

Изменения скоростей, происходящие также в противоположные стороны, будут обратно пропорциональны массам тел, ибо количества движения получают равные изменения.

Исаак Ньютон

...при действии сил, равнодействующая которых пропорциональна массе точки, точка переменной массы... движется так же, как движется точка постоянной массы при действии тех же сил и при тех же начальных данных.

Иван Мещерский

Я разработал некоторые стороны вопроса о поднятии в пространство с помощью реактивного прибора, подобного ракете.

Константин Циолковский

Механизм действия ракетного двигателя в точности сходен с явлением отдачи ружья; здесь не нужен воздух, чтобы отталкиваться от него.

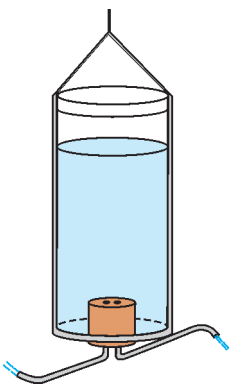
Ричард Фейнман

А так ли хорошо знакомо вам реактивное движение?

Этот вопрос вполне уместен сейчас, когда отмечается 50-летие запуска первого искусственного спутника Земли – события, ознаменовавшего начало новой эры, эры освоения человеком космического пространства. Осуществление давней мечты стало возможным благодаря развитию реактивной техники. Долгая, насчитывающая тысячелетия ее история совершила необыкновенно быстрый рывок, перейдя от предсказаний и расчетов к прямой реализации идеи безпорного движения за пределами Земли. И здесь, без сомнения, можно гордиться решающим вкладом в теорию и практику космонавтики отечественных ученых, инженеров и конструкторов.

Проходит время, и казавшиеся чудом достижения – первый спутник, первый облет человеком Земли, первый выход в открытый космос – становятся рутинными, многократно повторяемыми эпизодами. Теперь на орбитальную станцию отправляются как на работу и даже... в турпоездку. Однако новые планы, связанные с межпланетными перелетами, с предупреждением астероидной опасности, со строительством индустриального пояса вокруг Земли и лунных баз, с совершенствованием спутниковых средств связи и выводом за атмосферу астрономических приборов, словно открыли второе дыхание космонавтики. И ни одно из возникающих ее направлений не обойдется без этих необычных машин – ракет.

Со многими вопросами реактивного движения можно не только познакомиться, но и всерьез разобраться, опираясь на хорошо знакомые законы механики. К чему мы вас сегодня и приглашаем.



Вопросы и задачи

1. Сможет ли вращаться в пустоте (например, в сильно разреженном воздухе под колоколом воздушного насоса) сегнерово колесо, изображенное на рисунке?
2. С площадки заднего вагона движущегося поезда человек бросает камень против движения поезда так, что камень отвесно

падает на землю. На что же была затрачена работа, совершенная человеком при броске, если в результате камень потерял кинетическую энергию, которой он обладал, двигаясь вместе с поездом?

3. По рельсам в горизонтальном направлении катится тележка с песком. Через отверстие в дне песок ссыпается между рельсами. Как изменится при этом скорость тележки?

4. Во время прыжка через болото барон Мюнхгаузен, заметив, что не допрыгнет до противоположного берега, прямо в воздухе «усилием воли» повернул обратно и вернулся на берег, с которого прыгал. Почему невозможен этот «правдивый случай»?

5. Можно ли отнести к реактивному движению: а) откат орудия при выстреле; б) подъем воздушного шара после сбрасывания балласта?

6. В каком случае орудие могло бы приобрести при выстреле большую скорость, чем вылетевший из него снаряд?

7. На железнодорожной платформе, которая может двигаться по рельсам, укреплены две одинаковые пушки, стволы которых направлены вдоль рельсов в противоположные стороны. При одновременных выстрелах оба снаряда попадают каждый в свою цель. Попадут ли снаряды в цели, если одна из пушек выстрелит немного раньше другой?

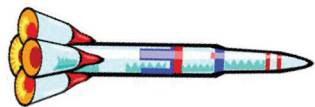
8. При пуске реактивного снаряда, установленного в хвосте самолета для защиты от нападения сзади, было обнаружено, что снаряд разворачивался и догонял самолет. Как это можно объяснить?

9. Космонавт, находясь в состоянии невесомости, «повис» внутри кабины спутника Земли. Каким образом он может развернуться вокруг своей продольной оси?

10. Космонавт находится на некотором расстоянии от космического корабля, имея при себе два одинаковых однозарядных пистолета. Он может стрелять одновременно из двух пистолетов или использовать их по очереди. Как должен поступить космонавт, чтобы быстрее вернуться на корабль?

11. Космический корабль движется вокруг Земли так, что все время находится в точке, где силы притяжения Луны и Земли компенсируют друг друга. Работают ли при этом двигатели корабля?

12. Двигатель ракеты работает в импульсном режиме, выбрасывая равными порциями с одинаковыми скоростями продукты сгорания и тем самым как бы ступеньками увеличивая скорость ракеты. Будут ли изменяться величины этих приращений скорости по мере сгорания топлива?



при этом выхлопные газы?

14. Скорость истечения газов относительно стартовой ракеты составляет не более четырех километров в секунду. Каким же образом ракета может достичь первой, а тем более второй космической скорости?

15. Можно ли превратить Землю в гигантский космический корабль, используя для этой цели современные ракетные двигатели?

Микроопыт

Сверните из очень тонкой проволоки небольшую спираль, слегка смажьте ее маслом или вазелином и аккуратно положите на воду с помощью пинцета либо обычной вилки. Затем наберите несколько капель мыльного раствора пипеткой или соломинкой для питья и роняйте по капельке раствора в центр спирали. Как станет вести себя спираль? Почему?

Любопытно, что...

...возможность использовать реактивную силу струи пара, хотя бы в виде игрушки, была открыта еще в первом веке новой эры Героном Александрийским. А в 1750 году венгерский ученый Янош Сегнер изобрел на этом принципе одну из первых реактивных гидравлических турбин — «сегнерово колесо». Его действие сегодня можно наблюдать на лужайках, орошаемых с помощью насадок, вращающихся на водопроводных колонках.

...известные в Китае еще с XI века пороховые ракеты применялись не только для фейерверков, но и в военном деле — как зажигательные и разрывные снаряды, а также как осветительные средства. Однако по-настоящему боевые реактивные снаряды были созданы в 1817 году русским ученым-артиллеристом, генералом А.Д.Засядко и успешно применены при обороне Севастополя в 1854—55 годах во время Крымской войны.

...явление отдачи, вызывавшее откатывание назад старинных пушек, со временем научились использовать для перезарядки огнестрельного оружия, например в пулеметах, автоматических пистолетах и скорострельных пушках.

...в теории многоступенчатых ракет, разработанной К.Э.Циолковским в 1926 году, было показано, что последняя ступень ракеты способна достичь первой космической скорости. Из теории следовало, что целесообразно с расходом топлива отбрасывать баки, трубопроводы и двигатели отработавших ступеней, а в идеале — непрерывно избавляться от ненужной уже массы ракеты, что пока, увы, конструктивно неосуществимо.

...гигантом среди многоступенчатых ракет и сейчас остается «Сатурн-5», который вывел на орбиту космический корабль «Аполлон-11», доставивший 20 июля 1969 года на Луну американских астронавтов.

Стартовая масса системы 2950 тонн, ее высота 111 метров.

...помимо мощных маршевых двигателей в ракетно-космической технике используется так называемая дetonационная автоматика, решающая с помощью «ювелирных» по массе и габаритам зарядов взрывчатых веществ задачи мгновенного разделения элементов конструкций, разрезание электрических кабелей, отстрел парашютов и запуск различных приборов.

...погасить скорость при посадке космического аппарата на Землю помогает атмосфера: торможение в ней позволяет использовать на конечном этапе снижения парашют. Такая возможность полностью отпадает при спуске на Луну — отсутствие атмосферы на ней заставляет гасить скорость лишь реактивными импульсами, а последние метры пути аппарат садится на струе газа из сопла.

...переноситься с континента на континент со скоростью свыше десяти тысяч километров в час в разреженных слоях атмосферы, выводить на околоземную орбиту полезные грузы с обычных аэродромов должны летательные аппараты нового поколения с гиперзвуковыми воздушно-реактивными двигателями, создаваемыми сегодня зарубежными и отечественными специалистами.

...разгадкой неожиданно больших скоростей у новорожденных сверхплотных нейтронных звезд, достигающих 1500 километров в секунду, вероятно, может быть природный реактивный двигатель — излучение нейтрино, уносящих огромную энергию и способных создать необходимый импульс отдачи.

...идеальной для межзвездных полетов была бы гипотетическая ракета, роль газовой струи в которой играл бы пучок фотонов, иначе говоря, скорость истечения «струи» равнялась бы скорости света. Однако мощность подобной ракеты массой всего лишь в одну тонну при движении с ускорением, равным g , должна была бы превосходить мощность крупной электростанции типа Братской ГЭС примерно в 1000 раз.

...очередной прорыв в космос готовят в ближайшие пятнадцать лет все космические державы. Это, прежде всего, череда лунных экспедиций. Наша соседка уже рассматривается как полигон для испытания технологий, необходимых для покорения Марса, как база на пути к другим планетам, как новая астрономическая обсерватория и даже... как музей под открытым небом для посещения космическими туристами.

Что читать в «Кванте» о реактивном движении

(публикации последних лет)

1. «Почему вращается вертушка?» — 2002, Приложение №4, с. 121;
2. «Сколько стоит запуск спутника?» — 2002, №5, с. 30;
3. «Великое уравнение механики» — 2003, №5, с. 35;
4. «Опыты с пластиковыми бутылками» — 2004, №4, с. 20;
5. «Калейдоскоп» Кванта — 2004, №5, с. 32;
6. «Булава» — 2005, №1, с. 29;
7. «Почему именно ракета» — 2005, Приложение №6, с. 142;
8. «Как Студент думал Землю остановить» — 2006, №5, с. 28.

Публикацию подготовил А.Леонович

(Начало см. на с. 30)

как его начало и конец совпадают. Неважно, из какого пункта маршрута «стартовать», лишь бы после старта двигаться в точности по этому маршруту: в силу цикличности маршрута, пройдешь именно этот маршрут и вернешься в пункт, откуда стартовал.

Ответ на вопрос 3. И такое путешествие осуществимо, и начать его можно тоже из любого пункта.

Для того чтобы в этом убедиться, достаточно составить циклический маршрут такого путешествия, начинающийся и заканчивающийся на Северном полюсе.

Прежде чем начинать путешествие с Северного полюса, выберем (зарезервируем) меридиан, по которому вернемся на полюс. Пусть это будет первый меридиан (на рисунке 2 он выделен красным цветом.) С Северного полюса можно «спускаться» до Южного вперемежку по второму и двадцать четвертому меридианам, двигаясь от одного меридиана к другому по очередной параллели так, как это показано на рисунке 2.

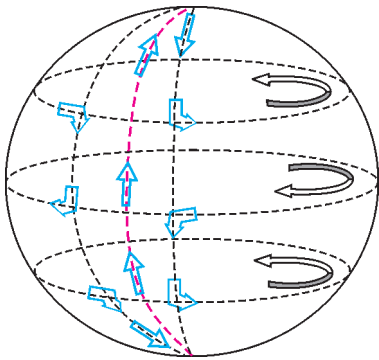


Рис. 2

По достижении Южного полюса осталось вернуться на север по первому меридиану.

Как расщелкать третий орешек

Для любых двух диспетчерских пунктов А и Б существует множество вариантов перелета из одного в другой. Например, на рисунке 3 представлено три варианта перелета из пункта А (30° с.ш., 60° в.д.) в пункт Б (75° с.ш., 75° з.д.):

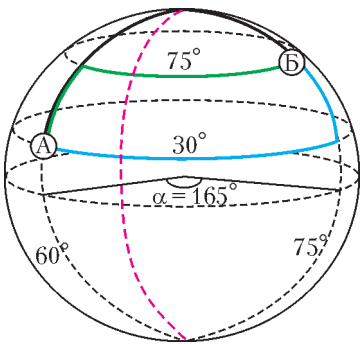


Рис. 3

«синий» — на восток, а затем на север;
«зеленый» — на север, а затем на восток;
«черный» — на север до Северного полюса, а затем на юг.

