ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

КМШ

ЗАДАЧИ

(см. «Квант» №4)

1. Да. Например, числа 1000000 + П(1000000), 1000001 + + П(1000001), ..., 1002007 + П(1002007).

2. Лжецов среди аборигенов – двое.

Действительно, если среди аборигенов было не более одного лжеца, то из двух высказанных утверждений хотя бы одно было правдивым (ибо их произнесли *разные* аборигены). Но, согласно любому из этих утверждений, лжецов как минимум двое. Противоречие.

Если же все трое – лжецы, то обе фразы были бы правдивы и принадлежали лжецам, что тоже невозможно.

Следовательно, лжецов ровно двое.

Осталось привести пример, свидетельствующий о корректности ситуации. Например, Ах – правдивый, и оба утверждения принадлежат лжецам.

3. Это сделать не удастся.

Обозначим d наибольший общий делитель десяти натуральных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$. Имеют место следующие десять неравенств:

$$x_1 \geq d,$$
$$x_2 \geq d,$$
$$\ldots$$
$$x_{10} \geq d.$$

Сложив их вместе, получим $x_1 + x_2 + \ldots + x_{10} \geq 10d$, причем равенство здесь возможно только в том случае, если все десять чисел равны d, что противоречит условию. Итак, $\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{10}}{10} > d$, т.е. среднее арифметическое десяти различных натуральных чисел всегда больше их наибольшего общего делителя.

4. Верно. Пусть закрытая тетрадь лежит на столе. Пронумеруем ее листы сверху вниз номерами от 1 до 96. Рассмотрим листы с номерами от 1 до n включительно и подсчитаем разность между общим количеством рожиц на этих листах, смотрящих вверх и вниз. Обозначим эту разность через $\Delta(n)$. Для каждого n от 1 до 96 значение $\Delta(n)$ – это некоторое целое число (положительное, отрицательное или ноль). Доопределим «естественным образом» нашу функцию $\Delta(n)$ значением $\Delta(0) = 0$. Это вполне логично – если взять нулевое число листов, то на них нарисовано также нулевое число рожиц, смотрящих вверх и вниз, и разность между двумя нулями – тем более ноль.

Пусть всего в тетради нарисовано m рожиц, смотрящих вверх. Тогда число рожиц, смотрящих вниз, равно 96 – m. Поэтому $\Delta(96) = m - (96 - m) = 2(m - 48)$, т.е. $\Delta(96)$ – четное число. Далее рассмотрим, как меняется величина $\Delta(n)$ с ростом n от 0 до 96 с шагом 1. Если на очередном листе нарисована рожица, смотрящая вверх, то $\Delta(n)$ увеличивается на 1, а если смотрящая вниз – то $\Delta(n)$ уменьшается на 1. Таким образом, каждое последующее значение $\Delta(n)$ отличается от предыдущего на 1. При изменении n от 0 до 96 величина $\Delta(n)$ изменилась от 0 до $2(m - 48)$, причем она обязана принять любое промежуточное значение между 0 и $2(m - 48)$, в частности – значение $(m - 48)$. Итак, пусть для некоторого k величина $\Delta(k) = m - 48$. Раскроем тетрадь между k-м и $(k+1)$-м листами. Тогда на первых k листах все рожицы перевернутся и будут смотреть в противоположную сторону. Поэтому на первых k листах разность между количеством рожиц, смотрящих вверх и вниз, станет равна $-(m - 48)$, а для листов с номерами от $(k+1)$ до 96 эта разность, как легко видеть, равна $(m - 48)$. Поэтому для всех 96 листов тетради указанная разность станет равна $-(m - 48) + (m - 48) = 0$, а это как раз и свидетельствует о том, что вверх и вниз смотрит одинаковое количество рожиц.

5. Сначала заметим, что показанные на рисунке 1 диагонали разбивают правильный восьмиугольник на фрагменты, площади которых составляют $\frac{1}{8}$ и $\frac{1}{4}$ части площади S восьмиугольника. Далее заметим, что синие куски исходного разбиения, так же, как и зеленые, складываются в указанные на рисунке 1 трапеции, площадь каждой из которых равна $\frac{1}{4}S$. Из красных кусков исходного разбиения складывается трапеция, равная желтой, площадь которой также равна $\frac{1}{4}S$.

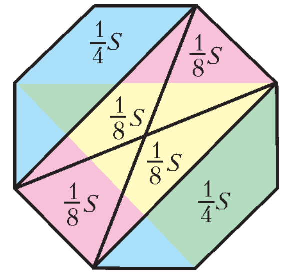

Рис. 1

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

Вопросы и задачи

1. Не только сможет, но даже будет вращаться быстрее (из-за уменьшения сопротивления воздуха).

2. Работа, совершенная человеком, и кинетическая энергия, потерянная камнем, идут на увеличение энергии поезда.

3. Высыпающийся песок не влияет на изменение скорости тележки.

4. Чтобы изменить скорость, а значит и импульс барона, на него должна подействовать внешняя сила либо он должен «поделиться» частью своей массы, отбросив ее вперед по ходу прыжка.

5. а) Да; б) если груз сбрасывается без начальной скорости, то нет.

6. Если бы масса орудия была меньше, чем масса снаряда.

7. Нет, не попадут. При одновременной стрельбе платформа остается неподвижной, что является условием попадания снарядов в цель. Если одна из пушек выстрелит раньше, ее снаряд вылетит из ствола с меньшей начальной скоростью относительно земли и не долетит до цели. Второй снаряд вылетит из уже движущейся вместе с платформой пушки и будет обладать большей начальной скоростью относительно земли, значит, он перелетит цель.

8. После пуска снаряд, разгоняясь, некоторое время движется еще в том же направлении, что и самолет, т.е. стабилизаторами вперед. Это приводит к развороту снаряда. Затем за счет реактивной силы тяги скорость снаряда увеличивается, и он догоняет самолет.

9. Для этого достаточно поднять вытянутую руку и двигать ею вокруг головы. При этом космонавт будет разворачиваться вокруг своей продольной оси в направлении, противоположном вращению руки.

10. Сначала нужно выстрелить из первого пистолета в сторону, противоположную кораблю, и бросить туда же первый пистолет. Затем то же самое и в том же порядке проделать со вторым пистолетом.

11. Да, при этом они должны выбрасывать газы в сторону Луны.

