

# Экспериментальные задачи по физике

М.ЖУЖА, Е.ЖУЖА, Н.ЧЕРНАЯ

КАК ИЗВЕСТНО, НЕКОТОРЫЕ ПРОСТЫЕ ОПЫТЫ МОЖНО выполнять и в домашних условиях. Ниже приводятся несколько таких экспериментальных задач (с возможными решениями), которые были составлены для учащихся Центра дополнительного образования детей города Краснодара.

## Задача 1. Карандаш

Оцените механическую работу, которую необходимо совершить для того, чтобы равномерно поднять плавающий в сосуде карандаш до уровня касания нижним его торцом поверхности воды. Считайте положение карандаша вертикальным. Плотность воды  $\rho_0 = 1000 \text{ кг/м}^3$ .

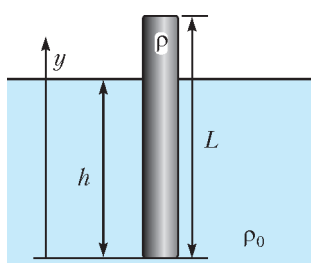


Рис. 1

*Оборудование:* круглый карандаш, почти полная бутылка с водой, линейка.

*Решение.* Опускаем карандаш в бутылку – он будет плавать, как поплавок (рис.1). Пусть  $L$  – длина всего карандаша,  $V$  – его объем,  $h$  – длина погруженной в воду части карандаша,  $V_1$  – ее объем,  $S$  – площадь сечения и  $d$  – диаметр карандаша. Найдем среднюю плотность карандаша  $\rho$  из условия плавания тела:

$$\rho_0 g S h = \rho g S L, \text{ откуда } \rho = \rho_0 \frac{h}{L}.$$

Предположим, что мы с постоянной скоростью вытаскиваем карандаш из воды, используя динамометр. Когда карандаш свободно плавает, динамометр показывает ноль. Если же карандаш полностью вытащить из воды, то динамометр покажет силу, равную весу  $P$  карандаша:

$$F = P = mg = \rho g V = \rho_0 \frac{h}{L} g S L = \rho_0 h g \frac{\pi d^2}{4}.$$

Получается, что показания динамометра при вытаскивании карандаша из воды изменяются от 0 до  $P$  по линейному закону (рис.2). При этом механическая работа  $A$  будет равна площади выделенного треугольника:

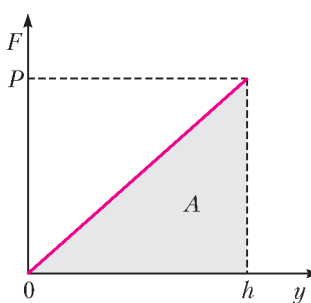


Рис. 2

$$A = \frac{1}{2} P h = \frac{\rho_0 h^2 g \pi d^2}{8}.$$

Например, при  $h = 13,4 \text{ см}$  и  $d = 7,5 \text{ мм}$  работа составляет около  $0,004 \text{ Дж}$ .

## Задача 2. Сплав

Определите процентное содержание (по массе) олова в оловянно-свинцовом припое. Предположите, что объемы

свинца и олова в сплаве сохраняются. Плотность свинца  $\rho_c = 11350 \text{ кг/м}^3$ , олова  $\rho_o = 7300 \text{ кг/м}^3$ .

*Оборудование:* линейка, груз (гайка), цилиндрический кусок припоя, штангенциркуль или микрометр.

*Решение.* Эта задача аналогична задаче Архимеда по определению доли золота в царской короне. Однако для опытов оловянно-свинцовый припой достать проще, чем корону.

Измерив диаметр куска припоя  $D$  и его длину  $L$ , найдем объем цилиндрического куска припоя:

$$V = \frac{\pi D^2 L}{4}.$$

Массу припоя определим, изготовив рычажные весы. Для этого уравновесим линейку на краю стола (на карандаше, на стержне от шариковой ручки и т.п.). Затем, используя гайку известной массы, уравновесим кусок припоя на линейке и с помощью равенства моментов сил найдем массу припоя  $m$ . Запишем очевидные равенства для масс, объемов и плотностей свинца и олова:

$$m = m_c + m_o = \rho_c V_c + \rho_o V_o, \quad V = V_c + V_o.$$

Решая эти уравнения совместно, найдем объем олова, его массу и долю в общей массе:

$$V_o = \frac{\rho_c V - m}{\rho_c - \rho_o}, \quad m_o = \rho_o V_o, \quad \frac{m_o}{m} = \frac{\rho_o V_o}{m}.$$

## Задача 3. Поверхностное натяжение

Определите коэффициент поверхностного натяжения воды.

*Оборудование:* тарелка, вода, ложка, линейка, кусок ровной алюминиевой проволоки длиной 15–20 см и плотностью  $2700 \text{ кг/м}^3$ , микрометр, спирт, вата.

*Решение.* Налейте почти полную тарелку воды. Положите на край тарелки проволоку так, чтобы один конец ее касался воды, а другой был за пределами тарелки. Проволока выполняет две функции: она является рычажными весами и аналогом проволоочной рамки, которую обычно вытаскивают из воды для измерения поверхностного натяжения. В зависимости от уровня воды могут наблюдаться различные положения проволоки. Наиболее удобно для расчетов и измерений горизонтальное расположение проволоки при уровне воды на 1–1,5 мм ниже края тарелки (рис.3). С помощью ложки можно регулировать уровень, доливая или отливая воду. Проволоку следует выдвигать из тарелки до тех пор, пока пленка воды под проволокой не начнет разрываться. В этом крайнем положении пленка имеет высоту 1,5–2 мм, и можно сказать, что силы поверхностного натяжения, приложенные к проволоке, направлены практически вертикально вниз.

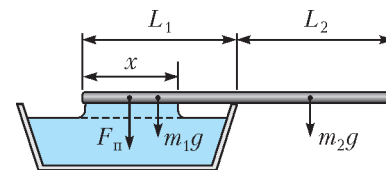


Рис. 3

Пусть  $m$  – масса проволоки,  $L = L_1 + L_2$  – длина проволоки,  $m/L$  – масса единицы длины проволоки. Запишем условие равновесия проволоки относительно края тарелки, т.е. равенство моментов сил:

$$F_n \left( L_1 - \frac{x}{2} \right) + m_1 g \frac{L_1}{2} = m_2 g \frac{L_2}{2}.$$

Подставим сюда силу поверхностного натяжения  $F_n = 2x\sigma$ , массы:  $m_1 = \frac{L_1 m}{L}$ ,  $m_2 = \frac{L_2 m}{L}$ ,  $m = \rho V = \frac{\rho \pi d^2 L}{4}$  и выразим коэффициент поверхностного натяжения  $\sigma$ . Измерения и

вычисления упростятся, если вода будет смачивать всю длину  $L_1$ . Окончательно получим

$$\sigma = \frac{\rho \pi d^2 g}{8} \left( \left( \frac{L}{L_1} - 1 \right)^2 - 1 \right).$$

Величины  $L$  и  $L_1$  измеряются линейкой, а диаметр проволоки  $d$  – микрометром.

Например, при  $L = 15$  см,  $L_1 = 5,4$  см,  $d = 1,77$  мм получаем  $\sigma = 0,0703$  Н/м, что близко к табличному значению  $0,0728$  Н/м.