Пусть L — это длина (в километрах) дуги в 15° большого круга Земли. Если известен радиус Земли, то величину L найти нетрудно: $L = 2\pi \times 6400 \text{ км} / 24 \approx 1676 \text{ км}$. Тогда длина дуги в γ градусов любого меридиана равна $L \times (\gamma/15^\circ)$, а длина дуги параллели на широте β градусов с величиной дуги $\alpha = 165^\circ$ равна $L \times (\alpha/15^\circ) \times \cos \beta = 11 \times L \times \cos \beta$. В таком случае:

длина «синего» маршрута равна $11 \times L \times \cos 30^\circ + L \times ((75^\circ - 30^\circ)/15^\circ) \approx 15966 \text{ км} + 5028 \text{ км} \approx 20994 \text{ км}$;

длина «зеленого» маршрута равна $L \times ((75^\circ - 30^\circ)/15^\circ) + 11 \times L \times \cos 75^\circ \approx 5028 \text{ км} + 4771 \text{ км} \approx 9799 \text{ км}$;

длина «черного» маршрута равна $L \times ((90^\circ - 30^\circ)/15^\circ) + L \times ((90^\circ - 75^\circ)/15^\circ) = 5 \times L = 8380 \text{ км}$.

В данном случае самый короткий из трех рассмотренных маршрутов — это «черный» маршрут через Северный полюс. Но является ли он вообще самым коротким маршрутом из пункта А (30° с.ш., 60° в.д.) в пункт Б (75° с.ш., 75° з.д.)?

От примера перейдем к общему случаю. Пусть заданы два произвольных диспетчерских пункта А и Б.

Выберем произвольный маршрут S из А в Б (жирная черная линия на рисунке 4). Таких различных маршрутов существует неограниченное количество, и перебирать их в поисках оптимального варианта — проблема не из легких. Впрочем, в тотальном переборе нет необходимости, ведь некоторые маршруты заведомо не экономичны (например, маршруты с «петлями»).

Сейчас мы предложим разумную (специалисты говорят — «жадную») схему перебора.

Рассмотрим всевозможные маршруты по долготе между диспетчерскими пунктами на меридианах, на которых расположены А и Б. Пусть В-Г — самый короткий такой маршрут, расположенный в диапазоне от самой южной точки S до самой северной точки S (дуга параллели, выделенная красным цветом на рисунке 4). Тогда протяженность маршрута А-Г-В-Б не больше, чем длина маршрута S . Поэтому маршрут из А в Б наименьшей длины надо выбирать из 13 вариантов, каждый из которых соответствует выбору широтного участка В-Г от Южного до Северного полюса на одной из 13 возможных параллелей между меридианами пунктов А и Б. Длина каждого такого маршрута А-Г-В-Б равна

(длина меридионального участка А-Г) +

+ (длина меридионального участка Б-В) +

+ (длина широтного участка В-Г).

Можно вывести аналитическую формулу для вычисления минимального значения этого выражения. Однако проще поиск минимального среди 13 возможных значений поручить программе: для человека это уже многовато, а для компьютера — пустяковое дело (если есть программа).

Кстати, какова длина минимального маршрута между пунктами А (30° с.ш., 60° в.д.) и Б (75° с.ш., 75° з.д.)?

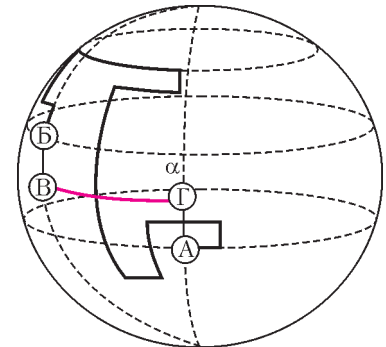


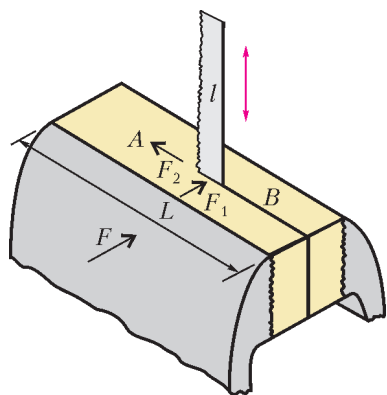
Рис. 4

Практическая задача по механике

Ю.НОСОВ

ВОЗЬМЕМ ДЕРЕВЯННЫЙ БРУСОК РАЗМЕРОМ $2 \times 3 \times 10$ СМ. Зажмем брусок в тиски, как показано на рисунке, и начнем распиливать его вдоль длинной стороны на две части. В процессе работы будем следить за тем, чтобы ножовкой не задеть винт тисков. Полностью распилим брусок от края до края, ослабим тиски и вынем два новых более тонких бруска. Подчеркнем, что вся операция производится при одном и том же исходном сжатии тисков и не делается никаких перестановок или передвижек бруска.

Как же получается, что тиски – несмотря на то, что сжимают брусок, – не мешают разрезать его на две части?



Разумеется, эта задача представляет собой практическую (лабораторную) работу по механике, для которой строгого решения дать нельзя. Но вполне можно удовлетвориться следующими качественными рассуждениями.

В нашем эксперименте удержание деревянного бруска обеспечивается силой сжатия тисков F , создаваемой винтом (см. рисунок). Чтобы сдвинуть брусок вниз, надо приложить силу $F_{\text{вниз}}$, превышающую силу трения покоя

$$F_{\text{тр}} = kF,$$

где k – коэффициент трения между губками тисков и бруском. Величина силы F столь велика, что сдвинуть брусок рукой в сжатых тисках не удастся. Почему же нам удается перемещать полотно пилы вверх – вниз при продольном разрезании бруска?

Оказывается, что для этой пары материалов (полотно пилы – дерево) сила трения покоя $F_{\text{тр1}}$ существенно меньше $F_{\text{тр}}$, и, как следствие, сила, необходимая для перемещения пилы, существенно меньше $F_{\text{вниз}}$. Для этой пары

$$F_{\text{тр1}} = k_1 F_1,$$

где k_1 – коэффициент трения между полотном пилы и бруском, F_1 – сжимающая сила.

Сила сжатия полотна пилы F_1 во столько раз меньше полной силы сжатия тисков F , во сколько раз площадь сжатого полотна пилы меньше полной площади губок тисков, т.е.

$$F_1 = \frac{l}{L} F,$$

где l – ширина полотна пилы и L – полная ширина губок тисков. Чтобы уменьшить силу F_1 , в нашем эксперименте мы применяем пилу с малой шириной полотна l , например полотно ножовки по металлу. Используя примерные размеры $l = 15$ мм и $L = 150$ мм, получим $F_1 = 0,1F$.

Коэффициент трения покоя (и скольжения) k_1 также много меньше k , так как в случае пилы в контакт с деревом вступает в основном гладкая поверхность стального полотна, а не гофрированная поверхность губок тисков.

Таким образом, в нашем опыте $F_1 \ll F$ и $k_1 \ll k$, что приводит к выводу

$$F_{\text{тр1}} \ll F_{\text{тр}}.$$

Однако в проводимом эксперименте мы не только перемещаем пилу вверх – вниз, но и разрушаем древесные волокна при распиливании. Это требует приложения дополнительной силы F_2 вдоль направления разрезания. Уменьшить величину силы F_2 можно, используя пилу с очень мелким зубом, например опять же ножовку по металлу или лобзик.

Одно замечание. На первый взгляд может показаться, что при распиливании бруска область B , где уже распил осуществлен, перестает принимать участие в удержании бруска в тисках. Это не так. В силу упругости дерева и малой толщины полотна пилы ($\sim 0,5 - 0,7$ мм) область B сжата практически с такой же силой, как и область A , где распила еще нет. Таким образом, при действии пилы брусок всегда сжат по всей ширине губок тисков.

Реальный успех в проведении обсуждаемого опыта показывает, что рука экспериментатора вполне может развить силу, превышающую $F_{\text{тр1}}$ и F_2 , и успешно провести распиливание бруска, сжатого тисками.

Хочется надеяться, что приведенное решение задачи позволит вам самостоятельно ответить (на качественном уровне) на следующие вопросы.

Как влияет на результат эксперимента: сила сжатия тисков; ширина полотна пилы; породы дерева бруска; силы, прикладываемые к пиле?

Информацию о журнале «Квант» и некоторые материалы из журнала можно найти в ИНТЕРНЕТЕ по адресу:

Редакция журнала «Квант»

kvant.info

Московский центр непрерывного математического образования

kvant.mccme.ru

Московский детский клуб «Компьютер»

math.child.ru

Костромской центр дополнительного образования «Эврика»

ceemat.ru

Как молекулы столкнулись

А. СТАСЕНКО

ПОЧЕМУ ВООБЩЕ ВОЗМОЖНА КОНДЕНСАЦИЯ – БУКВАЛЬНО «уплотнение»? Ведь при атмосферном давлении плотность жидкости на три порядка больше, чем плотность газа (или пара). Значит, что-то заставляет молекулы газа стремиться друг к другу и удерживаться рядом. А при нагревании жидкости происходит ее испарение – следовательно, что-то преодолевает удерживающие силы.

Прежде всего ясно, что молекулы должны иметь конечные размеры. Если бы это были материальные точки (такая модель тоже иногда используется), то конденсат любой ограниченной массы газа или пара имел бы нулевой объем. И на дне стакана трудно было бы разглядеть 200 граммов воды. Поэтому будем считать молекулы абсолютно жесткими шариками, имеющими диаметр d .

Далее, если молекулы притягиваются друг к другу (как, например, планеты или звезды), то должна существовать потенциальная энергия $E_{\text{п}}$ их взаимодействия, зависящая от расстояния r между молекулами. В случае гравитации ньютоновская потенциальная энергия имеет вид $E_{\text{п}} \sim -\frac{1}{r}$, а для молекул потенциальная энергия притяжения еще резче зависит от расстояния: $E_{\text{п}} \sim -\frac{1}{r^6}$. Но поскольку мы решили считать молекулы жесткими шариками, они никак не могут сблизиться на расстояние (между их центрами!), меньшее d : после их соприкосновения потребовалась бы бесконечно большая сила и возникла бы бесконечно большая энергия отталкивания. В процесс сближения $E_{\text{п}}$ будет изменяться вдоль кривой ($\infty \rightarrow -\varepsilon$) на рисунке 1 – там стрелкой даже показано направление этого изменения. Понятно, что для молекул, не взаимодействующих друг с другом вплоть до соприкосновения, потенциальная энергия изменялась бы по сторонам прямого угла ($\infty \rightarrow d \rightarrow \infty$).

По сути дела, модель абсолютно жестких шариков адекватна «точечным» молекулам, у которых сила (и потенциальная энергия) отталкивания резко растут при сближении.

Итак, о чем же говорит рисунок 1? В начале координат $r = 0$ находится центр молекулы-шарика, которую мы считаем фиксированной (она заштрихована). Центр другой молекулы-шарика может находиться на любом расстоянии $d < r < \infty$. Эта другая молекула притягивается к фиксированной с силой, пропорциональной *темпу* изменения потенциальной энергии с изменением расстояния. Эту длинную

фразу физики заменяют простым соотношением: $F = -\frac{dE_{\text{п}}}{dr}$ и говорят: «сила равна минус градиенту потенциальной энергии». Отсюда видно, что склон кривой $E_{\text{п}}(r)$ должен быть направлен к началу координат, если мы хотим описать притяжение. Образно говоря, вторая молекула стремится «свалиться» в потенциальную яму глубины ε и остаться там (если уж нельзя сблизиться далее). Это и есть предпосылка для конденсации.