12. Если топливо расходуется частями, то в начале работы двигателя ему приходится разгонять ракету с массой еще оставшегося на данный момент топлива. Поэтому приращения скорости по мере расхода топлива будут увеличиваться.

13. В начале ускорения газы отбрасываются влево. Но когда скорость ракеты станет больше скорости истечения из нее газов, они относительно наблюдателя станут двигаться также вправо, однако со скоростью, всегда меньшей скорости ракеты.

14. Масса топлива должна в несколько раз превышать массу ракеты с полезным грузом, и тогда даже при сравнительно медленном процессе сгорания топлива ракета наберет необходимую скорость.

15. Нет, нельзя. Скорость истечения газов из ракетных двигателей значительно меньше второй космической скорости у поверхности Земли, поэтому эти газы не покинут Землю и не сообщат ей движение.

Микроопыт

Спираль станет «реактивной» – начнет вращаться, причем в сторону, обратную той, куда устремится из нее мыльный раствор, пытающийся растечься по поверхности воды.

ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯДА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

1. $l = \frac{2mv}{qB}\sin\frac{qBt}{2m}$. **2.** $t = \frac{2\pi m_1 m_2}{qB(m_1+m_2)}$.

3. $E = 8\cdot 10^3$ В/м. **4.** $B_{\min} = \frac{1}{h}\sqrt{\frac{2\Delta\varphi}{\gamma}} = 2{,}1\cdot 10^{-4}$ Тл.

5. $t = \frac{BR}{E} = 10^{-3}$ с.

6. Магнитная индукция перпендикулярна как напряженности электрического поля, так и начальной скорости электрона и равна $B = E\sqrt{\frac{m}{2W}} = 3{,}2\cdot 10^{-3}$ Тл.

ИНВАРИАНТНОСТЬ И ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ

1. $b = \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. **2.** $a_1 = 0$, $a_2 = -\frac{2}{3}$.

3. $b = 3$. **4.** $a = 0$, $0 < b \le 1$. **5.** $b = 2$. **6.** $a = 0$.

7. $a_1 = -\frac{1}{4}$, $a_2 = -\frac{1}{32}$.

XXXIII ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП

8 класс

1. Так как $(b-c)+(c-a)+(a-b)=0$, то одно из слагаемых неположительно; пусть для определенности это $b - c$. Тогда дискриминант первого уравнения $(a-b)^2 - 4(b-c) \ge 0$, т.е. оно имеет решение.

2. Разделим таблицу вертикальной линией m пополам. В одной из половин, например в правой, окажется не более 25 четных чисел. Такое же количество нечетных чисел окажется в левой половине. Меняя местами пары таких чисел разной четности, не более чем за 25 операций можно получить таблицу, у которой в правой половине все числа – нечетные, а в левой – четные. Сумма чисел в каждой паре соседних клеток в каждой из половин – четное (и большее 2), а потому составное число.

Простыми могут оказаться только суммы чисел в соседних клетках l_j и r_j из разных половин, примыкающих к линии m. Будем теперь менять местами числа только из правой половины так, чтобы суммы чисел в парах клеток (l_j, r_j) (j = = 1, 2, …, 10) стали делиться на три. Это можно сделать, так как в правой половине не менее чем по 16 чисел дают остатки 0, 1 и 2 при делении на три, а для требуемой перестановки может потребоваться не более чем по 10 чисел, дающих эти остатки. Полученная не более чем за 25 + 10 = 35 операций таблица – искомая.

3. *Ответ:* $\frac{1}{2}$.

Обозначим через R точку пересечения прямых PB, QC и AM (рис.2). Заметим, что $PM \parallel AC$, $MQ \parallel BD$, поэтому четырехугольники $PMCA$ и $QMBD$ – параллелограммы. Значит, $MC = PA$, $BM = DQ$ и $PQ = PA + AD + DQ = MC + AD + BM = 2BC$. Так как $BC \parallel PQ$ и $BC = \frac{1}{2}PQ$, то BC – средняя линия треугольника PRQ. Значит, и BM – средняя линия треугольника ARP. Тогда $MC = PA = 2BM$.

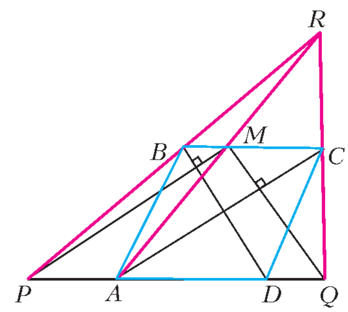

Рис. 2

5. См. рис.3. В течение 24 : (18 + 6) = 1 часа все движутся навстречу друг другу, первый – на велосипеде, при этом первый и третий друзья встретятся и первый передаст велосипед третьему. В этот момент второй, прошедший 6 км, должен остановиться и дожидаться третьего, едущего к нему навстречу на велосипеде. Первый в это время тоже может отдохнуть. Третий через (24 – 6 – 6) : 18 = 2/3 часа доедет до стоящего второго и передаст ему велосипед. После этого второй доедет до Белореченска, третий дойдет до Майкопа, а первый дойдет до Белореченска за 1 час. Всего с начала движения пройдет 1 + 2/3 + 1 часов, т.е. 2 часа 40 минут.

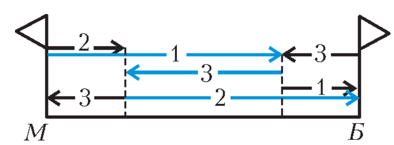

Рис. 3

Замечание. Можно показать, что за меньшее время все трое добраться не смогут.

6. Опустим из точки I на стороны AB, BC, CA перпендикуляры IC_1, IA_1, IB_1 соответственно (рис.4). Очевидно, эти перпендикуляры равны по длине; кроме того, $AC_1 = AB_1$ и $CA_1 = CB_1$ как отрезки касательных ко вписанной окружности, проведенных из одной точки. Тогда и прямоугольные треугольники IKB_1 и INA_1 равны по катету и противолежащему острому углу, поэтому $B_1K = A_1N$. Аналогично, $B_1L = C_1M$.

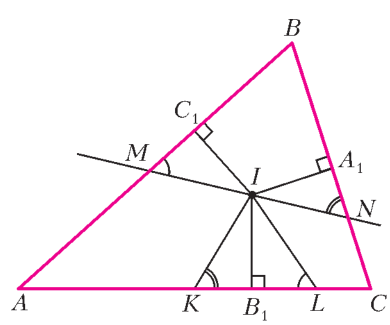

Рис. 4

Следовательно $AM + KL + CN = AM + MC_1 + NA_1 + CN = AC_1 + CA_1 = AB_1 + CB_1 = AC$.

