

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 января 2008 года по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №5-2007» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «M2056» или «Ф2063». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи M2056, M2057, M2059, M2063, M2064 предлагались на IV этапе, а задачи M2060 – M2062, M2065 – на V этапе XXXIII Всероссийской олимпиады школьников по математике.

Задачи M2056 – M2065, Ф2063 – Ф2072

M2056. В натуральном числе A переставили цифры, получив число B . Известно, что $A - B = \frac{11\dots1}{N \text{ единиц}}$.

Найдите наименьшее возможное значение N .

Н.Агаханов

M2057. 25 мальчиков и несколько девочек собрались на вечеринке и обнаружили забавную закономерность. Если выбрать любую группу не меньше чем из 10 мальчиков, а потом добавить к ним всех девочек, знакомых хотя бы с одним из этих мальчиков, то в получившейся группе число мальчиков окажется на 1 меньше, чем число девочек. Докажите, что некоторая девочка знакома не менее чем с 16 мальчиками.

С.Волчёнков

M2058. В выпуклом четырехугольнике пять из восьми отрезков, соединяющих вершины с серединами противоположных сторон, равны. Докажите, что все восемь отрезков равны.

Н.Агаханов, В.Сендеров

M2059. Бесконечная возрастающая арифметическая прогрессия, состоящая из натуральных чисел, содержит точный куб натурального числа. Докажите, что она содержит и точный куб, не являющийся точным квадратом.

И.Богданов, В.Сендеров

M2060. Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон BC , AC , AB в точках A_1 , B_1 , C_1 соответственно. Отрезок AA_1 вторично пересекает вписанную окружность в точке Q . Прямая l параллельна BC и проходит через A . Прямые A_1C_1 и A_1B_1 пересе-

кают l в точках P и R соответственно. Докажите, что $\angle PQR = \angle B_1QC_1$.

А.Полянский

M2061. В таблице 10×10 расставлены числа от 1 до 100: в первой строчке – от 1 до 10 слева направо, во второй – от 11 до 20 слева направо и т.д. Андрей собирается разрезать таблицу на прямоугольники 1×2 , посчитать произведение чисел в каждом прямоугольнике и сложить полученные 50 чисел. Он стремится получить как можно меньшую сумму. Как ему следует разрезать квадрат?

А.Бадзян

M2062. Фокусник Арутюн и его помощник Амаяк собираются показать следующий фокус. На доске нарисована окружность. Зрители отмечают на ней 2007 различных точек, затем помощник фокусника стирает одну из них. После этого фокусник впервые входит в комнату, смотрит на рисунок и отмечает полукруглость, на которой лежала стертая точка. Как фокуснику договориться с помощником, чтобы фокус гарантированно удался?

А.Акопян, И.Богданов

M2063. Назовем многогранник *хорошим*, если его объем (измеренный в м^3) численно равен площади его поверхности (измеренной в м^2). Можно ли какой-нибудь хороший тетраэдр разместить внутри какого-нибудь хорошего параллелепипеда?

М.Мурашкин

M2064. Окружность проходит через вершины B и C треугольника ABC и пересекает стороны AB и AC в точках D и E соответственно. Отрезки CD и BE пересекаются в точке O . Пусть M и N – центры

окружностей, вписанных в треугольники ADE и ODE соответственно. Докажите, что середина меньшей дуги DE лежит на прямой MN .

М.Исаев

М2065. В бесконечной последовательности (x_n) первый член x_1 – рациональное число, большее 1, и $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{[x_n]}$ при всех натуральных n . Докажите, что в этой последовательности есть целое число.

А.Голованов

Ф2063. Фигурку из металла взвешивают на очень точных весах, используя золотые гирьки, – измеренная масса составила 47,98 г. Когда воздух под колпаком весов откачали до 0,1 атмосферного давления, получилась практически точно 49 г. Определите по этим данным, из какого металла сделана фигурка.

Н.Простов

Ф2064. Длинная тонкая прозрачная трубка заполнена глицерином, посередине трубки находится маленький воздушный пузырек. Когда трубка вертикальна, пузырек всплывает практически с постоянной скоростью 1 см/с. Сделаем трубку горизонтальной, подождем достаточно долго – пока все успокоится, а пузырек перестанет двигаться. Теперь разгоним трубку вдоль ее оси до скорости 10 см/с и продолжим двигать ее с этой скоростью. Найдите смещение пузырька относительно его начального положения. Считать силу сопротивления пропорциональной скорости пузырька относительно жидкости.

А.Повторов

Ф2065. На гладком горизонтальном столе покоится клин массой M , его наклонная поверхность составляет угол α с горизонтом. Маленькая шайба массой m движется по столу со скоростью v_0 и «въезжает» на наклонную поверхность клина. Считая, что наклонная поверхность имеет плавное короткое сопряжение с горизонтальной, найдите время подъема шайбы до верхнего своего положения. Найдите также смещение клина к этому моменту. Трения в системе нет.

Г.Панькевич

Ф2066. Тележки с массами $m = 1$ кг и $M = 2$ кг связаны легким упругим шнуром длиной $L = 0,3$ м. Вначале тележки неподвижны, а шнур почти натянут. Легкой тележке ударом сообщают скорость $v_0 = 2$ м/с в направлении вдоль соединяющего их шнура (рис.1).



Рис. 1

Через какое время произойдет удар тележек друг о друга? Жесткость шнура $k = 20$ Н/м.

Р.Александров

Ф2067. Цикл тепловой машины, работающей с идеальным газом, состоит из двух изохорических участков и двух изотермических участков с отношением температур $T_1 : T_2 = 3$. Известно, что на участке изохорического нагревания газ получает столько же тепла, сколько и на участке изотермического расширения. Найдите КПД этого цикла.

С.Простов

Ф2068. Простой омметр состоит из последовательно соединенных миллиамперметра с током полного отклонения 1 мА, батарейки напряжением 1,5 В и переменного резистора (рис.2). Регулируя сопротивление этого резистора, мы производим «установку нуля» омметра – при замкнутых выводах омметра стрелку прибора устанавливаем в крайнее правое положение («ноль омметра»). При разомкнутых выводах ток нулевой – это соответствует «бесконечному» измеряемому сопротивлению. Можно ли при помощи этого прибора измерить сопротивления резисторов R_x порядка 1 Ом; 1кОм; 1 МОм? Какое сопротивление покажет этот омметр, если к его выводам подключить полупроводниковый диод, вольт-амперная характеристика которого приведена на рисунке 3?

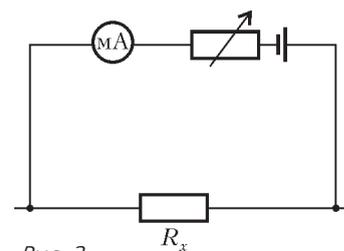


Рис. 2

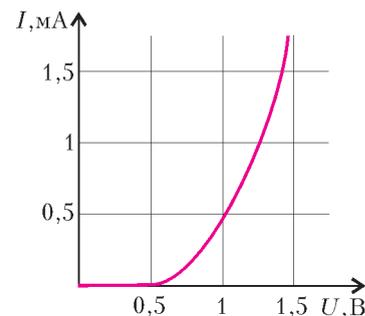


Рис. 3

если к его выводам подключить полупроводниковый диод, вольт-амперная характеристика которого приведена на рисунке 3?

А.Старов

Ф2069. В схеме на рисунке 4 «горизонтальная» батарейка имеет напряжение 1 В, три из четырех конденсаторов имеют одинаковые емкости, а последний – вдвое большую. Каким может быть напряжение второй, «вертикальной» батарейки, чтобы хотя бы один конденсатор в этой схеме остался незаряженным? До подключения батареек все конденсаторы заряжены не были.

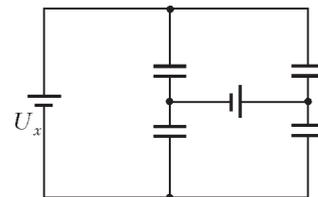


Рис. 4

З.Рафаилов

Ф2070. На одинаковые тороидальные сердечники, сделанные из материала с большой магнитной проницаемостью, намотаны тонким проводом катушки, одна из них содержит вдвое больше витков, чем другая. Катушка с меньшим числом витков имеет индуктивность 0,5 Гн. Катушки соединены параллельно, к выводам катушек присоединены конденсатор емкостью 10 мкФ и батарейка напряжением 6 В с внутренним сопротивлением 10 Ом (рис.5). Когда токи в цепи практически перестали изменяться, батарейку отключают. Найдите максимальное значение заряда конденсатора. Какое количество теплоты выделится в каждой катушке после

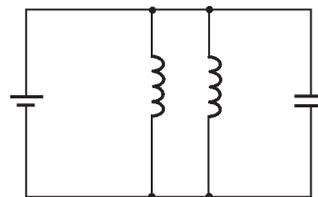


Рис. 5

отключения батарейки? Провод, которым намотаны катушки, имеет очень маленькое сопротивление.