Но ведь молекулы сближаются не квазистатически. Как известно, они обладают средней кинетической энергией,

пропорциональной температуре:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{3}{2}kT,$$

и если скорость второго шарика на рисунке 1 слишком велика, он упруго отразится от первого (заштрихованного) и выскочит из потенциальной ямы. А что значит «слишком»? Ясно, что нужно сравнить две энергии: потенциальную энергию притяжения ε и кинетическую энергию второго шарика, которой он обладает на большом расстоянии от первого, т.е. «на бесконечности». И теперь понятно, что конденсация возможна в случае соблюдения условия

$$\varepsilon \gtrsim \frac{mv_{\infty}^2}{2}.$$

Это значит, что кинетическая энергия хаотического теплового движения должна быть меньше глубины потенциальной ямы.

Но, как известно, при конденсации выделяется энергия. Ее характеризуют удельной теплотой испарения или конденсации. Ясно, что она имеет прямое отношение к глубине потенциальной ямы: чем больше ε , тем большую энергию надо затратить, чтобы «вытащить на бесконечность» молекулу из потенциальной ямы и тем большая энергия выделится в обратном процессе конденсации. Правда, те значения удельной теплоты испарения, которые указаны в различных справочниках, получены в условиях, когда пар (а тем более жидкость) является сплошной средой. Поэтому надо принять во внимание и работу по расширению пара после «вытаскивания» его молекул из жидкости. К тому же, испаряющуюся молекулу удерживает не одна фиксированная молекула (заштрихованная на рисунке 1), но еще и множество других, более отдаленных.

Понятно, что две отдельные молекулы никак не могли бы конденсироваться, т.е. остаться рядом в покое – кто-то должен унести лишнюю энергию. Этим «кто-то», конечно, является третья молекула. А поскольку участников процесса очень много, то «третьи» молекулы, получая избыток энергии, нагревают газ, что приводит к росту средней кинетической энергии молекул.

Но почему молекулы должны сближаться вдоль линии центров, как на рисунке 1? Рассмотрим более общий случай (рис.2): первая молекула по-прежнему фиксирована (заштрихована), а вторая «из бесконечности» движется с относительной скоростью v_{∞} , но не вдоль линии центров, а, как говорят, с прицельным расстоянием b от этой линии. Это такое расстояние, что все молекулы с центрами внутри круга площадью πb^2 непременно столкнутся с фиксированной молекулой – по крайней мере, коснутся ее, а все молекулы с центрами вне этого круга про-

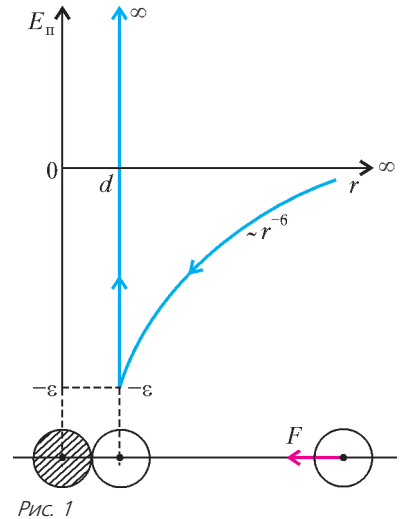


Рис. 1

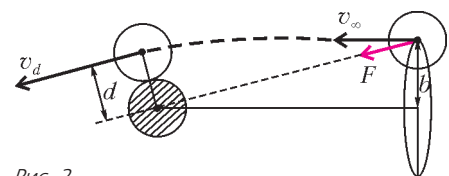


Рис. 2

летят мимо. Конечно, сила притяжения F во все время сближения двух молекул направлена вдоль линии центров, она-то и искривляет траекторию молекулы.

Запишем условие сохранения полной механической энергии второй молекулы в двух состояниях – «на бесконечности» и в момент касания первой:

$$\frac{mv_{\infty}^2}{2} + 0 = \frac{mv_d^2}{2} + (-\epsilon).$$

Здесь учтены те же факты, которые указаны на рисунке 1: потенциальная энергия вдали равна нулю, а при соприкосновении молекул равна $-\epsilon$.

А еще можно записать закон сохранения *момента импульса*. Это второй закон Кеплера о секториальной скорости, или о том, что радиус-вектор, проведенный из центра силового поля, заметает равные площади в равные отрезки времени. Хотя закон получен Ньютоном для гравитации, он верен для любого центрального взаимодействия (когда сила направлена строго по линии центров). Итак,

$$mv_{\infty} \cdot b = mv_d \cdot d.$$

Выразим из этого уравнения v_d и подставим в закон сохранения энергии. Получим

$$\left(\frac{b}{d}\right)^2 = 1 + \frac{\epsilon}{mv_{\infty}^2/2} = 1 + \frac{\alpha}{T}.$$

Здесь α – постоянная, а в знаменателе оказалась температура. Видно, что с охлаждением любого газа, когда уменьшается средняя скорость его молекул, прицельное расстояние b растет: молекулы «чувствуют» друг друга на все больших расстояниях, а в пределе $T \rightarrow 0$ – на бесконечно больших. Тут-то все газы и сконденсируются.

Кстати, полученный результат не зависит от конкретного вида потенциальной энергии взаимодействия, а зависит лишь от отношения потенциальной и кинетической энергий. Поэтому он применим и к кинетике небесных тел (звезд, планет, газовых туманностей, галактик...). Что же мешает им всем сконденсироваться (это было бы ужасно!)? Конечно, закон сохранения момента импульса. И слава Богу.

Как Студент магнитное поле измерял

А. СТАСЕНКО

Приступив к изучению труда Фарадея, я установил, что его метод понимания явлений был также математическим, хотя и не представленным в форме обычных математических символов... Фарадей видел силовые линии, пронизывающие все пространство...

Дж.Максвелл

КАК-ТО НА ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ СТУДЕНТ НАМОТАЛ сотни метров проволоки в виде соленоида, да такого длинного, что магнитное поле в его середине можно было считать пространственно однородным, и подключил его к источнику переменного тока с регулируемой частотой ω (рис.1). И задумался: как бы измерить индукцию магнитного поля?

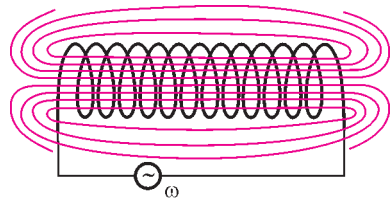


Рис. 1

Еще в позапрошлом веке было известно, что если через площадь некоторой проводящей рамки, например в виде окружности, со временем изменяется поток вектора магнитной индукции Φ , то в этой рамке возникает электродвижущая сила

$$\mathcal{E} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}.$$

Таким образом, можно сказать, что ЭДС \mathcal{E} – это скорость изменения потока вектора магнитной индукции через рамку.

Пусть, например, кольцо радиусом r находится в магнитном поле, изменяющемся со временем по гармоническому закону

$$B = B_0 \cos \omega t.$$

Тогда поток вектора магнитной индукции через площадь кольца будет изменяться по закону

$$\Phi = \pi r^2 B_0 \cos \omega t.$$

Далее, если рамка проводящая, то ЭДС \mathcal{E} вызовет в ней электрический ток. А можно сказать, что этот ток вызывается напряженностью \vec{E} электрического поля, ускоряющего заряды проводника. Но ЭДС \mathcal{E} связана с напряженностью E соотношением

$$\mathcal{E} = E \cdot 2\pi r.$$

Собирая вместе все сказанное, запишем

$$E \cdot 2\pi r = -\frac{\Delta(\pi r^2 B_0 \cos \omega t)}{\Delta t}.$$

Более того, и рамка может быть не проводящей, а сделанной, например, из соломинки, через которую пьют сок, – все равно в ней возникнет индукционное электрическое поле. А значит, может и не быть никакой рамки: электрическое поле возникнет и в вакууме, и в воздухе..., которым наполнен соленоид! – догадался Студент. Это поле будет равно

$$E = -\frac{r}{2} B_0 \frac{\Delta \cos \omega t}{\Delta t} = \frac{r B_0}{2} \omega \sin \omega t,$$

причем оно тоже будет изменяться по гармоническому закону (конечно, тут Студент учел, что скорость изменения косинуса есть минус синус, умноженный на ω).

Но электрическое поле действует на электрический заряд. И тут у Студента возникла идея эксперимента: подвесить внутри соленоида заряженный шарик и измерить амплитуду его колебаний в электрическом поле \vec{E} , порожденном переменным магнитным полем \vec{B} .

Сказано – сделано. Масса шарика равнялась, конечно, m , его радиус был a , электрический заряд был равен q , а длину нити (разумеется, невесомой, нерастяжимой, бесконечно тонкой) Студент выбрал равной $r = b/2$, где b – это

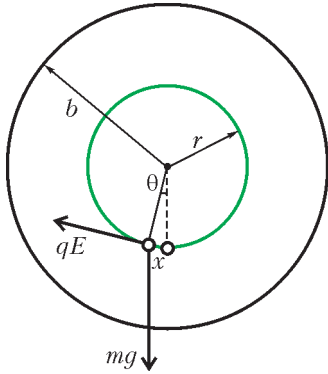


Рис. 2

внутренний радиус селеноида (рис.2). Тогда уравнение движения шарика в электрическом поле E и в поле тяготения с ускорением g приобрело вид

$$x'' = -g \sin \theta + \frac{q}{m} E .$$

Угол отклонения θ этого математического маятника от положения равновесия легко связать со смещением x по окружности: $\theta = \frac{x}{b/2}$.

Кроме того, если рассматривать малые колебания (как и положено здравомыслящему Студенту, а тем более школьнику Отличнику), то вместо синуса можно (приближенно) написать его аргумент (конечно, в радианах): $\sin \theta = \theta = \frac{2x}{b}$. Тогда уравнение колебаний будет выглядеть так:

$$x'' + \frac{2g}{b} x = \frac{q}{m} \frac{b B_0}{2} \omega \sin \omega t .$$

Тут еще можно ввести привычное обозначение $\frac{2g}{b} = \omega_0^2$, где ω_0 – частота собственных колебаний шарика.

Ба! Ведь это просто уравнение вынужденных колебаний гармонического осциллятора! – воскликнул Студент и немедленно отыскал его решение в виде $x = x_0 \sin \omega t$, т.е. тоже гармонических колебаний с частотой вынуждающей силы. Скорость изменения синуса есть косинус, умноженный на ω , а скорость изменения косинуса, как уже было сказано, это минус синус, умноженный на ω . Значит, вместо ускорения x'' появится $-x_0 \omega^2 \sin \omega t$. В результате получится уравнение для определения амплитуды x_0 смещения шарика:

$$-x_0 \omega^2 \sin \omega t + \omega_0^2 x_0 \sin \omega t = \frac{q}{m} \frac{b B_0}{4} \omega \sin \omega t .$$

А поскольку это уравнение должно быть верно для любого момента времени, $\sin \omega t$ можно сократить, и останется

$$x_0 = \frac{q}{m} \frac{b B_0}{4} \frac{\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} .$$

Но что это? Получилось, что при значении $\omega = \omega_0$ знаменатель обращается в ноль, а значит, амплитуда отклонения шарика устремляется в бесконечность (рис.3; сплошные кривые). Да ведь это резонанс, а с резонансом надо обращаться осторожно. Нужно учесть силу, тормозящую движение шарика, – силу сопротивления воздуха.

И Студент стал изучать эту силу, роняя мелкие шарики изпод потолка в ванну. На таком большом расстоянии шарик быстро успевал приобрести постоянную скорость $v = \frac{h}{t}$, которую легко было вычислить, зная высоту потолка h и замерив секундомером время падения t , а момент падения даже для самых мелких пылинок был легко заметен на гладкой поверхности воды. В резуль-

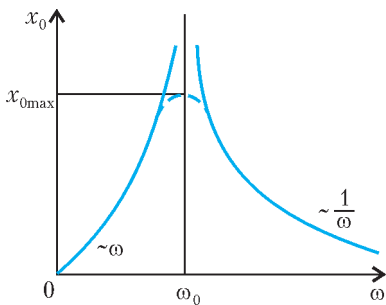


Рис. 3

тате этих измерений Студент обнаружил, что сила сопротивления воздуха для мелких шариков пропорциональна их радиусу и скорости движения:

$$F_{\text{сопр}} = \gamma a v = \gamma a x' ,$$

где γ – коэффициент пропорциональности. (Интересно, что еще древний Аристотель указывал на такую зависимость силы от скорости, а в позапрошлом веке ее точно вычислил Стокс для случая медленного, «ползущего» движения сферы в сплошной среде.) Наш Студент получил значение $\gamma = \frac{10^{-3}}{3} \frac{\text{Н}}{\text{м} \cdot \text{м/с}}$ для условий, близких к «нормальным».

