (вблизи устья Дуная), достаточно было взглянуть на карту, чтобы понять, какая разная у них складывалась судьба. Особенно поражало – насколько поведение струйки, вытекавшей из снежника, радикально зависело от дуновения ветра.

Несколько слов о комплексных числах

Прежде всего нам понадобится кое-что, совсем немногое, из теории комплексных чисел. Мы конспективно приведем лишь самые необходимые сведения.[1]

Комплексным числом z называется произвольная пара вещественных чисел (a,b). При этом

(а) два комплексных числа $z=(a,b)$ и $z'=(a',b')$ считаются равными тогда и только тогда, когда $a=a'$ и $b=b'$;

(б) вещественное число a представляет собой частный случай комплексного числа $a=(a,0)$;

(в) сложение и вычитание комплексных чисел определяется в точности как для векторов по формуле

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2, b_1 \pm b_2);$$

(г) умножение комплексных чисел задается формулой

$$z_1 z_2 = (a_1,b_1)(a_2,b_2) = (a_1a_2 - b_1b_2,\ a_1b_2 + b_1a_2).$$

Отметим, что если оба комплексных числа являются вещественными, т.е. $b_1 = b_2 = 0$, то правило умножения (г) комплексных чисел совпадает с правилом умножения вещественных чисел.

Обычно комплексное число (a,b) записывают в виде двучлена $a + bi$, где i – так называемая *мнимая единица*, т.е. такое «новое число», не являющееся вещественным, квадрат которого по определению равен -1. В этом случае, например, произведение двух комплексных чисел соответствует произведению соответствующих двучленов:

$$(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1a_2 + a_1b_2 i + b_1 i a_2 + b_1b_2 i^2 = \\ = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + b_1a_2)i.$$

Комплексное число $z = a + bi$ можно представить точкой (a,b) на координатной плоскости (рис.1,*а*). При этом сама координатная плоскость, каждая точка (a,b) которой отождествлена с комплексным числом $z = a + bi$, называется комплексной плоскостью.

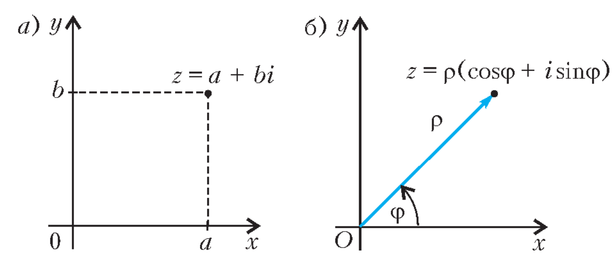


Рис. 1

Тригонометрическая форма записи комплексного числа имеет вид $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Здесь φ есть угол между осью Ox и вектором $\overrightarrow{Oz}$, а ρ – модуль $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ числа z, или, что то же самое, длина вектора $\overrightarrow{Oz}$ (рис.1,*б*).

И, наконец, нам понадобится изящная формула Муавра:

$$z^n = (\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \quad (1)$$

Корнем n-й степени из числа $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ называется комплексное число, n-я степень которого равна z. Другая формула Муавра дает представление всех корней n-й степени:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),$$

$$k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1.$$

[1] *Более подробно о комплексных числах можно прочитать, например, в статьях Л.С.Понтрягина «Комплексные числа» («Квант» №3 за 1982 г.) и «Основная теорема алгебры» («Квант» №4 за 1982 г.).*

Приведем также факт, вытекающий из основной теоремы алгебры: всякий многочлен n-й степени с комплексными коэффициентами (в том числе и с вещественными) имеет в области комплексных чисел ровно n корней.

Путешествие стрекозы тихим утром

В одно прекрасное летнее тихое утро попрыгунья-стрекоза, проснувшись в точке $z_0 = \rho_0(\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0)$, отправилась в путешествие, перелетая из одного пункта в другой. Будем полагать, что после первого перелета стрекоза оказалась в точке $z_1 = z_0^2$, после второго – в точке $z_2 = z_1^2$, после третьего – в точке ..., правильно, в точке $z_3 = z_2^2$ и так далее. И вообще, если после $(n-1)$-го перелета стрекоза была в точке z_{n-1}, то после n-го перелета она окажется в точке $z_n = z_{n-1}^2$. Множество

$$z_0,\ z_1 = z_0^2, \ldots, z_n = z_{n-1}^2, \ldots \qquad (2)$$

точек «приземления» стрекозы будем называть *орбитой*.

Рассмотрим, что представляет собой орбита. Ясно, что начальная точка $z_0 = \rho_0(\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0)$ однозначно определяет орбиту. По формуле Муавра аргументы точек орбиты суть φ_0, $2\varphi_0$, $2^2\varphi_0, \ldots, 2^n\varphi_0$ и т.д. Модули точек орбиты равны $\rho_0, \rho_0^2, \rho_0^4, \ldots, \rho_0^{2n}$ и т.д. Очевидно, что орбита лежит на быстро раскручивающейся уходящей в бесконечность спирали, если $\rho_0 > 1$ (рис.2). Если же $\rho_0 < 1$, то орбита лежит на спирали, закручивающейся к нулю. Если точка z_0 лежит на единичной окружности, т.е. если $\rho_0 = 1$, то вся орбита лежит на этой окружности.

