Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 марта 2008 года по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №6–2007» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М2066» или «Ф2073». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М2066–М2070, Ф2073–2077

М2066. Квадрат со стороной 1 разрезан на 100 прямоугольников одинакового периметра p. Найдите наибольшее значение p.

А.Шаповалов, С.Берлов

М2067. Докажите, что если число $\underbrace{111\ldots11}_{n\text{ единиц}}$ делится на n, то n делится на 3.

Р.Ковалев

М2068. В футбольном турнире участвуют mn команд $(m,n \ge 2)$. Командам присвоены номера 1, 2, …, mn в соответствии с местом, занятым на предварительном этапе. Организаторы турнира собираются разбить команды на m групп по n команд так, чтобы для любых двух команд A и B выполнялось условие: если номер A меньше номера B, то сумма номеров соперников по группе для команды A больше, чем для команды B. При каких m и n желание организаторов можно осуществить?

И.Акулич

М2069. Обозначим через $\|y\|$ расстояние от действительного числа y до ближайшего целого числа. Пусть для иррационального числа x бесконечная последовательность натуральных чисел $q_1, q_2, \ldots, q_k, \ldots$ определена следующим образом: $q_1 = 1$, q_{k+1} – наименьшее натуральное q, для которого $\|xq\| < \|xq_k\|$. Докажите, что $q_{k+2} \ge q_k + q_{k+1}$ для всех k = 1, 2, …

В.Быковский

М2070*. Докажите, что главные диагонали шестиугольника, лежащего в пересечении треугольников $P_1P_3P_5$ и $P_2P_4P_6$ (рис.1), пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда выполнено равенство

$$\frac{S_1 \cdot S_3 \cdot S_5}{S_{135}} = \frac{S_2 \cdot S_4 \cdot S_6}{S_{246}},$$

где S_i – площадь маленького треугольника с вершиной P_i, примыкающего к шестиугольнику, а S_{135} и S_{246} – площади треугольников $P_1P_3P_5$ и $P_2P_4P_6$ соответственно.

С.Дориченко

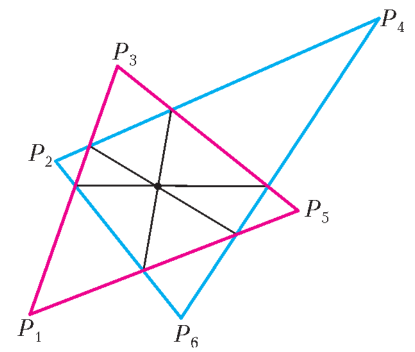


Рис. 1

Ф2073. Тело движется вдоль координатной оси X, его скорость v пропорциональна корню квадратному из координаты x. В точке с координатой $x_1 = 100$ м скорость тела составляет $v_1 = 10$ м/с. Найдите ускорения в точках с координатами $x_2 = 20$ м и $x_3 = 300$ м.

А.Простов

Ф2074. На наклонной плоскости с углом α при основании удерживают клин массой M (рис.2). Угол при основании клина также равен α, а расположен клин «вверх ногами», так что его верхняя поверхность параллельна плоскости земли. На этой поверхности находится очень легкая тележка с четырьмя массивными колесами – масса каждого колеса m. Трение между поверхностью клина и колесами достаточно велико, поэтому колеса не проскальзывают. Клин отпускают. Найдите его ускорение при движении (пока тележка еще находится на клине). Масса каждого колеса сосредоточена в его ободе.

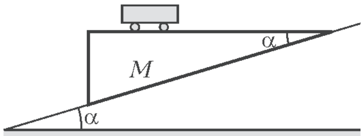


Рис. 2

Т.Ележкин

Ф2075. В компьютерной модели рассматривается кубический сосуд объемом 1 м^3, заполненный «газом» – в сосуде находятся 1000 частиц диаметром 1 мм каждая и 2 частицы диаметром 1 см. В начальный момент маленькие частицы неподвижны, большие имеют скорости по 100 м/с. Оцените число ударов больших частиц о стенки сосуда за большое время – за 10 лет. Оцените также число столкновений больших частиц с маленькими за то же время. Считайте, что частицы «сделаны» из одного и того же материала. Внешние силы в модели не предусмотрены, удары считаются упругими.

А.Старов

Ф2076. В схеме неуравновешенного «мостика» (рис.3) два резистора имеют сопротивления по 10 Ом, два – по 30 Ом. В диагональ мостика включен амперметр, имеющий пренебрежимо малое сопротивление. Батарейка напряжением 3 В подключена к другой диагонали мостика. Вместо одного из резисторов подключают еще одну такую же батарейку. Найдите максимальное и минимальное возможные значения тока через амперметр в получившейся схеме.

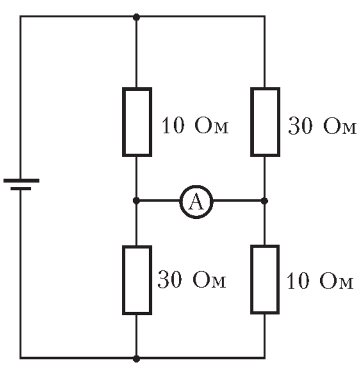


Рис. 3

З.Рафаилов

Ф2077. На тороидальный сердечник, сделанный из сплава с очень большой магнитной проницаемостью, намотаны три одинаковые катушки индуктивностью L = 1 Гн каждая (рис.4). К выводам одной из катушек подключен резистор сопротивлением R = 100 Ом, две другие катушки соединены последовательно (начало одной – к концу другой). К свободным выводам получившейся «двойной» катушки подключают батарейку напряжением U = 3 В. Через время $\tau = 0{,}5$ с батарейку отключают. Какой ток течет через батарейку через время $0{,}5\tau$ после включения? Какое количество теплоты выделится в резисторе за время τ после включения и после отключения батарейки?

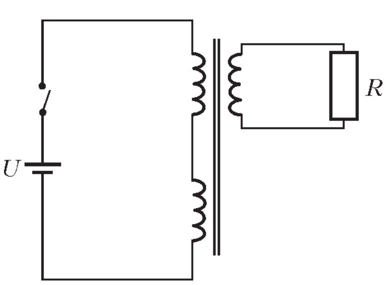


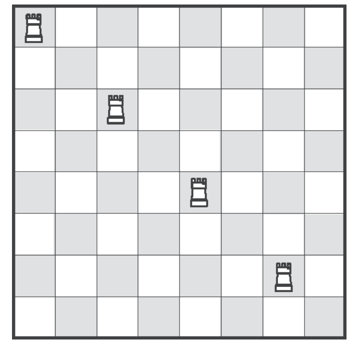
Рис. 4

А.Зильберман

Решения задач М2041 – М2050, Ф2058 – Ф2062

М2041. *Какое наименьшее число ладей нужно поставить на шахматной доске 8×8, чтобы все белые клетки оказались под боем этих ладей?*

Ответ: 4.