В итоге пришлось исправить уравнение движения шарика с учетом найденной силы сопротивления, так что оно приобрело вид

$$x'' + \omega_0^2 x + \gamma \frac{a}{m} x' = \frac{q}{m} \frac{b B_0}{4} \omega \sin \omega t ,$$

или, для краткости записи,

$$x'' + \omega_0^2 x + \beta x' = A \omega \sin \omega t ,$$

где

$$\beta = \gamma \frac{a}{m} , \quad A = \frac{q}{m} \frac{b B_0}{4} .$$

И тут кончается физика и начинается математика (которая, впрочем, тоже есть часть физики – как считают многие приличные люди). Теперь уже не годится искать решение в прежнем виде $x = x_0 \sin \omega t$, и ясно почему: тогда часть слагаемых в левой части по-прежнему будет пропорциональна $\sin \omega t$, а вот новое слагаемое, содержащее скорость смещения, будет пропорционально $\cos \omega t$, и уравнение нельзя будет сократить ни на $\sin \omega t$, ни на $\cos \omega t$. Поэтому попробуем искать решение в виде

$$x = x_0 \cos(\omega t - \varphi) ,$$

где φ – так называемый сдвиг фаз (видно, что при $\varphi = \frac{\pi}{2}$ получим прежнее решение).

Подставив эту функцию в наше уравнение, получим

$$x_0 \left((-\omega^2 + \omega_0^2) \cos(\omega t - \varphi) - \beta \omega \sin(\omega t - \varphi) \right) = A \omega \sin \omega t .$$

Учтем следующие тригонометрические равенства:

$$\cos(\omega t - \varphi) = \cos \omega t \cos \varphi + \sin \omega t \sin \varphi ,$$

$$\sin(\omega t - \varphi) = \sin \omega t \cos \varphi - \cos \omega t \sin \varphi .$$

Тогда в предыдущем уравнении выделятся две группы слагаемых: одна будет содержать $\cos \omega t$, другая $\sin \omega t$. А поскольку это уравнение должно быть верным в любой момент времени, то коэффициенты при $\cos \omega t$ и $\sin \omega t$ должны быть равны нулю. Так получим два уравнения для неизвестных x_0 и φ :

$$(-\omega^2 + \omega_0^2) \cos \varphi + \beta \omega \sin \varphi = 0 ,$$

$$x_0 \left((-\omega^2 + \omega_0^2) \sin \varphi - \beta \omega \cos \varphi \right) = A \omega .$$

Решая эти уравнения, найдем

$$\text{tg } \varphi = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\beta \omega} ,$$

$$x_0 = \frac{A \omega}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\beta \omega)^2}} .$$

Видно, что теперь амплитуда отклонения шарика не обращается в бесконечность ни при каких значениях ω (см. рис.3; штриховая кривая). Но она достигает максимального

значения при $\omega = \omega_0$, и это значение равно

$$x_{0\max} = \frac{A}{\beta} = \frac{qbB_0}{4\gamma a}.$$

Результат оказался не зависящим от массы шарика.

Теперь пора приступать к измерениям. Студент выбрал шарик радиусом $a = 1$ мм. Но какой наибольший заряд можно сообщить этому шарiku? Ясно, что такой, чтобы напряженность электрического поля у его поверхности не превышала предельно допустимого для воздуха значения $E_{\max} = 3 \cdot 10^6$ В/м. Отсюда

$$q_{\max} = 4\pi\epsilon_0 a^2 E_{\max} = \frac{10^{-6} \cdot 3 \cdot 10^6}{9 \cdot 10^9} \text{ Кл} = \frac{10^{-9}}{3} \text{ Кл}.$$

Далее, внутренний радиус соленоида был равен $b = 0,1$ м, а наибольшая амплитуда отклонения шарика от положения равновесия (в резонансе) оказалась равной $x_{0\max} = 0,01$ мм, откуда уже легко получилось

$$B_0 = \frac{4\gamma a x_{0\max}}{b q_{\max}} = \frac{4 \cdot (10^{-3}/3) \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-5}}{0,1(10^{-9}/3)} \text{ Тл} = 0,4 \text{ Тл}.$$

Не мало, – подумал Студент. – Но неужели так же труден путь всех великих физиков?

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

Квантовые чудеса

М.КАГАНОВ

УРАВНЕНИЕ ШРЁДИНГЕРА ДОПУСКАЕТ ПОСТАНОВКУ РАЗНЫХ задач. С некоторыми из них вы встретитесь в этой статье и сможете познакомиться с явлениями, столь разительно отличающимися от поведения классических объектов, что их вполне можно назвать квантовыми чудесами.

Нет стен, через которые нельзя пройти

Французский писатель Марсель Эме написал роман «Человек, проходивший сквозь стены». Хорошая, ироничная, умная книга. Роман был экранизирован, и фильм получился вполне неплохой. Проходить через стены человеку помогала его вера в себя. Когда он терял веру, способность исчезала. Весьма нравоучительно...

Мы точно знаем, что, не разрушив стену, ни человек, ни любое другое макроскопическое тело пройти сквозь нее не может. А микроскопическая частица? Не будем спешить с ответом.

На рисунке 5 изображена потенциальная яма. Вне области $|x| < d$ частица находится не может: при $|x| > d$ волновая функция $\psi(x, t) \equiv 0$. Это неизбежное следствие того, что $U(x) = \infty$ при $|x| > d$. По этой же причине квантовая микро-частица не может проникнуть через бесконечно высокий потенциальный барьер.

А если потенциальный барьер имеет конечную высоту?

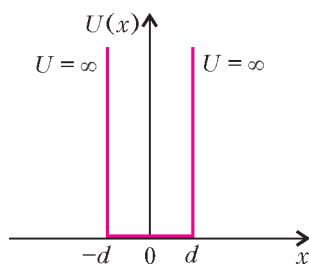


Рис. 5. Бесконечно глубокая потенциальная яма

При энергии, превышающей высоту барьера, частица *может* пролететь над ним. Но обязательно ли иметь энергию, превышающую высоту барьера? И обязательно ли частица пролетит над барьером?

Квантовая механика меняет наши обычные представления: микроскопическая частица может проникнуть через недоступную классической частице область, т.е. пройти через стену, а может отразиться от барьера даже тогда, когда ее энергия превышает высоту барьера.

Вернемся к потенциальному барьеру, изображенному на рисунке 3 (см. «Квант» №4): $U(x) = U_0 > 0$ при $|x| < d$, $U(x) = 0$ при $|x| > d$. Классическая частица с энергией $\epsilon < U_0$, долетев до барьера, отразится, а частица, имеющая энергию $\epsilon > U_0$, свободно перелетит область $|x| < d$. А как поведет себя квантовая частица?

Найдем состояния квантовой частицы (ее ψ -функцию) при различных значениях энергии ϵ . Для этого необходимо найти решение уравнения Шрёдингера. В квантовой механике, если частица движется под действием постоянной силы, имея определенную энергию, ее состояние называют *стационарным* – неважно, совершает частица финитное или инфинитное движение. Это состояние описывается стационарной волновой функцией, удовлетворяющей стационарному уравнению Шрёдингера.

В случае прямоугольного потенциального барьера это уравнение на разных участках оси имеет разный вид:

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + \epsilon\psi = 0 \text{ при } |x| > d,$$

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + (\epsilon - U_0)\psi = 0 \text{ при } |x| < d.$$

Слева и справа от барьера (при $|x| > d$) решениями уравнения являются две плоские волны $\exp(ik_e x)$ и $\exp(-ik_e x)$, волновой вектор $k_e = \sqrt{2m\epsilon}/\hbar$. Одна волна движется к ступеньке, а другая – от нее. При $|x| < d$ характер решения зависит от величины энергии ϵ . Если $\epsilon > U_0$, то и в этом случае решения представляют плоские волны $\exp(ik_i x)$ и $\exp(-ik_i x)$ с волновым вектором $k_i = \sqrt{2m(\epsilon - U_0)}/\hbar$. Если $\epsilon < U_0$, то решения уравнения совсем не похожи на плоские волны. Это $\exp(\pm\kappa x)$, где $\kappa = \sqrt{2m(U_0 - \epsilon)}/\hbar$. Одна из функций на

расстоянии $1/\kappa$ возрастает в $e \approx 2,718281828\dots$ раз, а другая во столько же раз уменьшается.¹

Существование двух решений в каждой из областей означает, что решений бесконечно много: любая линейная комбинация двух решений также есть решение. Необходимо понять, каким образом выбрать нужное решение и как следует «сшивать» волновую функцию при $x = -d$ и при $x = d$. Ответы на поставленные вопросы дает физический смысл ψ -функции.

Плотность вероятности $\rho = |\psi(x)|^2$ не исчезает, а только перемещается в пространстве согласно уравнению непрерывности. Плотность потока вероятности $j(x)$ содержит производные от ψ -функции по координате x . Плотность вероятности ρ и плотность потока j по своему смыслу должны быть непрерывными функциями координаты. Поэтому при скачкообразном изменении потенциальной энергии на волновую ψ -функцию и на ее производную $d\psi/dx$ надо наложить условие непрерывности. Отсутствие скачков у ψ и у $d\psi/dx$ и формулирует условие «сшивки» ψ -функции на разных участках.

Теперь можно обсудить выбор решений, который существенно зависит от постановки задачи. Сначала рассмотрим самый простой случай. Перенесем правый обрыв барьера на $+\infty$, а начало координат ($x = 0$) совместим с левым обрывом. В результате потенциальная энергия $U(x)$ будет представлять собой ступеньку высотой U_0 , занимающую полуось $x > 0$ (рис.6). Наша задача – найти состояния квантовой

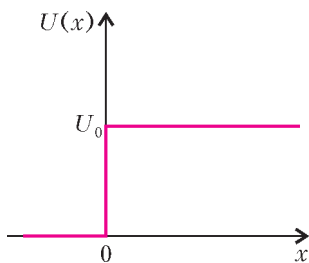


Рис. 6. Ступенька

частицы при различных значениях энергии ϵ , для чего необходимо найти решения уравнений Шрёдингера при $x > 0$ и при $x < 0$, т.е. на двух полуосях. Эти уравнения имеют тот же самый вид, как и в случае прямоугольного барьера при $|x| > d$ и $|x| < d$. Пусть $0 < \epsilon < U_0$. Слева от ступеньки (при $x < 0$) решения уравнения – это две волны $\exp(ikx)$ и $\exp(-ikx)$, волновой вектор $k = \sqrt{2m\epsilon}/\hbar$. Одна волна движется к ступеньке, а другая – от нее. Как ни странно, хотя энергия частицы ϵ меньше потенциальной энергии U_0 , нет формальных соображений, позволяющих считать, что $\psi(x) \equiv 0$ при $x > 0$. Мы уже отмечали, что решения совсем не похожи на плоские волны. Это $\exp(\pm\kappa x)$, где $\kappa = \sqrt{2m(U_0 - \epsilon)}/\hbar$. Решение, экспоненциально растущее с ростом координаты, заведомо, не подходит: на любом даже маленьком интервале, достаточно удаленном от ступеньки (при достаточно больших значениях координаты x , ведь $x \rightarrow \infty$), вероятность обнаружить частицу превысит единицу, чего быть не может. Годится только затухающее с ростом x решение:

$$\psi(x) = b \exp(-\kappa x) \text{ при } x > 0 \text{ и } \epsilon < U_0.$$

Движущаяся слева к ступеньке частица описывается волновой функцией $\exp(ikx)$. Интуиция подсказывает, что частица может (скорее, даже должна) отразиться от ступеньки, ведь ее энергия по предположению меньше высоты ступеньки. Значит, ψ -функция – сумма падающей волны и

волны отраженной, т.е.

$$\psi(x) = \exp(ikx) + a \exp(-ikx) \text{ при } x < 0.$$

Постоянные множители a и b надо найти из условий «сшивки» (коэффициент при экспоненте у волны, падающей на ступеньку, выбран равным единице для удобства, физический смысл имеет квадрат отношения амплитуд падающей и отраженной волн). Эти условия (отсутствие скачков у ψ и у $d\psi/dx$ при $x = 0$) приводят к системе уравнений

$$1 + a = b, \quad ik(1 - a) = -\kappa b.$$

Отсюда

$$a = \frac{1 - i\kappa/k}{1 + i\kappa/k} = \frac{1 - i\sqrt{(U_0 - \epsilon)/\epsilon}}{1 + i\sqrt{(U_0 - \epsilon)/\epsilon}},$$

$$b = \frac{2}{1 + i\sqrt{(U_0 - \epsilon)/\epsilon}}.$$

По принятой в квантовой механике трактовке полученного результата величина $R = |a|^2$ – это коэффициент отражения, т.е. отношение плотности потока вероятности, направленного от ступеньки, к плотности потока, направленного к ступеньке. А если вспомнить, что сравнение полученных теоретических формул с экспериментом требует ансамбля тождественных частиц в одинаковых условиях, то можно считать, что коэффициент отражения R есть отношение плотности потока частиц, отраженных от ступеньки, к плотности потока частиц, двигающихся слева направо к ступеньке.