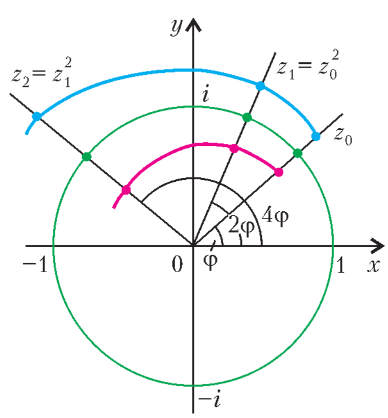


Рис. 2

Таким образом, если $|z_0| > 1$, то орбита, задаваемая формулой $z_n = z_{n-1}^2$, убегает на бесконечность. Если же $|z_0| < 1$, то, наоборот, орбита остается *ограниченной*. Более того, в нашем случае она не покидает единичный круг и притягивается к нулю.

Это очень напоминает распределение земной суши по так называемым водным бассейнам. Из курса географии известно о бассейне реки Волга, о бассейне озера Байкал... Условная линия, разделяющая бассейны рек, скажем Волги и Дона, называется водоразделом. Эпизод, рассказанный в начале статьи, произошел на водоразделе бассейнов Прута и Тисы (впрочем, обе они впадают в Дунай).

В случае итерации $z_n = z_{n-1}^2$ все орбиты, начинающиеся внутри единичного круга, стекаются к нулю, в то время как орбиты, начинающиеся вне этого круга, стекаются к бесконечности. Единичный круг является бассейном «океана Нуль», вся остальная часть плоскости составляет бассейн «океана Бесконечность».

Водораздел между этими океанами проходит по единичной окружности $|z| = 1$. Между точкой, лежащей внутри бассейна, и точкой, лежащей на водоразделе, имеется качественное различие. У каждой точки z_0, лежащей внутри единичного круга, некоторая ее окрестность лежит внутри этого круга. Другими словами, орбиты, начинающиеся в точках, достаточно близких к точке z_0, впадают в тот же океан, что и орбита точки z_0. Совсем иначе обстоит дело на водоразделе. Произвольная, сколь угодно маленькая окрестность точки, лежащей на окружности $|z| = 1$, содержит как точки внутри, так и точки снаружи единичного круга. Таким образом, рядом с любой точкой водораздела находятся сколь угодно близко точки, чьи орбиты впадают в один океан, и тут же рядом сидят точки, из которых вытекают орбиты, впадающие в другой океан.

Именно на эту острую чувствительность поведения орбит в зависимости от выбора начальной точки при определенных условиях обратил внимание в 1918 году французский математик Жюлиа[2]. Математик Б.Мандельброт, проявивший серьезный интерес к работам Жюлиа, назвал такие «водоразделы» в честь первоисследователя множествами Жюлиа. Справедливости ради, надо сказать, что не менее серьезный вклад в этой области был сделан также другим французским математиком П.Фату. Разумеется, вряд ли было бы оправданно как-то особо называть столь просто устроенный водораздел (имеется в виду единичная окружность), если бы все обстояло столь просто, как могло показаться на первый взгляд. Сейчас мы увидим, что это совсем не так.

И поднялся ветер...

Рассмотрим орбиту стрекозы в случае, если «дует постоянный ветер», т.е. «ветер», имеющий постоянные направление и силу. Итак, «ветер» – это вектор на плоскости, который можно задавать комплексным числом c. Конкретно, мы предполагаем, что стрекоза во время своего прыжка из точки z в точку z^2 дополнительно «сносится ветром» на вектор, задаваемый комплексным числом c (рис.3). Другими словами, орбита задается формулой

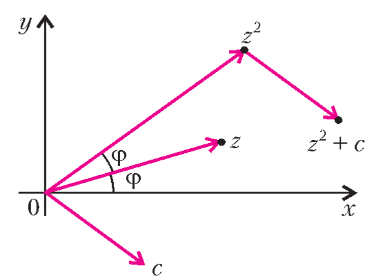


Рис. 3

$$z_n = z_{n-1}^2 + c, \text{ где } n = 1,\ 2,\ \ldots \qquad (3)$$

Легко видеть, что «штилевая» орбита (2) есть частный случай «ветренной» орбиты (3), соответствующий

[2] *Гастон Жюлиа (1893–1978) во время первой мировой войны получил тяжелое ранение. Свою знаменитую работу «Мемуар об итерации рациональных функций» он написал в госпитале в 1918 году в интервале между двумя болезненными операциями.*

значению $c = 0$. Теперь для фиксированного комплексного числа c, вообще говоря не равного нулю, рассмотрим орбиту, заданную формулой (3).