#### Задача 4. Влажность воздуха

Определите относительную влажность воздуха в комнате.

**Оборудование:** стеклянный комнатный термометр, бытовой холодильник, таблица давлений насыщенных паров воды при различных температурах.

**Решение.** При обычном методе измерения влажности объект охлаждают ниже точки росы и он «запотевает». Сделаем наоборот. Температура в холодильнике (около  $+5$  °С) намного ниже точки росы для комнатного воздуха. Поэтому, если вытащить охлажденный стеклянный термометр из холодильника, то он сразу «запотеет» – стеклянный корпус станет непрозрачным от влаги. Затем термометр начнет нагреваться, и в какой-то момент сконденсировавшаяся влага на нем испарится – стекло станет прозрачным. Это и есть температура точки росы, по которой с помощью таблицы можно рассчитать относительную влажность.

#### Задача 5. Испарение

Налейте почти полный стакан воды и поставьте его в комнате в теплое место – для того чтобы вода быстрее испарялась. Измерьте линейкой начальный уровень воды и запишите время начала опыта. Через несколько дней уровень воды понизится за счет испарения. Измерьте новый уровень воды и запишите время окончания опыта. Определите массу испарившейся воды. Сколько в среднем молекул вылетало с поверхности воды за 1 секунду? Сколько приблизительно молекул находится на поверхности воды в стакане? Сравните эти два числа. Диаметр молекулы воды примите равным  $d_0 = 0,3$  нм. Зная удельную теплоту парообразования, определите скорость передачи тепла (Дж/с) воде от окружающей среды.

**Решение.** Пусть  $d$  – внутренний диаметр стакана,  $\rho$  – плотность воды,  $M$  – молярная масса воды,  $r$  – удельная теплота парообразования,  $\Delta h$  – понижение уровня воды за время  $t$ . Тогда масса испарившейся воды равна

$$m = \rho V = \rho \Delta h S = \frac{\rho \Delta h \pi d^2}{4}.$$

В этой массе содержится  $N = mN_A/M$  молекул, где  $N_A$  – постоянная Авогадро. Число испарившихся за 1 секунду молекул равно

$$N_1 = \frac{N}{t} = \frac{mN_A}{Mt}.$$

Если  $S = \pi d^2/4$  – площадь поверхности воды в стакане, а  $S_0 = \pi d_0^2/4$  – площадь сечения одной молекулы, то на поверхности воды в стакане находится приблизительно

$$N_2 = \frac{S}{S_0} = \left( \frac{d}{d_0} \right)^2 \text{ молекул.}$$

Вода для испарения получает в единицу времени количество теплоты

$$\frac{Q}{t} = \frac{rm}{t}.$$

Если производить какие-либо расчеты, связанные с молекулами, то всегда получаются интересные результаты. Например, пусть за время  $t = 5$  суток в стакане диаметром  $d = 65$  мм уровень воды понизился на  $\Delta h = 1$  см. Тогда получим, что в пар превратилось  $33$  г воды, за  $1$  с испарилось  $N_1 = 2,56 \cdot 10^{18}$  молекул, на поверхности воды в стакане находилось  $N_2 = 4,69 \cdot 10^{16}$  молекул, а из окружающей среды поступило  $0,19$  Вт тепла. Интересным является отношение  $N_1/N_2 \approx 54$ , из которого видно, что за  $1$  с испарялось столько молекул, сколько помещалось в стакане в  $54$  слоях воды.

#### Задача 6. Растворение

Высыпая соль или сахар в кипящую воду, можно заметить, что кипение ненадолго прекращается за счет снижения температуры воды. Определите количество теплоты, необходимое для растворения  $1$  кг пищевой соды в воде комнатной температуры.

**Оборудование:** самодельный калориметр, термометр, вода, сода, мерный цилиндр (стакан), груз известной массы (гайка массой  $10$  г), пластиковая ложка.

**Решение.** В задачу входит дополнительное конструкторское задание по изготовлению простого самодельного калориметра. Для внутреннего сосуда калориметра следует взять обычную алюминиевую банку объемом  $0,33$  л. У банки удаляется верхняя крышка так, чтобы получился алюминиевый стакан (массой всего  $12$  г) с жестким верхним ободком. Внутри верхнего ободка делается прорезь для того, чтобы вода полностью выливалась из банки. Внешняя пластмассовая оболочка изготавливается на основе пластиковой бутылки объемом  $1,5$  л. Бутылка разрезается на три части, верхняя часть удаляется, а средняя и нижняя части с некоторым усилием вставляются друг в друга и плотно фиксируются внутренней алюминиевой банкой в вертикальном положении. (Если нет калориметра, то опыты можно проводить и в одноразовом пластиковом стаканчике, массой и теплопередачей которого можно пренебречь.)

Предварительно следует сделать два измерения: 1) определить, сколько соды помещается в ложку (для этого надо заглянуть в кулинарный справочник или «вычерпать» этой ложкой пакет соды известной массы); 2) определиться с количеством воды – в малом количестве воды раствор сразу же станет насыщенным и часть соды не растворится, в большом количестве воды температура изменится на доли градуса, что затруднит измерения.

Очевидно, что количество теплоты, необходимое для растворения вещества, пропорционально массе этого вещества:  $Q \sim m$ . Для записи равенства следует ввести коэффициент пропорциональности, например  $z$ , который можно назвать «удельной теплотой растворения». Тогда

$$Q = zm.$$

Растворение соды осуществляется за счет энергии, выделяющейся при охлаждении сосуда с водой. Величина  $z$  находится из следующего уравнения теплового баланса:

$$m_b c_b (t_2 - t_1) + m_a c_a (t_2 - t_1) = zm,$$

где  $m_b$  – масса воды в калориметре,  $m_a$  – масса внутреннего алюминиевого стакана калориметра,  $m$  – масса растворенной соды,  $(t_2 - t_1)$  – понижение температуры в калориметре. Массу внутреннего сосуда калориметра можно легко найти, используя правило моментов сил, уравновесив сосуд и груз известной массы при помощи линейки и ниток.

Измерения и расчеты показывают, что при  $m = 6$  г и  $m_b = 100$  г вода остывает на  $2 - 2,5$  °С, а величина  $z$  оказывается равной  $144 - 180$  кДж/кг.

# Электрические колебания в нестандартных контурах

**В. МУРАВЬЕВ**

В ШКОЛЕ ОБЫЧНО РАССМАТРИВАЮТСЯ КОЛЕБАНИЯ идеального контура (рис.1). При этом не учитывается активное сопротивление катушки индуктивности и считается, что конденсатор представляет собой две пластины, разделенные диэлектриком, не проводящим электрический ток.

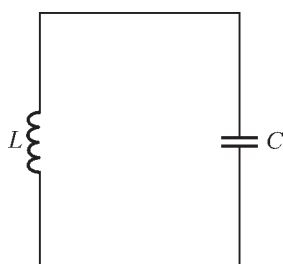


Рис. 1

Уравнение собственных колебаний такого контура имеет вид

$$q'' + \frac{1}{LC} q = 0,$$

где  $q$  – заряд конденсатора,  $L$  и  $C$  – индуктивность катушки и емкость конденсатора соответственно. Решением этого уравнения

является функция

$$q = q_m \cos(\omega t + \varphi),$$

где  $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  – циклическая частота,  $\varphi$  – начальная фаза,  $q_m$  – амплитуда колебаний заряда на конденсаторе.