Замечание. Утверждение задачи верно и в случае, когда треугольник BMN тупоугольный.

7. *Ответ:* 7.

Имеем

$$n?-32 = 2(n-8). \qquad (*)$$

Так как $n?$ не делится на 4, то из (*) следует, что $n - 8$ нечетно. Пусть $n > 9$, тогда $n - 8$ имеет нечетный простой делитель p. Так как $p < n$, то $n?$ делится на p. Значит, 32 делится на p, что невозможно.

Мы получили, что $n \le 9$ и нечетно. При $n = 9$ имеем $n?$ =

$= 210 > 2 \cdot 9 + 16$. Число $n = 7$ – корень нашего уравнения, а при $n = 5$ имеем $n? = 6 < 16$.

9 класс

1. Если какой-то из трехчленов $f(x)$ или $g(x)$, скажем $f(x)$, не имеет корней, то $f(x) > 0$ для любого x, поэтому и $f(f(x)) > 0$ для любого x, и утверждение доказано. Пусть оба трехчлена имеют корни. Не умаляя общности можно считать, что минимальное значение $f(x)$ не превосходит минимального значения $g(x)$. Из условия на многочлен $g(f(x))$ следует, что минимальное значение $f(x)$ больше любого корня $g(x)$ (действительно, если $g(a) = 0$ и в некоторой точке $f(x_1) \le a$, то найдется x_2 такое, что $f(x_2) = a$; тогда $g(f(x_2)) = 0$, что невозможно). Тогда и минимальное значение $g(x)$ больше любого корня $g(x)$. Поэтому уравнение $g(g(x)) = 0$ не может иметь вещественных корней.

2. Пусть вначале в сумму входила дробь $a/2$. Докажем, что в исходной сумме найдется такая дробь b/c с нечетным знаменателем c, что числа a и b имеют разную четность. Действительно, дробей с нечетными знаменателями ровно 50 и число a не является числителем ни одной из них. Поэтому среди числителей таких дробей не больше 49 имеют ту же четность, что и a.

Поменяем теперь местами числители a и b. Сделаем это в два приема: сначала поменяем числитель у дроби со знаменателем 2 (сумма изменилась на нечетное число $a - b$ половинок и, значит, превратилась в целое число), а затем – числитель дроби со знаменателем c (сумма изменилась на дробь с нечетным знаменателем, т.е. стала дробью с нечетным знаменателем).

3. *Ответ:* при нечетных n выигрывает второй, при четных n – первый.

Заметим, что число вершин по одну сторону от любой диагонали четно, а по другую – нечетно. Поэтому любую диагональ пересекает четное число других диагоналей $(2n+1)$-угольника.

Пусть в некоторый момент игры невозможно сделать ход, тогда каждая непроведенная диагональ пересекает нечетное число уже проведенных. Так как любая диагональ пересекает четное число диагоналей, то каждая непроведенная диагональ пересекает также нечетное число непроведенных диагоналей. Такая ситуация возможна только тогда, когда непроведенных диагоналей четное число. Действительно, посчитаем для каждой непроведенной диагонали число непроведенных диагоналей, пересекающих ее. В этой сумме каждая пара пересекающихся диагоналей учтена два раза, поэтому сумма четна, а все ее слагаемые нечетны. Значит, их четное число.

Таким образом, если общее количество диагоналей в многоугольнике нечетно, то выигрывает первый, а если четно – то выигрывает второй. Легко видеть, что в $(2n+1)$-угольнике число диагоналей нечетно при четном n (тогда выигрывает второй) и четно при нечетном n (тогда выигрывает первый).

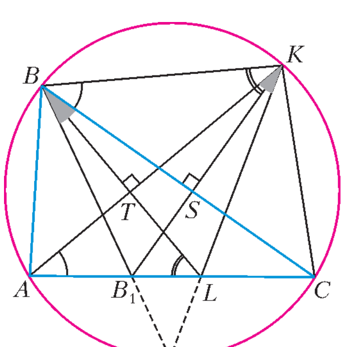

Рис. 5

4. Пусть S и T – основания перпендикуляров, опущенных из B_1 и B на BC и AK соответственно (рис.5). В прямоугольных треугольниках ALT и BSK имеем $\angle SBK = \angle LAT = \alpha$ как опирающиеся на одну дугу KC; поэтому $\angle B_1LB = \angle ALT = 90° - \alpha = \angle BKS = \angle BKB_1$, т.е. точки B, B_1, L, K лежат на одной окружности. Отсюда $\angle BB_1K = \angle BLK = \beta$, и из прямоугольных треугольников BB_1S и KLT получаем

$$\angle AKL = \angle TKL = 90° - \beta = \angle B_1BS = \frac{1}{2}\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AKC,$$

что и означает, что KL проходит через середину дуги AC.

5. Пусть в любой вершине стоят одни и те же числа a и b; тогда достаточно оставить в вершинах с четными номерами число a, а в вершинах с нечетными – число b. Допустим, что это не так. Тогда пронумеруем вершины по порядку от 1 до 100 так, чтобы в вершинах 1 и 100 стояли разные пары чисел.

Покрасим все поставленные числа в красный и синий цвета следующим образом. Числа в первой вершине окрасим в разные цвета. Пусть в k-й вершине числа a и b окрашены в красный и синий цвета соответственно. Тогда, как нетрудно видеть, в $(k+1)$-й вершине можно покрасить числа так, чтобы одноцветные числа в k-й и $(k+1)$-й вершинах различались. Таким образом мы покрасим все числа; при этом в любой паре соседних вершин, кроме (1, 100), одноцветные числа будут различны. Рассмотрим вершины 1 и 100. Если в них равны красные числа и равны синие числа, то в этих вершинах стоит одна и та же пара чисел, что не так. Пусть синие числа в этих вершинах различны. Тогда, стерев во всех вершинах красные числа, мы получим требуемое.