Назовем точку z_0 *беглянкой*, если начинающаяся в ней орбита (3) убегает на бесконечность. Под этим понимается следующее: какой бы большой круг $|z| \le R$ на плоскости ни взять, существует номер k, зависящий от радиуса R $(k = k(R))$, такой, что *все* точки z_n в орбите (3) с номерами $n > k$ лежат вне данного круга, т.е. $|z| > R$ при $n > k(R)$. Обозначим множество всех точек-беглянок при фиксированном c через E_c (от английского escape – убегать). Например, в частном случае $c = 0$ множество E_0 состоит из точек, лежащих вне единичного круга.

Напротив, если орбита (3), начинающаяся в z_0, все время остается в пределах какого-то (пусть даже очень большого) круга, то точку z_0 назовем *пленницей*. Множество всех точек-пленниц будем называть *пленным* и обозначать через P_c. Как мы уже видели, когда $c = 0$, пленное множество P_0 – это единичный круг $\{z : |z| \le 1\}$. Все точки плоскости, лежащие вне единичного круга, являются беглянками и составляют *убегающее* множество E_0.

Гипотетически имеется и третья возможность, когда орбита, с одной стороны, выходит за пределы любого данного круга сколь угодно много раз, а с другой, возвращается в этот круг столь же много раз. Однако в силу «теоремы о беглянке», которую мы докажем в следующем параграфе, третий случай невозможен.

Итак, для фиксированного комплексного числа c каждая точка z_0 плоскости является либо беглянкой, либо пленницей. Другими словами, вся плоскость распадается на два множества: P_c и E_c.

Из теоремы о беглянке легко следует, что если z – точка-беглянка, то ее достаточно маленькая окрестность состоит лишь из точек-беглянок.

Множество точек плоскости таких, что в каждой ее окрестности содержатся как пленницы, так и беглянки, образуют границу между множествами E_c и P_c. Это множество называется *множеством Жюлиа* J_c. Можно показать, что множество Жюлиа состоит только из пленниц.

По определению множества Жюлиа, при $c = 0$ множество J_0 есть единичная окружность, но при $c \ne 0$ характер множества J_c серьезно меняется. На рисунке 4 приведены множества Жюлиа J_c при различных

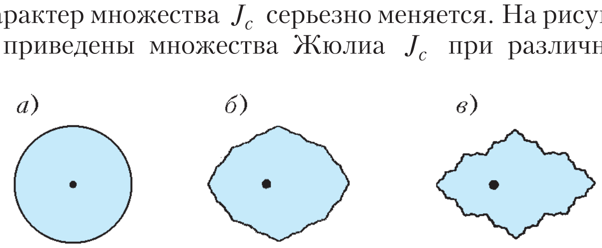


Рис. 4

значениях c. Мы видим, что с увеличением модуля $|c|$ линия «водораздела» Жюлиа становится все более сложной и изломанной.

Условие убегания орбиты

Теорема о беглянке. *Пусть точка* z_0 *такова, что*

$$|z_0| \ge |c| \ \ и \ \ |z_0| > 2\,. \qquad (4)$$

Тогда орбита $z_n = z_{n-1}^2 + c$, *начинающаяся в точке* z_0, *убегает на бесконечность, другими словами, точка* z_0 *является беглянкой.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что неравенства (4) не являются необходимым условием точки-беглянки. Точка z_0 может не удовлетворять условию (4), но если какя-то точка орбиты удовлетворяет этому условию, то орбита убегает на бесконечность и точка z_0 является беглянкой.

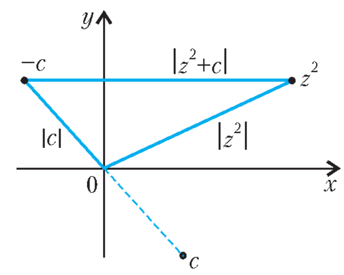


Рис. 5

Пусть точка z удовлетворяет условию (4). Так как в (4) второе неравенство – строгое, то $|z| = 2 + \varepsilon$, где ε – некоторое положительное число. В силу неравенства треугольника (рис.5), имеем

$$\left|z^2\right| = \left|z^2 + c - c\right| = \left|\left(z^2 + c\right) + (-c)\right| \le \left|z^2 + c\right| + |c|\,. \quad (5)$$

Из (4) и (5) получаем

$$\left|z^2 + c\right| \ge \left|z^2\right| - |c| \ge \left|z^2\right| - |z| = (|z| - 1)|z| = (1 + \varepsilon)|z|\,.$$

Итак, если точка z удовлетворяет условиям (4), то $\left|z^2 + c\right| \ge (1 + \varepsilon)|z|$. Поэтому, если расстояние от точки z_0 орбиты до начала 0 превосходит оба числа $|c|$ и 2: $|z_0| > \max\{|c|, 2\}$, то следующая точка z_1 орбиты отстоит еще дальше. Причем коэффициент удаления каждый раз не меньше фиксированного числа $1 + \varepsilon$, строго превосходящего 1. Таким образом, если $z_0 > \max\{|c|, 2\}$, то получающаяся после k итераций точка z_k орбиты будет расположена от начала по крайней мере в $(1 + \varepsilon)^k$ раз дальше. Так как $(1 + \varepsilon)^k$ монотонно и неограниченно возрастает при увеличении номера k, то и точки орбиты монотонно и неограниченно удаляются от начала. Теорема доказана.