А.Зильберман

Ф2071. На двух одинаковых легких пружинах жесткостью k , прикрепленных к потолку, висят одинаковые грузы массой M . На один из грузов аккуратно ставят грузик массой m , а после того, как колебания прекратятся, быстро переносят грузик на другой груз. Через какое время грузы поравняются? А через какое время скорости грузов впервые будут направлены в одну сторону?

А.Грузов

Ф2072. Корпус светоизлучающего диода отштампован из прозрачной пластмассы (рис.6). На одном его конце

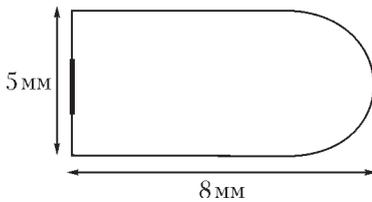


Рис. 6

сформирована линза, излучающая область представляет кружок диаметром 2 мм. Оцените диаметр светлого пятна на экране, расположенном на оси излучения на расстоянии 20 см от диода.

Отражениями света внутри пластмассового корпуса можно пренебречь.

А.Светов

Решения задач M2036 – M2040, Ф2048 – Ф2057

M2036. Андрей, Боря и Саша поделили 20 монет так, что не все монеты достались одному из них. После этого каждую минуту один из ребят отдает по одной монете двум другим. Через некоторое время у Андрея, Бори и Саши оказалось a , b и c монет соответственно. Найдите количество возможных троек (a, b, c) .

Ответ: 76.

Пусть в какой-то момент тройка имела вид (x, y, z) (т.е. у Андрея, Бори и Саши было x , y и $z = 20 - x - y$ монет соответственно). Среди чисел x, y, z не более одного нуля, так как после каждой операции хотя бы у двух мальчиков есть монеты. Числа x, y и z не могут давать три различных остатка при делении на 3, иначе сумма $x + y + z$ делилась бы на 3. Значит, среди чисел x, y, z два числа дают равные остатки при делении на 3; пусть для определенности это первые два числа. Будем называть тройки, удовлетворяющие этому условию, *хорошими*. После выполнения операции хорошая тройка (x, y, z) переходит в одну из троек $(x - 2, y + 1, z + 1)$, $(x + 1, y - 2, z + 1)$, $(x + 1, y + 1, z - 2)$, каждая из которых является хорошей. Нетрудно посчитать количество хороших троек (x, y, z) : при $x = 3k, y = 3l, 0 < k + l \leq 6$, – 27 вариантов, при $x = 3k + 1, y = 3l + 1, 0 \leq k + l \leq 6$, – 28 вариантов, при $x = 3k + 2, y = 3l + 2, 0 \leq k + l \leq 5$, – 21 вариант; всего 76 троек. Остается показать, что каждая из 76 хороших троек может быть получена из любой другой.

Если $x + y > 2$, то с хорошей тройкой (x, y, z) можно

сделать одну из операций $(x, y, z) \rightarrow (x - 2, y + 1, z + 1)$ и $(x, y, z) \rightarrow (x + 1, y - 2, z + 1)$; при этом сумма $x + y$ уменьшается. Значит, за конечное число операций мы можем прийти к хорошей тройке (x', y', z') , в которой $x' + y' \leq 2$, т.е. к тройке $(1, 1, 18)$.

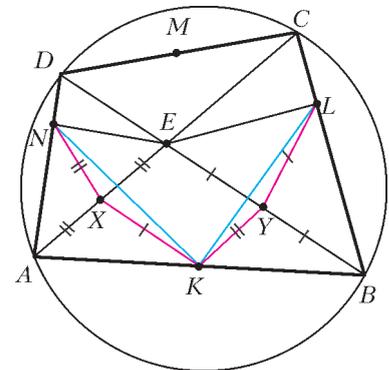
Но от тройки $(1, 1, 18)$ мы можем прийти к произвольной хорошей тройке, так как операция «обратима». Действительно, переход от тройки $(x - 2, y + 1, z + 1)$ к тройке (x, y, z) можно произвести за две операции: $(x - 2, y + 1, z + 1) \rightarrow (x - 1, y - 1, z + 2) \rightarrow (x, y, z)$, если $y > 0$, или $(x - 2, y + 1, z + 1) \rightarrow (x - 1, y + 2, z - 1) \rightarrow (x, y, z)$, если $y = 0$.

Итак, из произвольной хорошей тройки мы можем прийти к тройке $(1, 1, 18)$, а из нее – к любой другой хорошей тройке.

П.Кожевников

M2037. Диагонали вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке E ; точки K и M – середины сторон AB и CD ; L и N – проекции точки E на стороны BC и AD .

Докажите, что прямые KM и LN перпендикулярны.



Пусть X и Y – середины отрезков AE и BE (см. рисунок). Из прямоугольного треугольника AEN имеем $XN = AE/2$, отсюда $XN = YK$. Аналогично, $YL = XK$. Далее,

$$\begin{aligned} \angle KXN &= \angle KXE + \angle EXN = \angle BEC + 2\angle CAD = \\ &= \angle AED + 2\angle CBD = \angle KYE + \angle EYL = \angle KYL. \end{aligned}$$

Получаем равенство треугольников KXN и KYL , откуда $KN = KL$.

Аналогично доказываем, что $MN = ML$.

Треугольники KML и KMN равны по трем сторонам, значит, точки L и N симметричны относительно прямой KM , откуда $KM \perp LN$.

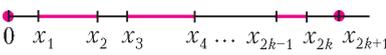
П.Кожевников

M2038. Фома и Ерема делят кучу из кусков сыра. Сперва Фома, если хочет, выбирает один кусок и режет его на два. Затем он раскладывает сыр на две тарелки. После этого Ерема выбирает одну тарелку, и они делят сыр на ней, беря себе по очереди по куску; начинает Ерема. Точно так же они делят сыр со второй тарелки, только первым начинает Фома. Докажите, что Фома всегда может действовать так, чтобы получить не менее половины сыра (по весу).

Отметим вначале следующее утверждение для дележа на одной тарелке. Пусть на тарелке $2k$ или $2k - 1$ кусков сыра весом $x_{2k} \geq x_{2k-1} \geq \dots \geq x_1$ (если кусков $2k - 1$, то полагаем $x_1 = 0$). Если двое делят сыр на ней, беря куски по очереди, то первый может обеспечить себе суммарный вес не менее $x_{2k} + x_{2k-2} + \dots + x_2$, а второй – не менее $x_{2k-1} + x_{2k-3} + \dots + x_1$.

И первый, и второй могут добиться желаемого «жадным» алгоритмом, беря каждым ходом наибольший из оставшихся кусков.

Перейдем к решению задачи. Пусть в куче, которую делят Фома и Ерема, $2k + 1$ кусков сыра весом $x_{2k+1} \geq x_{2k} \geq \dots \geq x_1$ (если кусков $2k$, то полагаем $x_1 = 0$). Непересекающиеся отрезки длиной $x_{2k} - x_{2k-1}, x_{2k-2} - x_{2k-3}, \dots, x_2 - x_1$ помещаются на отрезке длиной x_{2k+1} (см. рисунок), поэтому кусок весом x_{2k+1} Фома может разделить на два куска весом a и весом b с разностью весов



$$a - b = (x_{2k} - x_{2k-1}) + (x_{2k-2} - x_{2k-3}) + \dots + (x_2 - x_1),$$

положить эти два куска на первую тарелку, а остальные куски – на вторую.

Если Ерема выбирает первую тарелку, то в результате дележа на двух тарелках Фома получает (действуя «жадным» алгоритмом) не менее $b + x_{2k} + x_{2k-2} + \dots + x_2$, что равно $a + x_{2k-1} + x_{2k-3} + \dots + x_1$, т. е. составляет половину всего сыра. Если же Ерема выбирает вторую тарелку, то Фома получает не менее $a + x_{2k-1} + x_{2k-3} + \dots + x_1$.