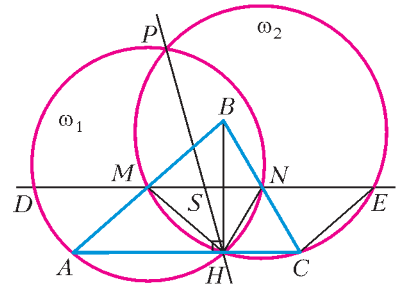

Рис. 6

6. См. рис.6. Пусть прямая MN вторично пересекает описанные окружности ω_1 и ω_2 треугольников AHN и CHM в точках D и E, а прямую PH – в точке S. Поскольку HN – медиана прямоугольного треугольника BHC, то $HN = CN$ и $\angle NHC = \angle NCH$. Из параллельности хорд ME и HC окружности ω_2 следует, что четырехугольник $MHCE$ – равнобокая трапеция, поэтому $HM = CE$ и $\angle MHC = ECH$. Следовательно, $\angle MHN = \angle MHC - \angle NHC = \angle ECH - \angle NCH = \angle ECN$. Значит, $\Delta MHN = \Delta ECN$ по двум сторонам и углу между ними, откуда $NE = MN$. Аналогично, $DM = MN$. Обозначим длину этих трех отрезков через a, а длины отрезков MS и NS через x и y. Из вписанности четырехугольников $DHNP$ и $MHEP$ получаем $MS \cdot SE = PS \cdot SH = NS \cdot SD$, откуда $x(a+y) = y(a+x)$, т.е. $ax = ay$. Таким образом, S – середина MN, что и требовалось.

Замечание. Утверждение задачи остается в силе, даже если отказаться от требования остроугольности ΔABC. Доказательство в этом случае полностью аналогично изложенному.

8. *Ответ:* $N = 155$.

Пусть на ленточках, на которых записаны числа $\frac{1}{k!}$ и $\frac{1}{l!}$ ($k < l$), нашлось по одинаковому куску из N подряд стоящих цифр. Домножим числа $\frac{1}{k!}$ и $\frac{1}{l!}$ на степени 10 так, чтобы одинаковые куски оказались сразу после десятичной запятой. Дробные части получившихся дробей $\frac{10^a}{k!}$ и $\frac{10^b}{l!}$ не могут совпадать. Действительно, в противном случае число $\frac{10^a}{k!} - \frac{10^b}{l!} = \frac{10^a(k+1)(k+2)\ldots l - 10^b}{l!}$ целое; следовательно, числитель последней дроби делится на l. Тогда на l делится и число 10^b. С другой стороны, ни одно число от 81 до 99 не является делителем числа вида 10^b, так как каждое из этих чисел содержит в своем разложении на множители хотя бы одно простое число, отличное от 2 и 5.

Рассматриваемые нами дробные части $\left\{\frac{10^a}{k!}\right\}$ и $\left\{\frac{10^b}{l!}\right\}$ могут быть записаны как обыкновенные дроби со знаменателями $k!$ и $l!$, а потому – и как дроби со знаменателем 99!, который делится на все числа 80!, 81!, …, 99!; следовательно, их разность есть разность двух неравных дробей со знаменателем 99, и она не меньше $\frac{1}{99!}$.

С другой стороны, две правильные десятичные дроби, у которых совпадают первые N цифр после запятой, отличаются меньше чем на $\frac{1}{10^N}$. Таким образом, $\frac{1}{99!} < \frac{1}{10^N}$. Из условия следует, что $\frac{1}{99!} > \frac{1}{10^{156}}$, поэтому $N < 156$.

Таким образом, куска из 156 знаков всегда достаточно для того, чтобы определить, из какой полоски он вырезан. С другой стороны, на полосках с числами $\frac{1}{98!}$ и $\frac{1}{99!}$ есть одинаковые куски по 155 знаков: $\frac{1}{99!} = 0,\underbrace{00\ldots00}_{155\text{ нулей}}10715\ldots$, а

$$\frac{1}{98!} = \frac{99}{99!} = \frac{100}{99!} - \frac{1}{99!} =$$

$$= 0,\underbrace{00\ldots00}_{153\text{ нуля}}10715\ldots - 0,\underbrace{00\ldots00}_{153\text{ нуля}}00107\ldots = 0,\underbrace{00\ldots00}_{153\text{ нуля}}106\ldots,$$

т.е. на обеих полосках есть кусок $\underbrace{00\ldots00}_{153\text{ нуля}}10$.

10 класс

1. Покрасим клетки каждой грани куба в шахматном порядке так, чтобы угловые клетки были черными. При этом каждая грань содержит 41 черную и 40 белых клеток. Заметим, что все согнутые полоски будут одноцветными, а все остальные – нет. Так как количество черных клеток на 6 больше, чем количество белых, то число черных согнутых полосок на 3 больше, чем число белых. Следовательно, эти числа разной четности, и их сумма нечетна.

2. Поскольку $a_0 + a_1 + \ldots + a_k \geq m$, все суммы вида $-m + a_0 + a_1 + \ldots + a_k$ неотрицательны. Поэтому при $x \geq 1$ имеем цепочку неравенств

$$P(x) - mx^n = (-m + a_0)\left(x^n - x^{n-1}\right) +$$

$$+ (-m + a_0 + a_1)\left(x^{n-1} - x^{n-2}\right) + \ldots + (-m + a_0 + \ldots + a_{n-1})(x-1) +$$

$$+ \ (-m + a_0 + \ldots + a_n) \geq 0,$$

так как каждое слагаемое неотрицательно.

4. *Ответ:* при $N = 101$.

Предположим, что при каком-то значении N фокус удастся. Тогда по каждому варианту последовательности с двумя закрытыми цифрами, пусть их количество равно k_1, фокусник может восстановить исходную; значит, каждой последовательности с двумя закрытыми цифрами фокусник однозначно может поставить в соответствие восстановленную последовательность из N цифр, пусть их количество равно k_2. Следовательно, $k_1 \geq k_2$. Отметим, что $k_1 = (N-1)\cdot 10^{N-2}$ (есть $N - 1$ вариант вычеркнуть две цифры, а на остальные $N - 2$ позиции есть по 10 вариантов на каждую). Нетрудно видеть, что $k_2 = 10^N$. Тогда из $k_1 \geq k_2$ следует, что $N - 1 \geq 100$, т.е. $N \geq 101$.

Покажем, как выполнить фокус при $N = 101$. Пусть сумма всех цифр на нечетных позициях имеет остаток s от деления на 10, а сумма всех цифр на четных позициях имеет остаток t от деления на 10 (позиции нумеруются слева направо числами от 0 до 100). Положим $p = 10s + t$. Пусть помощник закроет цифры, стоящие на позициях p и $p + 1$. Увидев, какие цифры закрыты, фокусник определит p, а следовательно, определит s и t. Отметим, что одна закрытая цифра стоит на нечетной позиции, а другая – на четной. Таким образом, вычислив сумму открытых цифр на нечетных позициях и зная s, фокусник определит закрытую цифру, стоящую на нечетной позиции. Аналогично определяется закрытая цифра, стоящая на четной позиции.