Каждая ладья бьет не более 8 белых клеток (4 клетки – на одной горизонтали и 4 клетки – на одной вертикали), поэтому все 32 белые клетки побить менее чем четырьмя ладьями не удастся. Пример, когда четыре ладьи бьют все белые клетки, показан на рисунке.

Р.Женодаров

М2042. *Докажите, что при $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ выполнено неравенство*

$$(\operatorname{tg} x)^{\sin x} + (\operatorname{ctg} x)^{\cos x} \geq 2.$$

Пусть $a \in \left(0, \dfrac{\pi}{4}\right]$, $b \in \left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ и $a + b = \dfrac{\pi}{2}$. Тогда $(\operatorname{tg} b)^{\sin b} = (\operatorname{ctg} a)^{\cos a}$, $(\operatorname{ctg} b)^{\cos b} = (\operatorname{tg} a)^{\sin a}$. Таким образом, если требуемое неравенство выполняется для $x = a$, то оно выполняется и для $x = b$; поэтому достаточно доказать неравенство для $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{4}\right]$.

Если $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{4}\right]$, то $\operatorname{ctg} x \geq 1$, $\cos x \geq \sin x$, поэтому

$$(\operatorname{tg} x)^{\sin x} + (\operatorname{ctg} x)^{\cos x} \geq (\operatorname{tg} x)^{\sin x} + (\operatorname{ctg} x)^{\sin x} =$$

$$= (\operatorname{tg} x)^{\sin x} + \frac{1}{(\operatorname{tg} x)^{\sin x}} = A + \frac{1}{A}$$

для положительного A. Но

$$A + \frac{1}{A} = \left(\sqrt{A} - \frac{1}{\sqrt{A}}\right)^2 + 2 \geq 2.$$

Н.Агаханов, И.Богданов

М2043. *Можно ли сконструировать такой набор «Юный паркетчик» из четырех одинаковых многоугольников и квадратика, чтобы из всех пяти деталей можно было сложить квадрат, а из трех одинаковых деталей – равносторонний треугольник?*

Ответ: можно.

Опустив перпендикуляры из центра на стороны, разобьем правильный треугольник на три дельтоида (см.

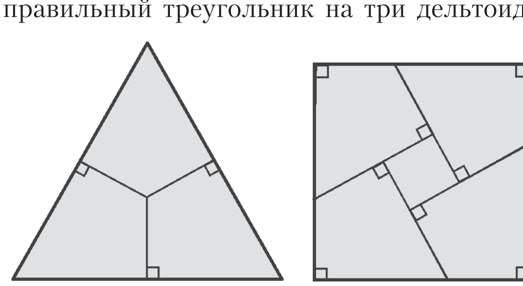


рисунок). Из четырех таких дельтоидов можно составить квадрат, в котором недостает центрального квадратика.

О.Нечаева

М2044. *Пусть $f(x)$ – некоторый многочлен ненулевой степени. Может ли оказаться, что уравнение $f(x) = a$ при любом значении a имеет четное число решений?*

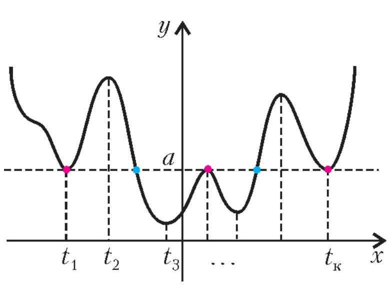
Ответ: не может.

Покажем, что в любом случае найдется такое a, что уравнение $f(x) = a$ имеет нечетное число решений.

Пусть $t_1, t_2, \ldots, t_k$ – точки, в которых меняется знак производной $f'(x)$ (таких точек конечное количество, так как все они – корни $f'(x)$). Таким образом, на каждом из интервалов $(-\infty, t_1), (t_1, t_2), \ldots, (t_k, +\infty)$ функция $f(x)$ монотонна, и в точках $t_1, t_2, \ldots, t_k$ происходит смена интервала возрастания на интервал убывания или наоборот.

Пусть степень многочлена $f(x)$ нечетна. Учитывая, что $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ – бесконечности разных знаков, получаем, что при любом a уравнение $f(x) - a = 0$ имеет нечетное количество корней, в которых функция $f(x) - a$ меняет знак. Достаточно выбрать a, отличное от $f(t_1), f(t_2), \ldots, f(t_k)$, тогда уравнение $f(x) - a = 0$ не имеет других корней (т.е. корней, в которых $f(x) - a$ сохраняет знак). Случай нечетной степени многочлена $f(x)$ можно разобрать и по-другому, заметив, что при достаточно большом a уравнение $f(x) = a$ имеет ровно одно решение.

Пусть степень многочлена $f(x)$ четна. Учитывая, что $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ – бесконечности одного знака, получаем, что при любом a уравнение $f(x) - a = 0$ имеет четное количество корней, в которых функция $f(x) - a$ меняет знак. Поскольку $f'(x)$ – многочлен нечетной степени, то $f'(x)$ меняет знак в нечетном числе точек, т.е. k нечетно. Отсюда следует, что найдется такое a, что в наборе $f(t_1), f(t_2), \ldots, f(t_k)$ нечетное количество чисел, равных a. Для найденного значения a уравнение $f(x) = a$ имеет нечетное число решений – четное количество, в которых функция $f(x) - a$ меняет знак, и нечетное количество, в которых функция $f(x) - a$ не меняет знак (см. рисунок).



П.Кожевников

М2045. *На доске записано число $\underbrace{111\ldots11}_{99\text{ единиц}}$. Двое играют в следующую игру. Игроки ходят по очереди, причем за ход разрешается либо записать ноль вместо одной из единиц, кроме первой и последней, либо стереть один из нулей. Проигрывает тот, после хода которого число будет делиться на 11. Кто выигрывает при правильной игре?*

Ответ: первый.

Покажем, что первый игрок не проиграет, так как каждым своим ходом он может получать число вида 1011…11, которое не делится на 11 в силу того, что разность сумм цифр, стоящих на четных и на нечетных местах, равна 1 или 2. Действительно, первым ходом первый игрок заменяет вторую слева единицу на ноль, а далее либо стирает ноль, появившийся после хода второго игрока, либо, если тот стер единственный ноль, опять заменяет вторую слева единицу на ноль (что он всегда сможет сделать, иначе число на доске равно 11, и второй игрок уже проиграл).

М.Мурашкин

М2046. *Муха села в полдень на секундную стрелку часов и решила ездить, придерживаясь следующего правила: если одна стрелка обгоняет другую и муха сидит на одной из этих стрелок, то она пересаживается на другую. Сколько оборотов сделает муха к полуночи?*

Ответ: 245.

Посадим в полдень мух A, B, C на каждую из стрелок – секундную, минутную, часовую. Когда стрелки встречаются, пусть мухи, сидящие на этих стрелках, меняются местами. В результате в любой момент времени A впереди B (по суммарному пройденному расстоянию), а B впереди C, но A обгоняет C не более чем на круг. Всего три мухи с полудня до полуночи сделали $1 + 12 + 60 \cdot 12 = 733$ оборота (суммарное число оборотов, которые делают часовая, минутная и секундная стрелки). Так как $733 = 244 \cdot 3 + 1$, то мухи B и C сделали по 244 оборота, а муха A – на один оборот больше.