Однако иногда роль конденсатора и катушки играют другие системы проводящих тел, а у реальных конденсаторов среда между обкладками обладает конечным сопротивлением. К рассмотрению колебаний в контурах с такими катушками и конденсаторами мы и переходим.

**Задача 1.** Колебательный контур содержит конденсатор с «утечкой». Это значит, что небольшая часть заряда, поступающего на одну из обкладок конденсатора, проходит через диэлектрик на другую обкладку. Емкость конденсатора  $C$ , сопротивление среды между пластинами конденсатора  $R$ , индуктивность катушки  $L$ . Пренебрегая сопротивлением катушки и соединительных проводов, выведите уравнение свободных колебаний контура. Найдите период этих колебаний.

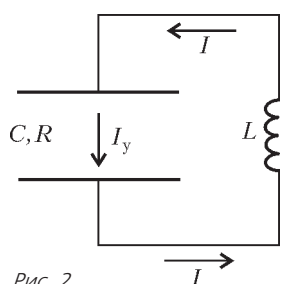


Рис. 2

На рисунке 2 изображен рассматриваемый в задаче нестандартный контур, где  $I$  – ток, текущий через катушку,  $I_y$  – ток утечки конденсатора. Приравняв напряжение на конденсаторе к ЭДС самоиндукции катушки, получаем

$$U = -L \frac{dI}{dt} = -LI'.$$

Заряд конденсатора связан с напряжением на нем известным соотношением

$$Q = CU.$$

Согласно закону сохранения заряда,

$$Q' = I - I_y.$$

По закону Ома,

$$U = I_y R.$$

Из полученных соотношений находим уравнение свободных колебаний:

$$Q'' + \frac{1}{RC} Q' + \frac{1}{LC} Q = 0.$$

Из этого уравнения видно, что при больших  $R$  получается рассмотренное выше уравнение гармонических колебаний идеального контура с частотой  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ . В остальных случаях наше уравнение описывает затухающие колебания.

Решением этого уравнения является функция

$$Q = Q_m e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi),$$

где

$$\delta = \frac{1}{2RC}, \quad \omega^2 = \omega_0^2 - \delta^2.$$

В этом можно убедиться методом подстановки.

Итак, в рассматриваемом контуре происходят свободные колебания с периодом

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}},$$

несколько большем, чем период собственных колебаний в идеальном контуре. Такие затухающие колебания имеют место при условии, что  $\omega_0^2 > \delta^2$ , т.е.  $R > \frac{1}{2} \sqrt{\frac{L}{C}}$ . А вот при

$R \gg \frac{1}{2} \sqrt{\frac{L}{C}}$  проводимостью конденсатора можно пренебречь и считать колебательный контур идеальным.

**Задача 2.** Проводящий шар радиусом  $r$  через катушку индуктивностью  $L$  соединен с землей (рис.3). Из бесконечности на него налетает пучок электронов. Определите максимальный заряд шара и нарисуйте график зависимости силы тока, текущего через катушку, от времени. Изначально шар заряжен не был, концентрация электронов в налетающем пучке  $n$ , а их скорость  $v \ll c$ , где  $c$  – скорость света.

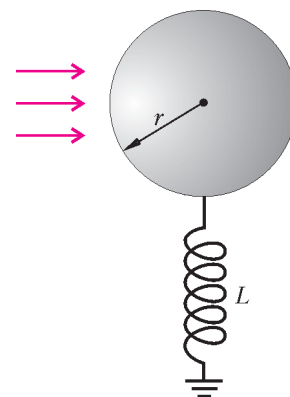
Пусть  $Q$  – заряд шара в некоторый момент времени,  $I$  – ток, стекающий с шара. Тогда можно записать уравнение

$$L \frac{dI}{dt} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Рис. 3

Приращение заряда шара равно  $dQ = dQ_n + dQ_L$ , где  $dQ_n = n\pi r^2 v dt$  – приращение за счет налетающего электронного пучка,  $dQ_L = -Idt$  – заряд, стекающий через катушку. Таким образом,

$$dQ = n\pi r^2 v dt - Idt.$$



Дифференцируя это выражение по времени, с учетом первого уравнения получим

$$Q'' = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r L} Q.$$

Это уравнение описывает гармонические колебания с частотой  $\omega = \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 r L}}$ . В начальный момент (при  $t = 0$ )  $Q = 0$  и  $\frac{dQ}{dt} = ne\pi r^2 v$ , откуда

$$Q = Q_{\max} \sin \omega t,$$

где максимальный заряд шара есть

$$Q_{\max} = ne\pi r^2 v \sqrt{4\pi\epsilon_0 r L}.$$

Дифференцируя полученную функцию  $Q(t)$  по времени, найдем ток, текущий через катушку:

$$I = ne\pi r^2 v (1 - \cos \omega t).$$

График этой функции изображен на рисунке 4, где

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{4\pi\epsilon_0 r L} \text{ и } I_m = ne\pi r^2 v.$$

В рассмотренном контуре конденсатор представляет собой проводящий шар. Емкость этого конденсатора равна

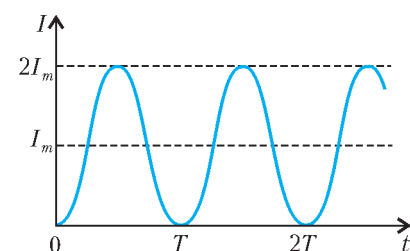


Рис. 4

$C = 4\pi\epsilon_0 r$ , поэтому полученную формулу для периода колебаний можно представить в обычном виде:

$$T = 2\pi\sqrt{4\pi\epsilon_0 r L} = 2\pi\sqrt{LC}.$$

Заметим, что в идеальном колебательном контуре конденсатор заряжается и разряжается через катушку индуктивности, а здесь конденсатор разряжается через катушку, а заряжается посредством потока электронов.

**Задача 3.** С одной пластины изначально незаряженного конденсатора, соединенного с катушкой индуктивности, мгновенно отделяется заряд  $q$ , локализованный в тонком слое вещества, и затем движется поступательно как единое целое с постоянной скоростью  $v$  по направлению к противоположной пластине. Найдите зависимость тока в цепи от времени, пока слой движется внутри конденсатора. Расстояние между пластинами конденсатора  $d$ , площадь пластин  $S$ , индуктивностью катушки  $L$ .