Еще раз подчеркнем, что даже если точка z_0 не удовлетворяет условию (4), но первый же возможный выход орбиты $z_n = z_{n-1}^2$ за пределы круга радиуса $\max\{|c|, 2\}$ гарантирует убегание данной орбиты на бесконечность.

Упражнения

1. Докажите, что если $z \in E_c$, то у точки z существует окрестность $U(z)$, содержащаяся в E_c.

2. Докажите, что $J_c \subset P_c$.

Неподвижные точки

Мы знаем, что при итерации $z_{n+1} = z_n^2 + c$ одни орбиты убегают на бесконечность, причем такое убегание идет по раскручивающейся от начала координат спирали с постоянной поправкой на «ветер» c. Другие орбиты «гуляют» в области, которая ограничена множеством Жюлиа. Эти орбиты состоят из точек-пленниц. Среди точек-пленниц есть особые точки. Это – так называемые *неподвижные* точки.

Точка z называется *неподвижной* для функции $f(z)$, если $z = f(z)$. При итерации $z_{n+1} = f(z_n)$ орбита неподвижной точки остается на месте: $z_n = z_0$ для любого натурального числа n. В случае квадратичной функции $f(z) = z^2 + c$ неподвижная точка z удовлетворяет уравнению $z^2 - z + c = 0$. Это уравнение имеет два решения $z^{(0)}$ и $z^{(1)}$ (здесь мы применяем верхние индексы, потому что нижние используются для нумерации точек в орбите).

Итак, орбита неподвижной точки никуда не убегает, т.е. каждая неподвижная точка действительно является пленницей. Между тем, неподвижные точки квадратичной функции существенно различаются друг от друга в том, как ведут себя орбиты, начинающиеся вблизи этих точек.

Рассмотрим опять простейший случай: $c = 0$. Из уравнения $z = z^2$ находим две неподвижные точки: $z^{(0)} = 0$, $z^{(1)} = 1$. Между ними имеется существенное различие. Неподвижная точка $z^{(0)} = 0$, как мы уже знаем, «притягивает» к себе любую орбиту, начинающуюся внутри единичного круга. В то же время если точка z достаточно близко находится к другой неподвижной точке $z^{(1)} = 1$, то расстояние между образом z^2 и неподвижной точкой 1 больше, чем между «прообразом» z и 1. Точка $z^{(1)} = 1$ при итерации $z_{n+1} = z_n^2$ как бы отталкивает от себя осмелившиеся было приблизиться к ней точки орбиты. Одни орбиты (если $|z_0| > 1$) убегают от $z^{(1)} = 1$ на бесконечность. Другие орбиты (если $|z_0| < 1$) убегают от $z^{(1)} = 1$ к другой неподвижной точке $z^{(0)} = 0$. Третьи орбиты ($|z_0| = 1$) расположены на единичной окружности.

В общем случае неподвижная точка $z^{(0)}$ квадратичной функции $f(z)$ называется *притягивающей*, если существует такое число $\varepsilon > 0$, что любая орбита, начинающаяся в ε-окрестности точки $z^{(0)}$, сходится к $z^{(0)}$. Притягивающую точку $z^{(0)}$ также называют еще и *устойчивой* неподвижной точкой, имея в виду, что при небольшом отклонении точки z от неподвижной точки $z^{(0)}$ ее орбита все равно стремится к неподвижной точке. Таким образом, притягивающая точка не только сама является пленницей, но и некоторая ее окрестность полностью состоит из точек-пленниц. Она лежит внутри пленного множества P_c, но не на его границе, т.е. *притягивающая точка не принадлежит множеству Жюлиа* J_c.

Неподвижная точка $z^{(1)}$ функции $f(z)$ – *отталкивающая*, если существует такое $\varepsilon > 0$, что для любой точки z, удаленной от $z^{(1)}$ не далее чем на ε, ее образ $f(z)$ отстоит от $z^{(1)}$ дальше чем z: $\left|\left(z^2 + c\right) - z^{(1)}\right| > \left|z - z^{(1)}\right|$. Отталкивающая точка называется также *неустойчивой*. Даже небольшое отличие начальной точки z_0 от неустойчивой точки $z^{(1)}$ приводит к серьезному отклонению соответствующей орбиты.

Пусть $z^{(0)}$ – неподвижная точка функции $f(z)$. Имеется важный критерий, выясняющий, какова эта точка: притягивающая или отталкивающая. Мы предполагаем, что функция $f(z)$ дифференцируема в точке $z^{(0)}$. Заметим, что производная функции от комплексного аргумента определяется аналогично тому, как это делается для вещественной функции вещественного аргумента:

$$f'\left(z^{(0)}\right) = \lim_{z \to z^{(0)}} \frac{f(z) - f\left(z^{(0)}\right)}{z - z^{(0)}}.$$

Характер поведения орбиты в окрестности неподвижной точки зависит от значения производной $f'(z)$ в этой точке.