П. Кожевников

M2039. Докажите, что для каждого натурального $n > 1$ найдется натуральное z , не представимое в виде $x^n - y!$, где x и y – натуральные.

Утверждение этой задачи можно существенно усилить: мы докажем, что существует бесконечно много натуральных чисел z , не представимых в виде $x^n - y!$ ни для каких натуральных x, y и $n > 2$ (идея такого усиления содержится в решениях школьников Горемыкиной Анны из Долгопрудного и Нижибицкого Евгения из Краснодара).

Положим $z = 36t + 2$, где $t = 4k^2, k = 7u + 1, u \in \mathbf{N}$.

При $y = 1$ простой множитель 3 входит в разложение числа $z + y!$ ровно в первой степени, поэтому $z + y!$ не может быть точной степенью.

При $y \geq 4$ простой множитель 2 входит в разложение числа $z + y!$ ровно в первой степени, поэтому $z + y!$ не может быть точной степенью.

Если $y = 2$, то $z + y! = 36t + 4 = 4(36k^2 + 1)$ не является точным квадратом (иначе $36k^2 + 1 = (6k)^2 + 1$ – точный квадрат) и не является точной степенью $n \geq 3$, так как простой множитель 2 входит в разложение $z + y!$ ровно во второй степени.

Если $y = 3$, то $z + y! = 36t + 8 = 8(18k^2 + 1)$ не является точным кубом (иначе $18k^2 + 1 = 18(7u + 1)^2 + 1$ – точный куб, дающий остаток 5 при делении на 7 – противоречие) и не является точной степенью $n \geq 2, n \neq 3$, так как простой множитель 2 входит в разложение $z + y!$ ровно в третьей степени.

В. Сендеров

M2040. Положительные числа x_1, x_2, \dots, x_k удовлетворяют неравенствам

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2 < \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_k}{2},$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k < \frac{x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_k^3}{2}.$$

а) Докажите, что $k > 50$.

б) Укажите пример таких чисел для какого-нибудь k .

в*) Найдите наименьшее k , для которого такой пример возможен.

Утверждение пункта а) следует из пункта в).

б) Возьмем $k = 2501, x_1 = 10, x_2 = x_3 = \dots = x_{2501} = 0,1$. Тогда $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2 = 100 + 25 = 125, x_1 + x_2 + \dots + x_{2501} = 10 + 250 = 260, x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_k^3 > 1000$, и все неравенства выполнены.

в) **Ответ:** 516.

1. Пусть для некоторого k такие числа x_1, \dots, x_k существуют. Докажем, что тогда существует и набор вида $x_1 = x_2 = \dots = x_{k-1} = a < \frac{1}{4}, x_k = b > \sqrt{2}$, также удовлетворяющий условию.

Перепишем наши неравенства в виде

$$\sum_{i=1}^k (4x_i - 1)^2 < k, \quad \sum_{i=1}^k (2x_i - x_i^3) < 0.$$

Пусть $q_i = (4x_i - 1)^2$. Тогда $x_i = \frac{-\sqrt{q_i} + 1}{4}$, если $x_i \leq \frac{1}{4}$;

в противном случае $x_i = \frac{\sqrt{q_i} + 1}{4}$. Без ограничения общности можно считать, что $x_1, \dots, x_d \leq \frac{1}{4},$

$x_{d+1}, \dots, x_k > \frac{1}{4}$. Тогда

$$2x_i - x_i^3 = \frac{1}{64} (31 - 3q_i \mp (29q_i^{1/2} - 3q_i^{3/2})),$$

и наши неравенства запишутся в виде

$$\sum_{i=1}^k q_i < k, \quad \sum_{i=1}^d (31 - 3q_i - 29q_i^{1/2} + 3q_i^{3/2}) + \sum_{i=d+1}^k (31 - 3q_i + 29q_i^{1/2} - 3q_i^{3/2}) < 0. \quad (1)$$

Функция $f_2(x) = 31 - 3x + 29x^{1/2} - 3x^{3/2}$, очевидно, выпукла вверх на области определения (каждое слагаемое выпукло вверх). Поэтому если $d \leq n - 2$ (т.е. во второй сумме в последнем неравенстве хотя бы два слагаемых), то q_{d+1} и q_{d+2} можно заменить на $q'_{d+1} = 0, q'_{d+2} = q_{d+1} + q_{d+2}$ (соответственно изменив x_i), тем самым уменьшив левую часть второго неравенства в (1) и не изменив сумму q_i . При этом $x'_d = \frac{1}{4}$, т.е. для нового набора значение d увеличилось на 1. Так можно продолжать, пока мы не получим $d \geq k - 1$. Заметим, что случай $d = k$ невозможен, так как тогда $2x_i - x_i^3 > 0$ при всех i . Значит, в новом наборе $d =$

$= k - 1$, и он по-прежнему удовлетворяет неравенствам (1).

Теперь, положив $\bar{q} = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d q_i$, получаем

$$\sum_{i=1}^d (31 - 3q_i - 29q_i^{1/2} + 3q_i^{3/2}) \geq d(31 - 3\bar{q} - 29\bar{q}^{1/2} + 3\bar{q}^{3/2})$$

согласно неравенству Йенсена, так как функция $f_1(x) = 31 - 3x - 29x^{1/2} + 3x^{3/2}$ выпукла вниз на области определения. Таким образом, если все числа q_1, \dots, q_d заменить на \bar{q} , то неравенства (1) будут выполнены (так как их сумма не изменится). Мы получили требуемый набор с $k - 1$ одинаковым числом $a = x_1 = \dots = x_{k-1}$ и одним числом $b = x_k$. При этом, очевидно, $a \leq \frac{1}{4}$; поскольку $2b - b^3 < 0$, то получаем $b > \sqrt{2}$.

2. Таким образом, осталось выяснить, при каком минимальном k существуют такие $a \leq \frac{1}{4}$, $b > \sqrt{2}$, что (здесь $d = k - 1$)

$$da^2 + b^2 < \frac{da + b}{2}, \quad da + b < \frac{da^3 + b^3}{2}.$$

Перепишем эти неравенства в виде

$$\frac{2b^2 - b}{a - 2a^2} < d < \frac{b^3 - 2b}{2a - a^3}. \quad (2)$$

Из (2) и вышесказанного следуют условия

$$\frac{b^3 - 2b}{2b^2 - b} > \frac{2a - a^3}{a - 2a^2}, \quad a \in \left[0; \frac{1}{4}\right], \quad b > \sqrt{2}. \quad (3)$$

Оценим, какое минимальное значение может принимать выражение

$$\frac{2b^2 - b}{a - 2a^2} \quad (4)$$

при условиях (3). Согласно (2), это и будет оценкой снизу для d .

Положим

$$g(x) = \frac{x^3 - 2x}{2x^2 - x} = \frac{x^2 - 2}{2x - 1} = \frac{1}{4} \left(2x + 1 - \frac{7}{2x - 1} \right).$$

Из последнего представления видно, что $g(x)$ возрастает на промежутках $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$ и $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Первое неравенство в (3) имеет вид $g(a) < g(b)$. Будем уменьшать b , пока не достигнем значения, при котором $g(b) = g(a)$. Так как $g(\sqrt{2}) = 0 < g(a)$, то новое значение будет больше $\sqrt{2}$. При этом, очевидно, (4) уменьшится.

Таким образом, мы можем считать, что

$$\frac{b^2 - 2}{2b - 1} = \frac{2 - a^2}{1 - 2a} = t.$$

Теперь a и b — два различных корня квадратного

уравнения $x^2 - 2 = t(2x - 1)$, поэтому

$$a + b = 2t \Rightarrow b = 2t - a = 2 \frac{2 - a^2}{1 - 2a} - a = \frac{4 - a}{1 - 2a}.$$

Выражение (4) принимает вид

$$h(a) = \frac{b(2b - 1)}{a(1 - 2a)} = \frac{7(4 - a)}{a(1 - 2a)^3}.$$

Чтобы найти его минимум на отрезке $a \in \left[0; \frac{1}{4}\right]$, найдем нули производной:

$$h'(a) = -\frac{7}{a(1 - 2a)^3} - \frac{7(4 - a)}{a^2(1 - 2a)^3} + \frac{42(4 - a)}{a(1 - 2a)^4} = \frac{14(-3a^2 + 16a - 2)}{a^2(1 - 2a)^4}.$$

На отрезке $\left[0; \frac{1}{4}\right]$ получаем $a_0 = \frac{8 - \sqrt{58}}{3}$, причем это — точка минимума. Подставив ее в наше выражение, получаем

$$d > h(a_0) = 514, \dots$$

Таким образом, $d \geq 515$, а $k \geq 516$.