На первый взгляд получилось нечто странное. Коэффициент отражения от ступеньки $R = 1$, так как множитель a равен отношению комплексно сопряженных величин. А в то же время $b \neq 0$, значит, вероятность обнаружить частицу правее ступеньки отлична от нуля. Что-то тут не так? Нет, все правильно. Ошибки нет. Отсутствие противоречия подтверждается тем, что плотность потока вероятности $j = 0$ при $x \geq 0$. Убедитесь в этом.

Ясно, что проникновение частиц в область, где полная энергия меньше потенциальной, сугубо квантовое явление – проявление волновых свойств микроскопических частиц.

Теперь рассмотрим частицу, летящую к ступеньке по-прежнему слева, но с энергией $\epsilon > U_0$. Классическая частица, замедлив свой полет, беспрепятственно преодолит ступеньку. Посмотрим, что произойдет с квантовой частицей.

И при $x > 0$, и при $x < 0$ уравнения Шрёдингера имеют решения в виде плоских волн, правда с разными волновыми векторами. На каждой из полуосей есть по две волны, распространяющиеся в противоположные стороны. Однако нет никаких оснований считать, что справа от ступеньки есть волна, распространяющаяся справа налево. Это означало бы, что бегущая направо волна от чего-то отразилась. Не от чего. А есть ли бегущая налево волна при $x < 0$, покажет условие «сшивки».

Итак, при $\epsilon > U_0$

$$\psi(x) = \exp(ik_1x) + a \exp(-ik_1x), \quad k_1 = \sqrt{2m\epsilon}/\hbar \text{ при } x < 0,$$

$$\psi(x) = b \exp(ik_2x), \quad k_2 = \sqrt{2m(\epsilon - U_0)}/\hbar \text{ при } x > 0.$$

Из условий «сшивки» немедленно находим значения амплитуд a и b . Да, $a \neq 0$. Значит, отличен от нуля и коэффициент отражения

$$R = \frac{(k_1 - k_2)^2}{(k_1 + k_2)^2}.$$

Коэффициент отражения R меньше единицы, а коэффици-

¹ Привел значение числа e с точностью до 9-го знака после запятой, чтобы поделиться с читателями мнемоническим правилом для запоминания этого числа. Число 2,7 надо знать, а дальше – дважды год рождения Льва Николаевича Толстого. Если кому-то это правило поможет запомнить год рождения Толстого – тоже неплохо.

ент прохождения равен $D = 1 - R$. Любопытно, что R не зависит от направления полета частицы. Квантовая частица с энергией $\epsilon > U_0$, откуда бы она ни летела, отражается от ступеньки с одной и той же вероятностью. Обратите внимание: $D \neq |b|^2$, и попытайтесь объяснить, почему.

С ростом энергии ϵ коэффициент отражения R уменьшается и при стремлении ϵ к бесконечности стремится к нулю. По какому закону R обращается в ноль, вы легко определите самостоятельно. При $\epsilon = U_0$ коэффициент отражения R обращается в единицу и, как мы знаем, остается равным единице при любом значении энергии $\epsilon < U_0$.

Итак, квантовая частица может проникать в область, где $\epsilon < U_0$, и отражается от ступеньки, даже если $\epsilon > U_0$. А что произойдет, если на пути частицы стена – барьер конечной высоты и конечной ширины? Для ответа на этот вопрос надо вернуться к задаче с прямоугольным потенциальным барьером.

Мы уже понимаем, что при $x < -d$ волновая функция частицы – это сумма двух волн, падающей и отраженной. Амплитуду падающей волны снова примем равной единице, а амплитуду отраженной волны по традиции обозначим буквой a . Их волновые векторы противоположны по знаку, а по модулю равны $k = \sqrt{2m\epsilon}/\hbar$. За барьером (при $x > d$) есть только одна волна с тем же волновым вектором:

$$\psi = f \exp(ikx) \text{ при } x > d.$$

Вне зависимости от соотношения между ϵ и U_0 нет никаких оснований в области $|x| < d$ отбрасывать ни экспоненциально возрастающее решение при $\epsilon < U_0$, ни волну, бегущую справа налево с действительным волновым вектором k_1 . Так что при $|x| < d$

$$\psi = b_1 \exp(\kappa x) + b_2 \exp(-\kappa x), \quad \kappa = \sqrt{2m(U_0 - \epsilon)}/\hbar, \quad \epsilon < U_0,$$

$$\psi = b_1 \exp(ik_1 x) + b_2 \exp(-ik_1 x), \quad k_1 = \sqrt{2m(\epsilon - U_0)}/\hbar, \quad \epsilon > U_0.$$

Здесь b_1 , b_2 и f – амплитуды. Задача свелась к их определению. Для этого служат четыре условия «сшивки»: на каждом скачке потенциальной энергии должны быть непрерывны ψ и $d\psi/dx$.

После простого расчета (очень советую его проделать!) можно получить два выражения для коэффициента прохождения $D = |f|^2$ и коэффициента отражения $R = |a|^2 = 1 - D$: когда энергия частицы меньше высоты барьера (при $\epsilon < U_0$) и частица летит сквозь барьер и когда частица летит над барьером при энергии больше высоты барьера (при $\epsilon > U_0$). При $\epsilon = U_0$ коэффициент прохождения D обращается в единицу, что вполне естественно, так как волна беспрепятственно проходит область барьера. Заметим, что при стремлении ϵ к U_0 со стороны больших энергий коэффициент прохождения D тоже стремится к единице. Ведь при $\epsilon = U_0$ и длина волны де Бройля $2\pi/k_1 \rightarrow \infty$. Но $D = 1$ не только при $\epsilon = U_0$, когда $k_1 = 0$. Если $2k_1 d = \nu\pi$, где $\nu = 1, 2, 3$ и т.д. – целые числа, т.е. на ширине барьера $2d$ укладывается целое число полуволен, то и тогда $D = 1$. Во всех случаях, кроме перечисленных, коэффициент прохождения $D < 1$, а коэффициент отражения $R \neq 0$.

Надо отметить еще один факт. Чем энергия частицы ϵ меньше (речь идет о сравнении с U_0), тем коэффициент прохождения через барьер меньше. Если $kd \geq 1$, то коэффициент прохождения экспоненциально мал.

Таким образом, мы убедились, что непроницаемых стен нет. Чем энергия частицы больше, даже при $\epsilon < U_0$, тем коэффициент прохождения D ближе к единице, а коэффициент отражения R – к нулю. И все же, несомненно, описанные

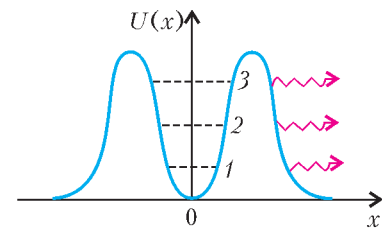
свойства можно отнести к квантовым чудесам. Хотя бы потому, что устанавливаются они при изучении движения *отдельной частицы*, так непохожей на волну. И обнаружить проницаемость барьера можно, наблюдая за одной частицей. Но для сравнения количественных предсказаний теории с экспериментом необходимо исследовать поведение *многих частиц*.

Туннель, который не надо прокладывать

Прохождение микроскопической частицей недоступной по законам классической механики области получило название *туннельного эффекта*. Туннельный эффект встречается нередко и играет важную роль. Только упомянем: радиоактивный α -распад – типичный пример туннельного эффекта, источники термоядерной энергии звезд и нашего Солнца не существовали бы, не будь туннельного эффекта; многие химические реакции, происходящие в живых организмах, могут осуществляться благодаря туннельным переходам электрона из молекулы в молекулу; наконец, некоторые современные приборы содержат туннельный диод, получивший свое название по туннельному эффекту, на котором основан.

Туннельный эффект обычно характеризуется коэффициентом прохождения недоступной для классической частицы области, но не всегда постановка задачи такая, как мы рассмотрели.

При распаде сложного образования, например атомного ядра, когда α -частица покидает ядро благодаря туннельному эффекту, задача состоит в вычислении времени жизни исходного, составного состояния – того, что было до радиоактивного распада. Обычно вычисляют время полураспада – время, за которое половина всех атомов или ядер распадётся. Мы обращали внимание на то, что коэффициент прохождения D тем больше, чем ближе энергия ϵ налетающей частицы к высоте барьера U_0 . Чем больше энергия того состояния, которое занимает частица в связанном состоянии, тем время полураспада меньше (рис.7).



1, 2, 3 – уровни энергии
 $\tau_3 < \tau_2 < \tau_1$ – времена полураспада
 Рис. 7. Время полураспада и энергия частицы

Приведем еще один пример проявления туннельного эффекта.

На рисунке 8 изображена довольно сложная потенциальная яма. Скорее, две ямы, разделенные между собой барьером. Если бы барьер был бесконечно высоким, то в каждой из ям была бы своя система энергетических уровней. Так как ямы одинаковы, то и системы уровней в ямах были бы тождественны. Сказав, что частица имеет такую-то энергию, мы не знали бы, в какой яме частица находится. О такой ситуации говорят, что *имеет место вырождение*: два разных состояния имеют одинаковые энергии. Одно состояние принадлежит левой яме, другое – правой. Через бесконечно высокий барьер частица перемещаться не может, но через барьер конечной высоты, благодаря туннельному эффекту, может. Если барьер не слишком узкий, то коэффициент прохождения мал. А как способность

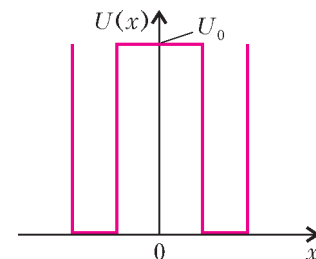


Рис. 8. Две ямы, связанные туннельным эффектом

частицы перемещаться из одной ямы в другую изменит энергетический спектр частицы в ямах? Ответ будет нетривиальным.

Мы хотим не только сформулировать ответ, но и показать, как подобная задача решается, для чего и рассмотрим две ямы прямоугольной формы, разделенные прямоугольным барьером. Как и барьеры, которые мы рассмотрели ранее, прямоугольный барьер с прямоугольными границами, без сомнения, упрощенная модель, но для описания интересующего нас явления она вполне пригодна.