5. *Первое решение.* Пусть сумма $\vec{\sigma}$ всех векторов отлична от нуля ($|\vec{\sigma}| = s > 0$). Введем прямоугольную систему координат Oxy, в которой ось Ox сонаправлена с $\vec{\sigma}$. Пусть $\vec{a}$ – длинный вектор набора, т.е. он не короче, чем $\vec{b} = \vec{\sigma} - \vec{a}$. Поскольку y-координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны по модулю, то x-координата a_x вектора $\vec{a}$ по модулю не меньше, чем x-координата $b_x = s - a_x$ вектора $\vec{b}$. Отсюда получаем, что $a_x \geq s/2$. Теперь, если все векторы набора длинные, то сумма их x-координат не меньше $ns/2 > s$, но эта сумма равна s. Противоречие.

Второе решение. Обозначим данные векторы через $\vec{a}_k$, а их сумму через $\vec{\sigma}$. По условию $|\vec{a}_k| \geq |\vec{\sigma} - \vec{a}_k|$. Возведем это неравенство в квадрат: $\vec{a}_k^2 \geq \vec{\sigma}^2 - 2\vec{\sigma}\cdot\vec{a}_k + \vec{a}_k^2$. Просуммировав такие неравенства по всем k от 1 до n, получаем $0 \geq n\vec{\sigma}^2 - 2\vec{\sigma}(\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_n)$, т.е. $0 \geq (n-2)\vec{\sigma}^2$. Значит, $\vec{\sigma} = \vec{0}$.

6. См. рис.7. Пусть X – точка пересечения прямых AB и PQ. Тогда $XP^2 = XA\cdot XB = XQ^2$, т.е. X – середина PQ. Прямые AB и PR параллельны, так как обе эти прямые перпендикулярны линии центров окружностей ω_1 и ω_2. Из условия теперь получаем, что четырехугольник $PXBR$ – параллелограмм, откуда $BR = XP = \frac{1}{2}PQ = \frac{1}{2}RS$ (последнее – из симметрии PQ и RS). Далее,

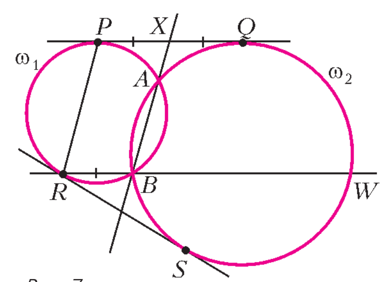

Рис. 7

так как RS – отрезок касательной к ω_2, то $RB\cdot RW = RS^2 = (2RB)^2$, откуда $RW = 4RB$. Значит, $RB/BW = 1/3$.

7. Рассмотрим произвольную хорошую раскраску. Заметим, что общее число концов ребер каждого цвета четно; при этом в каждой вершине степени 3 количество концов каждого цвета имеет одинаковую четность (их там по одному). Поэтому и в вершине A четность их количеств также одинакова; тогда все они нечетны, и в ней сходится три ребра одного цвета и по одному ребру остальных.

Предположим, что утверждение задачи не выполнено, т.е. нет хорошей раскраски с тремя последовательными ребрами одного цвета, выходящими из одной вершины. Докажем, что количество хороших раскрасок, в которых из A выходит три синих ребра, делится на 5. Тогда, очевидно, и общее количество раскрасок будет делиться на 5, что противоречит условию.

Пусть из вершины A последовательно выходят ребра AB_1, AB_2, AB_3, AB_4 и AB_5 (далее по циклу опять идет ребро AB_1). В любой раскраске красное и лиловое ребра из A идут не подряд (иначе и три синих ребра идут подряд). Следовательно, для концов красного и лилового ребер есть 5 вариантов: (B_1, B_4), (B_2, B_5), (B_3, B_1), (B_4, B_2), (B_5, B_3);

обозначим соответствующие количества раскрасок через $k_{14}, k_{25}, k_{31}, k_{42}, k_{53}$. Мы докажем, что $k_{14} \le k_{42} \le k_{25} \le k_{53} \le$ $\le k_{31} \le k_{14}$, откуда будет следовать, что все 5 чисел равны, а общее количество раскрасок делится на 5.

Покажем, что $k_{25} \le k_{53}$ (остальные неравенства аналогичны). Пусть в некоторой раскраске ребра AB_2 и AB_5 – не синие (пусть для определенности AB_2 красное). Рассмотрим граф, вершинами которого являются вершины многогранника, а ребрами – синие и красные ребра. Тогда степень вершины A равна 4, а степени остальных вершин – по 2. Отсюда сразу следует, что граф распался на несколько циклов, причем два из них пересекаются только по вершине A, а остальные не пересекаются вовсе. Рассмотрим цикл, проходящий через A и содержащий AB_2; тогда он содержит еще и синее ребро, выходящее из A. Перекрасим синие ребра этого цикла в красные и наоборот. Тогда мы получили другую хорошую раскраску.

При этом возможны три случая (рис.8). Если цикл содержит синее ребро AB_1 или AB_4, то после перекраски три последовательных ребра (AB_2, AB_3, AB_4 или AB_1, AB_2, AB_3) окрашены в синий цвет; это невозможно по предположению.

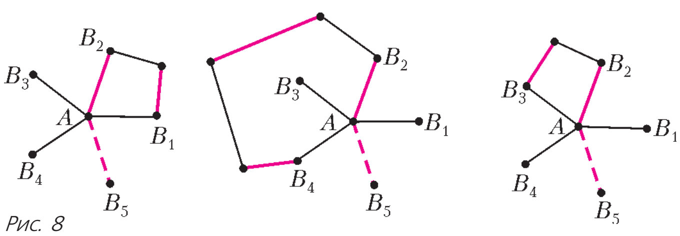

Рис. 8

Значит, в цикле есть ребро AB_3, и после перекрашивания получилась раскраска, в которой красное и лиловое ребра – AB_3 и AB_5. При этом из разных раскрасок после перекрашивания получались разные, так как исходная раскраска восстанавливается по новой аналогичной процедурой. Поэтому $k_{25} \le k_{53}$, что и требовалось.