Из приведенных рассуждений можно дополнительно сделать вывод от том, что за миг до полуночи муха A сидела на часовой стрелке, муха B – на минутной, а муха C – на секундной.

И.Богданов

М2047. *Из точки T, лежащей внутри треугольника ABC, стороны AB, BC, CA видны под углом 120° каждая. Докажите, что прямые, симметричные прямым AT, BT, CT относительно прямых BC, CA, AB соответственно, пересекаются в одной точке.*

Пусть T_a, T_b, T_c – точки, симметричные T относительно прямых BC, CA, AB соответственно; T' – центр описанной окружности треугольника $T_aT_bT_c$ (рис.1). Так как $CT_a = CT = CT_b$, то прямая CT' является серединным перпендикуляром к отрезку T_aT_b и биссектрисой угла T_aCT_b. Следовательно, прямые CT и CT' симметричны относительно биссектрисы угла ACB. Аналогично, прямые BT и BT', AT и AT' симметричны относительно соответствующих биссектрис треугольника ABC. (Доказанное означает, что точки T и T' *изогонально сопряжены* относительно треугольника ABC.)

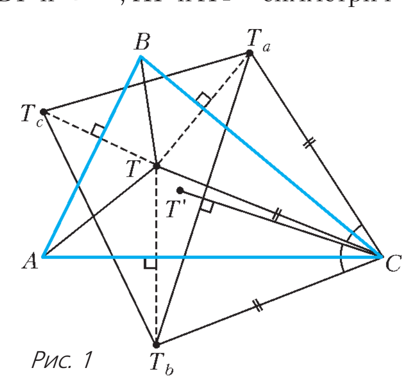


Рис. 1

Пусть теперь точки T'_a, T'_b, T'_c – точки, симметричные T' от-

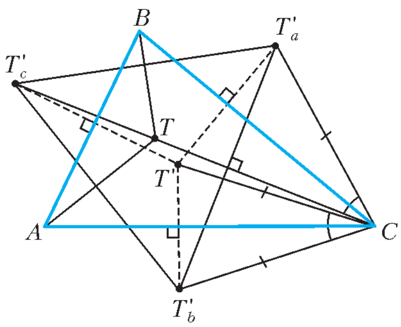


Рис. 2

носительно BC, CA, AB соответственно (рис.2). Рассуждая как и выше, получим, что T – центр описанной окружности треугольника ABC, а прямые AT, BT, CT являются серединными перпендикулярами к его сторонам. Поскольку углы между отрезками AT, BT, CT равны по 120°, углы треугольника $T'_aT'_bT'_c$ равны по 60°, т.е. треугольник $T'_aT'_bT'_c$ правильный. Отсюда следует, что точки T'_a, T'_b, T'_c лежат на прямых AT, BT, CT соответственно, значит, прямые, симметричные прямым AT, BT, CT относительно прямых BC, CA, AB соответственно, проходят через точку T'.

Комментарии

1. Точки T и T' называются, соответственно, *первой точкой Торричелли* и *первой точкой Аполлония* треугольника ABC. (О свойствах этих точек можно прочитать, например, в книге А.В.Акопяна и А.А.Заславского «Геометрические свойства кривых второго порядка» – М.: МЦНМО, 2007.)

2. Из решения вытекает, что если из точки T выпустить с равными скоростями три бильярдных шарика в направлениях, противоположных направлениям к соответствующим вершинами треугольника ABC, то, отразившись от сторон треугольника ABC, шарики одновременно придут в точку T', пройдя расстояние, равное радиусу описанной окружности треугольника $T'_aT'_bT'_c$.

А.Заславский

М2048. *Найдите такое наибольшее натуральное k, что найдется натуральное $n > 1$, для которого каждое из чисел $n, n^2, \ldots, n^k$ представимо в виде $x^2 + y^2 + 1$, где x, y – целые числа.*

Ответ: $k = 5$.

Лемма. Всякое отличное от нуля число вида $a^2 + b^2$ (a, b – целые) представимо в виде $4^t(8u + v)$, где $t \ge 0$, $u \ge 0$, v = 1, 2 либо 5.

Доказательство. Пусть $a = 2^r c$, $b = 2^s d$, где c и d нечетны, и для определенности $r \le s$. Тогда $a^2 + b^2 = 4^r\left(c^2 + \left(2^{s-r}d\right)^2\right)$. Получаем, что c^2 дает при делении на 8 остаток 1, а $\left(2^{s-r}d\right)^2$ – остаток 0, 1 или 4, откуда и следует утверждение леммы.

Для доказательства неравенства $k < 6$ достаточно установить, что при $n > 1$ система

$$\begin{cases} n^2 - 1 = x^2 + y^2, \\ n^6 - 1 = z^2 + t^2 \end{cases}$$

не имеет решений.

Предположим противное. Из первого равенства системы следует, что n нечетно (так как $x^2 + y^2$ не может давать остаток 3 при делении на 4). Следовательно, в равенстве

$$\left(x^2 + y^2\right)\left(n^4 + n^2 + 1\right) = z^2 + t^2$$

второй сомножитель левой части дает остаток 3 при делении на 8.

С помощью леммы получаем

$$(8u_1 + v_1)(8l + 3) = 8u_2 + v_2,$$

где каждое из чисел v_1, v_2 принимает одно из значений 1, 2, 5. Ясно, что такое равенство невозможно.

Для завершения решения остается заметить, что

$$3 = 1^2 + 1^2 + 1, \; 3^2 = 2^2 + 2^2 + 1, \; 3^3 = 5^2 + 1^2 + 1,$$

$$3^4 = 8^2 + 4^2 + 1, \; 3^5 = 11^2 + 11^2 + 1.$$

Замечания

1. Результаты, приведенные в статье В.Сендерова и А.Спивака «Суммы квадратов и целые гауссовы числа» («Квант» № 3 за 1999 г.), позволяют из равенства $\left(x^2 + y^2\right)A = z^2 + t^2$, где $z^2 + t^2 \ne 0$, вывести, что $A = x_1^2 + y_1^2$. Но A дает остаток 3 при делении на 4 – противоречие.

2. Нетрудно доказать существование бесконечного количества таких чисел n, что каждое из чисел $n, \ldots, n^4$ представимо в виде $x^2 + y^2 + 1$.

3. Что мы знаем о таких n, что представимы все числа $n, \ldots, n^5$? Нетрудно показать, что при $4 \le n \le 98$ таких чисел нет. (Для этого полезно заметить, что любое $n > 1$, для которого n, n^2, n^3 представимы, принадлежит одной из прогрессий $72s + 35$, $48s + 3$, где $s \ge 0$. Подумайте также, как можно почти без вычислений рассмотреть случай $n = 35$.) При $n = 99$ все числа n, n^2, n^3, n^4, n^5 представимы. Как явствует из статьи «Суммы квадратов и целые гауссовы числа», достаточно непосредственно убедиться, что $99^4 + 99^3 + 99^2 + 99 + 1 = 97039801$ и $99^2 + 99 + 1 = 9901$ – простые числа.