Итак, мы должны найти решение стационарного уравнения Шрёдингера с потенциальной энергией $U = U(x)$, изображенной на рисунке 8. В целях простоты высота барьера приравнена глубине ям. Функция $U = U(x)$, а тем самым и уравнение Шрёдингера, обладает симметрией при замене x на $-x$. Уравнение инвариантно (неизменно) при такой замене. Симметрия уравнения Шрёдингера позволяет его решения разделить на два класса: на симметричные, для которых $\psi_s(x) = \psi_s(-x)$, и антисимметричные, для которых $\psi_a(x) = -\psi_a(-x)$.²

Уравнение Шрёдингера имеет различный вид в зависимости от того, какому интервалу принадлежит координата x . Нас будут интересовать состояния с энергией $0 < \epsilon < U_0$. На разных интервалах уравнения разные:

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + \epsilon\psi = 0 \quad \text{при } |a| > |x| > |b|,$$

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} - (U_0 - \epsilon)\psi = 0 \quad \text{при } |x| < |b| \text{ и } |x| > |a|.$$

² С тем что у симметричной задачи может быть антисимметричное решение, мы уже встретились при вычислении уровней энергии частицы в бесконечно глубокой потенциальной яме. Вопрос о симметрии решений физических задач очень интересен. Вспомните, что при сферической симметрии силы всемирного притяжения все планеты движутся по эллипсам. К сожалению, вопрос этот выходит за пределы темы нашей статьи.

Как мы отметили, ψ -функция может быть либо симметричной, либо антисимметричной. Выбрав для ψ -функции s - или a -решение, достаточно выписать зависимость либо при $x > 0$, либо при $x < 0$. Ограничимся правой полуосью (значение ψ -функции на левой полуоси определяется симметрией):

$$\psi_s(x) = A \operatorname{ch} \kappa x \quad \text{при } x < b,$$

$$\psi_a(x) = A \operatorname{sh} \kappa x \quad \text{при } x < b,$$

$$\psi_{s,a}(x) = B \exp(ikx) + C \exp(-ikx) \quad \text{при } b < x < a,$$

$$\psi_{s,a}(x) = D \exp(-\kappa x) \quad \text{при } x > a.$$

Здесь $\kappa = \sqrt{2m(U_0 - \epsilon)}/\hbar$, $k = \sqrt{2m\epsilon}/\hbar$, а $0 < \epsilon < U_0$.

Требования непрерывности ψ -функции и ее производной по координате на границах интервалов формулируют четыре уравнения для четырех неизвестных A , B , C и D , у которых мы опустили индексы s и a , хотя их значения для симметричной и антисимметричной ψ -функций различны. Условие разрешимости каждой из систем уравнений служит дисперсионное уравнение, позволяющее найти разрешенные уровни энергии. Оно выводится путем исключения всех четырех постоянных. При $U_0 \rightarrow \infty$, когда две ямы не связаны друг с другом, дисперсионные уравнения совпадают, что и соответствует вырождению: уровни энергии дважды вырождены ($\epsilon_s^0 = \epsilon_a^0$). При конечном значении U_0 энергии s - и a -уровни различаются, и вырождение ликвидируется. Если $U_0 \gg \hbar^2/(2m(a-b)^2)$, то $|\epsilon_s^0 - \epsilon_a^0| \ll \epsilon_{s,a}^0$ - уровни энергии расщепляются на близко расположенные пары (рис.9). С ростом энергии растет и расстояние между уровнями в паре.

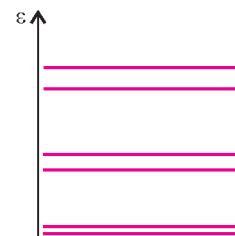


Рис. 9. Расщепление уровней энергии частицы

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

Движение заряда в магнитном поле

В. ДРОЗДОВ

ВЕСЬМА ВЫСОКА ВЕРОЯТНОСТЬ ТОГО, ЧТО ПРИ ТОМ или ином виде конкурсного испытания абитуриент встретится с задачей, сюжетом которой будет движение точечного заряда в магнитном поле. Чтобы решить такую задачу, кроме свойств магнитного поля надо знать и динамику. А в некото-

рых задачах может дополнительно присутствовать еще и электрическое поле.

Таким образом, задачи на движение заряда охватывают обширный физический материал и являются эффективным средством проверки знаний абитуриента.

Начнем с двух задач, решение (а не ответы!) которых нужно особенно хорошо понять и запомнить.

Задача 1. В однородном магнитном поле с индукцией \vec{B} , частице массой m и зарядом q сообщают скорость \vec{v} , направленную перпендикулярно линиям магнитной индукции. Определите, как будет двигаться эта частица в магнитном поле.

На заряд действует сила Лоренца \vec{F}_L , направление которой определяем по правилу левой руки (рис.1). Она постоянна по модулю: $F_L = qvB$ и всегда перпендикулярна скорости частицы: $\vec{F}_L \perp \vec{v}$. Значит, и ускорение частицы $\vec{a} = \frac{\vec{F}_L}{m}$

тоже постоянно по модулю и в любой момент времени

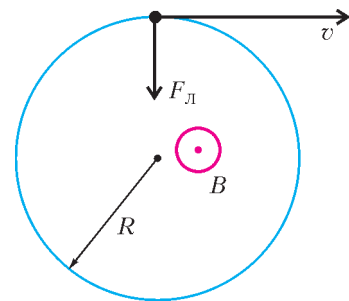


Рис. 1

движения перпендикулярно скорости. Из механики известно, что если точка движется по окружности, то именно так и будет. А верно ли обратное утверждение? Да, но доказывать его мы не будем, а к сведению примем.

Итак, частица движется по окружности, сила Лоренца сообщает частице центростремительное ускорение:

$$\frac{mv^2}{R} = qvB,$$

значит, искомый радиус окружности равен

$$R = \frac{mv}{qB},$$

а период обращения частицы составляет

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{qB}.$$

Важно отметить, что период T не зависит от скорости частицы v .

Задача 2. В однородное магнитное поле с индукцией \vec{B} влетает со скоростью \vec{v} частица массой m и зарядом q . Угол между вектором скорости \vec{v} и вектором магнитной индукции \vec{B} равен α . Как будет двигаться частица в магнитном поле?

Рассмотрим предварительно случай $\alpha = 0$. При этом сила Лоренца равна нулю, следовательно, заряд будет двигаться прямолинейно с постоянной скоростью \vec{v} , т.е. по инерции.

Легко видеть, что вариант произвольного угла α представляет собой комбинацию двух частных случаев: $\alpha_1 = 90^\circ$ и $\alpha_2 = 0$.

Разложим вектор \vec{v} на две составляющие: $\vec{v}_1 \perp \vec{B}$ и $\vec{v}_2 \parallel \vec{B}$, при этом $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ (рис.2). Интуитивно ясно, что частица будет совершать вращательное движение со скоростью v_1 по поверхности цилиндра, равномерно перемещаясь со скоростью v_2 вдоль его образующей.

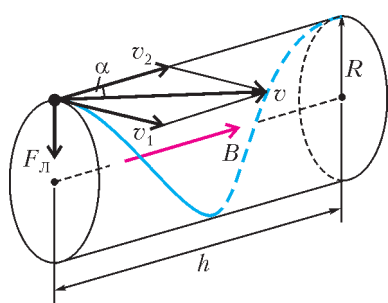


Рис. 2

Радиус цилиндра R определяется по аналогии с задачей 1 из уравнения

$$\frac{mv_1^2}{R} = qv_1B$$

(сила Лоренца действует только на составляющую скорости \vec{v}_1):

$$R = \frac{mv_1}{qB} = \frac{mv \sin \alpha}{qB}.$$

Период обращения частицы

$$T = \frac{2\pi R}{v_1} = \frac{2\pi m}{qB}$$

– такой же, как и в первой задаче. Он не зависит не только от модуля скорости, но и от ее направления, определяемого углом α . Траекторией заряда будет винтовая линия, «навитая» на цилиндр. Ее шаг – это расстояние, проходимое вдоль образующей за один оборот:

$$h = v_2 T = \frac{2\pi m v \cos \alpha}{qB}.$$

Приведенное решение не вполне строгое, но вполне приемлемое.

Теперь решим еще несколько задач на движение заряда в магнитном поле.

Задача 3. Электрон влетает в однородное магнитное поле с индукцией \vec{B} . В точке A он имеет скорость \vec{v} , которая составляет с направлением поля угол α (рис.3). При каких значениях индукции магнитного поля электрон окажется в точке B ? Расстояние $AB = L$.

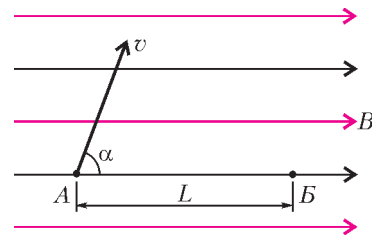


Рис. 3

Очевидно, что условие задачи будет выполнено, если на расстоянии L уложится натуральное число шагов винтовой линии. Таким образом,

$$L = nh = \left(\frac{2\pi m v \cos \alpha}{qB} \right) n,$$

где m и q – масса и модуль заряда электрона соответственно. Отсюда получаем неоднозначный ответ:

$$B = \left(\frac{2\pi m v \cos \alpha}{qL} \right) n, \text{ где } n = 1, 2, 3, \dots$$

Это решение краткое, однако на экзамене придется вывести формулу шага винта, что мы сделали в задаче 2.

Задача 4. Протон движется в однородном магнитном поле по винтовой линии с радиусом R и шагом h . Индукция магнитного поля равна B . Найдите скорость частицы.

Из результата задачи 2 вытекает такая система уравнений:

$$\begin{cases} \frac{mv \sin \alpha}{qB} = R, \\ \frac{2\pi m v \cos \alpha}{qB} = h, \end{cases}$$

где m и q – масса и заряд протона соответственно. Запишем равносильную систему:

$$\begin{cases} v \sin \alpha = \frac{qBR}{m}, \\ v \cos \alpha = \frac{qBh}{2\pi m}. \end{cases}$$

Возведем обе части обоих уравнений в квадрат и сложим. Учитывая, что $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, найдем модуль скорости протона:

$$v = \frac{qB}{m} \sqrt{R^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}}.$$

Легко определить и угол α между векторами \vec{B} и \vec{v} :

$$\alpha = \arctg \left(\frac{2\pi R}{h} \right).$$

Задача 5. Альфа-частица влетает по нормали в область поперечного однородного магнитного поля с индукцией $B = 0,1$ Тл. Размер области $h = 0,1$ м. Найдите скорость частицы, если после прохождения магнитного поля она отклоняется на угол $\varphi = 30^\circ$ от первоначального направления. Для α -частицы отношение заряда к массе (удельный заряд) равен $q/m = 5 \cdot 10^7$ Кл/кг.

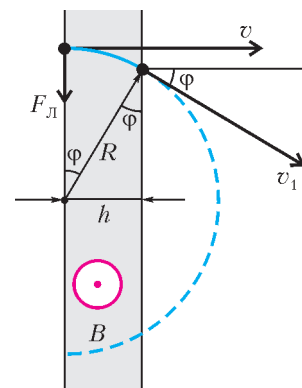


Рис. 4

Здесь мы имеем дело с локализованным в пространстве магнитным полем, поэтому траек-

торией заряженной частицы будет не вся окружность, а лишь ее дуга (рис.4). Из основного уравнения движения (встречавшегося в первой задаче)

$$\frac{mv^2}{R} = qvB$$

находим скорость частицы:

$$v = \frac{q}{m} RB.$$

Поскольку радиус дуги равен $R = \frac{h}{\sin \varphi}$, то окончательно получим

$$v = \frac{q}{m} \frac{hB}{\sin \varphi} = 10^6 \text{ м/с}.$$

Задача 6. Электрон влетает в однородное магнитное поле с индукцией \vec{B} со скоростью \vec{v} , направленной под углом φ к линиям магнитной индукции. Ширина области с полем равна l . Найдите изменение импульса электрона за время пролета через магнитное поле.