3. Осталось построить пример для $d = 515$. Его легко получить из следующих соображений. Положим $a = a_0$,

$b = \frac{4 - a}{1 - 2a}$. Тогда

$$\frac{2b^2 - b}{a - 2a^2} = \frac{b^3 - 2b}{2a - a^3} = 514, \dots \quad (5)$$

Начнем увеличивать значение b , оставляя a неизменным. Тогда величина $g(b) = \frac{b^3 - 2b}{2b^2 - b}$, как мы выяснили, увеличивается; поэтому правое выражение становится больше, чем левое. Значит, настанет момент, когда правая часть (5) будет больше 515, а левая — по-прежнему меньше 515. Эти a и b будут удовлетворять (3), а значит, являться искомыми.

Можно предъявить и более простой пример. Возьмем $a = \frac{1}{8}$ (это число, довольно близкое к a_0). Соответствующее значение $b = \frac{4 - a}{1 - 2a} = \frac{31}{6}$, при этом

$$\frac{b^3 - 2b}{2a - a^3} = \frac{b(2b - 1)}{a(1 - 2a)} = \frac{13888}{27} = 514 \frac{10}{27}.$$

Увеличивая значение b , как и выше, получаем требуемый пример. Так, подходит значение $b = 5,169$.

И. Богданов

Ф2048. Материальная точка движется с постоянным ускорением. Ее координаты в начальный момент $(0, 0, 0)$, через 1 секунду после начала движения $(1, 1, 2)$, еще через секунду $(2, 3, 4)$. Какой угол составляет вектор начальной скорости точки с вектором ее ускорения?

По оси x точка движется равномерно, ее скорость вдоль этой оси равна $v_x = 1$ м/с. По оси z движение тоже

равномерное, но со скоростью $v_z = 2$ м/с. По оси y – придется посчитать.

Поскольку движение точки по условию равноускоренное, можно записать

$$1 = 0 + v_y \cdot 1 + \frac{a_y \cdot 1^2}{2},$$

$$3 = 0 + v_y \cdot 2 + \frac{a_y \cdot 2^2}{2},$$

где v_y – начальная скорость по оси y , $a = a_y$ – полное ускорение точки. Отсюда получаем

$$v_y = 0,5 \text{ м/с}, \quad a_y = 1 \text{ м/с}^2.$$

Теперь найдем угол между векторами начальной скорости и ускорения. Сложим векторно скорости по осям x и z , получим вектор длиной $\sqrt{5}$ м/с, перпендикулярный оси y . Отсюда легко найти угол φ между вектором начальной скорости и осью y :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sqrt{5}}{0,5} = 2\sqrt{5}, \text{ и } \varphi \approx 77,4^\circ.$$

А.Зильберман

Ф2049. В системе (рис.1) трения нет. Массы грузов на левом блоке M и $2M$, на правом блоке – $2M$ и $4M$. Найдите ускорение самого легкого груза при движении.

Силы натяжения кусков нитей, привязанных к грузам, одинаковы – ясно, что ускорения грузов массой $2M$ получаются одинаковыми. Направим все ускорения вверх (тогда проще написать без ошибок уравнения кинематических связей), обозначим ускорение груза массой M буквой a , грузов массой $2M$ – буквой b , груза массой $4M$ – буквой c , а натяжение кусков нитей, непосредственно привязанных к грузам, – буквой T (рис.2). Тогда

$$T - Mg = Ma,$$

$$T - 2Mg = 2Mb,$$

$$T - 4Mg = 4Mc,$$

$$a + b = -(b + c).$$

Отсюда легко найти силу натяжения нити:

$$T = \frac{16Mg}{9}$$

А.Блоков

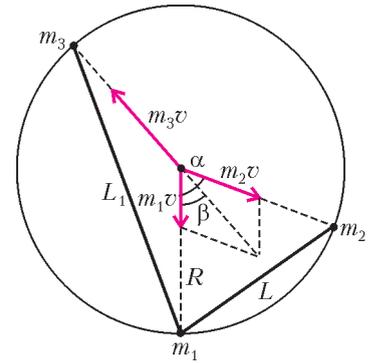
и ускорение самого легкого груза:

$$a = \frac{7g}{9}.$$

Ф2050. Снаряд, летевший вертикально, взорвался в верхней точке своей траектории, распавшись на три

осколками с массами $m_1 = 2m$, $m_2 = 3m$ и $m_3 = 4m$, которые полетели в разные стороны с одинаковыми начальными скоростями. Через некоторое время после взрыва расстояние между осколками с массами m_1 и m_2 оказалось равным L . Чему было равно в этот момент расстояние между осколками с массами m_1 и m_3 , если ни один из осколков еще не достиг земли? Влиянием воздуха и массой взрывчатого вещества снаряда пренебречь.

Перейдем в систему отсчета, падающую на землю с ускорением свободного падения g . В этой системе отсчета осколки после взрыва движутся в разные стороны равномерно и прямолинейно с одинаковыми скоростями, равными начальной скорости v , приобретенной в результате взрыва. Из закона сохранения импульса следует, что начальные скорости осколков лежат в одной плоскости. Следовательно, в рассматриваемой системе отсчета все осколки после взрыва снаряда в любой момент времени располагаются на окружности с центром в точке взрыва.



Изобразим эту окружность на рисунке, обозначив угол между направлениями разлета осколков с массами m_1 и m_2 через α , а осколков с массами m_1 и m_3 – через $\pi - \beta$. Рассмотрим положения осколков в момент времени, когда расстояние между первым и вторым осколками оказалось равным L . Тогда из рисунка следует, что

$$L = 2R \sin \frac{\alpha}{2}, \quad L_1 = 2R \sin \frac{\pi - \beta}{2} = 2R \cos \frac{\beta}{2},$$

где R – радиус изображенной окружности, L_1 – искомое расстояние между первым и третьим осколками.

Поскольку импульс рассматриваемой системы осколков сохраняется, из теоремы косинусов, примененной к треугольнику из векторов импульсов осколков, следует

$$(m_3 v)^2 = (m_1 v)^2 + (m_2 v)^2 - 2m_1 m_2 v^2 \cos(\pi - \alpha).$$

Отсюда, с учетом заданных соотношений между m_1 , m_2 и m_3 , находим

$$\cos \alpha = \frac{m_3^2 - m_1^2 - m_2^2}{2m_1 m_2} = \frac{1}{4},$$

т.е. угол разлета первых двух осколков составляет $\alpha \approx 75,5^\circ$. Из теоремы синусов, примененной к тому же треугольнику, получаем

$$\frac{m_2 v}{\sin \beta} = \frac{m_3 v}{\sin(\pi - \alpha)},$$

откуда

$$\sin \beta = \frac{m_2}{m_3} \sin \alpha = \frac{m_2}{m_3} \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{3\sqrt{15}}{16}, \text{ и } \cos \beta = \frac{11}{16}.$$

Используя тригонометрические формулы для половинного угла, найдем

$$\cos \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \beta}{2}} = \frac{3}{4} \sqrt{\frac{3}{2}} \text{ и}$$

$$\cos \alpha = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{L^2}{2R^2} = \frac{1}{4}, \text{ откуда } R = \sqrt{\frac{2}{3}} L.$$

Подставляя эти выражения в формулу для L_1 , получим ответ:

$$L_1 = \frac{3}{2} L.$$

А.Якута

Ф2051. По горизонтальному столу катится без проскальзывания велосипедное колесо. Его диаметр 1 м, масса 1 кг, скорость центра 1 м/с. В некоторый момент к колесу приклеился маленький кусочек жвачки массой 2 г, лежавший на столе. Скорость центра колеса теперь меняется. Оцените отличие минимальной скорости колеса от его начальной скорости.