Рис. 5

Пусть расстояние от левой обкладки конденсатора до отделившегося слоя в некоторый момент времени равно  $x$  (рис.5), а заряды левой и правой обкладок составляют  $q_1$  и  $q_2$  соответственно. Из закона сохранения заряда следует, что

$$-q = q_1 + q_2.$$

Напряжение на конденсаторе равно

$$U = E_1 x + E_2 (d - x),$$

где

$$E_1 = \frac{q_1}{2\epsilon_0 S} - \frac{q_2}{2\epsilon_0 S} - \frac{q}{2\epsilon_0 S}$$

— напряженность электрического поля между заряженным слоем и левой обкладкой, а

$$E_2 = \frac{q_1}{2\epsilon_0 S} - \frac{q_2}{2\epsilon_0 S} + \frac{q}{2\epsilon_0 S}$$

— напряженность поля между слоем и правой обкладкой. Таким образом, получаем

$$U = \frac{q + 2q_1}{2\epsilon_0 S} d + \frac{q}{2\epsilon_0 S} (d - 2x).$$

Приравняем напряжение на конденсаторе к ЭДС самоиндукции катушки:

$$-L \frac{dI}{dt} = \frac{q + 2q_1}{2\epsilon_0 S} d + \frac{q}{2\epsilon_0 S} (d - 2x),$$

где  $I$  — ток текущий через катушку. Продифференцируем это уравнение по времени и, учитывая, что  $v = x'$  и  $I = q_1'$ , найдем

$$LI'' = -\frac{Id}{\epsilon_0 S} + \frac{qv}{\epsilon_0 S},$$

или

$$I'' = -\frac{d}{\epsilon_0 SL} \left( I - \frac{qv}{d} \right).$$

Обозначим  $y = I - \frac{qv}{d}$ , тогда получим

$$y'' = -\frac{d}{\epsilon_0 SL} y.$$

Это знакомое нам уже уравнение гармонического осциллятора. Решением его является функция

$$I - \frac{qv}{d} = I_m \cos(\omega t + \phi), \text{ где } \omega^2 = \frac{d}{\epsilon_0 SL}.$$

Учитывая, что в начальный момент ( $t = 0$ )  $I = 0$  и  $L \frac{dI}{dt} = 0$ , получаем, что  $I_m = -\frac{qv}{d}$  и  $\phi = 0$ . Таким образом, при  $t \leq \frac{d}{v}$  ток в цепи изменяется по закону

$$I(t) = \frac{qv}{d} (1 - \cos \omega t), \text{ где } \omega = \sqrt{\frac{d}{\epsilon_0 SL}}.$$

Заметим, что изменения тока со временем можно считать колебаниями, если  $\frac{d}{v} > 2\pi\sqrt{\frac{\epsilon_0 SL}{d}}$ . В рассматриваемом нестандартном контуре движение заряженного слоя с постоянной скоростью не влияет на период возникших колебаний, однако это движение вызывает эти колебания и определяет их амплитуду.

**Задача 4.** В плоский конденсатор емкостью  $C$ , последовательно соединенный с катушкой индуктивностью  $L$ , параллельно пластинам вставляется конденсатор таких же поперечных размеров, но с меньшим расстоянием между обкладками (рис.6), подключенный к генератору импульсного напряжения, гра-

Рис. 6

(Продолжение см. на с. 34)

# «Невозможные» фигуры

В 1934 году из-под кисти шведского художника Оскара Реутерсварда (Oscar Reutersvard) вышло полотно, положившее начало новому направлению современного искусства с названием imp-art (от английских слов **impossible** — невозможный и **art** — искусство). В центре его внимания стало тонкое обыгрывание геометрических мотивов. Копия картины Реутерсварда изображена на рисунке 1. Присмотритесь внимательно: возможно ли такое расположение девяти кубов в пространстве?

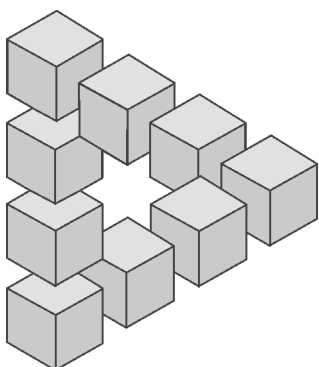


Рис. 1

Впоследствии Реутерсвард придумал около 2500 подобных сюжетов, изображающих необычное, парадоксальное, иллюзорное отображение трехмерного мира на двумерный холст картины. В частности, в одном из своих сюжетов число кубов он довел до минимально возможного количества: трех (рис. 2).

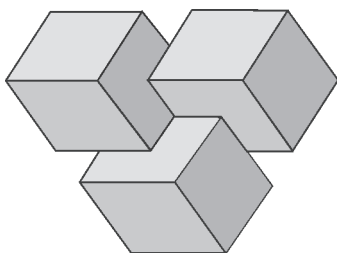


Рис. 2

В 1954 году независимо от Реутерсварда английский математик и физик Роджер Пенроуз придумал объект, названный им «Невозможный треугольник» (рис. 3). Если Реутерсвард все свои фигуры рисовал в изометрической проекции, которую он называл «японской», то в исходном треугольнике Пенроуза присутствовал некий эффект перспективы (ребра по каждой из трех сторон не были параллельны друг другу). Это еще более усиливает ощущение невозможности.

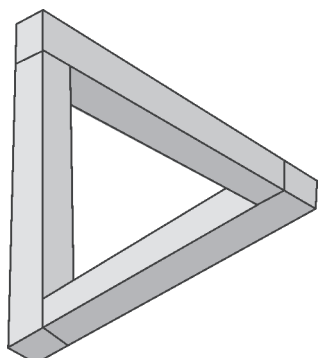


Рис. 3

Дальнейшие модификации «треугольника» Пенроуза в сторону увеличения количества «сторон» показаны на рисунке 4.

Значительный вклад в искусство парадоксальных эффектов внесли художники Мауриц К. Эшер, Жос

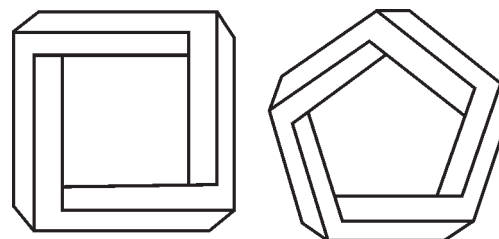


Рис. 4

де Мей, Сандро дель Пре, Иштван Орос, Висенте Мевилла Сегуи и другие. Их работы вызывают интерес не только у ценителей искусства, но и у математиков и психологов.

Вот еще несколько ярких образцов из обширной и постоянно пополняющейся коллекции «невозможных» фигур (рис. 5–7).

Оскар Реутерсвард:

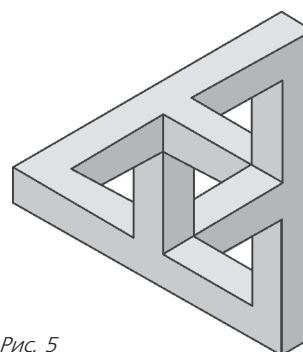


Рис. 5

Влад Алексеев:

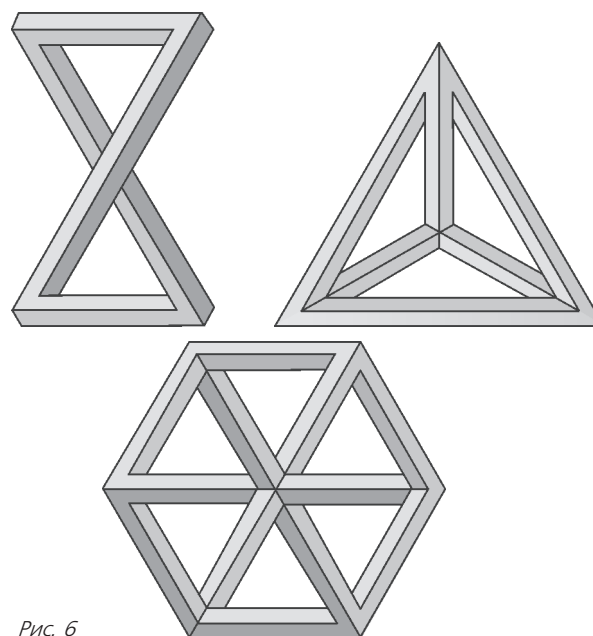


Рис. 6

Кокичи Сугихара:

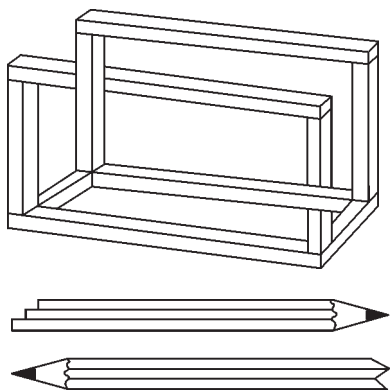


Рис. 7

В словосочетании «невозможные» фигуры первое слово взято в кавычки. Почему? Оказывается, «невозможные» объекты в нашем трехмерном мире вполне возможны, только выглядят они совсем не так, как нам диктуют наши стереотипы восприятия чертежей. Реальный объект — прототип иллюзии — может иметь разрывы, деформации, но с некоторой точки зрения это легко не заметить — и вот вам чудо во всей красе!

Трюк с разрывом использовали художник Брайан МакКей и архитектор Ахмад Абас, создавая архитектурную достопримечательность города Перта (Австралия). Алюминиевая конструкция с ребристой структурой высотой 13,5 метров (рис. 8) с определенной



Рис. 8

точки зрения выглядит как «невозможный треугольник» Пенроуза (рис. 9). Эти фотографии специально для журнала «Квант» сделала Анна Звонкова (Австралия).

Впрочем, не обязательно ехать в Австралию. Профессор математики из Токийского университета Кокичи Сугихара, автор оригинальных расчетных методик инженерной графики ([www.simpler.t.u-tokyo.ac.jp/~sugihara](http://www.simpler.t.u-tokyo.ac.jp/~sugihara)), предлагает воплотить эту идею в бумаге. Для этого он рассчитал «выкройки» трех бумажных брусков, из которых склеивается удиви-



Рис. 9

тельная конструкция. Сосканируйте или сделайте ксерокопию приведенных на рисунке 10 чертежей, увеличьте их с помощью подходящего редактора

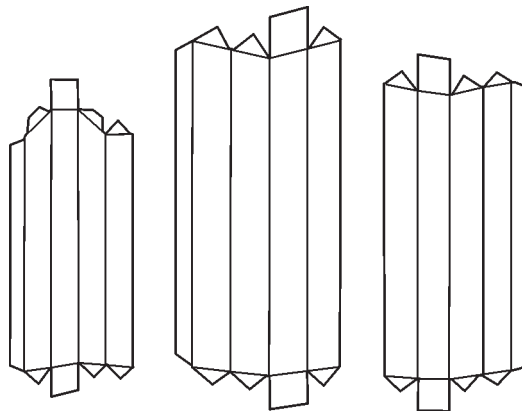


Рис. 10

изображений (для этих целей, например, хорошо подходит программа Photoshop), распечатайте, а дальше призовите на помощь ножницы и клей. На склеенную модель рекомендуется смотреть одним глазом с расстояния, в 20 раз превышающего характерные размеры модели.

При подготовке этой статьи были использованы материалы сайта <http://im-possible.info>, а также книги Кокичи Сугихары «Восхищение невозможными объектами».

В. Алексеев, А. Жуков

(Начало см. на с. 30)

фик которого показан на рисунке 7. Определите минимальные значения  $t_1$  и  $t_2$ , при которых в контуре будут происходить установившиеся колебания с неизменной амплитудой. Нарисуйте график зависимости напряжения на конденсаторе от времени.

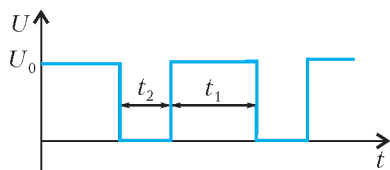


Рис. 7

При подаче импульса напряжения на внутренний конденсатор резко изменяется на ту же величину напряжение на внешних обкладках, и в контуре начинаются свободные электрические колебания с амплитудой  $U_0$ . Для того чтобы амплитуда колебаний оставалась неизменной и после снятия импульса, необходимо, чтобы ток в цепи до снятия импульса равнялся току в свободно колеблющемся контуре при напряжении на конденсаторе  $U(t) - U_0$ , где  $U(t)$  — напряжение в контуре при снятии импульса. Аналогичное условие можно выдвинуть и для подачи импульса напряжения. Единственное напряжение  $U(t)$ , для которого эти условия выполняются, есть  $U(t) = \pm \frac{U_0}{2}$ .

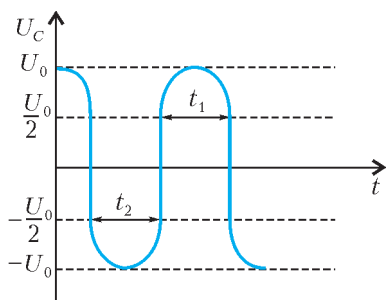


Рис. 8

Нарисуем теперь зависимость напряжения на конденсаторе от времени на графике (рис.8). Ясно, что

$$t_1 = t_2 = 2 \frac{1}{\omega} \arccos \frac{1}{2}, \text{ где } \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

или

$$t_1 = t_2 = \frac{T}{3}, \text{ где } T = 2\pi\sqrt{LC}.$$

**Задача 5.** Из катушки индуктивностью  $L$ , намотанной на сердечник с большой магнитной проницаемостью, и двух конденсаторов емкостью  $C_1$  и  $C_2$  собрана схема, изображенная на рисунке 9. Один из конденсаторов подключен к половине катушки. В начальный момент времени ток через катушку отсутствует, напряжение на конденсаторе емкостью  $C_1$  равно  $U_0$ , а конденсатор емкостью  $C_2$  не заряжен. Нарисуйте график зависимости напряжения на верхнем конденсаторе от времени после замыкания ключа  $K$ . Считать, что  $C_1 = C_2 = C$ .

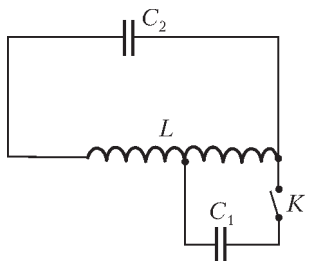


Рис. 9

Магнитный поток через любой виток катушки один и тот же (нет рассеяния магнитного потока), поэтому напряжение  $U_2$  на конденсаторе емкостью  $C_2$  всегда в два раза больше напряжения  $U_1$  на конденсаторе емкостью  $C_1$ :

$$U_2 = 2U_1.$$

В начальный момент, т.е. сразу после замыкания ключа, заряды на конденсаторах перераспределяются так, чтобы удовлетворить закону сохранения заряда и записанному

соотношению между напряжениями. Таким образом, если  $U_0^*$  — новое напряжение на первом конденсаторе, а  $U_0^{**}$  — на втором, то

$$CU_0 = CU_0^* + CU_0^{**} = CU_0^* + 2CU_0^* = 3CU_0^*.$$

Отсюда

$$U_0^* = \frac{1}{3}U_0, \quad U_0^{**} = \frac{2}{3}U_0.$$

Поскольку

$$I_{C_2} = \frac{dq_2}{dt} = \frac{1}{C} \frac{dU_2}{dt} \quad \text{и} \quad I_{C_1} = \frac{1}{C} \frac{dU_1}{dt},$$