Теорема. *Неподвижная точка $z^{(0)}$ для функции $f(z)$ является притягивающей, если $|f'(z)| < 1$, и отталкивающей, если $|f'(z)| > 1$.*

Заметим, что производная квадратичной функции $f(z) = z^2 + c$ равна $f'(z) = 2z$. В соответствии с этим критерием, в хорошо знакомом нам случае $c = 0$ неподвижная точка $z^{(0)} = 0$ притягивающая, так как $|f'(0)| = 0 < 1$, а неподвижная точка $z^{(1)} = 1$ – отталкивающая, так как $|f'(1)| = 2 > 1$.

Мы не будем доказывать этот важный факт для функций комплексного переменного, но попытаемся объяснить его в случае вещественной функции $f(x)$ от вещественной переменной x. Пусть $x^{(0)}$ – неподвижная точка функции $f(x)$, т.е. $x^{(0)} = f\left(x^{(0)}\right)$. Рассмотрим графики двух функций $y = x$ и $y = f(x)$ в окрестности неподвижной точки $x^{(0)}$. Пусть $\left|f'\left(x^{(0)}\right)\right| < 1$, из рисун-

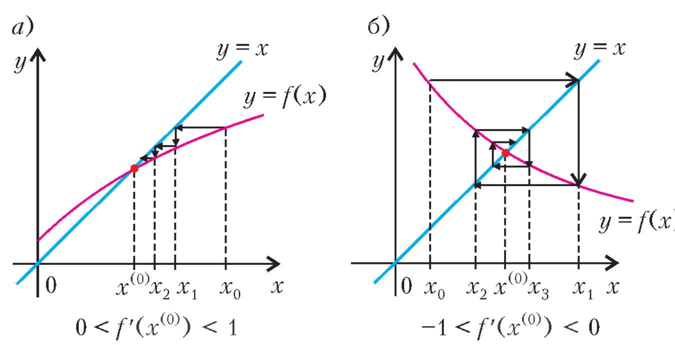


Рис. 6

ков 6,*а* и 6,*б* видно, что если точка x_0 расположена достаточно близко к $x^{(0)}$, то вытекающая из нее орбита $x_{n+1} = f(x_n)$ монотонно приближается к $x^{(0)}$:

$$\left|x_0 - x^{(0)}\right| > \cdots > \left|x_n - x^{(0)}\right| > \left|x_{n+1} - x^{(0)}\right| > \ldots$$

Условие «точка x_0 расположена достаточно близко» означает: точка x_0 расположена в той окрестности неподвижной точки, где производная удовлетворяет неравенству $|f'(x)| < 1$.

Если же $\left|f'\left(x^{(0)}\right)\right| > 1$, то вытекающая из точки x_0, расположенной в окрестности точки $x^{(0)}$, орбита $x_{n+1} = f(x_n)$ какое-то время будет удаляться от $x^{(0)}$ (рис.7,*а* и 7,*б*): $\left|x_0 - x^{(0)}\right| > \left|x_1 - x^{(0)}\right| > \ldots$ Причем уда-

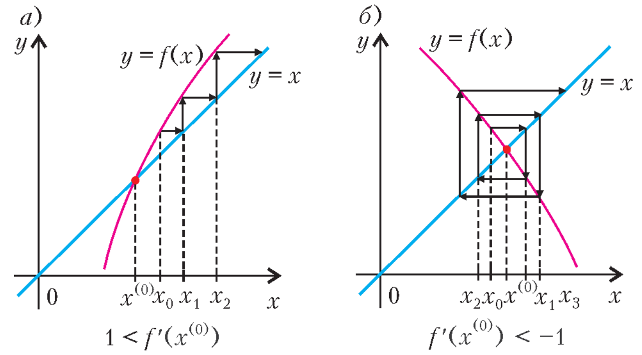


Рис. 7

ление каждой следующей точки x_{n+1} орбиты по сравнению с x_n от неподвижной точки гарантировано, пока орбита находится в окрестности неподвижной точки, где сохраняется неравенство $|f'(x)| > 1$. Но как только орбита выходит за пределы такой окрестности, ее поведение становится не столь однозначным.

Упражнение 3. Докажите, что отталкивающая неподвижная точка итератора $x_{n+1} = x_n^2 + c$ принадлежит множеству Жюлиа J_c, т.е. лежит на границе множеств P_c и E_c.

Самоподобие множества Жюлиа

Обозначим квадратичную функцию $z^2 + c$ через $f_c(z)$. Пусть U – множество точек на комплексной плоскости, через $f_c(U)$ обозначим образ этого множества при функции $f_c(z)$. Другими словами, $f_c(U)$ есть множество образов всех точек $z \in U$: $f_c(U) = \bigcup_{z \in U} f_c(z)$.