Колесо движется без проскальзывания, следовательно, скорость нижней точки колеса нулевая. В этом случае в момент приклеивания кусочка жвачки никакого удара не происходит (диаметр колеса во много раз больше размера кусочка), механическая энергия системы остается неизменной. Минимальная скорость центра колеса получится в тот момент, когда кусочек окажется в верхней его точке. Если скорость центра колеса в этот момент v , то скорость кусочка будет $2v$. Запишем уравнение для энергии:

$$Mv_0^2 = Mv^2 + \frac{m(2v)^2}{2} + mg \cdot 2R.$$

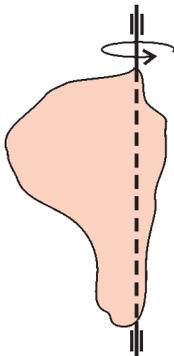
Здесь учтено, что кинетическая энергия колеса – тонкостенного цилиндра – складывается из кинетической энергии поступательного движения центра масс и энергии вращения относительно центра масс, в сумме получается Mv_0^2 или Mv^2 . Теперь найдем минимальную скорость центра колеса:

$$v = \sqrt{\frac{v_0^2 - 2mgR/M}{1 + 2m/M}} \approx 0,98 v_0.$$

Отличие минимальной скорости центра колеса от начальной составляет приблизительно 0,02 м/с.

Р.Колесов

Ф2052. Однородное плоское тело вращается относительно вертикальной оси, лежащей в плоскости тела (см. рисунок). Тело раскрутили до угловой скорости ω_0 и отпустили. На тело действует сила сопротивления воздуха такая, что избыточное давление пропорционально скорости v участка поверхности с коэффициентом k (т.е. $\Delta F = k\Delta S v$). Масса тела M , его «поперечная» площадь S . Сколько оборотов совершит тело до полной остановки?



Для решения можно использовать уравнения динамики вращающегося тела

(момент сил, угловое ускорение, момент инерции), но можно обойтись энергетическими соображениями: кинетическая энергия «съедается» силами сопротивления воздуха.

Рассмотрим силу сопротивления, действующую на маленький кусочек поверхности площадью ΔS , находящийся на расстоянии r от оси вращения при угловой скорости ω :

$$\Delta F = k\omega r \Delta S.$$

За очень малый интервал времени Δt эта сила совершит работу

$$F\omega r \Delta t = k\omega^2 r^2 \Delta S \Delta t.$$

Суммарная работа всех сил сопротивления при этом составит

$$k\omega^2 \Delta t \Sigma (r_i^2 \Delta S_i).$$

За это же время угловая скорость плоского тела уменьшится на некоторую малую величину $\Delta\omega$, а кинетическая энергия этого кусочка массой $m = M \Delta S/S$ уменьшится на

$$\frac{1}{2} m \omega^2 r^2 - \frac{1}{2} m (\omega - \Delta\omega)^2 r^2 = m \omega r^2 \Delta\omega = (M \Delta S/S) \omega r^2 \Delta\omega$$

(мы отбросили совсем малую величину, содержащую множитель $(\Delta\omega)^2$). Запишем в виде суммы полное изменение кинетической энергии тела за этот интервал времени:

$$(M/S) \omega \Delta\omega \Sigma (r_i^2 \Delta S_i).$$

Приравняем работу сил сопротивления изменению кинетической энергии (знак изменения мы уже учли):

$$k\omega^2 \Delta t \Sigma (r_i^2 \Delta S_i) = (M/S) \omega \Delta\omega \Sigma (r_i^2 \Delta S_i).$$

Слева и справа написаны одинаковые суммы, считать их не нужно, мы их просто сократим. В итоге получим

$$k\omega^2 \Delta t = (M/S) \omega \Delta\omega, \text{ или } k\Delta\varphi = (M/S) \Delta\omega.$$

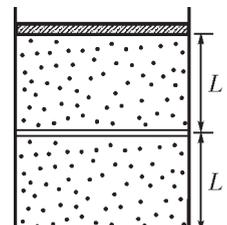
Мы видим, что угол поворота за некоторый интервал времени совсем просто связан с уменьшением угловой скорости за то же время. Тогда полный угол поворота до остановки будет $\varphi = \frac{M}{kS} \omega_0$, или в оборотах

$$n = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{M\omega_0}{2\pi kS}.$$

$$n = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{M\omega_0}{2\pi kS}.$$

А.Киселев

Ф2053. На столе стоит вертикальный теплоизолированный цилиндрический сосуд, в который вставлены два поршня (см. рисунок). Верхний поршень – тяжелый, теплонепроницаемый и может двигаться в цилиндре без трения. Нижний поршень – легкий и теплопроводящий, но между ним и стенками сосуда существует трение. В каждой из частей сосуда находится по ν молей идеального одноатомного газа. Вначале система находилась в тепловом равновесии, а обе части сосуда имели высоту L . Потом



систему медленно нагрели, сообщив ей количество теплоты ΔQ . На какую величину ΔT изменилась температура газов, если нижний поршень при этом не сдвинулся с места? При каком наименьшем значении силы трения F между нижним поршнем и стенками это возможно? Какова теплоемкость C системы в этом процессе? Теплоемкостью стенок сосуда и поршня пренебречь.

Обозначим через $V_1 = SL$ объем нижней части цилиндра, где S – площадь поршней, через p_0 – давление в верхней части цилиндра, через ΔV_2 – изменение объема верхней части цилиндра.

Сообщенное системе количество теплоты ΔQ идет на изменение внутренней энергии всего газа в сосуде:

$$\Delta U = 2\nu \cdot \frac{3}{2} R \Delta T$$

и на совершение работы:

$$A = p_0 \Delta V_2 = \nu R \Delta T.$$

Следовательно,

$$\Delta Q = \Delta U + A = 4\nu R \Delta T, \text{ и } \Delta T = \frac{\Delta Q}{4\nu R}.$$

Теплоемкость системы в этом процессе равна отношению сообщенного ей количества теплоты к изменению температуры:

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta T} = 4\nu R.$$

Поскольку объем нижней части сосуда постоянен, изменение давления Δp там определяется из соотношения $\Delta p V_1 = \nu R \Delta T$, откуда

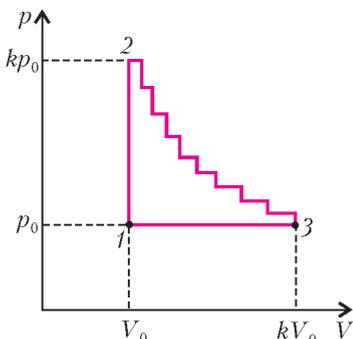
$$\Delta p = \frac{\nu R \Delta T}{V_1} = \frac{\Delta Q}{4V_1}.$$

Так как давление в верхней части сосуда постоянно и равно p_0 , а в нижней части сосуда давление вначале также было равно p_0 , то в конце нагрева разность давлений, оказываемых газами на нижний поршень, станет равной Δp . Чтобы поршень остался неподвижным, сила трения между ним и стенками сосуда должна быть не меньше

$$F = \Delta p S = \frac{\Delta Q}{4L}.$$

Д.Вагин, М.Семенов

Ф2054. Над ν молями идеального одноатомного газа проводят циклический процесс, график которого изображен на pV -диаграмме (см. рисунок). Цикл состоит из вертикального (1–2) и горизонтального (3–1) участков и «лестницы» (2–3) из n ступенек, на каждой из которых давление и объем газа изменяются в одно и то же число раз. Отношение максимального давления газа к минимальному равно k , отношение макси-



мального объема газа к минимальному также равно k . Найдите КПД тепловой машины, работающей по данному циклу.

Поскольку тепловая машина совершает за цикл положительную работу, рассматриваемый цикл проходит по часовой стрелке, в направлении 1–2–3–1. КПД этой тепловой машины равен отношению совершенной работы A к количеству теплоты Q_+ , полученному от нагревателей. Обозначим через p_0 и V_0 минимальные давление и объем газа, тогда максимальные давление и объем будут равны kp_0 и kV_0 соответственно. Заметим, что на горизонтальном участке ступеньки объем возрастает в $k^{1/n}$ раз, а на вертикальном участке давление уменьшается в такое же число раз.