то (рис.10)

$$I_{C_2} = I = 2I_{C_1} = 2I_C.$$

Суммарный магнитный поток  $\Phi$  через все витки равен сумме потоков  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  через витки левой и правой частей катушки соответственно:

$$\begin{aligned} \Phi &= \Phi_1 + \Phi_2 = \frac{L}{2} I + \frac{L}{2} (I + I_C) = \\ &= \frac{L}{2} (2I + I_C) = \frac{5}{4} LI. \end{aligned} \quad \text{Рис. 10}$$

Учитывая, что

$$\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{q_2}{C_2} = -U_2,$$

получаем

$$\frac{d^2 U_2}{dt^2} = -\frac{4}{5LC} U_2.$$

Это уравнение описывает гармонические колебания с частотой  $\omega_0 = \frac{2}{\sqrt{5LC}}$ . В начальный момент ( $t = 0$ )  $U_2 = \frac{2}{3}U_0$ , поэтому окончательно напряжение на верхнем конденсаторе изменяется со временем по закону

$$U_2 = \frac{2}{3}U_0 \cos \omega_0 t.$$

Период этих колебаний равен

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \pi\sqrt{5LC}.$$

График функции  $U_2(t)$  представлен на рисунке 11.

Таким образом, рассматриваемая система эквивалентна стандартному колебательному контуру с той же индуктивностью  $L$ , но с емкостью, равной  $\frac{5}{4}C$ . Напряжение на катушке эквивалентного контура в начальный момент равно  $\frac{2}{3}U_0$ .

### Упражнения

**1.** Конденсаторы, емкости которых  $C$  и  $2C$ , заряжены каждый до напряжения  $U_0$  и соединены последовательно «минусом» к «плюсу». К ним одновременно подключают две катушки: катушку индуктивностью  $L$  к конденсатору большей емкости и катушку индуктивностью

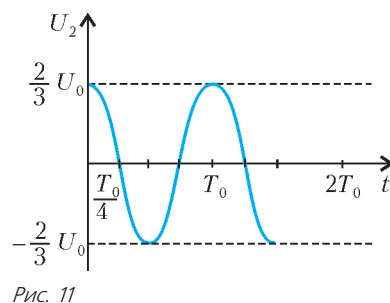


Рис. 11

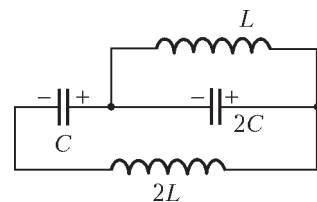


Рис. 12

$2L$  к разноименным концам батареи конденсаторов (рис.12). Найдите максимальный ток каждой из катушек. Через какое время после включения ток первой катушки станет максимальным?

2. Переключка массой  $m$  лежит на горизонтально расположенных рельсах перпендикулярно им (рис.13). Вертикальная составляющая магнитного поля равна  $B$ . Катушка индуктивностью  $L$  подключена к рельсам. Расстояние между рельсами  $d$ .

Начальная скорость переключки равна  $v_0$  и направлена к катушке. Пренебрегая сопротивлением проводников и считая, что переключка движется поступательно, определите зависимость ее скорости от времени.

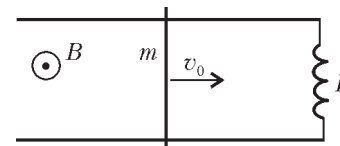


Рис. 13

## Об одном случае расположения сферы и пирамиды

**В.МИРОШИН**

СРЕДИ МНОЖЕСТВА РАЗЛИЧНЫХ СЛУЧАЕВ РАСПОЛОЖЕНИЯ сферы и пирамиды мы рассмотрим только один – тот, когда сфера касается боковых граней пирамиды в точках, лежащих на ребрах основания. Задача, послужившая прототипом множества подобных задач, более трудоемких, но не более трудных, появилась в 1995 году на вступительном экзамене по математике на механико-математическом факультете МГУ.

Обычно рассматриваются случаи касания сферы отдельно с плоскостями граней, отдельно с ребрами пирамиды, а тут – все вместе, что как раз и представляется интересным.

**Задача 1** (мехмат МГУ, 1995 г.). *Высота пирамиды равна 5, а основанием служит треугольник со сторонами 7, 8, 9. Некоторая сфера касается плоскостей всех боковых граней пирамиды в точках, лежащих на сторонах основания. Найдите радиус сферы.*

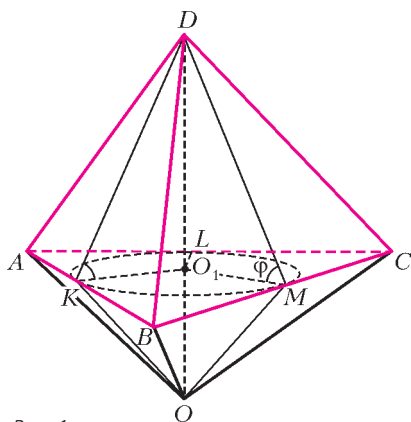


Рис. 1

**Решение.** Обозначим центр сферы  $O$  и рассмотрим пирамиду  $OABC$ , «пристроенную» к исходной пирамиде  $ABCD$  (рис.1).

Стороны треугольника  $ABC$  касаются сферы, следовательно, сечение сферы плоскостью  $(ABC)$  есть окружность, вписанная в треугольник основания.

Радиусы сферы  $OK$ ,  $OL$ ,  $OM$ , проведенные в точки касания, игра-

ют в пирамиде  $OABC$  роль апофем. Так как они равны, то грани пирамиды  $OABC$  одинаково наклонены к плоскости основания, и, таким образом, высота пирамиды  $OABC$ , совпадающая с отрезком перпендикуляра, проведенного из центра сферы на секущую плоскость, попадает в центр окружности  $O_1$ , вписанной в треугольник  $ABC$ .

Сфера касается не только сторон основания, но и боковых граней пирамиды  $DABC$  в тех же точках. Поэтому по признаку перпендикулярности плоскостей получим, что грани двух рассматриваемых пирамид, имеющие общее ребро, попарно перпендикулярны:

$$(OAB) \perp (DAB), (OAC) \perp (DAC), (OBC) \perp (DBC).$$

Но тогда (и именно в этом состоит вся изюминка данного способа касания сферы и пирамиды) боковые грани пирамиды  $DABC$  также одинаково наклонены к плоскости основания. Поэтому и высота пирамиды  $DABC$  также попадет в центр окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ . Кроме того, основания апофем боковых граней пирамиды  $DABC$  совпадут с точками касания сферы с соответствующими ребрами основания пирамиды.

Таким образом, при указанном расположении сферы и пирамиды центр сферы  $O$ , вершина пирамиды  $D$  и центр окружности  $O_1$ , вписанной в основание, лежат на одном перпендикуляре, проведенном к плоскости основания пирамиды. Этот перпендикуляр  $DO$ , радиус сферы  $OK$  и апофема  $DK$  боковой грани пирамиды – стороны прямоугольного треугольника, в котором высотой, проведенной к гипотенузе, служит радиус окружности, вписанной в основание (рис. 2). На этом рисунке показаны также угол наклона боковых граней пирамиды  $DABC$  к плоскости основания  $\varphi$ , высота пирамиды  $H$ , искомый радиус сферы  $R$  и радиус вписанной в основание окружности  $r$ .