Замечание 1. Легко видеть, что мы нигде не пользовались специфическими особенностями многогранника. Зафиксировав некоторую (вообще говоря, произвольную) циклическую нумерацию B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 соседей вершины A, мы доказали существование хорошей раскраски, в которой в один цвет покрашены три ребра, идущих из A к последовательным в этой нумерации вершинам.

Замечание 2. Вернемся, однако, к задаче с многогранником. Предположим, что в нашем многограннике есть хорошие раскраски, но откажемся от условия, что их количество не кратно 5. Сделаем еще более смелое предположение, что нам в таких условиях удалось доказать наличие хорошей раскраски, в которой три последовательных ребра, выходящие из A, покрашены в один и тот же цвет. Отсюда без труда выводится самое известное (без преувеличения!) утверждение в теории графов – гипотеза четырех красок.

11 класс

1. Заметим, что

$$|\sin 3x| = \left|3\sin x - 4\sin^3 x\right| = \left|3 - 4\sin^2 x\right| |\sin x| \le 3|\sin x| .$$

Поэтому для функции f_1, полученной из f заменой $\cos 3x$ на $\sin 3x$, выполняется неравенство

$$\left|f_1(x)\right| \le 3|\sin x||\cos x||\cos 2x||\cos 4x||\cos 8x|\ldots\left|\cos 2^k x\right| .$$

(Мы опустили все множители $|\cos nx|$, в которых $n > 3$ и не является степенью двойки; каждый из этих множителей не превосходит 1.) Утверждение задачи теперь следует из тождества

$$\sin x \cos x \cos 2x \cos 4x \cos 8x \ldots \cos 2^k x = 2^{-k-1} \sin 2^{k+1} x .$$

6. *Ответ:* не существуют.

Пусть такие числа a, b, c нашлись. Тогда они целые в силу теоремы Виета; кроме того, при каждом $n > 3$ одно из чисел c или $-c$ является произведением всех корней многочлена $P_n(x)$, т.е. произведением n целых чисел. Для каждого построенного многочлена $P_n(x)$ рассмотрим все его корни, отличные от ± 1; их произведение равно $\pm c$. У чисел c и $-c$ конечное число разложений на множители, отличные по модулю от единицы; значит, какое-то из таких разложений встретится бесконечное число раз. Рассмотрим последовательность многочленов с таким разложением. Они различаются между собой только дополнительными корнями, равными +1 и –1. Возьмем два таких многочлена $P_m(x)$ и $P_k(x)$ степеней $m > k$.

Из теоремы Виета получаем, что сумма чисел, обратных к корням каждого из этих многочленов, равна $-b/c$. Эти суммы различаются лишь наличием нескольких слагаемых вида 1 и –1; ясно, что у P_m по сравнению с P_k добавились равные количества таких корней, т.е.

$$P_m(x) = P_k(x)(x-1)^d (x+1)^d = P_k(x)\left(x^2 - 1\right)^d . \qquad (*)$$

Заметим, что $\left(x^2-1\right)^d = x^{2d} - \ldots + (-1)^{d-1} d x^2 + (-1)^d$. Тогда, сравнив свободные члены и коэффициенты при x^2 в левой и правой частях равенства ($*$), получаем $c = c \cdot (-1)^d$ (откуда d четно) и

$$a = a \cdot (1)^d + c \cdot (-1)^{d-1} d = a - cd ;$$

последнее невозможно, так как $cd \ne 0$. Противоречие.

7. Пусть дана пирамида $ABCD$. Выберем пару ее скрещивающихся ребер с наибольшей суммой квадратов – пусть это AB и CD. Покажем, что шары с диаметрами AB и CD покрывают каждое ребро пирамиды. Ясно, что достаточно доказать это для ребра BC. Рассмотрим основания A_1 и D_1 перпендикуляров, опущенных соответственно из A и D на BC (рис.9). Тогда

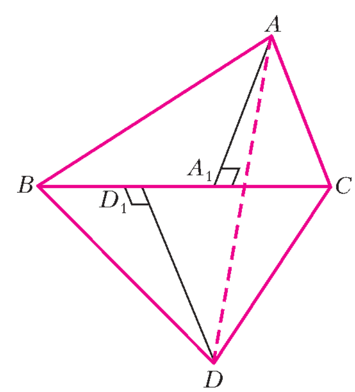

Рис. 9

$$AB^2 + CD^2 = AA_1^2 + BA_1^2 + DD_1^2 + CD_1^2 \ge$$
$$\ge AC^2 + BD^2 = AA_1^2 + CA_1^2 + DD_1^2 + BD_1^2 ,$$

откуда $BA_1^2 + CD_1^2 \ge CA_1^2 + BD_1^2$. Это означает, что отрезки BA_1 и CD_1 перекрываются, а значит, они покрывают весь отрезок BC. Но наши шары как раз покрывают оба этих отрезка.

Поскольку шары покрывают все ребра, то они покрывают и все грани. Пусть теперь какая-то точка X тетраэдра не покрыта шарами. Тогда из нее можно выпустить луч, не имеющий общих точек с шарами. Однако он пересечет поверхность в точке, принадлежащей одному из шаров. Противоречие.

8. *Первое решение.* Рассмотрим граф, вершины которого – это города, а ребра – авиалинии. Обобщим задачу – разрешим графу иметь кратные ребра. Тогда для любого набора, скажем из k вершин, количество ребер между ними не превосходит $2k - 2$. Требуется доказать, что можно покрасить ребра графа в два цвета так, чтобы не было одноцветных циклов.

Назовем непустое подмножество A вершин графа *критическим*, если количество ребер графа между вершинами множества A – ровно $2|A| - 2$.

Лемма. *Если A и B – критические подмножества, причем $A \cap B \neq \varnothing$, то $A \cup B$ – тоже критическое.*

Доказательство. Пусть $C = A \cap B$, $D = A \cup B$ и D – не критическое, $|A| = a$, $|B| = b$, $|C| = c$, $|D| = d = a + b - c$. Так как количество ребер в A равно $2a - 2$, а количество ребер в D меньше $2d - 2$, то число ребер, соединяющих вершины из D, у которых не оба конца лежат в A, меньше $(2d-2)-(2a-2) = 2(d-a) = 2(b-c)$. В частности, в число этих ребер входят все ребра, соединяющие вершины B, не обе из которых лежат в C. Поэтому их число также меньше $2(b-c)$, а число остальных ребер среди вершин B больше $(2b-2)-2(b-c) = 2c-2$. Но это в точности ребра, соединяющие вершины множества C; значит, C не удовлетворяет условию задачи – противоречие. Лемма доказана.