В данном цикле газ получает тепло на участке 1–2, а также на горизонтальных участках лестницы 2–3. Количество теплоты, полученное на участке 1–2, равно изменению внутренней энергии газа:

$$Q_{12} = \frac{3}{2} kp_0 V_0 - \frac{3}{2} p_0 V_0 = \frac{3}{2} (k-1) p_0 V_0.$$

Далее, на i -м горизонтальном участке лестницы (i изменяется в пределах от 1 до n) газ расширяется от объема $V_0 k^{(i-1)/n}$ до $V_0 k^{i/n}$ при постоянном давлении $p_0 k^{1-(i-1)/n}$. При этом он совершает работу $\Delta A = kp_0 V_0 (k^{1/n} - 1)$, изменяет свою внутреннюю энергию на $\Delta U = 1,5 \Delta A$ и получает количество теплоты $\Delta Q = 2,5 \Delta A$. На вертикальных участках «лестницы» газ не совершает работы и отдает тепло. На участке 3–1 газ отдает тепло и совершает отрицательную работу $A_{31} = -(k-1) p_0 V_0$. Следовательно, суммарное количество теплоты, полученное от нагревателей, равно

$$Q_+ = Q_{12} + n \Delta Q = \frac{3}{2} (k-1) p_0 V_0 + \frac{5}{2} nk (k^{1/n} - 1) p_0 V_0,$$

а совершенная работа равна

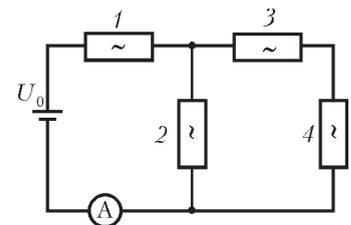
$$A = A_{31} + n \Delta A = -(k-1) p_0 V_0 + nk (k^{1/n} - 1) p_0 V_0.$$

Тогда искомым КПД цикла равен

$$\eta = \frac{A}{Q_+} = \frac{nk (k^{1/n} - 1) - (k-1)}{\frac{3}{2} (k-1) + \frac{5}{2} nk (k^{1/n} - 1)}.$$

О.Шведов

Ф2055. Электрическая цепь (см. рисунок) состоит из идеальной батарейки с ЭДС U_0 , идеального амперметра и четырех одинаковых нелинейных элементов, для каждого из которых, в отличие от закона Ома, связь силы тока I и напряжения U имеет вид $I = \alpha U^2$. Какой ток I_0 показывает амперметр?



Пронумеруем нелинейные элементы так, как показано на рисунке. Пусть U_2 – напряжение на нелинейном элементе 2, тогда на каждый из последовательно соеди-

ненных элементов 3 и 4 приходится напряжение $U_2/2$. Следовательно, сила тока, текущего через элемент 2, равна $I_2 = \alpha U_2^2$, а ток, текущий через элементы 3 и 4, равен $I_3 = \alpha U_2^2/4$. Поэтому сила тока, текущего через амперметр, батарейку и элемент 1, составляет $I_0 = I_2 + I_3 = 5\alpha U_2^2/4$. Напряжение на элементе 1 определяется из соотношения $U_1 = \sqrt{\frac{I_0}{\alpha}} = \frac{\sqrt{5}}{2} U_2$. Таким образом, напряжение на батарейке равно

$$U_0 = U_1 + U_2 = \left(1 + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) U_2, \text{ М М}$$

откуда находим

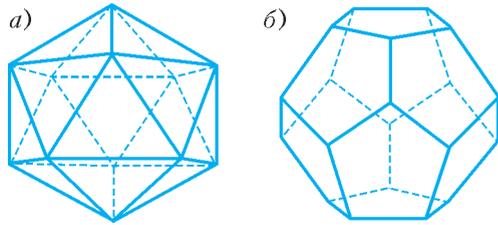
$$U_2 = \frac{U_0}{1 + \sqrt{5}/2},$$

и

$$I_0 = \alpha U_0^2 \frac{5/4}{(1 + \sqrt{5}/2)^2} = \alpha U_0^2 \frac{5}{9 + 4\sqrt{5}}.$$

Д.Харабадзе

Ф2056. Тридцать одинаковых резисторов сопротивлением R каждый соединены между собой в пространстве так, что они являются ребрами выпуклого правильного многогранника (см. рисунок): а) двадца-



тигранника (икосаэдра); б) двенадцатигранника (додекаэдра). Какое сопротивление будет представлять описанная выше система а) или б), если подключиться к паре ее наиболее удаленных вершин? Сколько разных значений сопротивления можно будет получить в случае а) и в случае б), если подключаться к всевозможным парам вершин этих многогранников? Справка: грани икосаэдра – это 20 правильных треугольников, в каждой из 12 вершин сходятся по 5 треугольников; грани додекаэдра – это 12 правильных пятиугольников, в каждой из 20 вершин сходятся по 3 пятиугольника.

Рассмотрим сначала икосаэдр. Из произвольной вершины икосаэдра выходят пять ребер, заканчивающихся в пяти вершинах, которые образуют правильный пятиугольник и соединены друг с другом пятью ребрами-перемычками. Назовем этот пятиугольник ближайшим к исходной вершине слоем. Следующими по удаленности от исходной вершины идут пять вершин с пятью перемычками, также образующие правильный пятиугольник, равный предыдущему и лежащий в следующем, втором слое, параллельном первому. Из каждой вершины первого слоя выходят и в каждую вершину второго слоя входят по два ребра, соединяющих первый слой со вторым, – всего десять ребер. И,

наконец, самая дальняя вершина, равноудаленная от пяти вершин второго слоя, соединена с ними пятью ребрами. Общую систему вершин икосаэдра, таким образом, можно представить в виде двух правильных пятиугольных пирамид, высоты которых лежат на общей прямой, а основания параллельны и повернуты друг относительно друга на угол 36° . Поэтому при подключения источника питания к паре наиболее удаленных вершин пять вершин первого слоя будут электрически эквивалентны, т.е. будут иметь один и тот же потенциал, и их можно накоротко соединить друг с другом. Пять вершин второго слоя также будут иметь один и тот же потенциал, отличный от потенциала вершин первого слоя, и их тоже можно закоротить. Следовательно, эквивалентная схема в этом случае состоит из пяти соединенных параллельно резисторов, к которым присоединены последовательно сначала десять параллельных резисторов (из ребер-резисторов икосаэдра, соединяющих два слоя), а потом еще пять параллельных резисторов. Поэтому искомое сопротивление будет равно

$$R_{\text{общ}} = \frac{R}{5} + \frac{R}{10} + \frac{R}{5} = \frac{R}{2}.$$

Теперь рассмотрим в этом же ключе додекаэдр и будем стартовать от какой-нибудь его вершины, подключив к ней один из контактов источника питания. Ближайшими соседями этой вершины окажутся три вершины первого эквипотенциального слоя, с которыми она связана напрямую тремя выходящими из нее ребрами. Из каждой вершины этого слоя выйдут по два ребра (всего в каждой вершине соединяются три ребра), попадающих в шесть вершин следующего, второго эквипотенциального слоя. Из этих шести вершин выйдут двенадцать ребер, при этом шесть идут к следующему, третьему слою, состоящему опять-таки из шести вершин, а другие шесть ребер замыкаются парами, образуя три перемычки между предыдущими шестью эквипотенциальными вершинами второго слоя. Из каждой вершины третьего слоя выйдут по два ребра, из них одно замыкается парой с ребром от соседней вершины этого слоя, а второе идет к одной из трех вершин следующего, четвертого слоя, к каждой из которых приходят по два ребра из вершин третьего слоя. Из трех вершин четвертого слоя выйдут три оставшихся ребра, которые встречаются в последней из 20 вершин – той наиболее удаленной, к которой подключается второй контакт источника. Таким образом, из условий геометрической и физической симметрии наша цепь будет эквивалентна последовательному соединению пяти пучков параллельно соединенных резисторов: сначала трех, потом шести, затем снова шести (из-за исключенных шести перемычек), потом опять шести и, наконец, трех. Отсюда получаем, что искомое сопротивление будет равно

$$R_{\text{общ}} = \frac{R}{3} + \frac{R}{6} + \frac{R}{6} + \frac{R}{6} + \frac{R}{3} = \frac{7}{6} R.$$

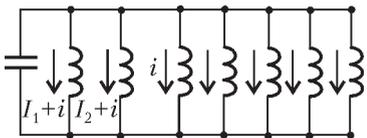
Для ответа на второй вопрос надо подсчитать, через

какое минимальное количество ребер соединяются наиболее удаленные вершины многогранников. В случае а) таких ребер, очевидно, три, и в силу симметрии возможны лишь три разных значения сопротивления: между соседними вершинами, через одну и через две (как раз между наиболее удаленными вершинами). В случае б) таких ребер пять, и возможны лишь пять разных значений сопротивления: между соседними вершинами, через одну, через две, через три и через четыре (между наиболее удаленными вершинами).

С.Кротов

Ф2057. Конденсатор емкостью C и две одинаковые катушки индуктивностью L каждая соединены параллельно и подключены к внешней цепи. В некоторый момент конденсатор не заряжен, а токи катушек равны I и $2I$. В этот момент очень быстро параллельно подключают еще пять таких же катушек, а внешнюю цепь отключают. Найдите максимальное значение заряда конденсатора и максимальное значение силы тока через катушку номер 7 (последняя из подключенных катушек). Элементы цепи считайте идеальными.