В.Сендеров

М2049. *От правильного октаэдра с ребром 1 отрезали 6 углов – пирамидок с квадратным основанием и ребром 1/3. Получился многогранник, грани которого – квадраты и правильные шестиугольники. Можно ли копиями такого многогранника замостить пространство?*

Ответ: можно.

Обозначим через $\mathcal{M}$ множество точек $M = (k, l, m)$, где k, l, m – целые числа одной четности. Для каждой точки $M \in \mathcal{M}$ пусть $V(M)$ – множество точек X пространства, для которых M – ближайшая точка множества $\mathcal{M}$, т.е. $V(M)$ – пересечение полупространств $P(M, M')$, задаваемых неравенствами $XM \le XM'$ для всех точек $M' \in \mathcal{M}$, отличных от M. (Множества $V(M)$ называются *областями Вороного* для множества точек $\mathcal{M}$.) Для двух различных точек $M, M' \in \mathcal{M}$ множества $V(M)$ и $V(M')$ совмещаются сдвигом на вектор $\overrightarrow{MM'}$, так как множество $\mathcal{M}$ переходит в себя при сдвиге на этот вектор; ясно, что множества $V(M)$

($M \in \mathcal{M}$) покрывают все пространство, причем множества $V(M)$ и $V(M')$ ($M \neq M'$) могут пересекаться только по части плоскости – серединного перпендикуляра к отрезку MM'. Докажем, что $V(O)$ (O – начало координат) – усеченный октаэдр, подобный данному в условии. Отсюда будет вытекать, что пространство замощено многогранниками, равными $V(O)$.

Для шести точек $M = (\pm 2, 0, 0)$, $(0, \pm 2, 0)$, $(0, 0, \pm 2)$ полупространства $P(O, M)$ дают в пересечении куб K, задаваемый системой неравенств $-1 \le x \le 1$, $-1 \le y \le 1$, $-1 \le z \le 1$. Пусть какое-то из полупространств $P(O, M)$ ($M \in \mathcal{M}$) не содержит куб K целиком; тогда это полупространство не содержит одну из вершин этого куба $X = (\pm 1, \pm 1, \pm 1)$. В таком случае $MX < OX = \sqrt{3}$; единственная точка M множества $\mathcal{M}$, удовлетворяющая этому неравенству, – точка X. Итак, $V(O)$ – это пересечение куба K и восьми полупространств $P(O, X)$, где X – вершины куба. Полупространства $P(O, X)$ задаются неравенствами $\pm x \pm y \pm z \le \frac{3}{2}$ и дают в пересечении правильный октаэдр T с вершинами $\left(\pm\frac{3}{2}, 0, 0\right)$, $\left(0, \pm\frac{3}{2}, 0\right)$, $\left(0, 0, \pm\frac{3}{2}\right)$. Легко видеть, что грани куба K делят ребра октаэдра T на три равные части, т.е. в пересечении $K \cap T$ образуется усеченный октаэдр, подобный многограннику из условия задачи.

А.Канель

М2050. *В однокруговом турнире по волейболу (без ничьих) участвовало 2^n команд, причем команда «Чемпион» заняла первое место. Назовем команду плохой, если она выиграла у «Чемпиона». Оргкомитет планирует провести турнир по олимпийской системе и предполагает, что все встречи закончатся так же, как в предыдущем турнире. Докажите, что можно так составить расписание, что «Чемпион» опять победит, причем все плохие команды проиграют (и прекратят участие) уже в первых двух турах.*

Пусть «Чемпион», в дальнейшем – Ч, одержал k побед в круговом турнире. Так как среднее число побед у команды равно $\frac{2^n - 1}{2}$, то $k \ge 2^{n-1}$.

Назовем k команд, у которых Ч выиграл, *хорошими*, а остальные команды – *плохими*. Рассмотрим произвольный набор из d плохих команд. В матчах друг с другом и с Ч они одержали суммарно $\frac{d(d-1)}{2} + d = \frac{d(d+1)}{2}$ побед. Так как каждая из них одержала не больше k побед, то в матчах с хорошими командами они одержали не более $kd - \frac{d(d+1)}{2}$ побед, т.е. хотя бы одна из них одержала не больше $k - \frac{d+1}{2}$ побед, и, значит, она потерпела не менее $\frac{d+1}{2}$ поражений.

Пусть $B_1, \ldots, B_{2^n-k-1}$ – все плохие команды, а b_i – количество хороших команд, которым B_i проиграла. Можно считать, что $b_1 \le \ldots \le b_{2^n-k-1}$. По доказанному выше, $b_d \ge \frac{d+1}{2}$, т.е. $b_1 \ge 1$, $b_2, b_3 \ge 2$, $b_4, b_5 \ge 3, \ldots$

Опишем распределение команд по парам в первом туре турнира на выбывание. Назовем G_1 хорошую команду, выигравшую у B_1 (такая есть, ибо $b_1 \ge 1$), G_2 – отличную от нее хорошую команду, выигравшую у B_3 (такая есть, ибо $b_3 \ge 2$), G_3 – отличную от них хорошую команду, выигравшую у B_5 (такая есть, ибо $b_5 \ge 3$), и т.д. В первом туре поставим в пары G_i с B_{2i-1}; тогда все B_{2i-1} выбывают в первом туре. Далее, если найдутся еще нераспределенные плохая команда B и хорошая G такие, что G выигрывает у B, то поставим их в пару. Будем проводить такое распределение до тех пор, пока таких пар не останется.

Теперь все нераспределенные плохие команды выигрывают у всех нераспределенных хороших; поставим в пару каждой плохой какую-нибудь хорошую. Далее, Ч поставим в пару еще нераспределенную хорошую команду (такая найдется, ибо $k \ge 2^{n-1}$), а остальные хорошие разобьем на пары. Расписание первого тура построено.

Заметим, что для каждой плохой команды B_{2i}, прошедшей во второй тур, все $b_{2i} \ge i + 1$ выигрывающих у нее хороших команд также прошли во второй тур. Пользуясь изложенным выше способом, поставим во втором туре в пару каждой оставшейся плохой команде хорошую, выигрывающую у нее. Тогда после второго тура плохих команд не останется.

И.Богданов

Ф2058. *В системе на рисунке 1 все грузы одинаковы. Вначале грузы удерживают, затем отпускают, и система приходит в движение без рывков. Найдите ускорения подвижных блоков.*

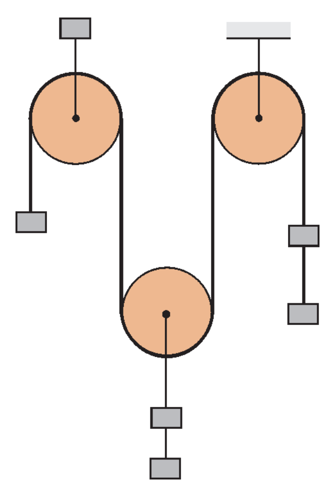


Рис. 1

Введем обозначения (рис.2): T – сила натяжения длинного куска нити; a – ускорение верхнего блока и привязанного к нему самого верхнего груза массой m; b – ускорение нижнего блока и привязанного к нему груза массой $2m$. (Пары грузов массами m заменены грузами массой $2m$.)