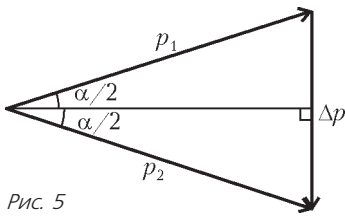


Рис. 5

Опираемся на решение второй задачи, учитывая, однако, что в данной задаче поле локализовано. Поскольку составляющая импульса электрона, параллельная вектору \vec{B} , не меняется, искомое изменение импульса равно разности составляющих импульса электрона, перпендикулярных вектору \vec{B} (рис.5):

$$\Delta \vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1, \text{ где } p_1 = p_2 = mv \sin \varphi.$$

Из свойств равнобедренного треугольника сразу вытекает, что

$$\Delta p = 2p_1 \sin \frac{\alpha}{2},$$

где α – угол поворота перпендикулярной составляющей импульса. Физически очевидна пропорция $\frac{\alpha}{2\pi} = \frac{l}{h}$, где

$h = \frac{2\pi mv \cos \varphi}{qB}$ – шаг винтовой линии, поскольку при прохождении каждого шага винта электрон совершает оборот, а при прохождении части шага – такую же часть оборота. Отсюда получаем

$$\alpha = \frac{qBl}{mv \cos \varphi},$$

где m и q – масса и модуль заряда электрона соответственно. Следовательно,

$$\Delta p = 2mv \sin \varphi \sin \frac{qBl}{2mv \cos \varphi}.$$

В следующих двух задачах магнитное поле дополнится полем электрическим.

Задача 7. Однородные магнитное и электрическое поля перпендикулярны друг другу. Напряженность электрического поля \vec{E} , индукция магнитного поля \vec{B} . С какой скоростью и в каком направлении должен лететь протон, чтобы двигаться в области этих полей прямолинейно?

Интуитивно подобранная векторная конфигурация полей и сил изображена на рисунке 6. Скорость протона \vec{v} перпендикулярна обоим векторам \vec{E} и \vec{B} . Очевидно, что движение частицы может быть прямолинейным в том и

только том случае, когда сила Лоренца \vec{F}_L и кулоновская сила \vec{F}_K компенсируются:

$$\vec{F}_L + \vec{F}_K = 0.$$

Отсюда следует равенство модулей сил:

$$F_L = F_K, \text{ или } qvB = qE,$$

и получается ответ:

$$v = \frac{E}{B}.$$

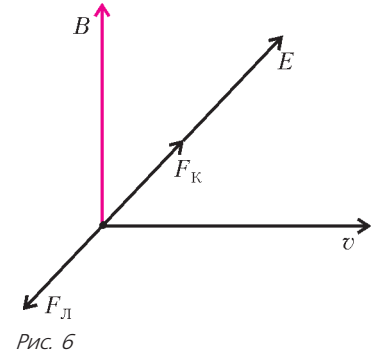


Рис. 6

При этом прямолинейное движение протона будет еще и равномерным.

Легко видеть, что при любой другой скорости (как по модулю, так и по направлению) движение частицы будет криволинейным и неравномерным.

Задача 8. Электрон движется в однородных и постоянных электрическом и магнитном полях, направленных по оси Z. В начальный момент электрон пересекает начало координат, двигаясь в направлении оси X. В каких точках электрон вновь пересечет ось Z? Напряженность электрического поля E, индукция магнитного поля B, модуль заряда электрона e, его масса m.

На рисунке 7 в системе координат XYZ изображены направления полей и сил, действующих на электрон. Основываясь на предыду-

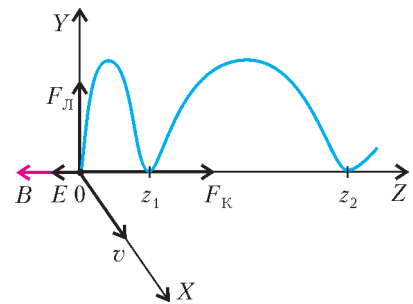


Рис. 7

щих задачах и на здравом смысле, можно сделать вывод, что электрон будет двигаться по винтовой линии, но с увеличивающимся шагом (конечно, строго это не винтовая линия) – ведь по оси Z на электрон действует кулоновская сила. Координата точки пересечения частицы с этой осью после n витков равна

$$z_n = \frac{a(nT)^2}{2},$$

где $a = \frac{eE}{m}$ – ускорение электрона, $T = \frac{2\pi m}{eB}$ – его период обращения. Отсюда имеем

$$z_n = \frac{eE}{2m} \left(\frac{2\pi mn}{eB} \right)^2 = \frac{2\pi^2 Em}{eB^2} n^2.$$

Упражнения

1. Электрон движется в однородном магнитном поле с индукцией \vec{B} . В начальный момент времени электрон находился в точке O и его скорость \vec{v} была перпендикулярна вектору магнитной индукции. Найдите расстояние l электрона от точки O в момент времени t . Массу электрона m и модуль его заряда q считать известными.

2. Незаряженная неподвижная частица распалась в магнитном поле с индукцией \vec{B} на две частицы с массами m_1 и m_2 и зарядами q и $-q$. Найдите время, через которое частицы могут встретиться, если пренебречь кулоновским взаимодействием осколков.

3. Протон влетает со скоростью 60 км/с в пространство с электрическим и магнитным полями, направления которых

совпадают, перпендикулярно этим полям. Найдите напряженность электрического поля, если индукция магнитного поля равна 0,1 Тл, а начальное ускорение протона, вызванное действием этих полей, составляет 10^{12} м/с^2 .

4. Электрон, прошедший ускоряющую разность потенциалов $\Delta\phi = 40 \text{ В}$, влетает в плоский слой однородного магнитного поля толщиной $h = 10 \text{ см}$. Скорость электрона перпендикулярна как линиям магнитной индукции поля \vec{B} , так и плоской границе слоя. При каком минимальном значении индукции B_{\min} электрон не пролетит сквозь слой? Отношение модуля заряда электрона к его массе $\gamma = 1,76 \cdot 10^{11} \text{ Кл/кг}$.

5. Электрон движется по окружности радиусом $R = 10 \text{ см}$ в

однородном магнитном поле с индукцией $B = 1 \text{ Тл}$. Параллельно магнитному полю возбуждается однородное электрическое поле с напряженностью $E = 100 \text{ В/м}$. За какой промежуток времени кинетическая энергия электрона возрастет вдвое?

6. Электрон влетает в область пространства с однородным электрическим полем напряженностью $E = 6 \cdot 10^4 \text{ В/м}$ перпендикулярно его силовым линиям. Определите величину и направление вектора индукции магнитного поля \vec{B} , которое надо создать в этой области пространства для того, чтобы электрон пролетел ее, не отклоняясь от первоначального направления. Кинетическая энергия электрона $W = 1,6 \cdot 10^{-16} \text{ Дж}$, масса электрона $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$. Силой тяжести пренебречь.

Инвариантность и задачи с параметрами

Г.ФАЛИН, А.ФАЛИН

В СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИКЕ ВАЖНУЮ РОЛЬ ИГРАЕТ понятие *инвариантности*, т.е. неизменности математического объекта (числового множества, выражения, функции, уравнения и т.д.) относительно некоторых преобразований.

В настоящей статье мы покажем, как свойства инвариантности позволяют решать определенный класс задач с параметрами.

Уравнения

Задача 1 (МГУ, мехмат, 1990). Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$x^2 - 2a \sin(\cos x) + a^2 = 0 \quad (1)$$

имеет единственное решение.

Решение. Незвестная x входит в уравнение (1) через две четные функции: $y = x^2$ и $y = \cos x$. Поэтому это уравнение инвариантно при замене x на $-x$. Значит, если какое-то число x_0 является корнем уравнения (1), то и число $(-x_0)$ также будет корнем. Отсюда следует, что уравнение (1) имеет единственный корень только в случае, когда среди корней присутствует число $x_0 = 0$. При этом не исключено наличие и других корней. Важно лишь то, что если среди корней нет числа 0, то множество M_a его корней не может быть одноэлементным (оно либо пусто, либо содержит по меньшей мере два корня вида $x_1, -x_1$).

Простая подстановка числа 0 на место неизвестной дает, что число 0 является корнем уравнения (1) для $a_1 = 0$ и $a_2 = 2 \sin 1$.

Для завершения решения задачи достаточно выяснить, сколько корней имеет уравнение (1) для двух «подозрительных» значений параметра $a_1 = 0$ и $a_2 = 2 \sin 1$.

1. Если $a = 0$, то уравнение (1) примет вид $x^2 = 0$, т.е. имеет единственный корень $x_0 = 0$. Поэтому значение $a = 0$ нужно включить в ответ задачи.

2. Если $a = 2 \sin 1$, то уравнение (1) примет вид

$$x^2 + 4 \sin^2 1 = 4 \sin 1 \cdot \sin(\cos x). \quad (2)$$

Левая часть этого уравнения больше или равна $4 \sin^2 1$, причем эта нижняя граница является точной – она достигается при $x = 0$. Оценить правую часть немного сложнее. Прежде всего отметим, что при изменении переменной x от $-\infty$ до $+\infty$ выражение $\cos x$ меняется от -1 до $+1$. На отрезке $-1 \leq t \leq 1$ функция $\sin t$ монотонно возрастает от $-\sin 1$ до $\sin 1$. Поэтому выражение $\sin(\cos x)$ меняется от $-\sin 1$ до $\sin 1$. Соответственно, правая часть уравнения (2) меняется от $-4 \sin^2 1$ до $4 \sin^2 1$, причем значения правой части уравнения полностью заполняют этот отрезок. Следовательно, уравнение (2) равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 + 4 \sin^2 1 = 4 \sin^2 1, \\ 4 \sin 1 \cdot \sin(\cos x) = 4 \sin^2 1. \end{cases}$$

Первое уравнение системы имеет единственный корень $x_0 = 0$, который удовлетворяет и второму уравнению системы. Значит, система, а вместе с ней и уравнение (2), имеет единственное решение $x = 0$. Поэтому проверяемое значение параметра $a = 2 \sin 1$ нужно включить в ответ задачи.

Ответ: $a_1 = 0, a_2 = 2 \sin 1$.

Задача 2 (химический ф-т, 1999). Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$\left| \frac{x(2^x - 1)}{2^x + 1} + 2a \right| = a^2 + 1$$

имеет нечетное число решений.

Решение. В этой задаче уравнение также инвариантно при замене x на $-x$ (хотя заметить это довольно тяжело). Поэтому если число x_0 является корнем исходного уравнения, то число $-x_0$ также будет его корнем. Вследствие этого, количество корней может быть нечетным только в случае, когда среди корней находится число $x_0 = 0$. В противном случае множество корней либо пусто, либо бесконечно, либо конечно и содержит четное число корней.

Подставляя в исходное уравнение вместо неизвестной x число 0, мы получим простое уравнение относительно a :

$$|2a| = a^2 + 1, \text{ которое имеет два корня: } a_1 = 1, a_2 = -1.$$

Если $a = 1$, то исходное уравнение распадается на два уравнения:

$$\frac{x(2^x - 1)}{2^x + 1} = 0, \quad \frac{x(2^x - 1)}{2^x + 1} = -4.$$

Первое уравнение, очевидно, имеет единственный корень $x = 0$. Второе уравнение можно привести к виду $2^x = \frac{x - 4}{x + 4}$,

после чего с помощью графиков легко показать, что оно не имеет корней.

Итак, в случае $a = 1$ исходное уравнение имеет ровно 1 корень.

Если $a = -1$, то исходное уравнение также распадается на два уравнения:

$$\frac{x(2^x - 1)}{2^x + 1} = 0, \quad \frac{x(2^x - 1)}{2^x + 1} = 4.$$

Первое уравнение такое же, как и первое уравнение в случае $a = 1$; оно имеет единственный корень $x = 0$. Второе уравнение можно привести к виду $2^x = \frac{x+4}{x-4}$, после чего с помощью графиков легко показать, что оно имеет два корня. Точные значения этих корней нам совершенно не важны; впрочем, графики позволяют их локализовать: $-5 < x_1 < -4$, $4 < x_2 < 5$ ($x_1 = -x_2$).

Итак, в случае $a = -1$ исходное уравнение имеет ровно 3 корня.