ЭДС индукции всех параллельно соединенных катушек одинаковы в любой момент, при одинаковых индуктивностях это приводит к тому, что все изменения токов катушек одинаковы. Условно направим все токи в одну сторону (см. рисунок), обозначим ток одной из позже подключенных катушек i , тогда ток первой катушки $I_1 + i$ а ток второй катушки $I_2 + i$. При решении придется учитывать два возможных случая – в начальный момент токи первой и второй катушек направлены в одну сторону, например вниз, как на рисунке, или направлены в



одной из позже подключенных катушек i , тогда ток первой катушки $I_1 + i$ а ток второй катушки $I_2 + i$. При решении придется учитывать

два возможных случая – в начальный момент токи первой и второй катушек направлены в одну сторону, например вниз, как на рисунке, или направлены в

разные стороны, например вверх и вниз. Удобно уже в ответе подставить в формулу выбранные значения. В тот момент, когда заряд конденсатора Q максимален, сумма токов должна обратиться в ноль:

$$(I_1 + i) + (I_2 + i) + 5i = 0, \text{ откуда } i = -\frac{I_1 + I_2}{7}.$$

Теперь запишем закон сохранения энергии:

$$\frac{LI_1^2}{2} + \frac{LI_2^2}{2} = \frac{L(I_1 + i)^2}{2} + \frac{L(I_2 + i)^2}{2} + \frac{5Li^2}{2} + \frac{Q^2}{2C}.$$

После простых преобразований получаем уравнение

$$\frac{Q^2}{LC} + 7i^2 + 2(I_1 + I_2)i = 0.$$

Рассмотрим случай однонаправленных токов. Тогда

$$i = -3I_1/7 = -3I/7, \quad I_2 = 2I_1 = 2I, \text{ и } Q = I\sqrt{\frac{9LC}{7}}.$$

(Для второго случая все делается так же, но $I_2 = -2I_1$.) Теперь найдем максимальный ток через седьмую катушку. Заряд конденсатора в этот момент равен нулю, и можно воспользоваться законом сохранения энергии для магнитных полей катушек:

$$\frac{LI_1^2}{2} + \frac{LI_2^2}{2} = \frac{L(I_1 + i')^2}{2} + \frac{L(I_2 + i')^2}{2} + \frac{5Li'^2}{2}$$

(тут i' не такой, как в первом случае!). Отсюда

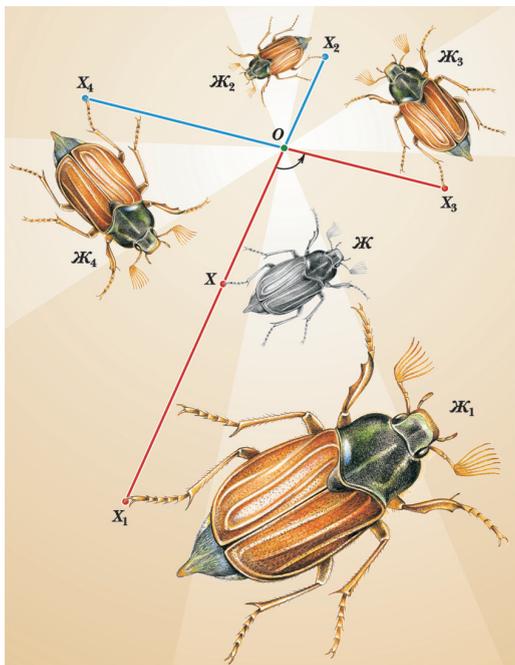
$$7i'^2 + 2(I_1 + I_2)i' = 0,$$

и для случая однонаправленных токов находим

$$i' = -\frac{6I}{7}.$$

(Впрочем, если учесть нулевой начальный ток через дополнительные катушки и характер возникающих колебаний, то этот ответ можно написать сразу.)

З.Рафаилов



Вниманию наших читателей!

Издательство «Росмэн» выпустило в свет том «Математика. Информатика» серии «Современная иллюстрированная энциклопедия». Книга состоит примерно из 2000 статей практически по всем разделам математики и информатики. Многие статьи великолепно иллюстрированы и доступны широкому кругу читателей. Приятно отметить, что среди авторов статей есть и авторы журнала «Квант».

Изображение жука (Ж) и его образы при гомотетиях ($Ж_1, Ж_2$) и поворотных гомотетиях ($Ж_3, Ж_4$). (Поворотная гомотетия – это композиция поворота и гомотетии с общим центром O .)

Задачи

1. В Солнечном городе образованы три партии коротышек: винтиков, шпунтиков и болтиков. Оказалось, что для любых трех членов партий найдется партия, в которую входят по крайней мере двое из них. Верно ли, что все члены одной из партий являются членами какой-то из двух других партий?

Д.Калинин



2. Для любых неотрицательных чисел a, b справедливо неравенство

$$(a^2 + b^2)^3 \geq (a^3 + b^3)^2.$$

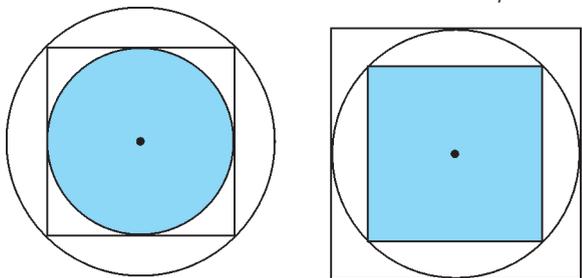
Докажите это.

В.Сендеров



3. В круг площади 1 вписали квадрат, а в него — новый круг, который закрасили в синий цвет. Затем в квадрат площади 1 вписали круг, а в него — квадрат, который закрасили в синий цвет. Чья площадь больше: синего круга или синего квадрата?

В.Произолов



Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6 – 8 классов.

4. Колонна солдат-новобранцев выстроилась несколькими одинаковыми шеренгами, составляющими прямоугольник. По команде «смирно» некоторые из солдат с перепугу сделали поворот направо, некоторые — налево, другие — кругом, а кое-кто вообще остолбенел и остался неподвижен. Далее через каждую секунду происходит следующее: каждый новобранец, оказавшийся лицом к лицу с другим солдатом, делает поворот направо.

а) Докажите, что рано или поздно такие повороты прекратятся.

б) Прекратятся ли повороты, если поворачиваются не оба солдата, оказавшиеся лицом к лицу, а только один из них?

И.Акулич



5. Числа от 1 до 9 расставьте в кружки фигуры так, чтобы сумма трех чисел, расположенных в кружках-вершинах всех белых треугольников, была одной и той же, а во всех зеленых — тоже одной и той же, но на 3 больше.

Н.Авилов

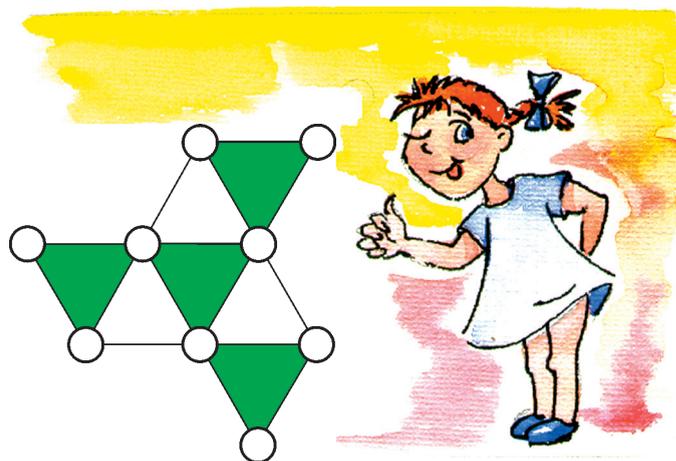


Иллюстрация Д.Гришуковой

Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»

Мы продолжаем очередной конкурс по решению математических задач для учащихся 6–8 классов. Решения задач высылайте в течение месяца после получения этого номера журнала по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64–А, «Квант» (с пометкой «Конкурс «Математика 6–8»). Не забудьте указать имя, класс и домашний адрес.