Рис. 2

Теперь можно перейти к вычислениям. По формуле Герона площадь основания пирамиды равна  $S = \sqrt{12 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} = 12\sqrt{5}$ .

Величину  $r$  найдем, используя формулу  $r = \frac{S}{p}$ , где  $p$  – полупериметр основания:  $r = \sqrt{5}$ . Отсюда  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{H}{r} = \sqrt{5}$ ,

$$\sin \varphi = \frac{\sqrt{5}}{6}, \quad R = \frac{r}{\sin \varphi} = \sqrt{6}.$$

**Ответ:**  $\sqrt{6}$ .

Минимум вычислений при максимуме идей!

Задача, видимо, так понравилась, что уже через три года она была повторена, однако в гораздо более сложном варианте.

**Задача 2** (мехмат МГУ, 1998 г.). Дана пирамида  $ABCD$ . Сфера касается граней  $DAB$ ,  $DAC$ ,  $DBC$  в точках  $K$ ,  $L$ ,  $M$  соответственно. При этом точка  $K$  находится на стороне  $AB$ , точка  $L$  – на стороне  $AC$ , точка  $M$  – на стороне  $BC$ . Известно, что радиус сферы равен 3,  $\angle ADB = 90^\circ$ ,  $\angle BDC = 105^\circ$ ,  $\angle ADC = 75^\circ$ . Найдите объем пирамиды.

**Решение.** Как мы видим, условие в основной части, относящейся к расположению пирамиды и сферы, повторяет условие предыдущей задачи. Поэтому расположение вершины пирамиды, центра вписанной окружности и центра сферы такое же, как и в предыдущей задаче (рис. 3). Аналогично

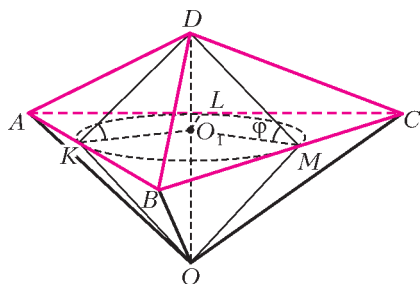


Рис. 3

получаем, что грани пирамиды одинаково наклонены к плоскости основания пирамиды. И в данной задаче именно этот факт играет определяющую роль.

Двугранные углы пирамиды являются элементами трехгранного ее углов с вершинами в вершинах основания. Изучение тригонометрии трехгранного угла не входит в курс общеобразовательной школы, однако знакомство с ней повысит математическую эрудицию абитуриентов и существенно облегчит решение некоторых стереометрических задач.

Приведем основные определения и теоремы, связанные с тригонометрией трехгранного угла.

Трехгранным углом называется фигура, образованная тремя лучами  $SA$ ,  $SB$ ,  $SC$ , исходящими из точки  $S$  (рис. 4). Точка  $S$  называется вершиной трехгранного угла, лучи  $SA$ ,  $SB$ ,  $SC$  – его ребрами, плоские углы  $ASB$ ,  $ASC$ ,  $BSC$  – его гранями.

Основными элементами трехгранного угла являются плоские углы  $\angle BSC = \alpha$ ,  $\angle ASC = \beta$ ,  $\angle ASB = \gamma$ , а также противолежащие им двугранные углы  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , ребрами которых являются лучи  $SA$ ,  $SB$ ,  $SC$  соответственно.

Рис. 4

В тригонометрии трехгранных углов используются в основном три теоремы: теорема синусов и две теоремы косинусов.

**Теорема синусов.** Синусы плоских углов трехгранного угла пропорциональны синусам противолежащих им двугранных углов трехгранного угла:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin A} = \frac{\sin \beta}{\sin B} = \frac{\sin \gamma}{\sin C}.$$

**Следствие.** Если двугранные углы трехгранного угла равны, то противолежащие им плоские углы трехгранного угла либо равны, либо дополняют друг друга до  $180^\circ$ .

**Первая теорема косинусов.** Косинус плоского угла трехгранного угла равен произведению косинусов двух других плоских углов, сложенному с произведением синусов этих углов на косинус двугранного угла, противолежащего иско-

мому плоскому:

$$\cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos A.$$

**Вторая теорема косинусов.** Косинус двугранного угла трехгранного угла равен произведению косинусов двух других двугранных углов, взятому с противоположным знаком, плюс произведение синусов этих углов на косинус плоского угла, противолежащего данному двугранному:

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos \alpha.$$

Вернемся к решению задачи. Из ее условия и следствия из теоремы синусов для трехгранного угла вытекает, что  $\angle DAB = \angle DAC$ , так как оба эти угла острые, а противолежащие им двугранные углы при ребрах  $AB$  и  $AC$  равны. Аналогично,  $\angle DCA = \angle DCB$ ,  $\angle DBC = \angle DBA$ .

Обозначим  $\angle DAB = \angle DAC = \alpha$ ,  $\angle DCA = \angle DCB = \gamma$ ,  $\angle DBC = \angle DBA = \beta$ . Рассматривая сумму углов всех боковых граней пирамиды, получаем, что  $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 3\pi - \frac{3\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$ , откуда  $\alpha + \beta + \gamma = \frac{3\pi}{4}$ . Теперь можно определить каждый из углов:

$$\alpha = \frac{\pi}{3}, \quad \beta = \frac{\pi}{6}, \quad \gamma = \frac{\pi}{4}.$$

Обозначим апофему боковой грани пирамиды  $h$ , а угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости ее основания  $\varphi$ . Далее проведем простые выкладки:

$$h = R \operatorname{tg} \varphi, \quad H = h \sin \varphi = R \operatorname{tg} \varphi \sin \varphi,$$

$$p = h(\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma) = R \operatorname{tg} \varphi (\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma),$$

$$S_{\text{бок}} = ph = R^2 \operatorname{tg}^2 \varphi (\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma),$$

$$S_{\text{осн}} = S_{\text{бок}} \cos \varphi = R^2 \operatorname{tg}^2 \varphi \cos \varphi (\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma),$$

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} S_{\text{осн}} H = \frac{1}{3} R^3 \operatorname{tg}^3 \varphi \cos \varphi \sin \varphi (\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma) = \\ &= \frac{1}{3} R^3 \operatorname{tg}^2 \varphi \sin^2 \varphi (\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma) = \\ &= \frac{1}{3} R^3 \left( \frac{1 - \cos^2 \varphi}{\cos \varphi} \right)^2 (\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma). \end{aligned}$$

Таким образом, все сводится к нахождению косинуса угла наклона боковой грани к основанию пирамиды.