Нарисуем для удобства два узелка на длинной нити – A и $Б$ и займемся кинематикой. Впрочем, сначала чуть-чуть динамики. Ускорение самого левого груза равно b, оно равно ускорению нижнего груза – там силы вдвое больше ($2T$ и $2mg$), но и масса вдвое больше.

Если направить стрелки ускорений в одну сторону, то ускорение каждого блока равно полусумме ускорений участков нити по обе стороны от него. Тогда ускорение узелка A равно $(2a - b)$, а узелка $Б$ – $(3b - 2a)$.

Теперь запишем уравнения динамики для самого верх-

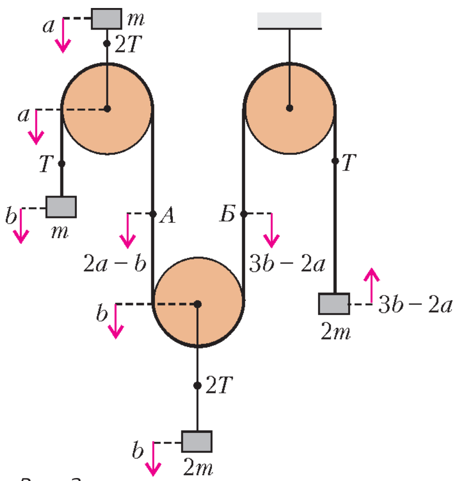


Рис. 2

него груза:

$$mg + 2T = ma,$$

для груза слева:

$$mg - T = mb,$$

для груза справа:

$$T - 2mg = 2m(3b - 2a).$$

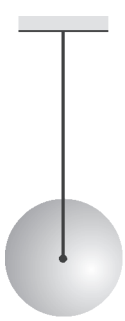
Решая систему, получим

$$a = \frac{23}{15}g,\ \ b = \frac{11}{15}g,\ \ T = \frac{4}{15}mg.$$

Значение T полезно посчитать – чтобы убедиться, что $T > 0$. В противном случае наше решение окажется неверным – оно основано на том, что нити в процессе движения натянуты.

А.Блоков

Ф2059. *Новые настенные часы с маятником идут очень точно. Маятник представляет собой очень легкий длинный стержень, подвешенный за один из концов, к другому концу стержня прикреплен массивный диск, радиус которого в 10 раз меньше длины стержня (см. рисунок). Диск может свободно вращаться вокруг своей оси. Со временем, из-за трения в оси диска, он перестал поворачиваться вокруг этой оси. Будут ли часы спешить или они теперь начнут отставать? Оцените неточность хода часов за сутки.*



Если диск может свободно вращаться вокруг своей оси, то он вращаться и не будет – его движение поступательное. Тогда он ведет себя как материальная точка массой M на расстоянии l (длина стержня) от точки подвеса. Обозначив начальную высоту подъема этой точки при запуске маятника h, а угловую скорость в нижней точке ω_1, запишем

$$Mgh = \frac{1}{2}Ml^2\omega_1^2.$$

Если диск закреплен, его угловая скорость ω_2 равна угловой скорости стержня, уравнение для энергии будет теперь таким:

$$Mgh = \frac{1}{2}Ml^2\omega_2^2 + \frac{1}{2}\frac{MR^2}{2}\omega_2^2$$

(мы использовали выражение для полной энергии диска радиусом R – кинетическая энергия центра масс плюс энергия вращения).
Отсюда получим

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \sqrt{1 + \frac{R^2}{2l^2}} = \sqrt{1 + \frac{1}{200}} \approx 1 + \frac{1}{400}.$$

За $24 \cdot 60$ мин $= 1440$ мин маятниковые часы отстанут на $\frac{1440\ \text{мин}}{400} = 3{,}6$ мин.

З.Рафаилов

Ф2060. *Моль гелия медленно расширяется от объема 10 л до объема 10,1 л, при этом давление газа плавно уменьшается от 1 атм до 0,985 атм. Найдите теплоемкость гелия в этом процессе.*

На малом участке кривой зависимости давления от объема (а в условии задачи участок совсем мал) можно считать среднее давление равным

$$p_{\text{ср}} = \frac{1}{2}\left(p_{\text{нач}} + p_{\text{кон}}\right) = \frac{1}{2}(1 + 0{,}985)\cdot 10^5\ \text{Па} = 99250\ \text{Па}.$$

Тогда работа газа на этом участке равна

$$A = p_{\text{ср}}\Delta V = 9{,}925\ \text{Дж}$$

(конечно же, точность нашей оценки не соответствует числу выписанных цифр, но мы не забудем округлить в конце решения...).
Посчитаем приращение внутренней энергии на данном участке:

$$\Delta U = U_{\text{кон}} - U_{\text{нач}} = \frac{3}{2}RT_{\text{кон}} - \frac{3}{2}RT_{\text{нач}} =$$

$$= \frac{3}{2}\left(p_{\text{кон}}V_{\text{кон}} - p_{\text{нач}}V_{\text{нач}}\right) =$$

$$= \frac{3}{2}\left(0{,}985\cdot 10^5\cdot 10{,}1\cdot 10^{-3} - 1\cdot 10^5\cdot 10\cdot 10^{-3}\right)\ \text{Дж} =$$

$$= -7{,}725\ \text{Дж}.$$

Итак, энергия нашего газа *уменьшилась* на 7,725 Дж. Полученное газом количество теплоты равно

$$Q = A + \Delta U = 9{,}925\ \text{Дж} - 7{,}725\ \text{Дж} = 2{,}2\ \text{Дж}.$$

Теплоемкость моля гелия при этом равна

$$C = \frac{Q}{\Delta T} = \frac{Q}{\Delta U/(1{,}5R)} = -3{,}55\ \ \text{Дж}/(\text{моль}\cdot\text{К}).$$

Теплоемкость получилась отрицательной – бывает...

А.Простов

Ф2061. *Тонкостенную непроводящую сферу радиусом R зарядили равномерно по поверхности полным зарядом Q, а затем разрезали пополам – по «экватору». Одну половину сферы убрали, а вторую оставили – для изучения. Найдите потенциал электрического поля, создаваемого зарядами полусферы в точке «экваториальной» плоскости, находящейся на расстоянии $R/2$ от центра сферы.*

Дополним нашу полусферу другой такой же – до полной сферы, равномерно заряженной по поверхности. Теперь поле в любой точке внутри получается нулевым. Рассмотрим произвольную точку «экваториальной» плоскости – поле в ней нулевое из-за компенсации полей полусфер.