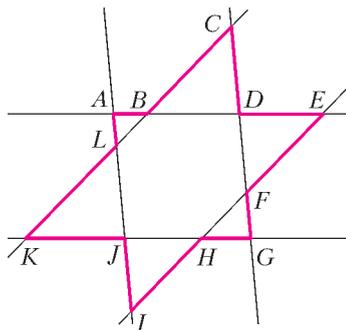
Как и прежде, мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и математических кружков. Руководителей кружков просим указать электронный адрес или контактный телефон. По традиции, кружки-победители заочного конкурса приглашаются на финальный очный турнир.

6. Взавшись за руки, 64 танцора водят 4 круговых хоровода с общим центром. В одном хороводе участвуют 16 человек – 8 мальчиков и столько же девочек. Хороводы вращаются равномерно, так что в каждый из 16 одинаковых секторов круга в такт танца попадают 4 танцора – по одному из каждого хоровода. Можно ли распределить мальчиков и девочек таким образом, что в каком бы направлении хороводы ни кружили, в любой такт танца нашелся сектор, содержащий 4 мальчика?

К.Каибханов

7. Может ли сумма квадратов трех последовательных целых чисел быть кубом целого числа?

В.Сендеров



8. Назовем полосой ширины a часть плоскости между двумя параллельными прямыми с расстоянием a между ними. Три полосы одинаковой ширины в пересечении образуют звездчатый шестиугольник $ABCDEFGHIJKL$. До-

кажите, что в одной точке пересекаются следующие отрезки:

- а) AG , CI и EK ;
- б) AG , BH и FL ;
- в) CI , BH и DJ ;
- г) EK , DJ и FL .

И.Акулич

9. Первые 100 натуральных чисел написаны так, что из каждой пары чисел с суммой 101 одно число написано красными чернилами, а другое – синими, при этом сумма всех красных чисел равна сумме всех синих. Весом числа любого цвета назовем количество чисел другого цвета, которые меньше этого числа. Докажите, что сумма квадратов весов красных чисел равна сумме квадратов весов синих чисел.

В.Произволов

10. В каждую клетку квадратной таблицы $n \times n$ записывают некоторое действительное число, при этом сумма всех чисел в любом квадрате 3×3 отрицательная, а в любом квадрате 5×5 – положительная. Существует ли такая таблица для

- а) $n = 6$;
- б) $n = 7$?

Д.Левин, П.Самовол

Три орешка путешествующего математика

Н. ШИЛОВ

ЧЕМ ЗАНИМАЮТСЯ МАТЕМАТИКИ ВО ВРЕМЯ НАУЧНЫХ командировок? Чаще всего они знакомятся с новыми научными результатами и – что еще важнее! – с новыми методами получения новых научных результатов.

Ну, а чем занимаются математики, пока они собираются в командировку, летят в самолетах или едут в

поездах? Я, например, придумываю задачи и очень надеюсь, что кому-нибудь будет интересно их решить. Из последней поездки из Новосибирска во Франкфурт я вернулся с тремя новыми «орешками»-задачками. Попробуйте их раскусить!

Во всех задачах мы будем считать, что наша родная планета Земля – шар.

Первый орешек

На плоскости кратчайшее расстояние между двумя точками — это отрезок прямой, соединяющей эти точки, а на сфере (поверхности шара) — это отрезок дуги большого круга, соединяющей эти точки. Однако пассажирские самолеты от пункта вылета до пункта назначения летят не по дуге большого круга, а по некоторой ломаной линии. В первом приближении можно считать, что эта линия состоит из дуг окружностей, соединяющих соседние наземные диспетчерские пункты. Такие пункты находятся в крупных аэропортах. А крупные аэропорты «привязаны» к большим городам. Ну, а большие города расположены на Земле вовсе не в строгом геометрическом порядке.

Предположим, что на идеально круглой Земле диспетчерские пункты расположены очень равномерно. Например, так. Выберем 24 меридиана через 15° друг от друга. Вдоль каждого меридиана поставим диспетчерские пункты через 15° от экватора до каждого из полюсов.

Вопрос 1. Сколько диспетчерских пунктов окажется на Земле? Сколько получится участков, соединяющих соседние диспетчерские пункты вдоль параллелей и меридианов?

Второй орешек

Как только математик справится с этим заданием, он задумается над планами дальнейших путешествий. Пусть в таком идеальном мире пассажирские самолеты летают от пункта вылета до пункта назначения не «напрямик» по дуге большого круга, а только по ломаной линии, состоящей из участков (дуг окружностей), соединяющих два соседних диспетчерских пункта вдоль одной параллели или одного меридиана. Другими словами, самолет может менять направление только над диспетчерскими пунктами.

Вопрос 2. Можно ли облететь всю Землю, т.е. пролететь над всеми диспетчерскими пунктами, так, чтобы пролететь по каждому участку и только один раз? Если такое путешествие осуществимо, то имеет ли значение, откуда его начинать?

Вопрос 3. Можно ли облететь всю Землю так, чтобы пролететь над каждым диспетчерским пунктом и только один раз? Если такое путешествие осуществимо, то имеет ли значение, откуда его начинать?

Третий орешек

Пожалуй, этот орешек самый трудный, но он дает представление о тех проблемах, с которыми имеет дело современная прикладная математика.

Вопрос 4. Пусть заданы два произвольных диспетчерских пункта своими координатами, например пункт А (30° северной широты, 60° восточной долготы) и пункт Б (75° северной широты, 75° западной долготы). Как найти маршрут перелета из первого пункта во второй наименьшей длины, и какой она будет? (Считайте, что радиус Земли равен 6400 км.)

Как расщелкать первый орешек

Вдоль каждого меридиана располагается 13 диспетчерских пунктов: 2 на полюсах и еще 11 на других

широтах. Но если просто умножим это число 13 на число меридианов 24, то диспетчерские пункты на полюсах будут посчитаны 24 раза вместо одного. Поэтому надо умножить количество 11 диспетчерских пунктов на других широтах на число меридианов 24 и к результату добавить 2 диспетчерских пункта на полюсах: $11 \times 24 + 2 = 266$ диспетчерских пунктов.

Число участков, соединяющих соседние диспетчерские пункты вдоль параллелей или меридианов, можно подсчитать разными способами. Например, так. Вдоль каждого меридиана располагается 12 участков. Поэтому число участков вдоль всех меридианов равно $12 \times 24 = 288$. Вдоль каждой из параллелей располагается 24 участка. Так как таких параллелей 11, то число участков вдоль параллелей равно $11 \times 24 = 264$. Поэтому общее число участков между соседними диспетчерскими пунктами равно $288 + 264 = 552$.

Но есть и другой способ подсчитать число участков. Назовем *степенью* диспетчерского пункта число участков, которые «начинаются» в этом пункте. Тогда все 264 пункта, кроме двух полярных, имеют степень 4, а два полярных пункта имеют степень 24 каждый. Так как каждый участок между соседними пунктами вносит «вклад» по единице в степень двух пунктов, расположенных по концам участка, то можно заметить, что сумма степеней вообще всех пунктов равна удвоенному числу всех участков. Но сумму степеней всех пунктов найти легко: она равна $4 \times 264 + 24 \times 2 = 1056 + 48 = 1104$. Поэтому число участков равно $1104/2 = 552$, что совпадает с результатом непосредственного подсчета.

Как расщелкать второй орешек

Ответ на вопрос 2. Такое путешествие осуществимо, и начать его можно из любого пункта.

Но сначала разберемся с возможным маршрутом такого путешествия, начинающегося и заканчивающегося на Северном полюсе.

Если начинать путешествие на Северном полюсе, то, можно, например, «спуститься» до Южного полюса по первому меридиану, потом — «подняться» от Южного полюса к Северному полюсу по второму меридиану. Затем повторить эти спуски и подъемы на следующих меридианах вплоть до двадцать второго. Осталось пролететь только те участки, которые расположены вдоль двух последних меридианов, и все участки вдоль параллелей. Это можно сделать так, как схематично показано на рисунке 1. Таким образом на Северном полюсе будет завершен облет Земли, который прошел по всем участкам ровно один раз.

Описанный маршрут называется *циклом*, так

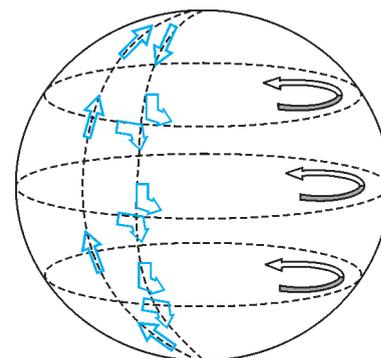


Рис. 1

(Продолжение см. на с. 34)