Посмотрим, что происходит со знакомыми множествами P_c, E_c, J_c. Возьмем точку $z_0 \in P_c$. Легко видеть, что точка $f_c(z_0)$ также является пленницей. Действительно, орбита точки $z_1 = f_c(z_0)$ совпадает с орбитой точки z_0 со сдвигом нумерации на единицу. Поэтому $f_c(P_c) \subseteq P_c$. Верно и обратное: $P_c \subseteq f_c(P_c)$. Таким образом, $P_c = f_c(P_c)$, т.е. под действием функции f_c множество P_c отображается на себя. Действительно, рассмотрим прообразы $u = f_c^{-1}(z_0)$ точки $z_0 = u^2 + c$. Понятно, что они оба также являются точками-пленницами. Так как *каждая* точка-пленница z_0 является f_c-образом точки-пленницы, то $P_c \subseteq f_c(P_c)$. В таких случаях говорят, что множество P_c *инвариантно* относительно отображения f_c.

По той же причине убегающее множество E_c также инвариантно относительно отображения f_c. Отсюда следует, что так как каждое из множеств E_c и P_c является инвариантным относительно отображения f_c, то и граница между ними, т.е. множество Жюлиа J_c, также инвариантна относительно f_c.

Установленная инвариантность множества Жюлиа относительно f_c порождает повторяемость, точнее схожесть, формы множества Жюлиа в целом с формами все более и более мелких его фрагментов. Например, салфетка Серпинского, описанная в статье «Игра «Хаос» и фракталы»[3], отличалась замечательным свойством: эта салфетка была подобна (даже гомотетична) любой из своих «четвертинок», каждая из которых была линейно вдвое меньше салфетки Серпинского. Четвертинка, в свою очередь, была подобна (опять с коэффициентом подобия $1/2$) «своей» четвертинке, и т.д. до бесконечности. Свойство целого быть подобным своей части называют *самоподобием*.

Возьмем на множестве Жюлиа J_c точку z и пусть $U \subset J_c$ – некоторая дуга, содержащая точку z. Так как множество Жюлиа под действием f_c отображается на себя, то дуга U переходит в другую дугу $f_c(U)$, содержащую точку $f_c(z)$. Если бы функция $f_c(z)$ была линейной относительно z, то преобразование f_c было бы преобразованием подобия, как это случилось в случае салфетки Серпинского. Однако наша функция $f_c(z)$ не линейная, а квадратичная. Поэтому соответствующие фрагменты не являются подобными друг другу. Тем не менее, они во многом очень схожи между собой.

На рисунке 8,*б* представлен (в том же масштабе) фрагмент множества Жюлиа, ограниченный рамкой на

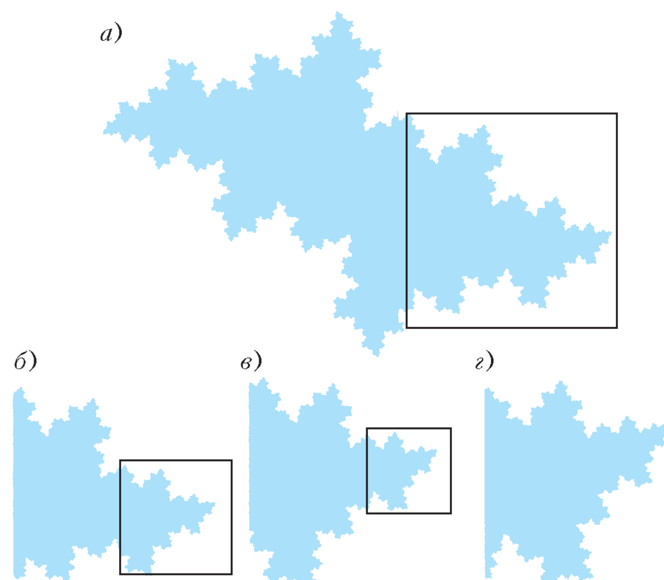


Рис. 8

рисунке 8,*а*. Фрагмент, выделенный рамкой на рисунке 8,*б*, увеличен на рисунке 8,*в*. В свою очередь, рисунок 8,*г* представляет увеличение фрагмента, указанного в рамке на рисунке 8,*в*.

Игра «Хаос» и множества Жюлиа

В заключение расскажем, как можно получать на мониторе компьютера изображение множества Жюлиа J_c для любого значения c. Предлагаемая процедура построения есть попросту версия игры «Хаос», которая подробно изложена для более простой ситуации в упомянутой статье «Игра «Хаос» и фракталы».