В общем случае поле заряженной полусферы в упомянутой точке может состоять из двух составляющих – одна из них перпендикулярна экваториальной плоскости, другая лежит в этой плоскости и направлена радиально. Но если для перпендикулярной составляющей компенсация очевидна, то для радиальной она невозможна – в силу очевидной симметрии, поля полусфер должны «складываться». Отсюда вывод – в любой точке «экваториальной» плоскости получается один и тот же потенциал, так как вектор напряженности электрического поля во всех этих точках перпендикулярен «экваториальной» плоскости. Значит, можно посчитать потенциал *в любой* точке этой плоскости. Разумеется, мы выберем центр сферы:

$$\varphi = k\frac{Q/2}{R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{2R}.$$

Б.Сложнов

Ф2062. *На тороидальный ферромагнитный сердечник, сделанный из материала с большой магнитной проницаемостью, намотана катушка, содержащая большое число витков. Катушку подключили к сети 220 В, ток через катушку при этом составил 10 мА (действующее значение). Вольтметр, имеющий сопротивление 10 кОм, подключают между одним из концов катушки и отводом, сделанным от середины катушки (половина витков). Какое напряжение покажет вольтметр? Какой ток теперь течет через источник?*

До подключения вольтметра по катушке протекал ток $I_1 = 10$ мА, создававший соответствующий магнитный поток, при этом действующее значение ЭДС индукции составляло $U_1 = 220$ В. Этот ток был сдвинут по фазе на 90° относительно напряжения сети (катушка!). После подключения вольтметра (резистор сопротивлением $R = 10$ кОм) полный магнитный поток через катушку измениться не должен. ЭДС индукции «половинок» катушки совершенно одинаковы и в сумме дают $U = 220$ В, следовательно, напряжение, приложенное к вольтметру, равно

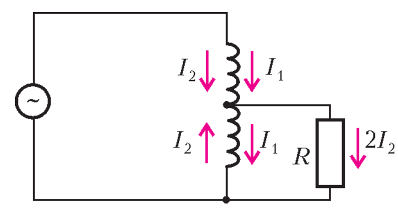
$$U_R = \frac{U}{2} = 110 \text{ В},$$

и через него течет ток

$$I_R = \frac{U_R}{R} = \frac{110 \text{ В}}{10 \text{ кОм}} = 11 \text{ мА}.$$

Этот ток совпадает по фазе с напряжением сети (резистор!). Строго говоря, вольтметр это не резистор, но когда он перестает «размахивать стрелкой» после подключения к цепи и прекращает работать электрогенератором (стрелка прибора связана с катушкой, которая движется в магнитном поле), его можно считать резистором.

Если магнитный поток через катушку не изменился, то к токам I_1 добавились одинаковые по величине и противоположно направленные токи I_2 (см. рисунок). Но при этом ток через резистор равен $I_R = 2I_2$, откуда $I_2 = 5{,}5$ мА. Этот ток совпадает по фазе с напряжением U, поэтому через источник теперь течет ток



$$I = \sqrt{I_1^2 + I_2^2} \approx 11{,}4 \text{ мА}.$$

А.Зильберман

ИЗ ИСТОРИИ НАУКИ

Не деньги

(Начало см. на с. 16)

нем назван эффект несоответствия между наблюдаемой и предсказанной фазами Венеры.

Профессор математики в прусской провинции *Адольф Андерсен* (1818–1879) прославился не своими научными достижениями, а игрой в шахматы. Во второй половине XIX века многие считали его неофициальным чемпионом мира. Хотя он проиграл исторические матчи Морфи (1858 г.) и Стейницу (1866 г.), Андерсен выиграл три крупнейших международных турнира своего времени в Лондоне (1851, 1862 г.) и Баден-Бадене (1870 г.). Арпад Эло, создатель современной системы рейтинга шахматистов, рассчитал показатели ведущих игроков в шахматы прошлого и показал, что Андерсен был первым шахматистом в мире с рейтингом более 2600. Математический подход Андерсена к игре в шахматы заключался в том, что он систематически и последовательно усиливал свои позиции в нападении, не забывая о защите. Интересно отметить, что на одном из нотгельдов, посвященных Андерсену, изображен Омар Хайям, по-видимому, также ценивший шахматы.

Для меня, как для автора многих статей о физиках и математиках на монетах и банкнотах мира, нотгельды стали в какой-то мере непознанным континентом. Мой интерес к этим денежным знакам привлек Томас Яре, учитель математики из немецкого города Кемниц, на интернет-сайте которого (www.schulmodell.de) я впервые увидел некоторые из упомянутых здесь нотгельдов.

Задачи

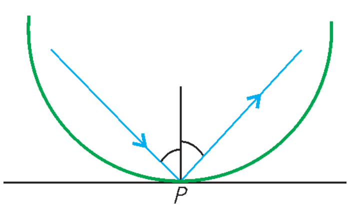
1. Известно, что $(a - b + 2007)$, $(b - c + 2007)$, $(c - a + 2007)$ — последовательные целые числа. Какие?

Д.Калинин

2. Сумма двух натуральных чисел равна 2007. Какое наибольшее значение может иметь остаток от деления большего числа на меньшее?
Тот же вопрос, если сумма равна 2008.

И.Акулич

3. Бильярдный шарик, двигаясь без трения на круглом бильярдном столе без луз, отражается от точки P борта и через 5 секунд отражается второй раз в той же самой точке P (возможно, в другом направлении, чем в первый раз). Отражение шарика от борта происходит по закону: «угол падения равен углу отражения», который иллюстрирует рисунок



Докажите, что движение шарика периодично с периодом 5 секунд.

Г.Гальперин

Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6 – 8 классов.

4. Белые шахматные фигуры (полный комплект: 8 пешек, две ладьи и т.д.) перессорились и решили друг друга побить. Может ли шахматист расставить их (только их) на шахматной доске так, чтобы никакая фигура никакую не била?

А.Хачатурян

5. Математик C предложил математикам A и B такую загадку.
– Я задумал три попарно различных натуральных числа, произведение которых не превосходит 50. Сейчас я по секрету сообщу A это произведение, а B – сумму задуманных чисел. Попробуйте отгадать эти числа.
Узнав произведение и сумму, соответственно, A и B вступили в диалог.

A: Я не знаю этих чисел.
B: Если бы мое число было произведением, я бы знал загаданные числа.
A: Но я все равно не знаю этих чисел.
B: Да и я не знаю.
A: А я уже знаю их.
B: Да и я знаю.
Что это за числа?

В.Лецко

Иллюстрация Д.Гришуковой

Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»

Мы продолжаем очередной конкурс по решению математических задач для учащихся 6–8 классов. Решения задач высылайте в течение месяца после получения этого номера журнала по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» (с пометкой «Конкурс «Математика 6–8»). Не забудьте указать имя, класс и домашний адрес.

Как и прежде, мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и математических кружков. Руководителей кружков просим указать электронный адрес или контактный телефон. По традиции, кружки-победители заочного конкурса приглашаются на финальный очный турнир.

11. Числа x, y, z, a, b, c таковы, что

$$a = x + y - z,$$

$$b = -x + y + z,$$

$$c = x - y + z$$

и

$$\frac{(a+b+c)^5 - a^5 - b^5 - c^5}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \frac{(x+y+z)^5 - x^5 - y^5 - z^5}{(x+y)(y+z)(z+x)}.$$

Докажите, что $x = y = z = a = b = c$.