Сначала найдем косинус какого-нибудь угла треугольника  $ABC$ , например угла  $ACB$  (обозначим его  $\angle C$ ). Имеем:

$$AB = h(\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta) = h \left( \frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3} \right),$$

$$BC = h(\operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma) = h(\sqrt{3} + 1),$$

$$AC = h(\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \gamma) = h \left( \frac{1}{\sqrt{3}} + 1 \right).$$

Воспользовавшись теоремой косинусов

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos \angle C,$$

получим

$$\frac{16}{3} = \frac{1}{3}(\sqrt{3} + 1)^2 + (\sqrt{3} + 1)^2 - \frac{2}{\sqrt{3}}(\sqrt{3} + 1)^2 \cos \angle C,$$

откуда

$$\cos \angle C = 4 - 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} - 1)^2.$$

Теперь, наконец, можно определить косинус двугранного угла при основании пирамиды. Воспользуемся первой теоремой косинусов для трехгранного угла. Имеем:

$$\cos \gamma = \cos \gamma \cos \angle C + \sin \gamma \sin \angle C \cos \varphi.$$

А так как  $\gamma = \frac{\pi}{4}$ , то

$$\cos \varphi = \frac{1 - \cos \angle C}{\sin \angle C} = \operatorname{tg} \frac{\angle C}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \angle C}{1 + \cos \angle C}} = \sqrt{\frac{4\sqrt{3} - 3}{13}}.$$

Осталось сделать подстановку найденных величин в формулу для объема пирамиды. После очевидных арифметических выкладок получаем ответ.

**Ответ:**  $V = 48$ .

И, наконец, задача, сравнительно недавно предлагавшаяся на вступительном экзамене в МФТИ.

**Задача 3** (МФТИ, 2005 г.). Сфера касается боковых граней четырехугольной пирамиды  $SABCD$  в точках, лежащих на ребрах  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DA$  (рис 5). Известно, что высота пирамиды равна  $2\sqrt{5}$ ,  $AB = 6$ ,  $SA = 5$ ,  $SB = 7$ ,  $SC = 2\sqrt{10}$ . Найдите длины ребер  $BC$  и  $CD$ , радиус сферы и двугранный угол при ребре  $SD$ .

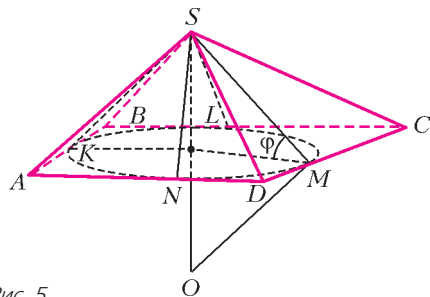


Рис. 5

**Решение.** Используем результаты предыдущих задач. Поскольку в основание пирамиды можно вписать окружность, то четырехугольник  $ABCD$  — описанный около окружности. Так как все апофемы равны, то боковые грани одинаково наклонены к плоскости основания пирамиды. Центр сферы, центр вписанной окружности и вершина пирамиды расположены на одном перпендикуляре к плоскости основания.

Найдем радиус сферы. Так как в треугольнике  $ASB$  известны длины всех сторон: 5, 6, 7, то по формуле Герона площадь треугольника равна  $\sqrt{9 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 6\sqrt{6}$ . Значит,

длина апофемы  $h = 2\sqrt{6}$ . Радиус окружности, вписанной в четырехугольник  $ABCD$ , равен  $r = \sqrt{h^2 - H^2} = \sqrt{24 - 20} = 2$ . Находим синус угла наклона боковой грани к плоскости основания пирамиды:  $\sin \varphi = \frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{5}{6}}$ . Отсюда

$$R = \frac{r}{\sin \varphi} = 2\sqrt{\frac{6}{5}}.$$

Определяя радиус сферы, мы попутно нашли апофему и радиус вписанной окружности. Применяя теперь последовательно теорему Пифагора и свойства касательных, проведенных из одной точки к окружности, получим

$$AK = AN = \sqrt{SA^2 - h^2} = \sqrt{25 - 24} = 1,$$

$$BK = BL = 5,$$

$$CL = CM = 4.$$

Таким образом, длина ребра  $BC = 9$ .

Найдем величину тригонометрических функций угла  $D$  четырехугольника  $ABCD$ . Во-первых, используя радиус вписанной окружности и отрезки касательных, получим  $\operatorname{tg} \frac{A}{2} = 2$ ,  $\operatorname{tg} \frac{B}{2} = \frac{2}{5}$ ,  $\operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{1}{2}$ . Следовательно,  $\frac{A}{2} + \frac{C}{2} = \frac{\pi}{2}$ , откуда  $\frac{B}{2} + \frac{D}{2} = \frac{\pi}{2}$ . Таким образом,

$$\operatorname{tg} \frac{D}{2} = \frac{5}{2}, \quad \cos D = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{D}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{D}{2}} = -\frac{21}{29}, \quad \sin D = \frac{20}{29}.$$

Для нахождения длины ребра  $CD$  достаточно найти длину отрезка  $MD$ . Но  $\frac{r}{MD} = \operatorname{tg} \frac{D}{2} = \frac{5}{2}$ , откуда

$$MD = \frac{4}{5} \text{ и } CD = 4,8.$$

Рассмотрим  $\angle SDA$  и  $\angle SDC$ . Так как противолежащие им двугранные углы равны и проекция ребра  $SD$  есть биссектриса угла  $D$ , то указанные углы также равны. Обозначая эти углы  $\alpha$ , по первой теореме косинусов трехгранного угла имеем

$$\cos \alpha = \cos \alpha \cos D + \sin \alpha \sin D \cos \varphi \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{1 - \cos D}{\sin D \cos \varphi}.$$

Подставляя известные значения, получим, что  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{2}\sqrt{6}$ . Двугранный угол  $\psi$  при ребре  $SD$  противолежит плоскому углу  $D$ , поэтому по первой теореме косинусов получим

$$\cos D = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos \psi = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} + \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \cos \psi,$$

или

$$-\frac{21}{29} = \frac{4}{34} + \frac{30}{34} \cos \psi \Rightarrow \cos \psi = -\frac{67}{87},$$

и

$$\psi = \arccos\left(-\frac{67}{87}\right) = \pi - \arccos \frac{67}{87}.$$

$$\textbf{Ответ: } R = 2\sqrt{\frac{6}{5}}; \quad BC = 9; \quad CD = 4,8; \quad \psi = \pi - \arccos \frac{67}{87}.$$

#### Упражнения

**1** (мехмат МГУ, 1995 г.). Некоторая сфера радиуса  $\sqrt{3}$  касается плоскостей всех боковых граней пирамиды в точках, лежащих на сторонах основания. Основанием служит треугольник со сторонами 5, 6, 9. Найдите высоту пирамиды.

**2** (мехмат МГУ, 1998 г.). Дана пирамида  $ABCD$ . Сфера касается граней  $ABC$ ,  $ACD$ ,  $ADB$  в точках  $K$ ,  $L$ ,  $M$  соответственно. При этом точка  $K$  находится на стороне  $BC$ , точка  $L$  — на стороне  $CD$ , точка  $M$  — на стороне  $DB$ . Известно, что радиус сферы равен  $\sqrt{3}$ ,  $\angle BAC = 90^\circ$ ,  $\angle CAD = 75^\circ$ ,  $\angle DAB = 75^\circ$ . Найдите объем пирамиды.

**3** (МФТИ, 2005 г.). Сфера касается боковых граней четырехугольной пирамиды  $SABCD$  в точках, лежащих на ребрах  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DA$ . Известно, что высота пирамиды равна  $\sqrt{6}$ ,  $AB = 8$ ,  $SA = 4$ ,  $SB = 8$ ,  $SC = 4\sqrt{6}$ . Найдите длины ребер  $BC$  и  $CD$ , радиус сферы и двугранный угол при ребре  $SD$ .