Давайте отправимся из произвольной точки-пленницы $z_0 \in P_c$ ($z_0 \neq z^{(0)}$) в путешествие по орбите «вверх»,

[3] *См. «Квант» №4 за 1997 год.*

переходя от одного прообраза к предыдущему. У точки z_0 имеются два прообраза $\pm z_{-1}$, такие, что $f_c(\pm z_1) = (\pm z_1)^2 + c = z_0$. Выберем один из них *случайным* образом и обозначим его через z_{-1}. У точки z_{-1} имеются опять два прообраза $\pm z_{-2}$. Выберем *случайно* один из двух прообразов и обозначим его через z_{-2}. Двигаясь таким образом по орбите вверх и делая на каждом шаге случайный выбор между двумя прообразами, получаем последовательность $z_{-1}, z_{-2}, z_{-3}, \ldots$ Можно показать, что эта *случайная* последовательность точек, оставаясь внутри множества P_c, приближается к множеству Жюлиа J_c. Более конкретно, последовательность $\{z_{-n}\}$ сидит на сложно устроенной спирали, которая асимптотически наматывается на множество Жюлиа J_c. Подчеркнем, что в силу случайного выбора одного из двух прообразов, происходящего на каждом шаге, эта последовательность точек $\{z_{-n}\}$ будет нанизываться на *все множество Жюлиа*. Поэтому несколько тысяч первых точек последовательности $\{z_{-n}\}$, выведенные на экран компьютера, имитируют множество Жюлиа. Так как начальная точка орбиты может быть выбрана достаточно далеко от множества Жюлиа J_c да и орбита $\{z_{-n}\}$ сходится ко множеству Жюлиа не слишком быстро, то несколько первых точек орбиты следует выбросить, дабы не искажать картину. Другая неприятность – орбита распределяется вдоль множества Жюлиа не очень равномерно: некоторые участки проявляются весьма отчетливо, на других, наоборот, есть «проплешины». Чтобы заполнить эти проплешины в изображении, нужно либо позволить программе долго-долго работать, либо, учитывая самоподобие множества Жюлиа, «пересадить» на проплешины куски кривой Жюлиа с других уже проявившихся участков. Последний подход намного эффективней. Благодаря ему уже первые несколько точек орбиты дают изображение множества Жюлиа, более отчетливое, чем при стандартном подходе – сотня тысяч точек орбиты.

Преодолев эти трудности, вы будете вознаграждены: вы сможете самостоятельно знакомиться с миром изумительных по красоте и разнообразию множеств Жюлиа. Судя по эскизам этих множеств, которые делал сам Жюлиа «от руки», автор вряд ли представлял все великолепие «царства» множеств, носящих теперь его имя, а о некоторых глубоких свойствах он даже не подозревал. Например, во второй половине XX века был обнаружен «взрывной» характер множеств Жюлиа. Давайте при заданном направлении «ветра» c будем непрерывно увеличивать силу $|c|$. Получающиеся при этом множества Жюлиа становятся все более и более сложными и ажурными. Оказывается, что при достижении некоторого значения модуля $|c|$ множество Жюлиа *взрывается*, разлетаясь при этом на *бесконечное* число отдельных кусочков (рис.9). Значение модуля $|c|$, при котором происходит взрыв, зависит от направления вектора c. Отложив на плоскости все значения c, при которых происходит взрыв множества J_c, Б.Мандельброт получил новое множество, еще

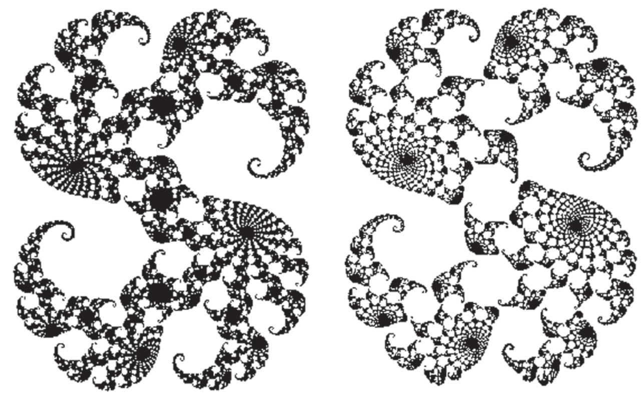


Рис. 9

более сложное и восхитительное, чем множества Жюлиа. Теперь это множество называется именем его открывателя – *множество Мандельброта*. Но это – тема другой статьи.

НАША ОБЛОЖКА

Мозаика из снежинок

На первой странице обложки изображена мозаика из так называемых *снежинок Кох*. Снежинка Кох является одним из фракталов, о которых можно прочитать, например, в статье Н.Долбилина в этом номере журнала.

Построить снежинку можно следующим образом. Возьмем равносторонний треугольник, разделим каждую его сторону на три равных отрезка и построим на средних отрезках правильные треугольники во внешнюю сторону от исходного. Получим фигуру, ограниченную 12 отрезками. Разделим каждый из этих отрезков на три части и вновь построим на средних отрезках правильные треугольники (рис.1).

Повторим ту же операцию с отрезками, ограничивающими полученную фигуру, и т.д. В пределе как раз получится снежинка Кох.

Отметим, что периметр снежинки бесконечен, а площадь конечна и равна $\frac{8}{5}$ площади исходного треугольника.

(Продолжение см. на с. 29)

Лев Давидович Ландау

22 января 2008 года исполнилось бы сто лет величайшему физику-теоретику XX века Льву Давидовичу Ландау.