Замечание. Заметим, что в условиях леммы множество C также будет критическим.

Перейдем к решению задачи. Предположим противное. Рассмотрим граф с минимальным числом вершин n, для которого утверждение задачи не выполняется. Рассмотрим все его вершины. Число ребер между ними не больше $2n - 2$. Если степень каждой вершины не меньше 4, то общее количество ребер не меньше $4 \cdot n/2 = 2n > 2n - 2$, что невозможно. Значит, найдется вершина a степени не больше 3. Если ее степень меньше 3, то выкинем ее; ребра оставшегося графа можно покрасить требуемым образом, так как он, очевидно, удовлетворяет условию. Покрасив после этого ребра из вершины a в разные цвета, мы, очевидно, не образуем одноцветных циклов, и требуемая раскраска получена.

Итак, степень a равна 3, и она соединена с вершинами b, c, d. Все три вершины b, c, d не могут совпадать, так как иначе между двумя вершинами a и b было бы больше $2 \cdot 2 - 2$ ребер, что невозможно. Тогда среди b, c и d есть вершина, отличная от обеих остальных – пусть это вершина c.

Выбросим из графа вершину a. Если в оставшемся графе пара вершин b и c не принадлежит одновременно никакому критическому подмножеству, то после добавления «фиктивного» ребра (b, c) мы получим граф, удовлетворяющий условию задачи, число вершин в котором меньше, чем в нашем (рис.10).

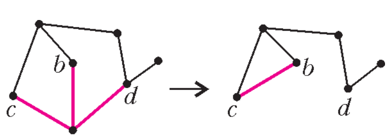

Рис. 10

Покрасим его ребра требуемым образом, потом удалим добавленное ребро, вернем вершину a и покрасим ребра (a, b) и (a, c) в цвет «фиктивного» ребра, а ребро (a, d) – в другой. Очевидно, одноцветных циклов не появится.

Аналогично можем поступить, если c и d одновременно не принадлежат критическому множеству. Если же вершины b и c принадлежат критическому множеству A_1, а вершины c и d – критическому множеству A_2, то $A_1 \cup A_2$ – тоже критическое (ибо $c \in A_1 \cap A_2$). Но тогда, добавив к этому множеству вершину a, мы добавим к его внутренним ребрам три ребра; следовательно, полученное множество противоречит условию задачи.

Второе решение. Покажем, как можно по-другому (без использования леммы) завершить решение задачи. Так же, как и в первом решении, рассмотрим вершину a степени 3 и критическое подмножество V, содержащее двух ее соседей, но не ее саму.

Выкинем из нашего графа G все вершины множества V и добавим новую вершину v, причем для каждого ребра, соединяющего вершину V с вершиной не из V, соединим v с этой внешней вершиной (рис.11).

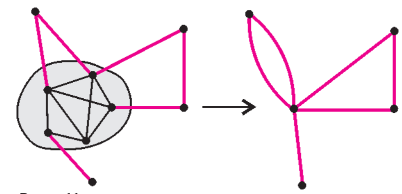
Рис. 11

(Такая операция называется стягиванием подграфа V.) Покажем, что новый граф G' также удовлетворяет условию. Рассмотрим произвольное множество D из d его вершин. Если $v \notin D$, то число ребер между ними такое же, как было в графе G, т.е. не больше $2d - 2$. Если же $v \in D$, то рассмотрим множество $D \cup V \setminus \{v\}$ из $(d + k - 1)$ вершин графа G; среди них не больше $2d + 2k - 4$ ребер, из них ровно $2k - 2$ ребер между вершинами V; значит, остальных ребер не больше $2d - 2$, что и требовалось.

Ребра графа на вершинах множества V можно покрасить требуемым образом; покрасим также таким образом ребра G' (в обоих полученных графах меньше чем по n вершин!). В графе G каждое ребро соответствует ребру в одном из двух графов – G' или V. Покрасим это ребро так же, как соответствующее ему ребро в этих графах. Покажем, что не появилось одноцветных циклов. Пусть это не так. Ясно, что каждый цикл проходит как по вершинам множества V, так и по другим вершинам. Поэтому можно выйти по ребру из вершины множества V, пройти по нескольким (больше одного!) одноцветным ребрам и впервые придти снова в вершину множества V. Это опять означает наличие цикла в новом графе – противоречие.

Замечание. Заметим, что если между какими-то k вершинами число ребер больше $2k - 2$, то требуемая покраска невозможна. Таким образом, верно и утверждение, обратное утверждению задачи.

XLI ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО ФИЗИКЕ

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

9 класс

1. Скорость точки B направлена вертикально вниз и равна v_0; скорость точки C направлена вертикально вверх и равна $v_0/2$; точка O лежит на катете BC на расстоянии $L \sin 30° \operatorname{tg} 30° \approx 0{,}3L$ от точки C.

2. $v_0 = \sqrt{a(L-l)}$.

3. $\dfrac{I_2}{I_1} = \sqrt{\dfrac{t-t_2}{t-t_1}} = \sqrt{\dfrac{3}{2}} \approx 1{,}22$; $\quad t_{б2} = t + \dfrac{(t_{б1}-t)(t-t_2)}{t-t_1} = 50$ °C.

4. См. рис.12, на котором $R_1 = 25$ Ом и $R_2 = 50$ Ом. Вольт-амперная характеристика «черного ящика» между выводами *1–3* мало отличается от характеристики линейного резистора с сопротивлением приблизительно 33 Ом. К выводам *1–3* нужно приложить напряжение $U = 11{,}25$ В.

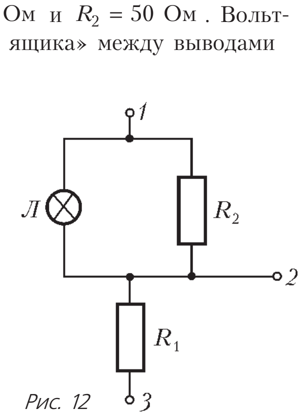

Рис. 12

10 класс

1. Скорость первого диска равна $0{,}8v$ и направлена по прямой AB; скорость второго диска равна $0{,}6v$ и лежит на прямой, перпендикулярной AB и проходящей через точку C.