В.Сендеров

12. Имеется пять уравнений:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 = 0,$$

$$a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3 + a_0x^4 = 0,$$

$$a_2 + a_3x + a_4x^2 + a_0x^3 + a_1x^4 = 0,$$

$$a_3 + a_4x + a_0x^2 + a_1x^3 + a_2x^4 = 0,$$

$$a_4 + a_0x + a_1x^2 + a_2x^3 + a_3x^4 = 0,$$

где a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 – заданные ненулевые числа.

Оказалось, что какие-то три их этих уравнений имеют общий корень. Докажите, что все уравнения имеют общий корень.

В.Каскевич

13. Середина отрезка, соединяющего середины двух противоположных сторон выпуклого четырехугольника, лежит на диагонали четырехугольника. Докажите, что эта диагональ проходит через середину другой диагонали.

В.Произволов

14. Пифагорейцы считали совершенными прямоугольники размером 3×6 и 4×4, потому что длины сторон каждого такого прямоугольника выражаются целыми числами, а площадь прямоугольника численно равна его периметру. Существуют ли совершенные (т.е. обладающие такими же свойствами):

а) прямоугольные треугольники;

б) равнобедренные треугольники?

Найдите все такие треугольники, если они существуют.

И. Акулич

15. Профессор Мумбум-Плюмбум написал программу, которая умеет вычислять придуманную им функцию $mumb(x)$. Профессор утверждает, что если на экране калькулятора ввести произвольное число x и нажать клавишу «Ввод», то на его месте всегда появляется значение функции $mumb(x)$, причем, если повторно нажать клавишу «Ввод», то в результате этих двух нажатий появится значение выражения $3|x| - 4$.

Не ошибается ли профессор?

Что покажет калькулятор, если ввести число $x = 0{,}8$ и один раз нажать клавишу «Ввод»?

Д. Левин, П.Самовол

«КВАНТ» УЛЫБАЕТСЯ

Красивые опечатки

Теорема Ви**С**та
Как дровосек **ТОРОМ** деревья срубает
Зная от**Л**о**Ж**ение молярных масс...
Искомое расстояние есть абсолютная величина (мод**Е**ль) вектора
Знание законов из**У**чения абсолютно черного тела...
К концу пружины жест**О**костью k ...
Перемещение и путь были род**НИ**ковыми...
Источник тепла локализован в дн**И** с**У**да
Очень ст**Е**нная картина...
То**С**ка Кюри
Введем понятие максимальной р**ЕВ**ности
БЕСнования равнобедренного треугольника
Звание международного м**И**стера
Ко**Н**и уравнения
Квадрат средней цифры ра**Н**ен
Масса прили**ЧНЫ**х молекул
Что не из**Л**учается в школьном курсе физики
Электрические колебания в нестандартных кон**У**рах

СКАЗКА О РЫБАКЕ И ЕГО СЛЮДЯНОЙ ЧУДО-ЛЕСТНИЦЕ

С.ДВОРЯНИНОВ, А.ЖУКОВ

Сижу, старик, у тихих вод
И тихо так пою,
И солнце каждый день клюет
На удочку мою.

В. Ходасевич. Рыбак

«Жили-были старик со старухой у самого синего моря, Старик ловил неводом рыбу, Старуха...»

Да, пряла, как все знают, свою пряжу. Но не только. Дело-то было на берегу Байкала-моря, рыбы-омуля там много, так что Старуха рыбу и сушила, и вялила, и солила. А потом проезжим купцам продавала. Тем они и жили.

Избушка их была аккурат в том месте, где сейчас город Слюдянка стоит. Богатые залежи удивительной слюды в тех горах имелись. Особенно прославился край во времена императрицы Анны Иоанновны. Задумала императрица весь мир удивить и построить для своих балов и званных вечеров необычный дворец. Дворец-то ледяным был – был там лед, зимой на Неве нарубленный. Но только кроме льда много для его постройки привезли и слюды с берега Байкала. И летом на телегах, и зимой санным путем по царскому указу тянулись в Петербург обозы со слюдой. Применяли при строительстве слюдяные плиты тайно от иностранцев. Ледяной дом и ледяной – так всем говорили. Только этот дом и летом стоял, не таял. Уже тогда по Европе пошла молва о русском льде, которому и жаркое солнце нипочем! Уж больно прозрачной да чистой была та слюда, ото льда не отличишь. Настоящее восьмое чудо света было сотворено.

После смерти императрицы дворец пришел в запустение, потом его разобрали, слюдяные плиты и кирпичи распилили на части, купцы их распродали, и много тогда появилось на Руси слюдяных окошек.

Но вернемся к Старику и его Старухе. С годами все труднее становилось Старику уходить на своей лодке от берегов. Не хватало уже былой силы тянуть полный рыбы невод из байкальских глубин. И главное – все труднее становилось ему переносить холод, идущий от студеной байкальской воды. Делать нечего, пришлось Старику устроиться с удочкой не берегу. Хорошо ему сидеть на нагретом солнцем гранитном бережку!

Только Старуха браниться начала: меньше стал Старик домой рыбы приносить. Понятно, конечно, почему. Рыба ищет где глубже... А Старуха не унимается: подавай ей, Старик, рыбы столько же, сколько раньше лавливал!

Поохал Старик, повздыхал, да делать нечего. Надо Старухину волю исполнять. Теперь уже и по воскресеньям приходилось Старику отправляться на берег. А старая все бранится да бранится. Все ей мало рыбы.