Хотя мы точно определили число корней в каждом из двух «подозрительных» случаев, для завершения решения задачи достаточно было просто выяснить, конечно или нет число корней исходного уравнения. Тогда множество корней имеет вид $\{0; x_1; -x_1; \dots; x_n; -x_n\}$, т.е. содержит нечетное число корней.

Ответ: $a_1 = 1$, $a_2 = -1$.

В следующей задаче появится инвариантность необычного для школьной математики вида.

Задача 3 (ВМК, 1998). *Найдите все значения параметра a , при которых уравнение*

$$2^{1+x^2} + a \cos\left(\frac{x^2-1}{x}\right) + a^2 - \frac{5}{4} = 0 \quad (3)$$

имеет единственное решение.

Решение. Нетрудно проверить, что уравнение (3) не изменится при замене x на $\frac{1}{x}$. Поэтому если x_0 – решение уравнения (3), то $\frac{1}{x_0}$ – тоже решение. Следовательно, если x_0 – единственное решение, то $x_0 = \frac{1}{x_0}$, т.е. x_0 может быть только 1 или -1 .

Подставляя значение $x = 1$ в уравнение (3), получаем уравнение относительно параметра: $a^2 + a + \frac{3}{4} = 0$. Дискриминант этого квадратного уравнения отрицателен, так что ни при одном значении параметра a число $x = 1$ не будет корнем уравнения (3).

Подставляя теперь в уравнение (3) $x = -1$, получаем необходимое (но недостаточное (!)) условие для искомых значений параметра: $a^2 + a - \frac{3}{4} = 0$, которое имеет два корня $a = \frac{1}{2}$ и $a = -\frac{3}{2}$.

Найдем теперь количество решений уравнения (3) для двух «подозрительных» значений параметра $a = \frac{1}{2}$ и $a = -\frac{3}{2}$. Наличие в этом уравнении разнородных членов (показательного и тригонометрического), конечно, потребует применения графического метода или метода оценок. Чтобы упростить дальнейший анализ, применим тригонометрическую подстановку $x = \operatorname{tg} \frac{t}{2}$, $t \in (\pi; 0) \cup (0; \pi)$. Тогда (3) превратится в следующее уравнение:

$$2^{\sin t} + a \cos(2 \operatorname{ctg} t) + a^2 - \frac{5}{4} = 0. \quad (4)$$

1. Если $a = \frac{1}{2}$, то уравнение (4) примет вид

$$\cos(2 \operatorname{ctg} t) = 2 - 2^{1+\sin t}. \quad (5)$$

Функцию $y_1(t) = \cos(2 \operatorname{ctg} t)$ можно рассматривать как суперпозицию функций $y(u) = \cos u$ и $u(t) = 2 \operatorname{ctg} t$. При изменении t от $-\pi$ до 0 функция $u(t)$ монотонно убывает от $+\infty$ до $-\infty$. Соответственно, функция $y_1(t)$ совершает бесконечное число колебаний от -1 до $+1$; при этом $y_1\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1$. Для $t \in (0; \pi)$ в силу четности функции $y_1(t)$ ситуация аналогична.

Функцию $y_2(t) = 2 - 2^{1+\sin t}$ можно рассматривать как суперпозицию функций $y(u) = 2 - 2^{1+u}$ и $u(t) = \sin t$. График функции $y(u)$ получается из графика стандартной показательной функции 2^u переносом на 1 влево, осевой симметрией относительно оси Ox , переносом на 2 вверх. Поэтому при изменении переменной t от $-\pi$ до π функция $y_2(t)$

сначала возрастает от $y_2(-\pi) = 0$ до $y_2\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1$, затем убывает от $y_2\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1$ до $y_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2$, а потом опять возрастает от $y_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2$ до $y_2(\pi) = 0$.

Таким образом, уравнение (5) имеет бесконечно много корней на множестве $(-\pi; 0) \cup (0; \pi)$, так что проверяемое значение параметра не включается в ответ.

2. Если $a = -\frac{3}{2}$, то уравнение (4) примет вид

$$\cos(2 \operatorname{ctg} t) = \frac{1}{3}(2 + 2^{1+\sin t}). \quad (6)$$

При $t \in (-\pi; 0) \cup (0; \pi)$ функция $y = \cos(2 \operatorname{ctg} t)$ принимает значения из отрезка $[-1; 1]$, а функция $y = \frac{1}{3}(2 + 2^{1+\sin t})$ – из множества $[1; 2] \setminus \left\{\frac{4}{3}\right\}$. Поэтому уравнение (6) равносильно системе

$$\begin{cases} \cos(2 \operatorname{ctg} t) = 1, \\ \frac{1}{3}(2 + 2^{1+\sin t}) = 1. \end{cases}$$

Второе уравнение этой системы имеет единственный корень, удовлетворяющий условию $t \in (-\pi; 0) \cup (0; \pi)$: $t = -\frac{\pi}{2}$. Этот корень является и корнем первого уравнения системы, так что проверяемое значение параметра включается в ответ.

Ответ: $a = -\frac{3}{2}$.

Системы

Как и для уравнений, для систем самым распространенным случаем является инвариантность относительно изменения знака у одной или нескольких неизвестных.

Задача 4 (экономический ф-т, 1987). *Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система*

$$\begin{cases} 3 \cdot 2^{|x|} + 5|x| + 4 = 3y + 5x^2 + 3a, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \quad (7)$$

имеет единственное решение.

Решение. Наша система инварианта при замене x на $(-x)$. Поэтому если $(x; y)$ – решение системы (7), то и $(-x; y)$ тоже будет решением. Вследствие этого, если система (7) имеет единственное решение, то это решение имеет вид $(0; y)$.

Подставляя вместо неизвестной x число 0 , мы получим, что

пара $(0; y)$ является решением системы (7) только для $a = \frac{4}{3}$ или $a = \frac{10}{3}$. В первом случае этим единственным решением может быть только пара $(x; y) = (0; 1)$, во втором – пара $(x; y) = (0; -1)$. Как обычно, нельзя исключить, что кроме отмеченного решения система имеет и другие решения.

Для завершения решения задачи нужно выяснить, сколько решений имеет исходная система (7) для двух подозрительных значений параметра $a = \frac{4}{3}$ и $a = \frac{10}{3}$.

Используя графические соображения и метод оценок, легко показать, что для $a = \frac{4}{3}$ пара $(x; y) = (0; 1)$ является единственным решением системы (7), а в случае $a = \frac{10}{3}$ система (7) имеет по меньшей мере три решения $(0; -1)$, $(1; 0)$, $(-1; 0)$.

Ответ: $a = \frac{4}{3}$.

Задача 5 (мехмат, 1966). Найдите все значения a и b , при которых система

$$\begin{cases} xyz + z = a, \\ xyz^2 + z = b, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases} \quad (8)$$

имеет только одно решение (a, b, x, y, z – действительные числа).

Решение. Исходная система не меняется при одновременной перемене знаков у неизвестных x и y . Иначе говоря, она инвариантна относительно преобразования $(x; y; z) \mapsto (-x; -y; z)$. Поэтому если тройка чисел $(x_0; y_0; z_0)$ является решением системы (8), то и тройка $(-x_0; -y_0; z_0)$ будет решением. Отсюда следует, что если $(x_0; y_0; z_0)$ – единственное решение системы, то $(x_0; y_0; z_0) = (-x_0; -y_0; z_0)$, откуда $x_0 = 0, y_0 = 0$.

Прямая подстановка в (8) вместо x и y числа 0 показывает, что тройка $(0; 0; z)$ – решение системы (8) только в двух случаях:

1. В случае $a = b = 2$ единственным решением может только тройка $(x; y; z) = (0; 0; 2)$.

2. В случае $a = b = -2$ единственным решением может быть только тройка $(x; y; z) = (0; 0; -2)$.

Решая систему (8) для указанных конкретных значений параметров, мы получим, что для $a = b = 2$ система (8) кроме решения $(0; 0; 2)$ имеет еще четыре решения:

$$\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}; \frac{\sqrt{5}-1}{2}; 1\right), \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}; \frac{\sqrt{5}+1}{2}; 1\right), \left(\frac{-\sqrt{5}-1}{2}; \frac{-\sqrt{5}+1}{2}; 1\right), \left(\frac{-\sqrt{5}+1}{2}; \frac{-\sqrt{5}-1}{2}; 1\right),$$

а для $a = b = -2$ тройка $(x; y; z) = (0; 0; -2)$ является единственным решением.

Ответ: $a = b = -2$.

В следующей задаче, в отличие от предыдущей, работает не только инвариантность относительно изменения знака у двух неизвестных, но и симметричность системы относительно входящих в нее неизвестных (в наших терминах речь идет об инвариантности относительно преобразования $(x; y) \mapsto (y; x)$). Однако эта симметрия (следовательно, и соответствующая инвариантность) «спрятана» с помощью замены неизвестных.

Задача 6 (мехмат, 2006). Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} 2xy - ax - 2ay + a^2 - 2 = 0, \\ 4x^2 + 4y^2 - 8ax - 4ay - 7a^2 - 20a = 0 \end{cases} \quad (9)$$

имеет ровно два различных решения.

Решение. Для новых переменных $u = x - a, v = y - \frac{a}{2}$ и $b = 3a^2 + 5a$ система (9) примет вид

$$\begin{cases} uv = 1, \\ u^2 + v^2 = b. \end{cases} \quad (10)$$

Поскольку между парами $(x; y)$ и $(u; v)$ имеется взаимно однозначное соответствие, системы (9) и (10) имеют одно и то же число решений.

Система (10) не изменится, если одновременно изменить знаки у переменных u и v , а также если их поменять местами. Поэтому если $(u_0; v_0)$ – решение системы (10), то решениями будут и пары $(-u_0; -v_0), (v_0; u_0), (-v_0; -u_0)$. В силу первого уравнения, u_0 и v_0 отличны от 0, так что из четырех указанных пар пары $(u_0; v_0)$ и $(-u_0; -v_0)$, а также пары $(v_0; u_0)$ и $(-v_0; -u_0)$ различны. Поэтому система (10) может иметь два решения только в случае $u_0 = v_0$.

Прямая подстановка в исходную систему дает, что пара $(u; u)$ будет решением тогда и только тогда, когда $b = 2$. Если $b = 2$, то система (10) легко решается и действительно имеет два решения: $(1; 1)$ и $(-1; -1)$.

Для основной переменной a условие $b = 2$ дает уравнение $3a^2 + 5a = 2$, откуда немедленно следует ответ.

Ответ: $a_1 = \frac{1}{3}, a_2 = -2$.

Упражнения

1 (ф-т почвоведения, 2001). При каких значениях параметра b уравнение $\operatorname{tg}|b| = \log_2(\cos x - |x|)$ имеет ровно один корень?

2 (геологический ф-т, 2003). При каких значениях a уравнение $2\pi^2(x-1)^2 + 4a \cos(2\pi x) - 9a^3 = 0$ имеет единственное решение?

3 (экономический ф-т, 2003). Найдите все значения параметра b , при которых уравнение

$$b^2 \sin\left(\frac{\pi+2}{2} - x\right) + \sin^2\left(\frac{2x}{b+1} - \frac{2}{b+1}\right) - b\sqrt{4x^2 + 8 - 8x} = 3 + \arcsin|1-x|$$

имеет единственное решение.

4 (мехмат, 1966). Найдите все значения a и b , при которых система

$$\begin{cases} \left| \frac{x^y - 1}{x^y + 1} \right| = a, \\ x^2 + y^2 = b \end{cases}$$

имеет только одно решение.

5 (МШЭ, 2005). Найдите все значения параметра b , при которых система уравнений

$$\begin{cases} (x^2 + 1)b = y + \cos 2x, \\ 2^{|\sin x|} + |y| = 2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

6 (ВМК, 1997). При каких значениях a система

$$\begin{cases} x^4 + y^4 = a, \\ \cos(x-y) + xy \leq 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

7 (химический ф-т, 1986). Найдите все значения a , при которых система

$$\begin{cases} 1 - \sqrt{|x-1|} = \sqrt{7|y|}, \\ 49y^2 + x^2 + 4a = 2x - 1 \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.