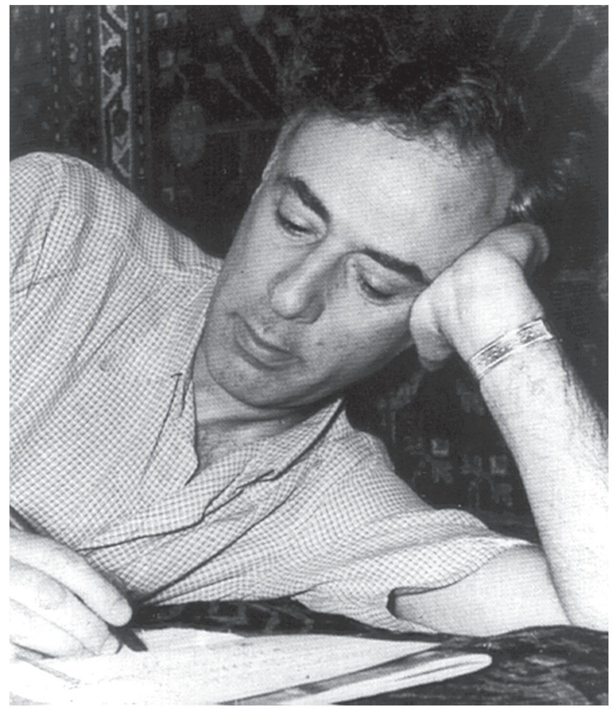
Предлагаем вниманию читателей отрывок из книги М.И.Каганова «Школа Ландау: что я о ней думаю» (книга выпущена издательством «Тровант» в 1998 году). Автор книги принимал самое непосредственное участие в жизни этой Школы.

Льва Давидовича никогда не привлекали модные увлечения читательской аудитории: снежный человек, телепатия, летающие тарелки и т.п. Большинство подобных увлечений он считал интеллигентским суеверием и остро высмеивал.

Я неоднократно рассказывал об ироническом отношении Дау к «таинственным» явлениям, и часто слушатели обижались за «таинственное» явление, высказывали удивление, иногда даже подозревали Льва Давидовича в ограниченности. Дело, конечно, не в ограниченности. Повышенный интерес к таинственным, загадочным проблемам, как правило, связан с тем, что обычные, ежедневные проблемы скучнеют, теряют свежесть что ли. В Ландау поражал неослабевающий с годами интерес к реальным (большим и малым) задачам, которые ставит и решает физика.

Он разговаривал о науке с сотнями физиков. Они рассказывали ему самые различные работы, отличающиеся по трудности, по глубине, по значительности, работы, относящиеся к самым разным объектам – к твердым телам и к элементарным частицам, к звездам и к газам. Работа выслушивалась Дау, выслушивалась и занимала место в его фантастической памяти в том и только в том случае, если она удовлетворяла простому принципу: работа должна разъяснить что-то непонятное. Бесконечно разъясняющимся и бесконечно ставящим новые загадки – таким видел и ощущал мир Дау. Острый интерес к решению реальных задач не оставлял места для задач надуманных, хотя, быть может, и весьма увлекательных. И еще: Ландау всегда требовал профессионального отношения к науке, не любил дилетантов. Его раздражали болтовня и верхоглядство, которые, как правило, сопровождали попытки решения «таинственных» проблем.

Говоря о Ландау, часто упоминают о гениальной интуиции, о «даре божьем». Дар божий, конечно, был, но была и ежедневная, нет, ежечасная титаническая работа, утомляющая, требующая отдачи всего себя. Я встречался с Дау вечерами, после рабочего дня, когда усталость, усугубленная невозможностью отключиться, была видна невооруженным глазом. Он задумывался, выпадал из разговора. Однако всегда брал себя в руки и включался в беседу. При этом очень помогали стандартные темы – о счастье, о любви, о том, каковы должны быть женские прически и женские платья.



Л.Д.Ландау за работой (1959 г.)

Я не хочу, чтобы подумали, будто разговоры о счастье, любви были для Ландау способом отвлечься от работы. Это, по-моему, совершенно не так. Он по-настоящему глубоко, я бы сказал выстраданно, интересовался «вечными темами». Его высказывания были нестандартны. Многих отпугивала «теорфизическая» ясность, с которой Дау пытался (и часто не без успеха) решать сложные задачи человеческих взаимоотношений. Он был глубоко убежден, что в большинстве случаев сложность взаимоотношений надуманна (он всегда строго различал слова «сложно» и «трудно»), и пытался добраться до материалистической сущности конфликта, если таковой был. По своему темпераменту Дау был просветителем, и не только в науке, но и в жизни. Он считал, что людей надо учить жить. И учил...

Ландау прожил трудную, но, по сути, счастливую жизнь. Он был окружен преданными учениками, признание и слава достались ему при жизни. Ему казалось естественным – человек должен быть счастливым. Если ты несчастлив, то, поняв это, тщательно проанализировав, что мешает тебе жить и, главное, получать от жизни удовольствие, ты обязан (именно обязан) добиваться своего счастья, бороться за него.