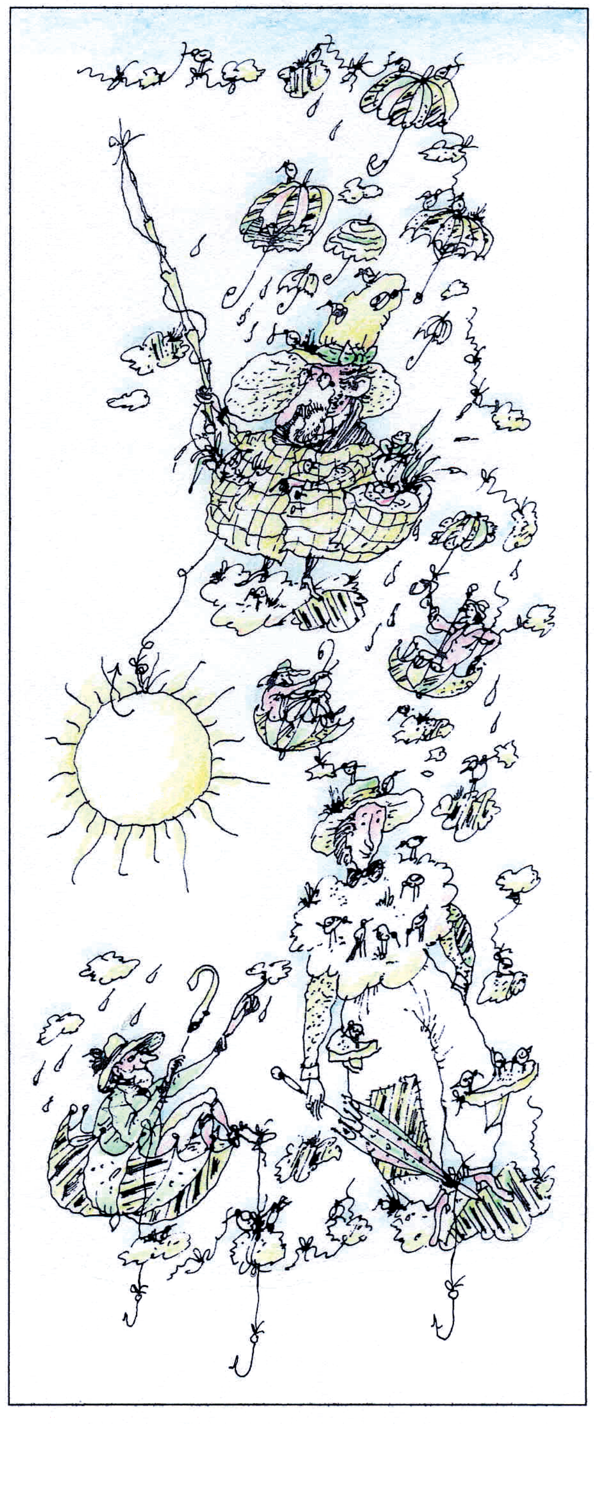


Иллюстрация В.Иванюка

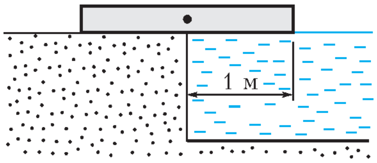


Рис. 1

Думал Старик, думал и придумал. На другой день взял он слюдяную плиту, которых много со времен строительства царского ледяного дворца осталось, и пристроил одну ее половинку на берегу, а другую в море направил (рис.1).

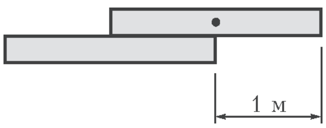


Рис. 2

Чтобы удобно было считать, полагаем все плиты одинаковыми, имеющими длину 2 м. Значит, край плиты удалился от берега на 1 м. Неплохо!

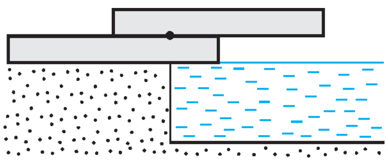


Рис. 3

– А что, если я на берегу положу вторую плиту поверх первой так, чтобы центр тяжести верхней плиты совпал с краем нижней плиты (рис.2), а затем стопку из двух плит сдвину, добиваясь, чтобы центр тяжести всей конструкции оказался у кромки берега (рис.3)? – подумал Старик. – Тогда выступ верхней плиты будет еще дальше от берега! Так-так... Но ведь можно подложить под низ таким же образом и третью плиту, и четвертую... Как далеко от берега выдвинется край всего этого сооружения, если плит взять достаточно много?

Ну-ка, подсчитаем. Если на очередную n-ю плиту ($n = 2, 3, \ldots$) водружается сверху стопка из $n-1$ плит так, что центр тяжести стопки приходится на край нижней плиты, то центр тяжести вновь образованной стопки из n плит будет находиться на удалении $\frac{1}{n}$ от края нижней плиты. Действительно, если это расстояние обозначить через x, то справедлива пропорция $\frac{x}{1-x} = \frac{1}{n-1}$, откуда $x = \frac{1}{n}$. Значит, стопку из n плит можно сдвинуть на $\frac{1}{n}$ метров к краю берега. После очередного сдвига постепенно нарастающей стопки из $1, 2, 3, \ldots, n$ плит крайняя точка верхней плиты удалится от берега на расстояние

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

Много это или мало? Вроде бы – немного, ведь с увеличением n к сумме прибавляются все меньшие и меньшие дроби. Но это не так.

В самом деле,

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \ldots >$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \ldots =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots$$

– в последнем выражении может быть сколь угодно много половинок, значит, величина S_n с увеличением n может стать сколь угодно большой .

А что это означает для слюдяной конструкции на берегу Байкала? А то, что, подкладывая все больше и больше плит, можно удаляться от берега все дальше и дальше. (Разумеется, не надо забывать, что равновесие плит неустойчивое; да и вообще, такая картина имела бы место только в том случае, если бы Земля была плоской.)

– Стоп!... Эхэ-хэ-хэ, что же я про себя-то забыл? – очнулся Старик. – А ведь мне, горемычному, предстоит испытать это несусветное нагромождение плит в деле, примостившись на самом-самом верху да на самом-самом краю чудной конструкции. Окажется ли она сколь угодно длинной, если кроме силы тяжести самой лестницы в крайней ее точке будет приложена некоторая дополнительная сила F, включающая мой вес и вес всей выловленной мною рыбы?

Упражнение 1*. Постарайтесь ответить на этот вопрос.

На минутку оставим Старика и рассмотрим модель лестницы без учета силы F. Для больших значений n величину S_n удобно рассчитывать по приближенной формуле

$$S_n \approx \ln n + C,$$

которая становится тем точнее, чем большим становится n (точность этой формулы при больших значениях n не превышает $\frac{1}{n}$). Здесь функция $\ln n$ – так называемый натуральный логарифм от числа n, ее при умеренных значения аргумента умеют вычислять все приличные компьютеры и калькуляторы; $C = 0{,}5772156649\ldots$ – постоянное число, получившее название *константы Эйлера*.

Упражнение 2

а) Предположим, толщина слюдяной плиты равна 1 мм, и лестница, сконструированная без учета веса Старика, поднялась до высоты величайшей вершины мира – горы Эверест (8848 м). Как далеко выдвинется при этом край лестницы?

б) Тот же вопрос, если высота лестницы достигла границ видимой части Вселенной ($5 \cdot 10^{26}$ м).

Отправляясь теперь на рыбную ловлю, Старик должен был каждый раз взбираться по своей лестнице вверх. На первых порах особенно удивлялись этому птицы. Да и с земли всякому новому человеку чудно было видеть Старика, словно парящего в воздухе, да еще с удочкой в руках. Слюдяная лестница была почти невидима.

...Все в этом мире когда-нибудь кончается. Давно нет на берегу хижины, в которой жили Старик и его Старуха. Где сейчас эта невидимая лестница – точно не сказать. Бывает, что задуют в тех краях южные ветры и принесут они песок и пыль с монгольских степей. Осядет тот желтый песок на лестнице, и станет она зримой – золотом засияет в лучах солнца над Байкалом-морем. Но вот уже дожди смыли тот песок, свежий ветер-баргузин сдул его, и снова лестница невидима. А еще бывает, лучи солнца так озарят лестницу, так преломятся на гранях слюдяных плит, что лестница засветится подобно радуге...