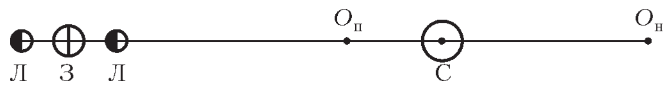

Рис. 13

2. $r_п \approx 0{,}73$ а.е., $r_н \approx 1{,}7$ а.е.; см. рис.13.

3. $V = \frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{gh}{2}\frac{1-\rho_м/\rho}{d_2^{-4}-d_1^{-4}}} = 5{,}9$ см^3/с.

4. а) $p \to p_0$, б) $p \to p_0$, в) $p \to p_0 + \rho gh$; $p = 1{,}17\cdot 10^5$ Па.

5. См. рис.14; для схемы на рисунке 14,*а* $R_1 = 50$ Ом и $R_2 = 16$ Ом; вольт-амперная характеристика нелинейного элемента строится путем вычитания при заданном токе напряжений, соответствующих *ВАХ 1–2* и *ВАХ* R_2 (рис.15); *ВАХ 1–3* строится суммированием напряжений, соответствующих *ВАХ 1–2* и *ВАХ 2–3* (см. рис.15).

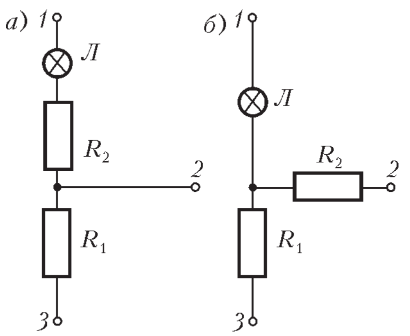

Рис. 14

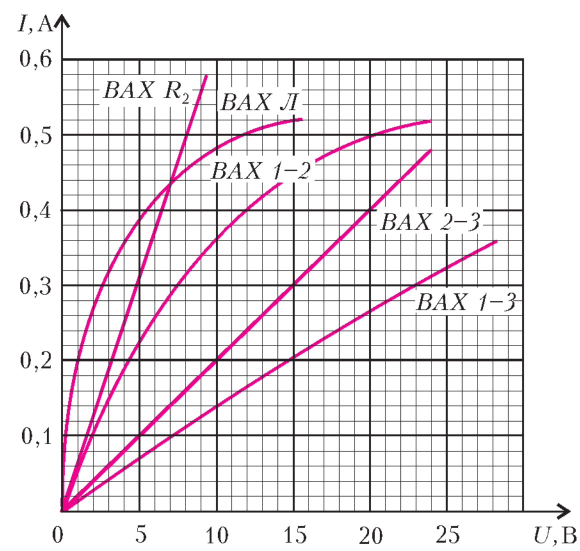

Рис. 15

11 класс

1. $v = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 lm}} = 1{,}17\cdot 10^6$ м/с $\ll c$, где c – скорость света;

$t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0 m(\pi L)^3}{e^2}} \approx 67$ мс; нет, не нужно.

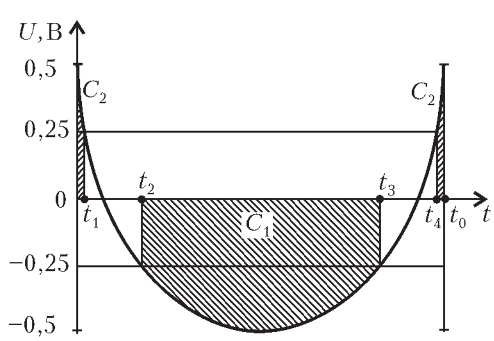

Рис. 16

2. $l = \sqrt{2x_1^2 - \frac{x_1 v^2}{\mu g} + \frac{v^4}{4\mu^2 g^2}}$; $l_{max} = \frac{v^2}{2\mu g}$, $l_{min} = \frac{v^2}{2\sqrt{2}\mu g}$.

3. а) $t_1 \approx 111$ °C; б) $t_2 \approx 53$ °C.

4. $U(t) = \mathcal{E}_0 - 2Bv\sqrt{vt(2R - vt)}$; на рисунке 16 штриховкой изображены интервалы горения светодиодов, здесь $t_1 = 150$ мкс, $t_2 = 1{,}8$ мс, $t_3 = 8{,}3$ мс и $t_4 = 9{,}85$ мс.

5. $\varepsilon_{min} = \pi R_0\sqrt{\frac{C}{L}} = 0{,}63\%$, где $R_0 = 2$ Ом (см. рис.17); $U_0 = \sqrt{2}U_{эфф} \approx 2{,}5$ В, где $U_{эфф} = 1{,}75$ В (см. рис.17).

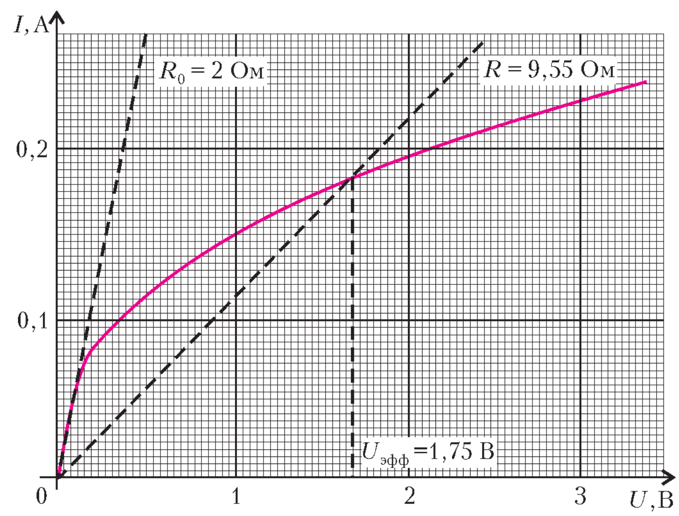

Рис. 17

журнал Квант ©

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

А.А.Егоров, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

В.Н.Власов, Д.Н.Гришукова, В.В.Иванюк, А.Е.Пацхверия

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:
119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»
Тел.: 930-56-48
E-mail: admin@kvant.info, math@kvant.info, phys@kvant.info

Отпечатано в ОАО ордена Трудового Красного Знамени «Чеховский полиграфический комбинат»
142300 г.Чехов Московской области,
Сайт: www.chpk.ru E-mail: marketing@chpk.ru
Факс: 8(49672) 6-25-36, факс: 8(499) 270-73-00
Отдел продаж услуг многоканальный: 8(499) 270-73-59